

УДК 519.6

# МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И ЧИСЛЕННЫЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ПРОЦЕССА РАСПРОСТРАНЕНИЯ ПЫЛЕВЫХ И МЕЛКОДИСПЕРСНЫХ АЭРОЗОЛЕЙ В АТМОСФЕРЕ

*Таштемирова Н.*

nodira3110@mail.ru

Научно-исследовательский институт развития цифровых технологий  
и искусственного интеллекта,  
100125, Узбекистан, г. Ташкент, Мирзо-Улугбекский р-он, м-в Буз-2, д. 17А.

Загрязнение окружающей среды является одной из важнейших проблем современности, поскольку вызывает ухудшение здоровья людей, деградацию флоры и фауны, а также угнетение растительности. Для изучения и прогнозирования процесса распространения вредных веществ в приземном слое атмосферы разработана математическая модель, учитывающая: убыль концентрации загрязняющих веществ в атмосфере за счет разложения и фотохимической трансформации; изменение розы ветров во времени и в зависимости от орографии местности; изменение коэффициента диффузии и коэффициента турбулентного перемешивания по вертикали при устойчивой и неустойчивой стратификации. Модель основана на основных законах гидромеханики, таких как сохранение массы, количества движения и импульса. Кроме того, используется методика расчета, которая учитывает гидродинамические факторы погоды и климата, такие как захват аэрозольных частиц растениями, взаимодействие с землей, изменение скорости и направления ветра, а также коэффициента турбулентности по высоте и горизонтали. Для обеспечения высокого порядка точности и устойчивости разностных схем применяется полунеявная конечно-разностная схема и метод “прямых” для интегрирования поставленной задачи.

**Ключевые слова:** скорость и направление ветра, убыль концентрации загрязняющих веществ, скорость осаждения, метод прямых, полунеявная разностная схема.

**Цитирование:** *Таштемирова Н.* Математическая модель и численный алгоритм для исследования процесса распространения пылевых и мелкодисперсных аэрозолей в атмосфере // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2025. – № 1(63). – С. 57-76.

## 1 Введение

Как показала практика строительство и запуск промышленных объектов без учета санитарной нормы атмосферного бассейна также нарушает дисбаланс региона и прилегающий к ней территории приводит к негативным последствиям. Задача об оценке загрязнения атмосферы и подстилающей поверхности загрязняющими веществами, размещения промышленных предприятий с соблюдением санитарных норм, определения количества взвешенных частиц над регионом, выпавших частиц на подстилающую поверхность и прогнозирования распространения их в окружающую среду и приземном слое атмосферы являются актуальными проблемами охраны окружающей среды.

Для решения текущих проблем требуется эффективные математические модели с учётом изменения гидродинамических факторов, на основе которых создадутся вычислительные алгоритмы и программные средства. Результативное решение этих

задач способствует формированию новых представлений в научных аспектах исследования экосистем.

Как нам известно, в окружающую среду большая часть вредных загрязняющих веществ поступают через атмосферу, на распространение которых оказывают воздействие орографические особенности местности, метеорологические условия, в первую очередь ветер и температурная стратификация. Для оценки и прогнозирования метеорологических ситуаций и экологического состояния территорий данных наблюдений часто бывает недостаточно. На основе этого применение методов математического моделирования является одним из эффективных средств изучения и прогноза атмосферных циркуляций и расчета переноса загрязняющих примесей в атмосфере [1]. Метеорологические условия значительно влияют на накопление и рассеивание загрязняющих веществ в городах и промышленных зонах. Основные факторы – скорость и направление ветра, температура, влажность – определяют концентрации примесей в воздухе. При одинаковых выбросах загрязнение воздуха может существенно различаться из-за погодных условий [2].

Автор [3] изучил влияние метеорологических параметров на распространение вредных частиц выброшенные автомобильными транспортом на небольшие расстояния, в котором определено наиболее значимость ветра и относительной влажности, а также характер воздушных масс. Направление ветра влияет на суточные изменения  $CO$ ,  $PM_{10}$ ,  $SO_2$  и  $NO_2$ ; при слабом ветре автомобильные загрязнители достигают высокую концентрацию; увеличение  $PM$  в воздухе происходит при высоких скоростях ветра способствующее поднятию пыли, песка. Ветер и влажность играют решающую роль в распространении загрязняющих веществ, причем слабый ветер способствует их накоплению, а высокая влажность – вертикальному перемещению. Вторичные загрязнители, такие как озон, формируются более активно при низкой влажности и высокой температуре [4].

В работе [5] рассмотрены источники влаги в выбросах дымовых газов от угольной электростанции и влияние дымовых газов высокой влажности на окружающую среду. Выбросы дымовых газов с высокой влажностью увеличивают общую влажность в нижних слоях атмосферы, что препятствует рассеиванию загрязняющих веществ и может даже оказывать влияние на локальный климат вблизи электростанции. Высокая влажность неблагоприятно сказывается на рассеивании загрязняющих веществ, в частности является одним из важных факторов, вызывающих длительное смоговое загрязнение. Она приводит к вторичному превращению атмосферных загрязнителей, активизирует образование аэрозолей и способствует их увлажнению, что ухудшает атмосферную видимость.

В исследовании [6] изучены характеристики загрязнения воздуха синоптической циркуляции в мегаполисе Пекин. Анализ взаимосвязи между схемой циркуляции и качеством воздуха в период контроля выбросов показывает, что 9 типов погодной циркуляции (ПЦ) являются основными факторами суточных колебаний концентраций загрязняющих веществ над Пекином и его окрестностями.

Метеорологические условия оказывают существенное влияние на концентрацию и распространение загрязняющих веществ в атмосфере. Среди них температура воздуха и локальные ветровые условия играют ведущую роль, в то время как относительная влажность и атмосферное давление оказывают менее значительное влияние [7]. Климатические факторы также влияют на производительность фотоэлектрических модулей: температура, влажность, скорость ветра и накопление пыли могут снижать их эффективность. При этом само изменение климата влияет на уровень пылевого

загрязнения [8]. Исследования [9] показывают, что скорость ветра и наличие зданий существенно изменяют структуру воздушных потоков, что сказывается на транспортировке загрязняющих веществ. Температурная стратификация играет решающую роль в формировании вихревых потоков в уличных каньонах и определяет направление и интенсивность переноса загрязнителей. В нестабильных условиях турбулентность усиливается, что способствует рассеиванию загрязняющих веществ, в то время как в стабильных условиях их концентрация увеличивается из-за замедленного обмена воздуха. Анализ показал, что турбулентные потоки на верхних плоскостях зданий способствуют дисперсии загрязняющих веществ, а их поперечный перенос преимущественно определяется конвективными процессами. В целом, турбулентность играет ведущую роль в рассеивании загрязнителей, однако при определенных условиях возможна их аккумуляция в уличных каньонах и подветренных зонах.

В работе [12] исследована взаимосвязь между атмосферной стабильностью, уровнем загрязнения воздуха и распространением COVID-19, в результате определено, что в городах с низкой скоростью ветра и высокой атмосферной стабильностью загрязняющие вещества, такие как озон ( $O_3$ ) и твердые частицы (PM), плохо рассеиваются. Атмосферная стабильность и плохое рассеивание загрязняющих веществ могут усугублять распространение COVID-19, что делает учет экологических факторов важным для общественного здравоохранения.

В работе [13] описано влияние основных факторов на рассеивание примесей в условиях непрерывных и нестабильных выбросов. Показано, что наибольшее влияние на распределение концентрации опасных веществ в атмосферном воздухе оказывают: характеристики источника (тип источника, режим и условия выброса), метеорологические характеристики, характеристики загрязняющего вещества, характеристики земной поверхности прилегающей территории.

Ли Чжао и др. [14] представили временной ряд мониторинга массовых концентраций концентраций PM<sub>2.5</sub> внутри и снаружи помещения в естественно проветриваемом офисном здании с закрытыми окнами. По результатам анализа определено тесная связь скорости ветра и относительной влажности для внутреннего и внешнего соотношения, а влияние температуры наружного воздуха на это соотношение практически незначительно.

Авторами [15] определено, что относительная влажность способствует увеличению концентрации частиц в атмосфере, которое происходит при естественном осаждении твердых частиц, поскольку частицы влаги сцепляются с PM. В суточном временном масштабе температура показывает отрицательную корреляцию с твердыми частицами.

Работа [16] показывает, что при низких скоростях ветра наблюдались более высокие значения взвешенных частиц PM<sub>10</sub>, а также смещение загрязняющих веществ в соответствии с текущим направлением ветра или их локальное сохранение в течение более длительного времени на одной территории.

Авторы [17] рассмотрели разные факторы распространения загрязняющих веществ в пограничном слое атмосферы, где внимание уделено физическим свойствам вредных мелкодисперсных частиц. Подчеркивают, что на распространение загрязняющих веществ существенно влияют адвекция, турбулентное перемешивание и диффузия, имеет важность тип пограничного слоя, а в работах [18, 19] представлена математическая модель распространения вредных веществ в пограничном слое атмосферы с учетом рельефа местности и особенностей подстилающей поверхности, выраженная с помощью системы дифференциальных уравнений в частных произ-

водных и соответствующих им начальное и граничные условия. Уравнения движения многокомпонентного воздуха, уравнения для расчета давления и тепловой поток для газа и конденсата.

Автор [20] обсуждает, обобщает личный и других опыт применения различных методов прогнозирования процесс переноса и диффузия загрязняющих веществ в пограничном слое атмосферы таких, как методы Эйлера-Эйлера и Эйлера-Лагранжа. Рассмотренные тематические исследования представляют перенос аэрозолей над океанами, рассеивание загрязняющих веществ в приземном слое атмосферы, воздействие гидрометеоров на городские пологи.

В статье [21] рассматривается острая проблема рассеивания вредных примесей в атмосферы промышленных объектов с учетом точечных источников и факторов фотохимические изменения. Сопряженные уравнения используются для усвоения данные о загрязнителях в правую часть уравнений переноса. Граничные условия основаны на глобальных моделях, таких как исследования и прогнозирование погоды (WRF) и система комплексного моделирования состава атмосферы (SILAM), адаптированные к уникальным характеристикам загрязняющих веществ промышленного города.

В работах [22–24] изучено осаждение частиц в атмосфере и приведен анализ как ламинарных, так и турбулентных процессов переноса частиц, с акцентом на физические механизмы их движения. Учтены различные факторов осаждения, таких как броуновская и турбулентная диффузия, гравитация, термофорез, турбофорез и электрические силы.

Как показывает реальность, при анализе функционирования и прогнозирования процесса распространения вредных веществ в атмосфере необходимо: во-первых, учитывать изменение скоростей перемещения аэрозольных выбросов в атмосфере по трем направлениям, то есть по вертикали, по направлению скорости потока и отклоняющий от них со временем; во-вторых, изменение коэффициента диффузии и коэффициента турбулентного перемешивания по вертикали при устойчивой и неустойчивой стратификации; в третьих, изменения роза ветров со временем и в зависимости от орографии местности; в четвертых, учет фазового перехода субстанции за счет изменения температурного режима в слоях атмосферы и место нахождения аэрозольных источников.

С целью учета указанных выше факторов для прогнозирования и предотвращение от нежелательных экологических последствий рассматриваемого региона, необходимо создать эффективный инструмент математическую модель (ММ) и численный алгоритм, реализуемый в виде программно-инструментального комплекса для проведения вычислительного эксперимента на ЭВМ.

## 2 Постановка задачи

Для исследования и прогнозирования процесса распространения, аэрозольных выбросов в атмосферу с учетом указанных выше факторов разработана математическая модель и численный алгоритм распространения вредных веществ в атмосфере описываемые уравнением переноса и диффузии, основанная на законе сохранения массы, количества движения с учетом основного фактора убыль концентрации загрязняющих веществ в атмосфере за счет разложения и фотохимической трансфор-

мации:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \theta(x, y, z, t)}{\partial t} + u \frac{\partial \theta(x, y, z, t)}{\partial x} + v \frac{\partial \theta(x, y, z, t)}{\partial y} (w - w_g) \frac{\partial \theta(x, y, z, t)}{\partial z} + \\ & + (\sigma + \alpha + \Phi_r) \theta(x, y, z, t) = \mu \left( \frac{\partial^2 \theta(x, y, z, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta(x, y, z, t)}{\partial y^2} \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \left( \varkappa(z) \frac{\partial \theta(x, y, z, t)}{\partial z} \right) + Q(x, y, z, t) \end{aligned} \quad (1)$$

с начальными и краевыми условиями:

$$\theta(x, y, z, 0) = \theta_0(x, y, z); \text{ при } t = 0; \quad (2)$$

$$\begin{cases} u \frac{\partial \theta(x, y, z, t)}{\partial x} = \eta_1(\theta(x, y, z, t) - \theta_v(x, y, z, t)); \text{ при } x = 0, \\ -u \frac{\partial \theta(x, y, z, t)}{\partial x} = \eta_2(\theta(x, y, z, t) - \theta_v(x, y, z, t)); \text{ при } x = L_x, \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} v \frac{\partial \theta(x, y, z, t)}{\partial y} = \eta_3(\theta(x, y, z, t) - \theta_v(x, y, z, t)); \text{ при } y = 0, \\ -v \frac{\partial \theta(x, y, z, t)}{\partial y} = \eta_4(\theta(x, y, z, t) - \theta_v(x, y, z, t)); \text{ при } y = L_y, \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \varkappa(z) \frac{\partial \theta(x, y, z, t)}{\partial n} &= -\varpi_g \sin \varsigma \theta(x, y, z, t) + \\ &+ \beta \theta(x, y, z, t) - f_0(x, y, z, t); \text{ на } G_{pz}, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\varkappa(z) \frac{\partial \theta(x, y, z, t)}{\partial z} = 0; \text{ на } L_z, \quad (6)$$

которая решается в области  $D = (0 < x < L_x; 0 < y < L_y; 0 < z < L_z; t > 0)$ .

Здесь  $\theta(x, y, z, t)$  – количество распространяющегося вещества,  $t$  – время,  $x, y, z$  – координаты,  $u, v, w$  – составляющие скорости ветра по направлениям  $x, y, z$  соответственно,  $w_g$  – скорость осаднения частицы,  $\varpi_g$  – скорости прилипания частиц на поверхности земли,  $\varkappa$  – коэффициент турбулентного перемешивания,  $\nu$  – коэффициент диффузии,  $\alpha, \sigma$  – соответственно коэффициент захвата частиц растительностью и поглощения в атмосфере за счет влаги,  $\varsigma$  – угол наклона поверхности земли,  $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$  – параметры для приведение граничных условий в размерный вид,  $\beta$  – коэффициент взаимодействия с подстилающей поверхностью,  $Q(x, y, z, t)$  – суммарная мощность источников,  $f_0(x, y, z, t)$  – количество аэрозольных частиц отрывающиеся от шероховатости земной поверхности в результате роста скоростей воздушной массы атмосферы на шероховатую поверхность земли,  $\Phi_r$  – убыль концентрации загрязняющих веществ в атмосфере за счет разложения и фотохимической трансформации.

Из краевых условий (3)-(4) следует, что происходит обмен концентраций взвешенных частиц в атмосфере на границах, а граничное условие (6) означает, что за пределами высоты  $z = L_z$  не происходит перенос и диффузия аэрозольных выбросов в атмосфере.

Обмен концентраций аэрозолей между приземным слоем и атмосферой реализуется условием (5), где учитывается угол наклона поверхности и количества частиц вновь попадающих в атмосферу в зависимости от скорости вертикального потока воздушной массы, а источники выбросов загрязняющих веществ в приземном слое атмосферы зависят от времени и пространственных координат.

Как видно из постановки задачи, для численного решения необходимо задать основные параметры и их законы изменения. Исходя из сказанного выше,  $u, v, w, \varkappa, \mu$  будем определять в виде степенных функций [1]:

$$\begin{aligned} u(z, t) &= |V_1| \left(\frac{z}{z_1}\right)^n \cos \xi, v(z, t) = |V_1| \left(\frac{z}{z_1}\right)^n, \\ w(z, t) &= |V_1| \left(\frac{z}{z_1}\right)^n \sin \xi, \varkappa(z, t) = \varkappa_0(z, t) + \bar{\varkappa}(z, t), \mu(z, t) = \bar{\mu} |V_1|, \end{aligned}$$

где  $|v_1|$  – модуль скорости ветра при  $z = 1$  м.

При таких случаях изменения, составляющих скорости ветра близко к логарифмическому закону, а профиль коэффициента турбулентности в пограничном слое изменяются в соответствии от температурной стратификации, а коэффициент диффузии растет с увеличением скорости ветра.

Для учета скорости и направления ветра в (1)-(6) введем вспомогательные функции  $V_n = v(z_2)/U(z)$ ,  $U(z) = \sqrt{u(z)^2 + v(z)^2}$  и умножая обе части уравнения (1) на  $v(z_2)/U(z)$  получим

$$\begin{aligned} & \frac{v(z_2)}{U(z)} \frac{\partial \theta(x, y, z, t)}{\partial t} + \frac{v(z_2)}{U(z)} u \frac{\partial \theta(x, y, z, t)}{\partial x} + \\ & + \frac{v(z_2)}{U(z)} v \frac{\partial \theta(x, y, z, t)}{\partial y} + \frac{v(z_2)}{U(z)} (w - w_g) \frac{\partial \theta(x, y, z, t)}{\partial z} + \\ & + \frac{v(z_2)}{U(z)} (\sigma + \alpha + \Phi_r) \theta(x, y, z, t) = \\ & = \frac{v(z_2)}{U(z)} \mu \left( \frac{\partial^2 \theta(x, y, z, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta(x, y, z, t)}{\partial y^2} \right) + \\ & + \frac{v(z_2)}{U(z)} \frac{\partial}{\partial z} \left( \varkappa(z) \frac{\partial \theta(x, y, z, t)}{\partial z} \right) + \frac{v(z_2)}{U(z)} Q(x, y, z, t) \end{aligned} \quad (7)$$

или

$$\begin{aligned} V_n \frac{\partial \theta}{\partial t} + v(z_2) \cos \varsigma(z) \frac{\partial \theta}{\partial x} + v(z_2) \sin \varsigma(z) \frac{\partial \theta}{\partial y} + V_n (w - w_g) \frac{\partial \theta}{\partial z} + \\ + V_n (\sigma + \alpha + \Phi_r) \theta = v(z_2) \mu \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) + \\ + V_n \frac{\partial}{\partial z} \left( \varkappa(z) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) + V_n Q(x, y, z, t). \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь

$$\begin{aligned} u(z) &= v(z) \cos \alpha(z); v(z) = v(z_2) \sin \alpha(z); \\ u(z) \frac{v(z_2)}{v(z)} &= v(z) \cos \alpha(z) \frac{v(z_2)}{v(z)} = v(z_2) \cos \alpha(z); \\ v(z) \frac{v(z_2)}{v(z)} &= v(z_2) \sin \alpha(z). \end{aligned}$$

### 3 Методы решения

Для решения поставленной задачи (1)-(5) воспользуемся моно-тонной полу неявной схемой, то есть в уравнении (1) члены,  $\frac{\partial \theta}{\partial x}, \frac{\partial \theta}{\partial y}$  берутся из предыдущего момента

времени  $t = t_n$ , остальные члены в момент времени  $t = t_n + 1$  и получим:

$$\begin{aligned} & V_n \frac{\theta^{n+1} - \theta^n}{\Delta t} + V_n(w - w_g) \frac{\partial \theta^{n+1}}{\partial z} + V_n(\sigma + \alpha + \Phi_r) \theta^{n+1} = \\ & = v(z_2) \mu \left( \frac{\partial^2 \theta^{n+1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta^{n+1}}{\partial y^2} \right) + V_n \frac{\partial}{\partial z} (\chi(z) \frac{\partial \theta^{n+1}}{\partial z}) + \\ & \quad + V_n Q(x, y, z, t)^{n+1} + F^n; \end{aligned} \tag{9}$$

где

$$F^n = v(z_2) \cos \alpha(z) \frac{\partial \theta^n}{\partial x} + v(z_2) \sin \alpha(z) \frac{\partial \theta^n}{\partial y}.$$

Из (8) видно, что все коэффициенты уравнения не зависят от  $x, y$  и, следовательно, для решения его можно применить метод прямых [1, 2].

В дальнейшем, отпуская верхний индекс  $(n + 1)$  и введя сетку по  $x$  и  $y$

$$\begin{aligned} \omega_x &= (x_i = ih_x, i = 0, 1, 2, 3, \dots, N_1 + 1, h_x = \frac{L_x}{(N_1 + 1)}), \\ \omega_y &= (y_k = kh_y, k = 0, 1, 2, 3, \dots, N_2 + 1, h_k = \frac{L_y}{(N_2 + 1)}), \end{aligned}$$

записывая уравнение при  $x = x_i$  получим разностную систему линейных алгебраических уравнений  $N_1 - 20$  порядка.

$$\begin{aligned} & \frac{V_n(z)}{\Delta t} \theta_i + V_n(z)(w - w_g) \frac{\partial \theta_i}{\partial z} + V_n(z)(\sigma + \alpha + \Phi_r) \theta_i = \\ & = V(z_2) \mu \frac{\theta_{i-1} - 2\theta_i + \theta_{i+1}}{h_x^2} + V_n(z) \mu \frac{\partial^2 \theta_i}{\partial y^2} + \\ & + V_n(z) \frac{\partial}{\partial z} (\chi(z) \frac{\partial \theta_i}{\partial z}) + V_n(z) f(x_i, y, t) - (F_i + \frac{V_n(z)}{\Delta t} \bar{\theta}_i) \end{aligned} \tag{10}$$

или

$$\begin{aligned} & \frac{V_n(z)}{\Delta t} \theta_i + V_n(z)(w - w_g) \frac{\partial \theta_i}{\partial z} + \\ & + V_n(z)(\sigma + \alpha + \Phi_r) \theta_i = V(z_2) \mu \frac{M_1}{h_x^2} \theta_i + V_n(z) \mu \frac{\partial^2 \theta_i}{\partial y^2} + \\ & + V_n(z) \frac{\partial}{\partial z} (\chi(z) \frac{\partial \theta_i}{\partial z}) + V_n(z) f(x_i, y, t) - (F_i + \frac{V_n(z)}{\Delta t} \bar{\theta}_i). \end{aligned} \tag{11}$$

Здесь

$$M_1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Из свойства матрицы  $M_1$  известно, что она является матрицей простой структуры и ее можно представить в виде  $M_1 = B_1 \lambda B_1^*$ ,  $\lambda_1 = B_1^* M_1 B_1$ ;  $B_1^{-1} = B_1^*$ ,  $\lambda_1$ - диагональная матрица, элементы которой являются собственными значениями матрицы  $M_1$ ,

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} \lambda_{1,i} & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{2,i} & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{3,i} & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda_{N_1,i} \end{pmatrix},$$

$\lambda_{1,i}$  и элементы матрицы  $B_1$  вычисляются формулами

$$\lambda_{1,i} = -2 \left( 1 - \cos \frac{i\pi}{N_1 + 1} \right); \quad b_{1,i,j} = (-1)^{i+j} \sqrt{\frac{2}{N_1 + 1}} \sin \frac{ij\pi}{N_1 + 1}; \quad (i, j = \overline{1, N_1}).$$

Умножая уравнение (10) слева на матрицу  $B_1^*$  и обозначая,  $B_1^* \theta_i = \theta_i^{(1)}$ ; получим:

$$\begin{aligned} \frac{V_n(z)}{\Delta t} \theta_i^{(1)} + V_n(z)(w - w_g) \frac{\partial \theta_i^{(1)}}{\partial z} + V_n(z)(\sigma + \alpha + \Phi_r) \theta_i^{(1)} = \\ = \psi_i^2 \theta_i^{(1)} + v(z_2) \mu \frac{\partial^2 \theta_i^{(1)}}{\partial y^2} + \\ + V_n(z) \frac{\partial}{\partial z} (\varkappa(z) \frac{\partial \theta_i^{(1)}}{\partial z}) + V_n(z) f(x_i, y, t) - (F_i + \frac{V_n(z)}{\Delta t} \bar{\theta}_i^{(1)}); \end{aligned} \quad (12)$$

где  $\psi_i^2 = -\frac{\lambda_{1,i} v(z_2) \mu}{h_x^2}$ .

В уравнение (11) дифференциальные операторы по  $Oy$  также заменяя на конечно-разностную и получим:

$$\begin{aligned} \frac{V_n(z)}{\Delta t} \theta_{i,k}^{(1)} + V_n(z)(w - w_g) \frac{\partial \theta_{i,k}^{(1)}}{\partial z} + V_n(z)(\sigma + \alpha + \Phi_r) \theta_{i,k}^{(1)} = \\ = \psi_i^2 \theta_{i,k}^{(1)} + v(z_2) \mu \frac{M_2}{h_y^2} \theta_{i,k}^{(1)} + \\ + V_n(z) \frac{\partial}{\partial z} (\varkappa(z) \frac{\partial \theta_{i,k}^{(1)}}{\partial z}) + V_n(z) f^{(1)}(x_i, y_k, t) - (F_{i,k}^{(1)} + \frac{V_n(z)}{\Delta t} \bar{\theta}_{i,k}^{(1)}); \end{aligned} \quad (13)$$

где  $M_2$  является трехдиагональная матрицей с диагональным преобладанием:

$$M_2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

и ее можно представить в виде  $M_2 = B_2 \lambda_2 B_2^*$ ;  $B_2^{-1} = B_2^*$ .

Умножая уравнение (12) слева на матрицу  $B_2^*$  и обозначая,  $B_2^* \theta_{i,k}^{(1)} = \theta_{i,k}^{(2)}$ ; получим:

$$\begin{aligned} c \frac{V_n(z)}{\Delta t} \theta_{i,k}^{(2)} + V_n(z)(w - w_g) \frac{\partial \theta_{i,k}^{(2)}}{\partial z} + V_n(z)(\sigma + \alpha + \Phi_r) \theta_{i,k}^{(2)} = (\psi_i^2 + v_k^2) \theta_{i,k}^{(2)} + \\ + V_n(z) \frac{\partial}{\partial z} (\varkappa(z) \frac{\partial \theta_{i,k}^{(2)}}{\partial z}) + V_n(z) f^{(2)}(x_i, y_k, t) - (F_{i,k}^{(2)} + \frac{V_n(z)}{\Delta t} \bar{\theta}_{i,k}^{(2)}); \end{aligned} \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} v_k^2 = \frac{\lambda_{2,k} v(z_2) \mu}{h_y^2}; \quad \lambda_{2,k} = -2 \left( 1 - \cos \frac{k\pi}{N_2 + 1} \right); \\ b_{2,i,k} = (-1)^{i+k} \sqrt{\frac{2}{N_2 + 1}} \sin \frac{ik\pi}{N_2 + 1} (i, k = \overline{1, N_2}). \end{aligned}$$

После некоторого преобразования и с учетом краевых условий получим:

$$\begin{aligned}
 & V_n(z) \frac{\partial}{\partial z} \left( \varkappa(z) \frac{\partial \theta_{i,k}^{(2)}}{\partial z} \right) + V_n(z)(w - w_g) \frac{\partial \theta_{i,k}^{(2)}}{\partial z} + \\
 & + V_n(z)(\sigma + \alpha + \Phi_r) \theta_{i,k}^{(2)} + V_n(z) \frac{1}{\Delta t} \theta_{i,k}^{(2)} = (\psi_i^2 + v_k^2) \theta_{i,k}^{(2)} + \\
 & + V_n(z) f^{(2)}(x_i, y_k, t) - \left( F_{i,k}^{(2)} + \frac{V_n(z)}{\Delta t} \bar{\theta}_{i,k}^{(2)} \right);
 \end{aligned} \tag{15}$$

$$\varkappa \frac{\partial \theta_{i,k}^{(2)}}{\partial z} + \omega_g \theta_{i,k}^{(2)} = \beta_k^2 \theta_{i,k}^{(2)} - F_{i,k}^{(2)}. \tag{16}$$

Здесь  $F_{i,k}^{(2)}$  вычисляется с помощью формулы:

$$\begin{aligned}
 F_{i,k}^{(2)} = V(z_2) \cos \alpha(z) & \begin{cases} \frac{\theta_{i-1,k}^{(2)} - \theta_{i,k}^{(2)}}{h_x}, \cos \alpha(z) \geq 0 \\ \frac{\theta_{i+1,k}^{(2)} - \theta_{i,k}^{(2)}}{h_x}, \cos \alpha(z) < 0 \end{cases} + \\
 + V(z_2) \sin \alpha(z) & \begin{cases} \frac{\theta_{i,k-1}^{(2)} - \theta_{i,k}^{(2)}}{h_y}, \sin \alpha(z) \geq 0; \\ \frac{\theta_{i,k+1}^{(2)} - \theta_{i,k}^{(2)}}{h_y}, \sin \alpha(z) < 0. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Итак, получено обыкновенное дифференциальное уравнение с соответствующими краевыми условиями описывающий процесс распространения аэрозольных частиц по вертикальному направлению, относительно переменной  $z$ .

Для решения полученной задачи введем сетку по  $z$   $\omega_z = (z_j = z_{j-1} + h_{z_j})$  ( $j = 2, 3, 4, \dots$ ,  $h_{z_j} = h_{z_1}, h_{z_2}$ ) и заменив дифференциальный оператор разностным:

$$\begin{aligned}
 \left( \frac{\partial \theta_{i,k}^{(2)}}{\partial z} \right)_j & = \begin{cases} \frac{\theta_{i,k,j-1}^{(2)} - \theta_{i,k,j}^{(2)}}{h_{z,j}}, (w - w_g) \geq 0; \\ \frac{\theta_{i,k,j}^{(2)} - \theta_{i,k,j+1}^{(2)}}{h_{z,j+1}}, (w - w_g) < 0; \end{cases} \\
 \frac{\partial}{\partial z} \left( \varkappa(z) \frac{\partial \theta_{i,k}^{(2)}}{\partial z} \right) & = \frac{\varkappa(z_{j-0,5})}{\frac{h_{z,j+1} + h_{z,j}}{2} h_{z,j}} \theta_{i,k,j-1}^{(2)} - \\
 - \left( \frac{\varkappa(z_{j-0,5})}{h_{z,j}} + \frac{\varkappa(z_{j+0,5})}{h_{z,j+1}} \right) & \frac{\theta_{i,k,j}^{(2)}}{\frac{h_{z,j} + h_{z,j+1}}{2}} + \frac{\varkappa(z_{j+0,5}) \theta_{i,k,j+1}^{(2)}}{\frac{h_{z,j} + h_{z,j+1}}{2} h_{z,j+1}}
 \end{aligned}$$

и получим:

$$\begin{aligned}
 & \bar{a}_j \theta_{i,k,j-1}^{(2)} - \bar{b}_j \theta_{i,k,j}^{(2)} + \bar{c}_j \theta_{i,k,j+1}^{(2)} + \begin{cases} \frac{d_1}{h_{z,j}} \theta_{i,k,j-1}^{(2)} - d_1 \theta_{i,k,j}^{(2)} \Big| (w - w_g) \geq 0 \\ \frac{d_2}{h_{z,j}} \theta_{i,k,j+1}^{(2)} - d_2 \theta_{i,k,j}^{(2)} \Big| (w - w_g) < 0 \end{cases} + \\
 & + \left( \frac{V_n(z_j)}{\Delta t} + V_n(z_j)(\sigma + \alpha + \Phi_r) \theta_{i,k,j}^{(2)} - V_n(z_j)(\psi_i^2 + v_k^2) \mu_i \right) \theta_{i,k,j}^{(2)} = \\
 & = V_n(z_j) f^{(2)}(x_i, y_k, z_j, t_n) - \left( F_{i,k,j}^{(2)} + \frac{V_n(z)}{\Delta t} \bar{\theta}_{i,k,j}^{(2)} \right)
 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} & (\bar{d}_1 + \bar{a}_j) \theta_{i,k,j,i,k,j-1}^{(2)(2)} - (\bar{d}_1 + \bar{b}_j + \bar{e}_j) \theta_{i,k,j,i,k,j}^{(2)(2)} + \\ & + \bar{c}_j \theta_{i,k,j,i,k,j}^{(2)(2)} = V_n(z_j) f(x_i, y_k, z_j, t_n) - \\ & - \left( F_{i,k,j}^{(2)} + \frac{V_n(z)}{\Delta t} \right) \overline{\theta_{i,k,j,i,k,j}^{(2)(2)}}; \text{ при } (w - w_g) \geq 0; \\ & \bar{a}_j \theta_{i,k,j,i,k,j-1}^{(2)(2)} - (\bar{d}_2 + \bar{b}_j + \bar{e}_j) \theta_{i,k,j,i,k,j}^{(2)(2)} + (\bar{d}_2 + \bar{c}_j) \theta_{i,k,j,i,k,j}^{(2)(2)} = \\ & = V_n(z_j) f^{(2)}(x_i, y_k, z_j, t_n) - \left( F_{i,k,j}^{(2)} + \frac{V_n(z)}{\Delta t} \right) \overline{\theta_{i,k,j,i,k,j}^{(2)(2)}}; \text{ при } (w - w_g) < 0; \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \bar{a}_j &= \frac{2\chi(z_{j+0,5})}{h_{z,j}(h_{z,j+1} + h_{z,j})}; \quad \bar{b}_j = 2 \left( \frac{\chi(z_{j-0,5})}{h_{z,j}} + \frac{\chi(z_{j+0,5})}{h_{z,j+1}} \right) (h_{z,j} + h_{z,j+1}); \\ \bar{c}_j &= \frac{2\chi(z_{j+0,5})}{(h_{z,j} + h_{z,j+1})h_{z,j+1}}; \quad \bar{e}_j = \left( \frac{V_n(z)}{\Delta t} + V_n(z)(\sigma + \alpha + \Phi_r) - V_n(z)\mu(\psi_i^2 + v_k^2) \right). \end{aligned}$$

Векторная форма поставленной задачи имеет следующий вид:

$$\bar{A}_j \theta_{i,k,j-1}^{(2)} - \bar{B}_j \theta_{i,k,j}^{(2)} + \bar{C}_j \theta_{i,k,j+1}^{(2)} = \bar{\Upsilon}_j;$$

где

$$\begin{aligned} \bar{A}_j &= \bar{a}_j; \quad \bar{B}_j = (\bar{b}_j + \bar{d}_2 - \bar{e}_j); \quad \bar{C}_j = (\bar{d}_2 + \bar{c}_j); \quad \text{при } (w - w_g) < 0; \\ \bar{A}_j &= (\bar{d}_1 + \bar{a}_j); \quad \bar{B}_j = (\bar{b}_j + \bar{d}_1); \quad \bar{C}_j = \bar{c}_j; \quad \text{при } (w - w_g) \geq 0; \\ \bar{\Upsilon}_j &= V_n(z_j) f^{(2)}(x_i, y_k, z_j, t_n) - \left( F_{i,k,j}^{(2)} + \frac{V_n(z)}{\Delta t} \right). \end{aligned}$$

Для аппроксимации краевых условий при  $j = 0$  на подстилающую поверхность земли интегрируем уравнение (15) от нуля до  $h_{z,1/2}$  и получим:

$$\begin{aligned} & \int_0^{h_{z,1/2}} [V_n(z) \frac{\partial}{\partial z} \left( \chi(z) \frac{\partial \theta_{i,k}^{(2)}}{\partial z} \right) - V_n(z)(w - w_g) \frac{\partial \theta_{i,k}^{(2)}}{\partial z} - \\ & - (V_n(z) \frac{1}{\Delta t} + V_n(z)(\sigma + \alpha + \Phi_r)) \theta_{i,k}^{(2)} - \\ & - (\theta_{i,k}^{(2)} (\psi_i^2 + v_k^2)) dz = \int_0^{h_{z,1/2}} [\bar{F}_{i,k}^{(2)}] dz; \end{aligned} \quad (17)$$

где

$$\bar{F}_{i,k}^{(2)} = V_n(z) f_{0,k}^{(2)}(x_i, y_k, t) - (F_{i,k}^{(2)} + \frac{V_n(z)}{\Delta t} \overline{\theta_{i,k}^{(2)}}).$$

С учетом краевых условий уравнения (15) можно записать в виде:

$$\begin{aligned} & \int_0^{h_{z/2}} [V_n(z) \frac{\partial}{\partial z} \left( \chi(z) \frac{\partial \theta_{i,k}^{(2)}}{\partial z} \right) dz = (V_n(z_{1/2}) [\chi(z_{1/2}) \frac{\partial \theta_{i,k}^{(2)}}{\partial z}]_{1/2} - \chi(z_{1/2}) \frac{\partial \theta_{i,k}^{(2)}}{\partial z}]_0 = \\ & = (V_n(z) \left[ \chi(z_{1/2}) \frac{\theta_{2,k}^{(2)} - \theta_{1,k}^{(2)}}{\Delta z_1} - (\beta_k - \omega_g) \theta_{1,k}^{(2)} + V_n(z_{1/2}) f_{0,k}^{(2)} \right]); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{h/2} [V_n(z)(w - w_g) \frac{\partial \theta_{i,k}^{(2)}}{\partial z}] dz = (V_n(z_{1/4})(w - w_g)_{1/4} (\theta_{i,k,1/2}^{(2)} - \theta_{i,k,0}^{(2)}) = \\
 & = V_n(z)(w - w_g)_{1/4} \left( \frac{\theta_{i,k,1}^{(2)} - \theta_{i,k,0}^{(2)}}{2} - \theta_{i,k,0}^{(2)} \right) = V_n(z)(w - w_g)_{1/4} \frac{1}{2} (\theta_{i,k,0}^{(2)} - \theta_{i,k,1}^{(2)}); \\
 & \int_0^{h/2} [V_n(z)(w - w_g) \frac{\partial \theta_{i,k}^{(2)}}{\partial z}] dz = (V_n(z_{1/4})(w - w_g)_{1/4} (\theta_{i,k,1/2}^{(2)} - \theta_{i,k,0}^{(2)}) = \\
 & = V_n(z)(w - w_g)_{1/4} \left( \frac{\theta_{i,k,1}^{(2)} - \theta_{i,k,0}^{(2)}}{2} - \theta_{i,k,0}^{(2)} \right) = V_n(z)(w - w_g)_{1/4} \frac{1}{2} (\theta_{i,k,0}^{(2)} - \theta_{i,k,1}^{(2)}); \\
 & \int_0^{h/2} \overline{F}_{i,k}^{(2)} dz = \overline{F}_0^{(2)} \frac{\Delta z_1}{2}.
 \end{aligned}$$

И так при  $i = 0$  имеем разностное уравнение вида:

$$\begin{aligned}
 & -[V_n(z_{1/4})(w - w_g)/\Delta z_1 + \frac{2}{\Delta z_1^2} \varkappa(z_{1/2}) V_n(z_{1/4}) + \\
 & + \frac{2(\beta - \omega_g)}{\Delta z_1} + V_n(z_{1/4}) \frac{1}{\Delta t} + V_n(z_{1/4})(\sigma + \alpha + \Phi_r)] \theta_{i,k,0}^{(2)} - \\
 & - (\alpha_i^2 + \psi_k^2) \theta_{i,k}^{(2)} + [-(V_n(z_{1/4})(w - w_g)_{1/4}/\Delta z_1 + \\
 & + \frac{2}{\Delta z_1^2} \varkappa(z_{1/2}) V_n(z_{1/4})] \theta_{i,k,2}^{(2)} = -(V_n(z_{1/4}) f_{i,k,0}^{(2)} - \overline{F}_{i,k,0}^{(2)});
 \end{aligned}$$

$$\overline{F}_{i,k,0}^{(2)} = V_n(z_{1/4}) \frac{1}{\Delta t} \theta_{i,k,0}^{(2)} - \overline{F}_{i,k,1/4}^{(2)};$$

или

$$\begin{aligned}
 & -[\frac{2}{\Delta z_1^2} \varkappa(z_{1/2}) V_n(z_{1/4}) - (w - w_g)_{1/4}/\Delta z_1 + V_n(z_{1/4}) + \frac{2}{\Delta z_1^2} (\beta - \omega_g) + \\
 & + \frac{1}{\Delta t} V_n(z_{1/4}) + V_n(z_{1/4})(\sigma + \alpha + \Phi_r) + (\psi_i^2 + v_k^2)] \theta_{i,k,0}^{(2)} + [(V_n(z_{1/4}) \frac{2}{\Delta z_1^2} - \\
 & - (w - w_g)_{1/4}/\Delta z_1 V_n(z_{1/4})] \theta_{i,k,2}^{(2)} = -(V_n(z_{1/4}) f_{i,k,0}^{(2)} - \overline{F}_{i,k,0}^{(2)}).
 \end{aligned}$$

Так же интегрируя уравнение (15) от  $(N + 1/2) \Delta z_N$  до  $(N+1) \Delta z_N$  получим:

$$\begin{aligned}
 & \int_{H-1/2\Delta z_N}^N [V_n(z) \frac{\partial}{\partial z} (\varkappa(z) \frac{\partial \theta_{i,k}^{(2)}}{\partial z})] dz = \\
 & = (V_n(z_{H-1/4\Delta z}) [\varkappa(z_H) \frac{\partial \theta_{i,k,N}^{(2)}}{\partial z} - \varkappa(z_{H-1/4\Delta z N}) \frac{\partial \theta_{i,k,H-1/2\Delta z_N}^{(2)}}{\partial z}] =
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 B_{i,k,1} &= C_1 + \frac{2(\beta - \omega_g)}{\Delta z_1} V_n(z_{1/4}) + ((\sigma + \alpha + \Phi_r) + \frac{1}{B\Delta t}) V_n(z_{1/4}) + (v_i^2 + \psi_k^2); \\
 \tilde{F}_{1,j,k}^{(2)} &= -(\bar{f}_{i,k,0}^{(2)} + \bar{F}_{i,k,0}^{(2)}) V_n(z_{1/4}); \\
 A_i &= \left( \frac{\varkappa(z_{i-1/2})}{\frac{\Delta z_{i-1} + \Delta z_i}{2} \Delta z_{i-1}} + \frac{|a| + a}{2 \cdot \Delta z_{i-1}} \right) \cdot V_n(z_i); \\
 C_i &= \left( \frac{\varkappa(z_{i+1/2})}{\frac{\Delta z_{i-1} + \Delta z_i}{2} \Delta z_{i-1}} + \frac{|a| - a}{2 \cdot \Delta z_i} \right) \cdot V_n(z_i); \\
 B_{i,k,j} &= A_i + C_i + \left( \frac{1}{\Delta t} + (\sigma + \alpha + \Phi_r) \right) V_n(z_i) + (v_i^2 + \psi_k^2); \\
 A_{N+1} &= \frac{2k(z_{N_1+1/2})}{\Delta z_{N_1}^2} V_n(z_{N_1+1/2}); \\
 B_{N_1+1,j,k} &= A_{N_1+1} + \left( \frac{1}{\Delta t} + (\sigma + \alpha + \Phi_r) \right) V_n(z_{N_1+1/2}) + (v_i^2 + \psi_k^2).
 \end{aligned}$$

Решая систему (18), находим  $\theta_{i,k,j}^{(2)}$  при  $i = 0, 1, 2, \dots, N_1 + 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N_2, \quad j = 1, 2, \dots, N_3$  с помощью (13), (11) от функции  $\theta_{i,j,k}^{(2)}$  переходим к функции  $\theta^{(1)}_{i,j,k}$  с помощью (11) от функцию  $\theta^{(1)}_{i,j,k}$  переходим к численному решению задачи (8) в момент времени  $t = t_{n+1}$ .

### 4 Результаты

С помощью компьютерных вычислительных экспериментов была проверена достоверность разработанного математического аппарата. Для этого рассмотренные математические модели и численные алгоритмы были реализованы в виде программных средств на языке Python. Область решения задачи рассматривалась в прямоугольном виде с размерами  $x = 5000, y = 5000, L = 1000$  м., а результаты численных расчетов приведены на рис. 1-9.

На основе полученных соотношений получены следующие результаты (рис.1-7), где графики показывают, что различные направления ветра и параметры атмосферной стратификации воздействуют на изменение скорости ветрового потока.

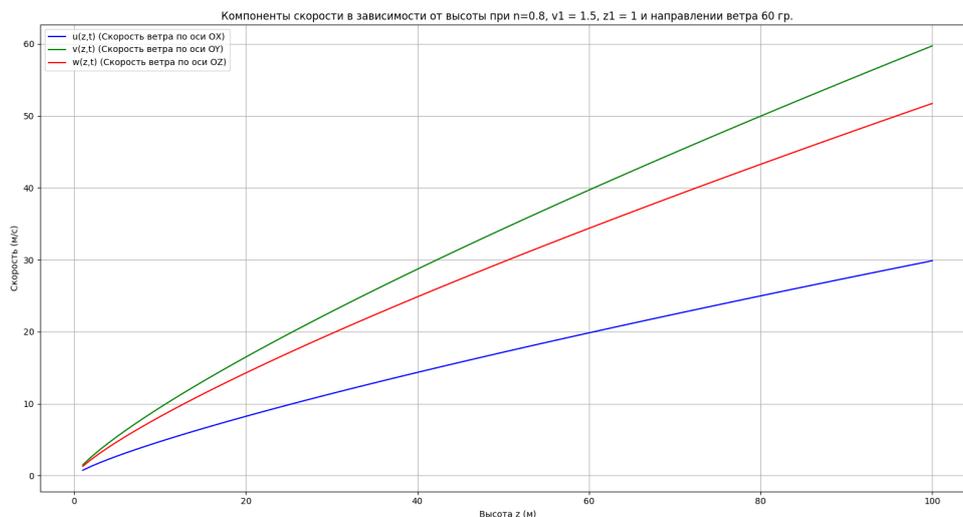


Рис. 1 Изменение скорости ветра при  $n = 0.8, V_1 = 1.5, z_1 = 1$  и направлении ветра  $60^\circ$

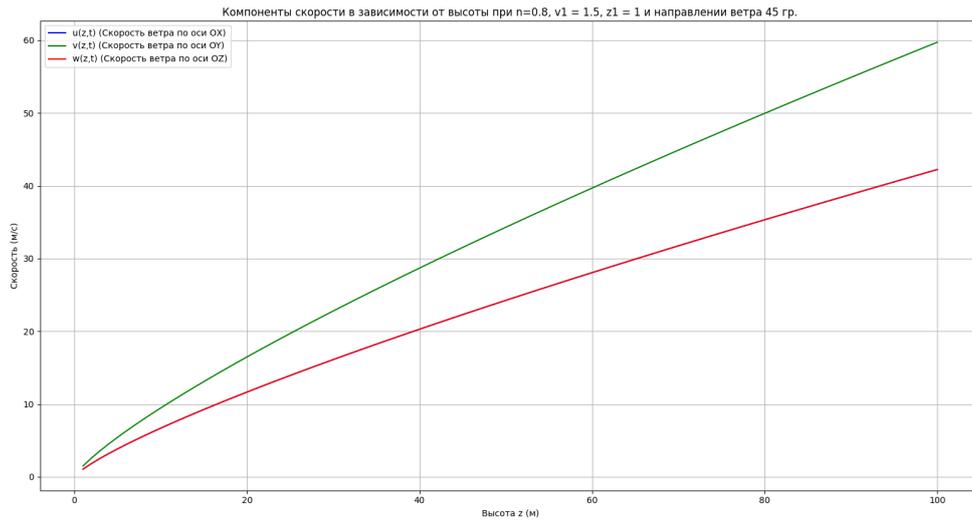


Рис. 2 Изменение скорости ветра при  $n = 0.8$ ,  $V_1 = 1.5$ ,  $z_1 = 1$  и направлении ветра  $45^\circ$

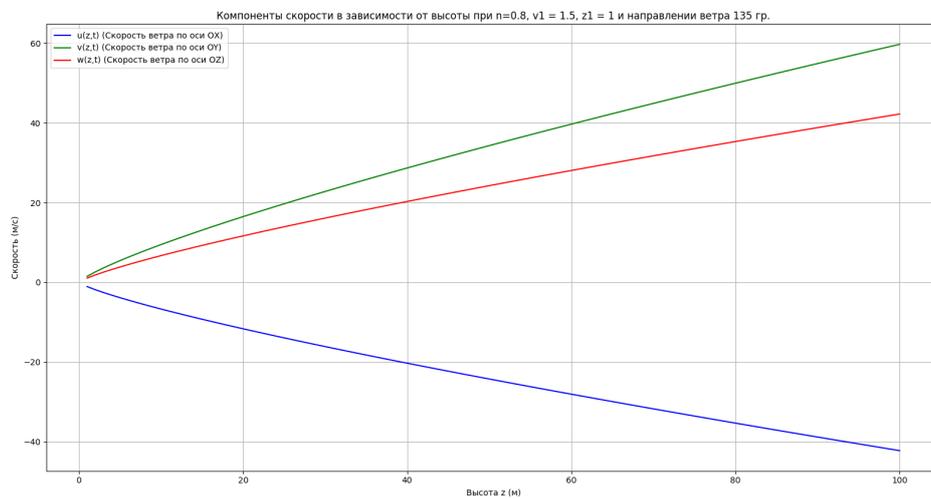


Рис. 3 Изменение скорости ветра при  $n = 0.8$ ,  $V_1 = 1.5$ ,  $z_1 = 1$  и направлении ветра  $135^\circ$

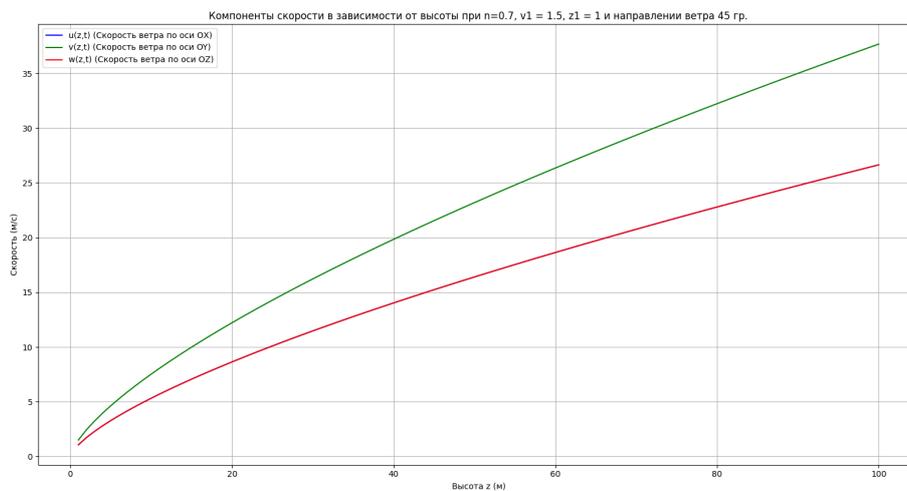


Рис. 4 Изменение скорости ветра при  $n = 0.7$ ,  $V_1 = 1.5$ ,  $z_1 = 1$  и направлении ветра  $45^\circ$

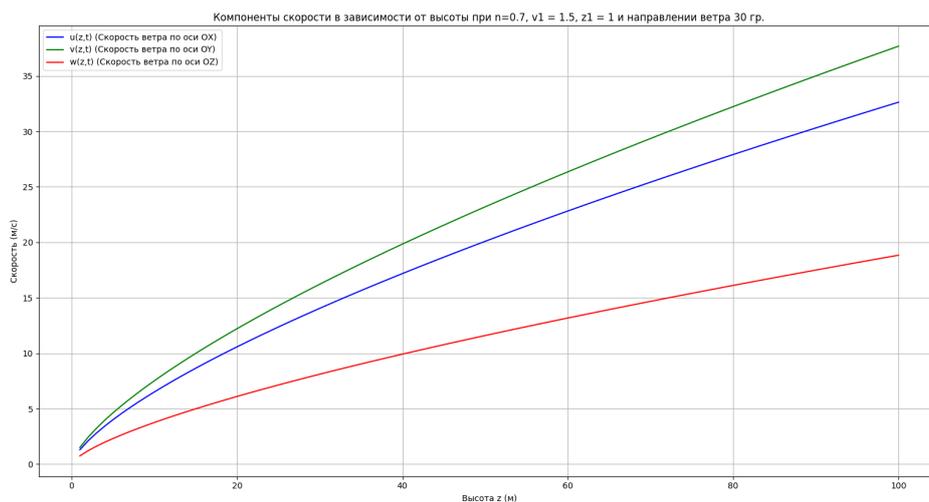


Рис. 5 Изменение скорости ветра при  $n = 0.7, V_1 = 1.5, z_1 = 1$  и направлении ветра  $30^\circ$

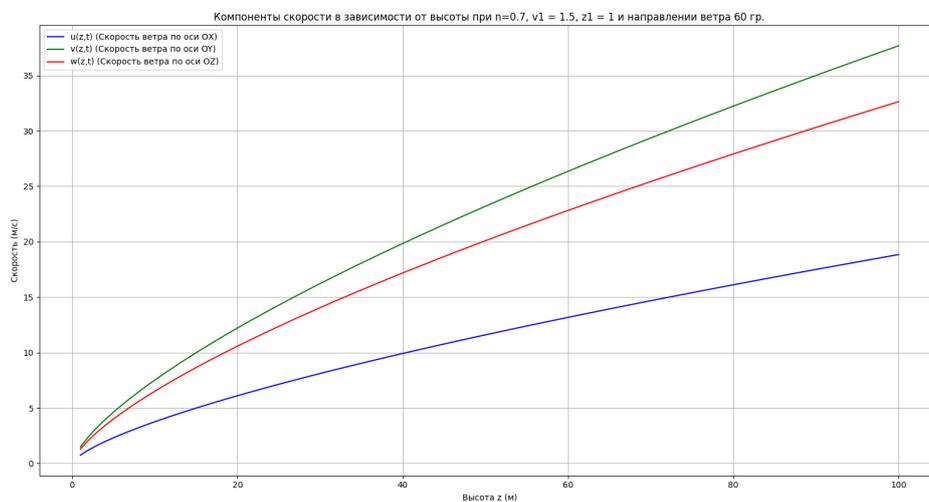


Рис. 6 Изменение скорости ветра при  $n = 0.7, V_1 = 1.5, z_1 = 1$  и направлении ветра  $60^\circ$

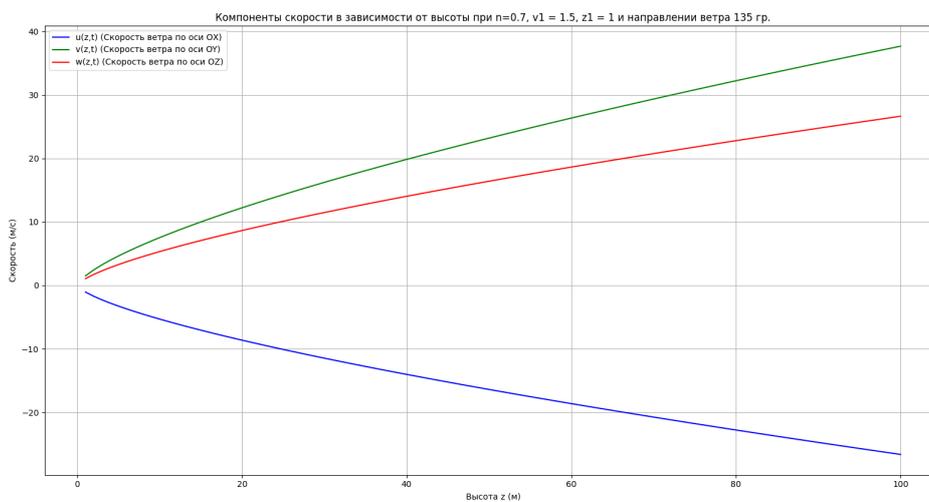
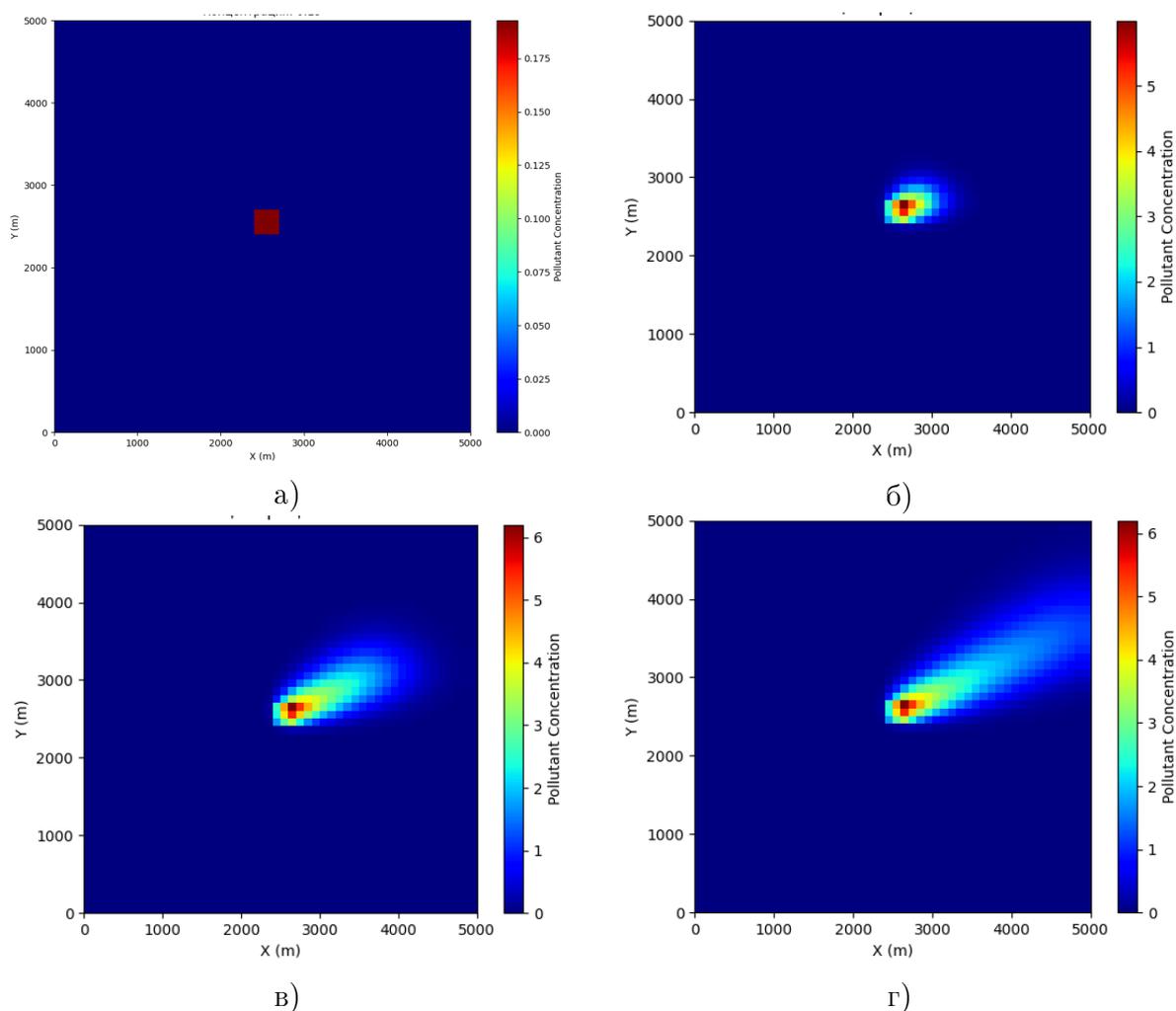


Рис. 7 Изменение скорости ветра при  $n = 0.7, V_1 = 1.5, z_1 = 1$  и направлении ветра  $135^\circ$

Из выше представленных графиков видно, что при значении коэффициента стратификации  $n = 0.8$  (рис.1-3) при направлениях воздушного потока ( $60^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $135^\circ$ ) профиль скорости ветра изменяется. При  $45^\circ$  скорость ветра плавно возрастает, увеличиваясь с высотой (рис. 2), а при  $60^\circ$  наблюдается более резкий рост, которое способствует усилению потока (рис.1). На рис.3 при  $135^\circ$  скорость ветра умеренно растет, причина которому является перераспределение энергии потока. При  $n = 0.8$  усиливается смешивание воздушных масс за счет турбулентности, из-за которого увеличивается скорость ветра по вертикали.

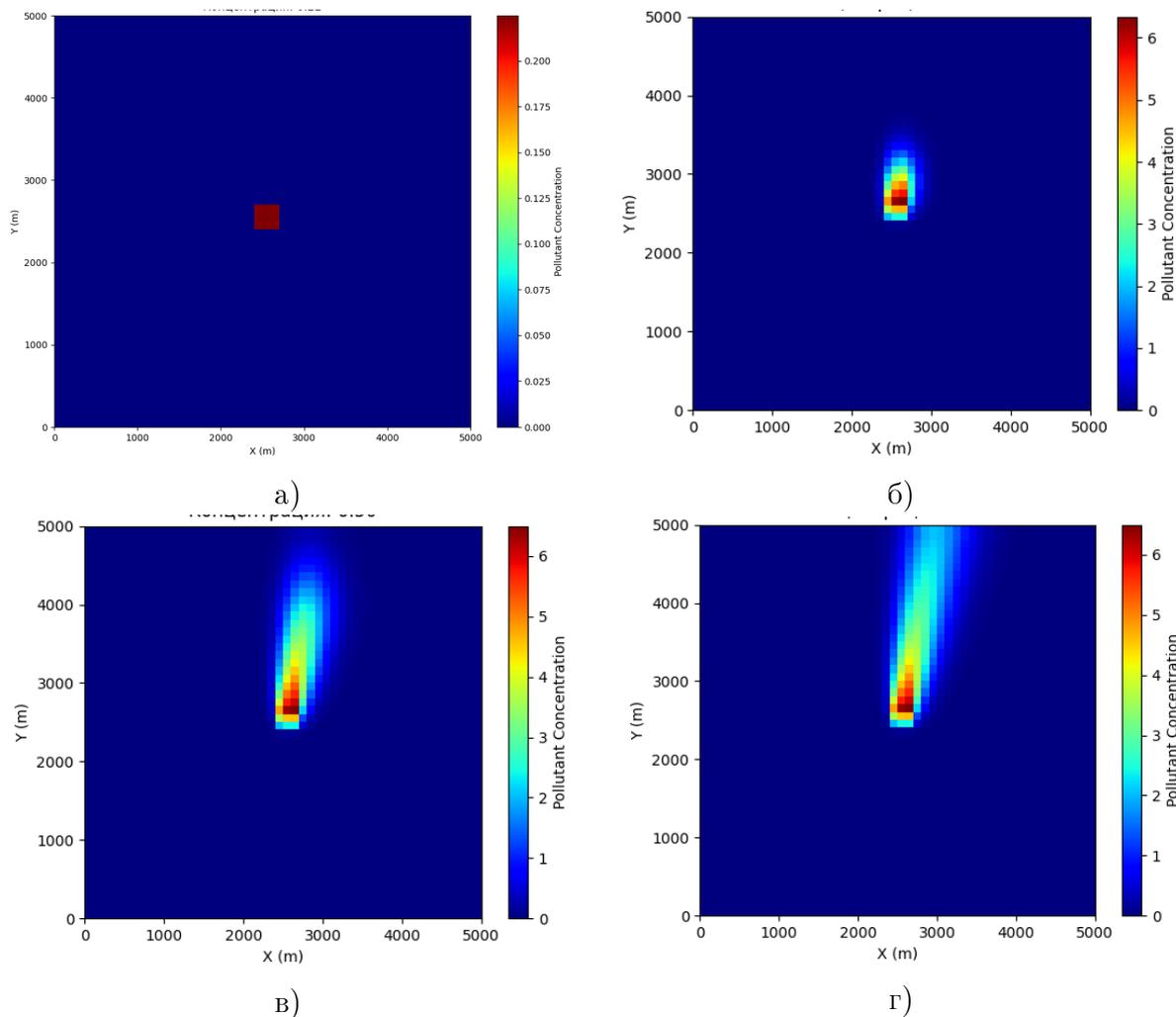
При значении коэффициента стратификации  $n = 0.7$  по сравнению с  $n = 0.8$  скорость ветра медленно увеличивается по высоте, так как атмосфера стабильнее. Из-за слабой турбулентности при  $30^\circ$  (рис.5) скорость ветра мало изменяется; при  $45^\circ$  и  $60^\circ$  скорость умеренно увеличивается (рис.4, 6), а при  $135^\circ$  (рис. 7) усиление скорости ветра происходит равномерно. Отсюда следует, что на интенсивность изменения скорости воздействуют разные направления ветра.

На рис. 8-9 представлены графические результаты численного моделирования процесса распространения вредных частиц в атмосфере в зависимости от времени, скорости и направления ветра.



**Рис. 8** Изменение концентрации вредных частиц со временем: а)  $t = 0$  часов; б)  $t = 6$  часов; в)  $t = 12$  часов; г)  $t = 24$  часа при направлении ветра  $40^\circ$  и  $u = 8$  м/с,  $v = 4$  м/с,  $w = 0,8$  м/с

Из рис.8 видно, что с истечением времени значительная часть загрязняющих веществ рассеивается, а область их распространения увеличилась по сравнению с предыдущими моментами времени. При направлении ветра  $40^\circ$  распределение выброса в момент времени  $t = 0$  концентрация максимальна вблизи источника (а); при  $t = 6$  часов распространяется по направлению ветра, образуя вытянутую зону загрязнения (б); при  $t = 12$  часов у источника концентрация уменьшается за счёт рассеивания (в); при  $t = 24$  часа загрязняющие вещества значительно рассеиваются.



**Рис. 9** Изменение концентрации вредных частиц со временем: а)  $t = 0$  часов; б)  $t = 6$  часов; в)  $t = 12$  часов; г)  $t = 24$  часа при направлении ветра  $86^\circ$

На рис.9 представлено изменение концентрации загрязняющих веществ по направлению ветра  $86^\circ$ , где зона загрязнения шире чем на рис.8, которое связано увеличением турбулентности. За счёт усиления атмосферного воздуха, концентрация быстрее снижается, вертикальная скорость ветра способствует в какой-то мере рассеиванию частиц вверх. Из рис.8-9 видно, что существенное влияние на распространение вредных веществ оказывает направление ветра.

## 5 Заключение

Разработан эффективный инструмент - математическая модель с целью анализа исследования и прогнозирования распространения вредных веществ в атмосфере, где

учитываются коэффициент захвата частиц растительностями и поглощения в атмосфере, изменения скорости ветра и их направлений, убыль концентрации загрязняющих веществ в атмосфере за счет разложения и фотохимической трансформации, скорости прилипания частиц на поверхности земли, изменения коэффициента турбулентности в зависимости от орографии местности и других существенных факторов.

Разработан численный алгоритм решения задачи, основанный на методе «прямых» и полу неявной конечно-разностной схемы для проведения вычислительного эксперимента на ЭВМ. На основе предложенного математического аппарата можно учесть скорости воздушной массы атмосферы и их направления в зависимости от орографии местности и шероховатой поверхности земли. Полученные результаты являются основой для дальнейшей разработки новых математических моделей загрязнения атмосферы выбросами химически опасных объектов. Это необходимо для эффективного решения задач по предупреждению подобных чрезвычайных ситуаций и оптимального размещения промышленных объектов в рассматриваемом регионе.

## Литература

- [1] Михайлюта С.В., Леженин А.А., Тасейко О.В., Битехтина М.А. Экологическая индустрия: ветровые потоки в городской застройке Красноярска. // Инженерная экология. – 2012. – №3. – С. 26–37.
- [2] Локощенко М.А., Еланский Н.Ф., Трифанова А.В. Влияние метеорологических условий на загрязнение воздуха в Москве. // Экология человека Вестник Российской Академии естественных наук – 2014. – №1 – С. 64–67.
- [3] Elminir H.K. Dependence of urban air pollutants on meteorology //Science of the total environment. – Т. 350. – №. 1–3. – 2005. – С. 225–237.
- [4] Чжоу Ц. и др. Влияние температуры окружающей среды и влажности атмосферы на динамику диффузии утечки фтористого водорода на основе метода вычислительной гидродинамики. // Токсика. – Т. 12. – №. 3. – 2024. – 184. с.
- [5] Shuangchen M. et al. Environmental influence and countermeasures for high humidity flue gas discharging from power plants Renewable and Sustainable Energy Reviews. // – 2017. – Т. 73. – С. 225–235.
- [6] Zhang J. P. et al. The impact of circulation patterns on regional transport pathways and air quality over Beijing and its surroundings. // Atmospheric Chemistry and Physics. – 2012. – Т. 12. – №. 11. – С. 5031–5053.
- [7] Akyüz M., Çabuk H. Meteorological variations of PM2. 5/PM10 concentrations and particle-associated polycyclic aromatic hydrocarbons in the atmospheric environment of Zonguldak, Turkey. // Journal of hazardous materials. – 2009. – Т. 170. – №. 1. – С. 13–21.
- [8] Said S.A. M. et al. The effect of environmental factors and dust accumulation on photovoltaic modules and dust-accumulation mitigation strategies. // Renewable and Sustainable Energy Reviews. – 2018. – Т. 82. – С. 743–760.
- [9] Amamou A., Mahjoub H., Al-Farhany K., Said N.M., Bournot H. Experimental and CFD analyses of pollutant dispersion around an isolated cylindrical building. // Waves in Random and Complex Media, 1–35. <https://doi.org/10.1080/17455030.2023.2179861> – 2023.
- [10] Noyes P.D. et al. The toxicology of climate change: environmental contaminants in a warming world. // Environment international. – 2009. – Т. 35. – №. 6. – С. 971–986.
- [11] Huang X., Wang H., Gao L. 2020. Numerical simulation of airflow and dispersion in 3D street canyons: the effect of atmospheric temperature stratification. // Environmental Technology, 44(17), – P. 2563–2580. – 2022. <https://doi.org/10.1080/09593330.2022.2036247>

- [12] *Coccia M.* The effects of atmospheric stability with low wind speed and of air pollution on the accelerated transmission dynamics of COVID-19. // *International Journal of Environmental Studies*. – 2021. – Т. 78. – №. 1. – С. 1–27.
- [13] *Popov O. et al.* Emergencies at potentially dangerous objects causing atmosphere pollution: peculiarities of chemically hazardous substances migration. // *Systems, Decision and Control in Energy I*. – Cham : Springer International Publishing, 2020. – С. 151–163.
- [14] *Zhao L. et al.* Influence of atmospheric fine particulate matter (PM<sub>2.5</sub>) pollution on indoor environment during winter in Beijing. // *Building and Environment*. – 2015. – Т. 87. – С. 283–291.
- [15] *Hernandez G. et al.* Temperature and humidity effects on particulate matter concentrations in a sub-tropical climate during winter. // *International proceedings of chemical, biological and environmental engineering*. – 2017. – Т. 102. – №. 8. – С. 41–49.
- [16] *Грундстрем М. и др.* Изменение и ковариация PM<sub>10</sub>, концентрации частиц, NO<sub>x</sub> и NO<sub>2</sub> в городском воздухе – Связь со скоростью ветра, вертикальным градиентом температуры и типом погоды. // *Атмосферная среда*. – 2015. – Т. 120. – С. 317–327.
- [17] *Sharan M., Gopalakrishnan S.G.* Mathematical modeling of diffusion and transport of pollutants in the atmospheric boundary layer. // *Pure and Applied Geophysics*. – 2003. – Т. 160. – С. 357–394.
- [18] *Ravshanov N., Sharipov D.* Advanced mathematical model of transfer and diffusion process of harmful substances in the atmospheric boundary layer. // *Journal of Advance Research in Computer Science Engineering*. ISSN. – 2016. – С. 2456–3552.
- [19] *Мурадов Ф.А., Таштемирова Н.Н., Эшбоева Н.Ф., Гозиев Х.И.* Численное моделирование трехмерного поля скорости ветра в атмосфере. // *Проблемы вычислительной и прикладной математики*. – 2024. – No 1(55). – С. 48–56.
- [20] *Lakehal D.* On the modelling of multiphase turbulent flows for environmental and hydrodynamic applications. // *International Journal of Multiphase Flow*. – 2002. – Т. 28. – №. 5. – С. 823–863.
- [21] *Temirbekov N. et al.* Mathematical and computer modeling of atmospheric air pollutants transformation with input data refinement. // *Indonesian Journal of Electrical Engineering and Computer Science*. – 2023. – Т. 32. – №. 3. – С. 1405–1416.
- [22] *Guha A.* Transport and deposition of particles in turbulent and laminar flow. // *Annu. Rev. Fluid Mech.* – 2008. – Т. 40. – №. 1. – С. 311–341.
- [23] *Giardina M., Buffa P.* A new approach for modeling dry deposition velocity of particles. // *Atmospheric Environment*. – 2018. – Т. 180. – С. 11–22.
- [24] *Pisso, I., Sollum, E., Grythe, H., Kristiansen, N. I., Cassiani, M., Eckhardt, S., Arnold, D., Morton, D., Thompson, R. L., Groot Zwaaftink, C. D., Evangeliou, N., Sodemann, H., Haimberger, L., Henne, S., Brunner, D., Burkhardt, J. F., Fouilloux, A., Brioude, J., Philipp, A., Seibert, P., and Stohl, A.* The Lagrangian particle dispersion model FLEXPART version. // *Geosci. Model Dev.*, 12, – P. 4955–4997. <https://doi.org/10.5194/gmd-12-4955-2019>, – 2019.
- [25] *Фаддеева В.Н.* Метод прямых в применении к некоторым краевым задачам. // *Труды Математического института АН СССР им. В.А. Стеклова*, т. XXVIII (28), М., – 1949.
- [26] *Каримбердиева С.* Численные решения дифференциально-разностных уравнений в параллелепипеде, шаре и цилиндре. // *Т.*, «Фан», – 1983. – 112 с.
- [27] *Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н.* Вычислительные методы линейной алгебры. // *М.*, – 1960.

UDC 519.6

## MATHEMATICAL MODEL AND NUMERICAL ALGORITHM FOR STUDYING THE PROCESS OF DISPERSION OF DUST AND FINE AEROSOLS IN THE ATMOSPHERE

*Tashtemirova N.*

nodira3110@mail.ru

Digital Technologies and Artificial Intelligence Development Research Institute,  
17A, Buz-2, Tashkent, 100125 Uzbekistan.

Environmental pollution is one of the most critical issues of our time, as it leads to the deterioration of human health, the degradation of flora and fauna, and the suppression of vegetation. To study and predict the process of the spread of harmful substances in the surface layer of the atmosphere, a mathematical model has been developed that takes into account: the decrease in the concentration of pollutants in the atmosphere due to decomposition and photochemical transformation; changes in wind patterns over time and depending on the orography of the area; changes in the diffusion coefficient and the turbulent mixing coefficient vertically under stable and unstable stratification. The model is based on the fundamental laws of fluid mechanics, such as the conservation of mass, momentum, and impulse. Additionally, a calculation methodology is used that considers hydrodynamic factors of weather and climate, such as the capture of aerosol particles by plants, interaction with the ground, changes in wind speed and direction, as well as the turbulence coefficient both vertically and horizontally. To ensure a high order of accuracy and stability of the difference schemes, a semi-implicit finite-difference scheme and the "direct" method are applied to integrate the given problem.

**Keywords:** wind speed and direction, decrease in the concentration of pollutants, deposition velocity, direct method, semi-implicit difference scheme.

**Citation:** Tashtemirova N. 2025. Mathematical model and numerical algorithm for studying the process of dispersion of dust and fine aerosols in the atmosphere. *Problems of Computational and Applied Mathematics*. 1(63): 57-76.

# ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

№ 1(63) 2025

Журнал основан в 2015 году.

Издается 6 раз в год.

**Учредитель:**

Научно-исследовательский институт развития цифровых технологий и  
искусственного интеллекта.

**Главный редактор:**

Равшанов Н.

**Заместители главного редактора:**

Азамов А.А., Арипов М.М., Шадиметов Х.М.

**Ответственный секретарь:**

Ахмедов Д.Д.

**Редакционный совет:**

Алоев Р.Д., Амиргалиев Е.Н. (Казахстан), Арушанов М.Л., Бурнашев В.Ф.,  
Загребина С.А. (Россия), Задорин А.И. (Россия), Игнатъев Н.А.,  
Ильин В.П. (Россия), Исмагилов И.И. (Россия), Кабанихин С.И. (Россия),  
Карачик В.В. (Россия), Курбонов Н.М., Маматов Н.С., Мирзаев Н.М.,  
Мухамадиев А.Ш., Назирова Э.Ш., Нормуродов Ч.Б., Нуралиев Ф.М.,  
Опанасенко В.Н. (Украина), Расулмухамедов М.М., Расулов А.С., Садуллаева  
Ш.А., Старовойтов В.В. (Беларусь), Хаётов А.Р., Халджигитов А., Хамдамов Р.Х.,  
Хужаев И.К., Хужаеров Б.Х., Чье Ен Ун (Россия), Шабозов М.Ш. (Таджикистан),  
Dimov I. (Болгария), Li Y. (США), Mascagni M. (США), Min A. (Германия),  
Schaumburg H. (Германия), Singh D. (Южная Корея), Singh M. (Южная Корея).

Журнал зарегистрирован в Агентстве информации и массовых коммуникаций при  
Администрации Президента Республики Узбекистан.

Регистрационное свидетельство №0856 от 5 августа 2015 года.

**ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X**

При перепечатке материалов ссылка на журнал обязательна.

За точность фактов и достоверность информации ответственность несут авторы.

**Адрес редакции:**

100125, г. Ташкент, м-в. Буз-2, 17А.

Тел.: +(998) 712-319-253, 712-319-249.

Э-почта: [journals@airi.uz](mailto:journals@airi.uz).

Веб-сайт: <https://journals.airi.uz>.

**Дизайн и вёрстка:**

Шарипов Х.Д.

Отпечатано в типографии НИИ РЦТИИ.

Подписано в печать 28.02.2025 г.

Формат 60x84 1/8. Заказ №1. Тираж 100 экз.

# PROBLEMS OF COMPUTATIONAL AND APPLIED MATHEMATICS

**No. 1(63) 2025**

The journal was established in 2015.  
6 issues are published per year.

**Founder:**

Digital Technologies and Artificial Intelligence Development Research Institute.

**Editor-in-Chief:**

Ravshanov N.

**Deputy Editors:**

Azamov A.A., Aripov M.M., Shadimetov Kh.M.

**Executive Secretary:**

Akhmedov D.D.

**Editorial Council:**

Aloev R.D., Amirgaliev E.N. (Kazakhstan), Arushanov M.L., Burnashev V.F.,  
Zagrebina S.A. (Russia), Zadorin A.I. (Russia), Ignatiev N.A., Ilyin V.P. (Russia),  
Ismagilov I.I. (Russia), Kabanikhin S.I. (Russia), Karachik V.V. (Russia), Kurbonov  
N.M., Mamatov N.S., Mirzaev N.M., Mukhamadiev A.Sh., Nazirova E.Sh.,  
Normurodov Ch.B., Nuraliev F.M., Opanasenko V.N. (Ukraine), Rasulov A.S.,  
Sadullaeva Sh.A., Starovoitov V.V. (Belarus), Khayotov A.R., Khaldjigitov A.,  
Khamdamov R.Kh., Khujaev I.K., Khujayorov B.Kh., Chye En Un (Russia),  
Shabozov M.Sh. (Tajikistan), Dimov I. (Bulgaria), Li Y. (USA), Mascagni M. (USA),  
Min A. (Germany), Schaumburg H. (Germany), Singh D. (South Korea),  
Singh M. (South Korea).

The journal is registered by Agency of Information and Mass Communications under the  
Administration of the President of the Republic of Uzbekistan.

The registration certificate No. 0856 of 5 August 2015.

**ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X**

At a reprint of materials the reference to the journal is obligatory.

Authors are responsible for the accuracy of the facts and reliability of the information.

**Address:**

100125, Tashkent, Buz-2, 17A.

Tel.: +(998) 712-319-253, 712-319-249.

E-mail: [journals@airi.uz](mailto:journals@airi.uz).

Web-site: <https://journals.airi.uz>.

**Layout design:**

Sharipov Kh.D.

DTAIDRI printing office.

Signed for print 28.02.2025

Format 60x84 1/8. Order No. 1. Printed copies 100.

## Содержание

<i>Алимова Н.Б., Паровик Р.И.</i> Осциллятор ФитцХью-Нагумо с переменной наследственностью и внешним воздействием . . . . .	5
<i>Хакназарова Д., Садуллаев С., Миродуллаев Б.</i> Численное моделирование процесса геофильтрации на орошаемых землях с учетом физических факторов . . . . .	17
<i>Набиева И.С.</i> Численное моделирование переноса и диффузии загрязняющих частиц с учетом характеристик воздушного потока и температуры . . . . .	27
<i>Равшанов Н., Садуллаев С., Шадманова К.У., Журабаев Х.А.</i> Исследование и анализ математических моделей процессов фильтрации подземных вод в многослойных неоднородных пористых средах . . . . .	41
<i>Таштемирова Н.</i> Математическая модель и численный алгоритм для исследования процесса распространения пылевых и мелкодисперсных аэрозолей в атмосфере . . . . .	57
<i>Боборазимов Б.И.</i> Численное моделирование турбулентного переноса примесей в пространственно неоднородной среде атмосферы . . . . .	77
<i>Икрамов А.М.</i> Численное моделирование трехмерных нестационарных процессов теплопроводности в неоднородных телах . . . . .	99
<i>Каюмов А.А., Искандарова Ш.Б.</i> Численное исследование влияния моментов на изгиб пластины при нестационарном нагружении . . . . .	108
<i>Бердимуратов М.Б.</i> Сравнительный анализ оценки неизвестных параметров гамма-распределения с цензурированными справа данными в неполных статистических моделях . . . . .	116

# Contents

<i>Alimova N.B., Parovik R.I.</i>	
FitzHugh-Nagumo oscillator with variable heredity and external forcing . . . . .	5
<i>Haknazarova D., Sadullaev S., Murodullaev B.</i>	
Numerical modeling of the geofiltration process on irrigated lands taking into account physical factors . . . . .	17
<i>Nabieva I.S.</i>	
Numerical modeling of the transport and diffusion of pollutant particles taking into account airflow characteristics and temperature . . . . .	27
<i>Ravshanov N., Sadullayev S., Shadmanova K.U., Jurabaev Kh.A.</i>	
Study and analysis of mathematical models of groundwater filtration processes in multilayer heterogeneous porous media . . . . .	41
<i>Tashtemirova N.</i>	
Mathematical model and numerical algorithm for studying the process of dispersion of dust and fine aerosols in the atmosphere . . . . .	57
<i>Boborakhimov B.I.</i>	
Numerical modeling of turbulent transport of impurities in a spatially inhomogeneous atmospheric environment . . . . .	77
<i>Ikramov A.M.</i>	
Numerical modeling of three-dimensional unsteady heat conduction processes in inhomogeneous bodies . . . . .	99
<i>Kayumov A.A., Iskandarova Sh.B.</i>	
Numerical study of the influence of moments on plate bending under transient loading . . . . .	108
<i>Berdimuradov M.B.</i>	
Comparative analysis of unknown parameter estimation of the gamma distribution with right-censored data in incomplete statistical models . . . . .	116

# HISOBLASH VA AMALIY MATEMATIKA MUAMMOLARI

ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ  
И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
PROBLEMS OF COMPUTATIONAL  
AND APPLIED MATHEMATICS

