УДК 519.6

ИССЛЕДОВАНИЕ И АНАЛИЗ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ПРОЦЕССОВ ФИЛЬТРАЦИИ ПОДЗЕМНЫХ ВОД В МНОГОСЛОЙНЫХ НЕОДНОРОДНЫХ ПОРИСТЫХ СРЕДАХ

[1*]***Равшанов Н.***, [1]***Садуллаев С.***, [3]***Шадманова К.У.***, [2]***Журабаев Х.А.***

*ravshanzade-09@mail.ru

[1]Научно-исследовательский институт развития цифровых технологий и искусственного интеллекта,
100125, Узбекистан, г. Ташкент, Мирзо-Улугбекский р-он, м-в Буз-2, д. 17А;
[2]Министерство цифровых технологий Республики Узбекистан,
100164, Узбекистан, Ташкент, ул. Ияброхима Муминова 4;
[3]Бухарский государственный университет,
200118, Узбекистан, Бухара, ул. М. Икбол дом 11.

Моделирование нелинейных процессов фильтрации в многослойных неоднородных пористых средах представляет собой сложную область, объединяющую различные математические и физические принципы для понимания динамики жидкости в пористых структурах. На сложность этих процессов влияют неоднородность среды, нелинейный характер течения жидкости и взаимодействие между различными слоями пористых материалов. В работе приведены подробный анализ полученных фундаментальных и прикладных исследования в области фильтрация подземных вод в однородных, неоднородных и многослойных пористых средах основанные на законах А. Дарси, Ж. Дюпюи, Н.Е. Жуковского, Ф. Форхгеймера и других.

Ключевые слова: математическая модель, фильтрации, подземные воды, неоднородная пористая среда.

Цитирование: *Равшанов Н., Садуллаев С., Шадманова К.У., Журабаев Х.А.* Исследование и анализ математических моделей процессов фильтрации подземных вод в многослойных неоднородных пористых средах // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2025. – № 1(63). – С. 41-56.

1 Введение

В силу географических и природно-климатических особенностей Узбекистана, орошение сельскохозяйственных земель и обеспечение населения питьевой водой на довольно обширных территория нашей республики осуществляется за счет подземных водных источников. Причем, потребность населения в пресной воде и поливной воде, неуклонно возрастает. Регион Средней Азии не уникален в этом плане, активное освоение подземных водных ресурсов, характерно для многих засушливых регионов мира. В этой связи, как отечественным, так и мировым научным сообществом уделяется большое внимание исследованиям геофильтрационных процессов, в частности, миграции и минерализации подземных вод.

Нужно отметить, что проектирование и сооружение водозаборов подземных вод, а также проведение сопутствующих мелиоративных работ, направленных на борьбу с возникающими негативными последствиями (подпор грунтовых вод, потопление, засоление и заболачивание земель), требуют больших капитальных вложений. Поэтому, особую актуальность приобретают вопросы разработки и усовершенствования методов математического моделирования геофильтрационных процессов, направленных на более экономичное и эффективное решение практических задач обоснования интенсивности водной мелиорации агроландшафтов, оптимизации расчётов сельскохозяйственного дренажа и управления водным режимом сельскохозяйственных угодий.

Основы науки о движении подземных вод (гидрогеологии) связаны с именами А. Дарси, Ж. Дюпюи, Н.Е. Журковского, Ф. Форхгеймера и др. Большую роль в развитии математических методов с интенсивным развитием теории и практики движения подземных вод сыграли также труды Ф.Б. Абуталиевой, Э.Б. Абуталиевой, В.И. Аравиной, С.Н. Нумеровой, Г.Н. Каменского, А.И. Силиной-Бекчуриной, П.П. Климентова, Г.Б. Пыхачева, В.А. Мироненко, И.К. Гавича и др. Первые исследования по гидродинамике подземных вод были выполнены французскими учеными А.Дарси и Ж.Дюпюи [1]. Первый исследователь установил основной закон фильтрации, позже названный линейным законом Дарси (известен также нелинейный закон Дарси). Второй применил закон Дарси для определения расхода подземных вод и количества воды, поступающей в скважину. Закон Дарси описывает движение жидкости через пористую среду. В гидрогеомеханике принято рассматривать движение воды обобщенно, т.е. по всему сечению фильтрующей среды, а не движение воды в отдельных каналах, соединяющих трещины.

Скорость фильтрации является одной из важнейших характеристик движения подземных вод. Она представляет собой объем воды, протекающий через единицу площади поперечного сечения пористой среды за единицу времени. Если объемный расход воды, фильтрующейся за единицу времени, равен Q, а площадь поперечного сечения фильтрующей среды равна F, то скорость фильтрации можно записать как:

$$V = \frac{Q}{F}. \tag{1}$$

Отметим, что в (1) скорость фильтрации определяется как вода, профильтрованная через всю площадь поперечного сечения F (включая площадь поперечного сечения, занимаемую скелетом породы), а не только через часть поперечного сечения, занимаемую порами.

Фильтрация воды из каналов может быть свободной (без подпора), а в случае подпора такая фильтрация является подпором. Свободная фильтрация происходит (рис.1), когда фильтрационный поток не подтапливается грунтовыми водами. В этом случае на некоторой глубине имеется высокопроницаемый слой почвы, который можно принять за дренаж. Отфильтрованная вода отводится через высокопроницаемый слой за пределы площади канала [1].

Помимо свободной фильтрации в каналах часто наблюдается поддержанная фильтрация, которая возникает при близком залегании грунтовых вод и взаимодействии фильтрационного потока с грунтовыми водами.

В рисунке 2, K – коэффициент фильтрации грунта, м/сут; B – ширина канала по урезу воды, м; h_0 – нормальная глубина в канале, м; m – коэффициент заложения откоса; b – ширина канала по дну, м; B_0 – ширина распространения фильтрации, м; T – мощность грунтового основания, м; ε – испарение, мм/сут; δ УГВ – уровень грунтовых вод, м; T_0 – глубина залегания грунтовых вод относительно водоупора, м; H_0 – глубина потока над уровнем воды (над водоупором).

Стационарные потери воды на фильтрацию можно получить экспериментальным методом электрогидродинамических аналогий (ЭГА). Этот метод был разработан

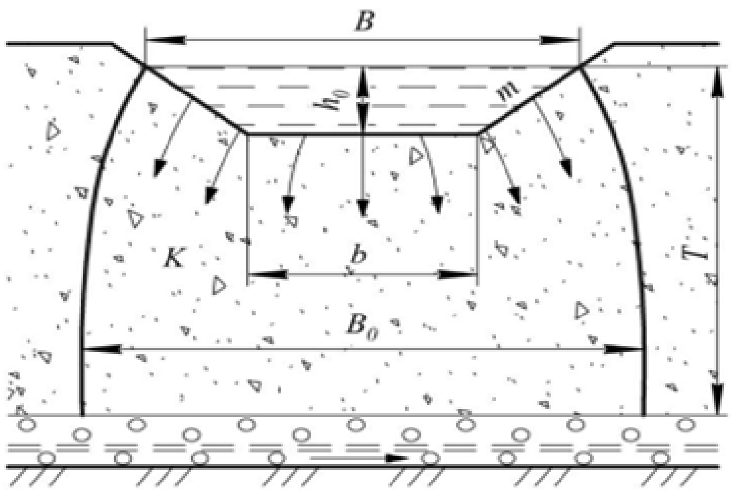

Рис. 1 Схема - свободного фильтрации подземных вод

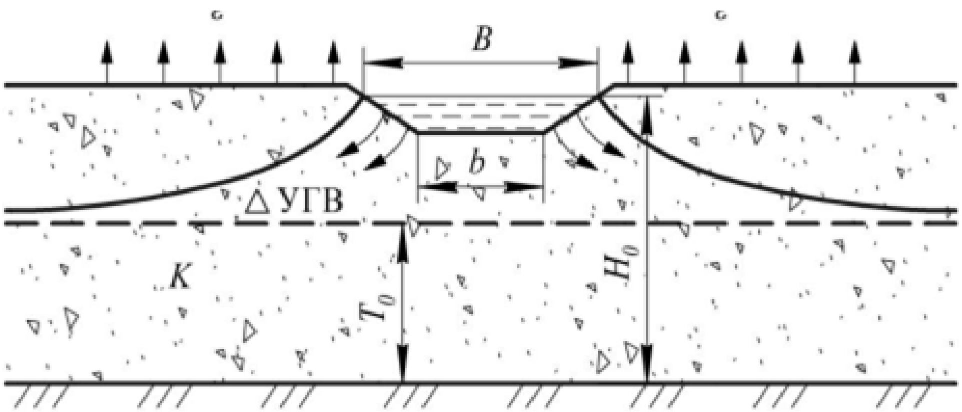

Рис. 2 Схема - подпертая фильтрация подземных вод

академиком Н.Н. Павловским [3]. В дальнейшем метод нашел широкое применение при изучении фильтрации на масштабных моделях ЭГА в период 1920–2000 гг., когда на многих реках строились гидроэлектростанции и требовалось их моделирование на масштабных моделях. Помимо метода ЭГДА, используются также метод графического построения гидродинамической сетки движения фильтрационного потока и расчет по теоретическим формулам. Таким образом, движение грунтовых вод при установившейся фильтрации подчиняется закону (1) Дарси:

$$U_{\text{ф}} = k_{\text{ф}} \cdot J = k_{\text{ф}} \frac{dH}{dS},$$

где $U_{\text{ф}}$ – средняя скорость фильтрации, м/сут; $k_{\text{ф}}$ – коэффициент фильтрации грунта, м/сут; $J = -\frac{dH}{dS}$ – градиент фильтрации, который характеризуется изменением действующего напора (dH) к длине потока на единицу длины (dS).

К формулам, не учитывающим действие капиллярных сил, относится зависимость А.Н. Костякова для установившегося движения свободной фильтрации [4]:

$$Q_{\text{ф}} = k_{\text{ф}} l \left(b + 2h_0\sqrt{1+m^2} \right), \tag{2}$$

где l – длина участка канала, м.

Из (2) Н.Н. Павловский получил формулу для криволинейного русла канала или полигонального сечения, которые близки между собой по очертанию

$$Q_{\text{ф}} = k_{\text{ф}} l \left(B + 2h_0\right). \tag{3}$$

В (3) ширина канала по урезу воды В, м, определяется по выражению:

$$B = b + 2mh_0.$$

Б.К. Ризенкампф предложил формулу для трапецеидального сечения с учетом параметра

$$Q_{\text{ф}} = k_{\text{ф}} l \mu \left(B + 2h_0\right). \tag{4}$$

В (4), где μ – коэффициент, зависящий от отношения B/h и m, принимаемый по табличным данным

В.В. Ведерников привел формулу для трапециевидного сечения с учетом параметра

$$Q_{\text{ф}} = k_{\text{ф}} l \left(B + A\bar{h}\right). \tag{5}$$

В (5), где – коэффициент, зависящий от отношения B/h_0 и m, принимаемый по табличным данным, h – высота, м, принимаемая при малых значениях B/h_0 по зависимости:

$$\bar{h} = h_0 + ah_k,$$

где α – коэффициент, принимаемый в пределах α Т 0,75...1,0; h_K – высота капиллярного поднятия воды, м.

Б.К. Ризенкампф с использованием условия В.В. Ведерникова на свободной поверхности получил решение задачи для канала нулевой глубины шириной В, м, с учетом действия капиллярных сил. После вывода формулы для трапецеидального сечения она получит вид:

$$Q_{\text{ф}} = k_{\text{ф}} l \mu \lambda \left(B + 2h_0\right). \tag{6}$$

В (6), где λ – коэффициент, учитывающий несимметрию расположения стоков; μ – коэффициент, определяемый по зависимости:

$$\frac{1}{\mu} = 1 - \frac{1}{1,5\left(1 + B/2h_0\right)} + \frac{1}{D(1 + B/2h_0)^3}.$$

Н.Н. Веригин решил аналогичную задачу при замене канала нулевой глубиной с точечным источником. Для определения расхода фильтрационного потока он предложил использовать работы Н.Н. Веригина 1949 г. Решение Н.Н. Веригина при $h_K/B = 0$ приводится к фильтрации из канала без учета капиллярных сил в виде:

$$Q_0 = 2k_{\text{ф}} \cdot B.$$

При этом если в формулу расхода ввести поправку на действие капиллярных сил, то получим расход

$$Q_{\text{ф}} = \lambda_1 Q_0,$$

где λ_1 – функция отношения h_k/B, определяется по таблице работы Ю.М. Косиченко

А.Н. Костяков учел действие капиллярных сил с использованием поправочного коэффициента $\gamma > 1$ к площади поверхности откосов канала после их удлинения. Отсюда формула А. Н. Костякова получит вид:

$$Q_{\text{ф}} = k_{\text{ф}} l \left(b + 2\gamma h_0 \sqrt{1 + m^2} \right). \tag{7}$$

В (7), где γ – поправочный коэффициент на капиллярное боковое поглощение воды в откосы ($\gamma = 1.1, ..., 1.4$). При этом, чем больше капиллярность грунта, тем больше коэффициент поправки.

Теперь учтем капиллярную водопроницаемость и приведенный расход для капиллярной зоны. Свободная фильтрация из каналов будет зависеть от водопроницаемости не полностью насыщенной капиллярной зоны. Она сильно отличается от водопроницаемости зоны грунтовых вод. Поэтому внесем поправки в расчетные зависимости, где учитываем поправки на действие капиллярных сил, и тогда принимаем вместо полной высоты капиллярного поднятия:

$$Q_0 = k_b \cdot \left(B + 2\,\bar{h} \right),$$

где k_b – коэффициент водопроницаемости.

Формула Б.К. Ризенкампфа

$$Q_{\text{ф}} = k_{\text{ф}} l \mu \lambda \left(B + 2h_0 \right).$$

Формула Н. Н. Павловского – Н.Н. Веригина

$$Q_{\text{ф}} = k_{\text{ф}} l \lambda_1 \left(B + 2h_0 \right).$$

Формула А.Н. Костякова при $\bar{h} = h_0 + 0,3h_k$.

$$Q_{\text{ф}} = k_B l \left(b + 2h_0 \sqrt{1 + m^2} \right).$$

Ниже будет показано, что наиболее хорошо отражает явление свободной фильтрации формула, которая может быть записана в виде

$$Q_{\text{ф}} = k_{\text{ф}} l \left[1 + (0,5h_k/B) \right] \cdot \left(B + 2h_0 \right).$$

Фильтрационные потери из необлицованных каналов при установившейся подпертой фильтрации и близком залегании уровня грунтовых вод как на рисунке 3 определяются по зависимости С.Ф. Аверьянова [5]:

$$Q_{\text{ФПОД}} = 2k_f \left(H_0 - T_0 \right) \cdot T_{\text{ср}} \alpha \beta \lambda / L_0. \tag{8}$$

В (8), где $Q_{\text{ФПОД}}$ – фильтрационный расход при подпертой фильтрации, м^2 /сут; Q – фильтрационный расход при подпертой фильтрации; $H_0 - T_0$ превышение уровня воды в канале над уровнем грунтовых вод, м; $T_{\text{ср}} = 0,5 \left(H_0 - T_0 \right) + T_1 + \alpha_1 h_k$ – средняя мощность потока грунтовых вод с учетом капиллярной проницаемости, м; T_1 – глубина залегания уровня грунтовых вод в дренаже, м; α_1 – коэффициент учета капиллярной проницаемости, принимаемый равным 0,3; β – коэффициент, учитывающий висячесть дрен; L_0 – расстояние между естественными понижениями или дренажем, м.

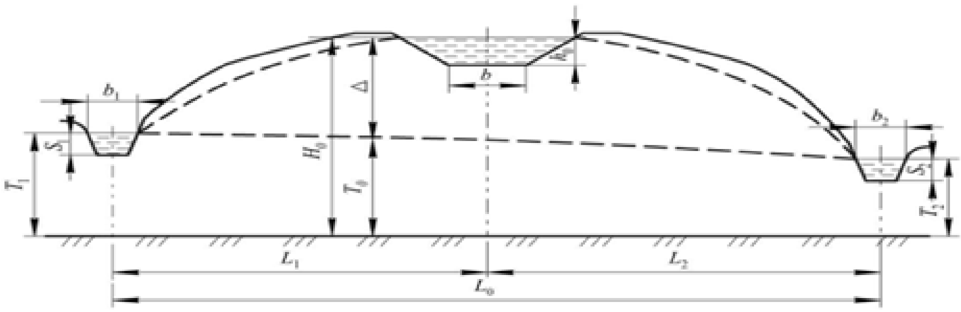

Рис. 3 Схема подпертой фильтрации из канала в естественные понижения

Подпор уровня грунтовых вод в канале над поверхностью грунтовых вод (Δ) в условиях подпертойфильтрации на дренированной территории определяется по зависимости:

$$\Delta = \sqrt{T_0 + \frac{Q'_{\text{ф}} L_0}{\alpha\beta k_{\text{ф}}}} - T_0.$$

2 Дифференциальные уравнения фильтрации подземных вод

Закономерности движения подземных вод описываются дифференциальными уравнениями. Они позволяют сделать количественную оценку параметров движения при решении конкретных гидрогеологических задач. Для получения основных дифференциальных уравнений фильтрации и их решения необходимо знание следующих уравнений, описывающих условия движения подземных вод:

- Уравнения движения (определяет закон фильтрации);
- Уравнение состояния жидкости в пористой среде (закон сохранения энергии);
- Уравнения неразрывности потока (закон сохранения массы).

Для визуального пояснения дальнейших переменных и их символов ниже изображена условно область фильтрации и ее разбивка на элементарные участки (элементарные объемы), состоящие из слоев, столбцов и рядов.

Уравнение движения подземных вод. Из линейного уравнения движения Эйлера для идеальной жидкости пренебрегая силами инерции можно получить уравнения для компонент скорости:

$$v_x = -k\frac{\partial H}{\partial x}, \quad v_y = -k\frac{\partial H}{\partial y}\,, \;\; v_z = -k\frac{\partial H}{\partial z}. \tag{9}$$

Эта система (9) представляет собой закон Дарси, выраженный в дифференциальной форме в частных производных. В общем виде это можно записать через вектор скорости $\vec{v}$:

$$\vec{v} = -k \cdot grad\, H. \tag{10}$$

В (10), $grad\, H$ – вектор градиента пьезометрического напора H. Учитывая связь между коэффициентами фильтрации k и проницаемости

$$k\prod \cdot \left(k = \gamma\frac{k_{\Pi}}{\mu'}\right),$$

а также между давлением P и напором H ($H = \frac{P}{\gamma}$), выражение (10) принимает вид, используемый в нефтяной гидрогеологии:

$$v_x = -\frac{k_{\Pi}}{\mu'} \cdot \frac{\partial P}{\partial x}, \quad v_y = -\frac{k_{\Pi}}{\mu'} \cdot \frac{\partial P}{\partial y}, \quad v_z = -\frac{k_{\Pi}}{\mu'} \cdot \left(\frac{\partial P}{\partial z} + \gamma\right). \tag{11}$$

В (11) уравнение состояния. В практике плотность жидкости γ и динамический коэффициент вязкости μ' – зависят от давления и температуры, тогда состояние жидкости запишем в виде

$$\frac{\gamma}{\mu'} = f\left(P, t^0\right). \tag{12}$$

С учетом возможного изменения в (12) объема порового пространства (и активной пористости) n_a при изменении давления, уравнение состояния пористой среды примет вид:

$$n_a = f\left(P\right). \tag{13}$$

В (13) будем считать, что подземная вода и пористая среда несжимаемы и изотропны. Плотность воды γ постоянна и активная пористость – неизменна, т.е.

$$\gamma = const,\ n_a = const.$$

При этом разность пьезометрического напора становится основной действующей силой несжимаемой жидкости в несжимаемой пористой среде.Режим фильтрации при таких условиях называют водонапорным (либо жестким водонапорным).

Уравнение неразрывности потока. Подземный поток воды движется без образования в нем пустот и разрыва сплошности. При этом он подчиняется уравнению неразрывности, который отражает закон сохранения массы движущейся воды.
Для жесткого режима фильтрации уравнение неразрывности имеет вид:

$$\frac{\partial\left(\rho v_x\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(\rho v_y\right)}{\partial y} + \frac{\partial\left(\rho v_z\right)}{\partial z} = 0.$$

Для установившейся фильтрации в плоскости xy уравнение упрощается:

$$\frac{\partial\left(\rho v_x\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(\rho\, v_y\right)}{\partial y} = 0.$$

Основные уравнения фильтрации подземных вод. Получение основных дифференциальных уравнений фильтрации подземных вод производят двумя методами:

• (1) Метод синтеза трех рассмотренных видов уравнений – уравнения движения подземных вод, (2) уравнения неразрывности потока и (3) уравнения состояния жидкости и пористой среды;

• Балансовым методом, который рассматривает изменение баланса элементов потока подземных вод.

Так, например, при жестком режиме фильтрации уравнения движения потока воды при соблюдении линейного закона Дарси имеют вид:

$$v_x = -k_x\frac{\partial H}{\partial x}, \quad v_y = -k_y\frac{\partial H}{\partial y}\,,\ \ v_z = -k_z\frac{\partial H}{\partial z}. \tag{14}$$

При этом жидкость и пористая среда несжимаемы

$$\gamma = const,\ n = const.$$

Уравнение неразрывности при этом запишется в виде:

$$\frac{\partial\, v_x}{\partial x} + \frac{\partial\, v_y}{\partial y} + \frac{\partial\, v_z}{\partial z} = 0.$$

Подставив сюда компоненты скорости из (14), имеем дифференциальное уравнение фильтрации:
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k_x\frac{\partial H}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k_y\frac{\partial H}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k_z\frac{\partial H}{\partial z}\right)=0. \qquad (15)$$

Это (15) простейшее уравнение носит название уравнение Лапласа.

Значение капиллярного действия и процессов впитывания в слоистых пористых средах невозможно переоценить. В работе [6] авторы подчеркивают, что интерфейсы между различными слоями вносят дополнительное сопротивление потоку, что усложняет моделирование потока грунтовых вод. Их выводы показывают, что эффективные состояния напряжения и динамика потока в значительной степени зависят от геометрической конфигурации этих интерфейсов, особенно когда они не параллельны уровню грунтовых вод. Это понимание имеет решающее значение для точного моделирования движения грунтовых вод и прогнозирования поведения загрязняющих веществ в многослойных системах.

Влияние неоднородности на поток жидкости дополнительно подчеркивается хаотическим динамическим подходом, предложенным в работе [7]. Их исследование предполагает, что нелинейные факторы, присущие неоднородным средам, могут приводить к значительным отклонениям от традиционных моделей потока, что требует использования теории динамических систем для лучшего учета сложностей движения грунтовых вод. Эта точка зрения согласуется с выводами [8], которые исследовали нелинейную эволюцию фильтрационной консолидации в почвах, демонстрируя, как низкая проницаемость может усугублять отклонения от линейных прогнозов потока.

3 Обзор математических моделей процесса фильтрации подземных вод

Начнем с того, что основные принципы течения жидкости в пористых средах часто описываются законом Дарси, который предполагает линейную зависимость между гидравлическим градиентом и скоростью потока. Однако в многослойных гетерогенных системах это предположение часто не выполняется, что требует использования нелинейных моделей. Например, в работе [9] рассматривает многопараметрическую математическую модель, которая учитывает сложность фильтрации жидкости как в однослойных, так и в многослойных пористых средах, подчеркивая необходимость более тонкого подхода для учета изменений свойств жидкости и характеристик среды.

Математически эта задача формулируется следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x^a\frac{hk\left(x\right)}{\mu}\chi\left(\frac{|\Delta u|}{\beta}\right)\right)\frac{\partial u}{\partial x}=$$
$$=M\left(x,t,u\right)\frac{\partial u}{\partial t}+\theta\frac{\partial v}{\partial z}|_{z=h_1}+f\left(x,t\right),\ t>0,\ x\in D_1,$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{K\left(z\right)}{v_1}\frac{\partial v}{\partial z}\right)=M_1\left(\bar{x},\ z,t\right)\frac{\partial v}{\partial t},\ t>0,\ z\in D_2,$$

с начальными условиями

$$u\left(x,\bar{z},0\right)=V\left(\bar{x},z,0\right)=u_0\left(x,z\right),$$

граничные условия

$$a_1 \frac{x^{\overline{a}} hk(x)}{\mu b} \chi \left(\frac{|\nabla u|}{\beta} \right) \frac{\partial u}{\partial x} |_{x=x_0} + b_1 u(x, \overline{z}, t) |_{x=x_0} = \varphi_0(x_0, t), \ t > 0,$$

$$\frac{x^{\overline{a}} hk(x)}{\mu b} \chi \left(\frac{|\nabla u|}{\beta} \right) \frac{\partial u}{\partial x} |_{x=x_L} = \varphi_L(x_L, t), \ t > 0.$$

Эта модель служит основой для понимания того, как нелинейная динамика может влиять на процессы фильтрации в неоднородных средах.

В дополнение к численному моделированию, исследование нелинейной динамики в системах грунтовых вод было продвинуто с помощью различных инновационных методов. Например, в исследование [10] о переходе от Дарси к нелинейному потоку в неоднородных пористых средах подчеркивает важность понимания изменений режима потока, которые происходят при различных гидравлических условиях. Этот переход имеет решающее значение для точного моделирования потока грунтовых вод и переноса загрязнений, поскольку он влияет на скорость и распределение загрязняющих веществ в недрах.

Взаимодействие между различными слоями пористой среды также играет ключевую роль в формировании процессов фильтрации. Например, работа [11] представляет новый бессеточный подход граничного типа для моделирования переходных потоков в неоднородных слоистых пористых средах. Этот метод позволяет бесшовно интегрировать условия непрерывности на интерфейсах, что необходимо для точного моделирования динамики грунтовых вод в многослойных системах. Такие достижения в методах моделирования имеют решающее значение для улучшения нашего понимания процессов подпитки и загрязнения грунтовых вод.

Двумерное уравнение диффузии, используемое для описания переходных потоков, выражается следующим образом:

$$\frac{\partial^2 h(r, \theta, t)}{\partial r^2} + \frac{\partial h(r, \theta, t)}{r \partial r} + \frac{\partial^2 h(r, \theta, t)}{r^2 \partial \theta^2} = \frac{S_s}{k} \frac{\partial h(r, \theta, t)}{\partial t}, \ (r, \theta, t) \in \Omega_t. \tag{16}$$

В (16), где h – полный напор, r – радиус, t – время, q – полярный угол, S_s – удельная объемная емкость, k – гидравлическая проводимость, а W_t – пространственно-временная область. Для моделирования переходных течений в пористой среде требуются начальные и граничные условия, как указано ниже:

$$h = H_0(r, \theta, t = 0), \ (r, \theta, t) \in \Omega_t,$$

$$h = H_D(r, \theta, t = 0), \ (r, \theta, t) \in \partial\Omega_t,$$

$$h_n = \frac{\partial h}{\partial n} = H_N(r, \theta, t = 0), \ (r, \theta, t) \in \partial\Omega_t.$$

Кроме того, влияние биокольматажа и переменной пористости на динамику фильтрации было исследовано в [12]. Их выводы показывают, что биологическое засорение может значительно изменить проницаемость пористой среды, тем самым влияя на общую эффективность фильтрации. Этот аспект особенно актуален в контексте управления грунтовыми водами, где поддержание оптимальных условий потока имеет важное значение для устойчивого использования ресурсов.

В области моделирование процессов фильтрации грунтовых вод имеет решающее значение для оценки воздействия загрязняющих веществ на качество воды. Исследование [13] по влиянию скорости откачки на перенос загрязняющих веществ в системах фильтрации на берегу реки дает ценную информацию о том, как гидравлические условия влияют на миграцию загрязняющих веществ.

$$S_s\frac{\partial h}{\partial t}=K\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}-\frac{q}{Q_0\left(1-\frac{x}{L+x}\right)}S_s e^{-\frac{\beta}{R_e}}+\lambda_0 C_e.$$

Их математическая модель объединяет уравнения потока грунтовых вод с уравнениями концентрации коллоидов, подчеркивая взаимосвязь гидравлических и процессов переноса загрязняющих веществ.

Применение передовых вычислительных методов, таких как метод конечных элементов, также оказалось полезным при решении сложных задач нелинейной фильтрации [14] использовали этот подход для изучения упругой фильтрации в почвах с тонкими включениями, продемонстрировав, как изменения в условиях сопряжения могут повысить точность численных решений. Эта методологическая строгость имеет важное значение для разработки надежных моделей, которые могут информировать стратегии управления грунтовыми водами.

Рассмотрим процесс упругой фильтрации в неоднородном массиве грунта с тонким включением в одномерном случае, математическая модель которого описывается следующей краевой задачей:

$$\eta\frac{\partial h}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k\left(h,\nabla h\right)\frac{\partial h}{\partial x}\right)+f\left(h,x,t\right),\ x\in\Omega_1\cup\Omega_2,\ t>0; \tag{17}$$

$$h\left(x,t\right)|_{x=1}=h_1(t),\ t\geqslant 0\ ,$$
$$u\left(x,t\right)|_{x=0}=Q(h,t),\ t\geqslant 0\ ,$$
$$h\left(x,0\right)=h_0\left(x\right),\ x\in[0;\xi]\cup[\xi;l]\ ,$$

$$u^{\pm}\Bigg|_{x=\xi}=-\frac{[h]}{\int\limits_0^d\frac{dx}{k^{\gamma}(h,\nabla h)}}\ ,$$

где

$$k\left(h,\nabla h\right)=\begin{cases}k_1\left(h,\nabla h\right), & x\in\Omega_1,\\ k_2\left(h,\nabla h\right), & x\in\Omega_2,\end{cases}$$

$$\eta=\begin{cases}\eta_1, & x\in\Omega_1,\\ \eta_2, & x\in\Omega_2,\end{cases}$$

$$f\left(h,x,t\right)=\begin{cases}f_1\left(h,x,t\right), & x\in\Omega_1,\\ f_2\left(h,x,t\right), & x\in\Omega_2.\end{cases}$$

В (17), $\Omega 1=(0;\xi)\,,\ \Omega 2=(\xi;1)\,,\ 0<\xi<1;\ h_l(t),\ h_0(x),\ Q(h,t)$ – известные функции, $h(X,t)$ – напор в пористой жидкости; k – коэффициент фильтрации; $f(X,t)$ – функция, задающая интенсивность внутренних источников (стоков) жидкости. Коэффициент η называется коэффициентом упругой емкости горных пород.

Более того, исследование эффектов памяти в пористых средах, как обсуждалось в работе [15], вносит дополнительный уровень сложности в моделирование транспортных процессов. Их исследование связанных транспортных процессов с терминами памяти предполагает, что исторические условия потока могут влиять на текущую динамику фильтрации, что требует переоценки традиционных подходов к моделированию.

Численное моделирование играет ключевую роль в понимании нелинейных процессов фильтрации. Например, авторы в работе [16] разработали математическую модель для изучения фильтрации жидкости в трехслойных взаимодействующих пористых пластах. Их подход использует двухжидкостную модель для захвата динамики взвешенных веществ, показывая, как различные механизмы, такие как захват и мобилизация, влияют на транспорт частиц в многослойных системах. Это исследование подчеркивает важность численных методов для обеспечения понимания поведения жидкостей в сложных геологических условиях.

Более того, влияние пространственной неоднородности на время реакции грунтовых вод было исследовано [17]. Его исследование иллюстрирует, как изменения в гидравлической проводимости пористой среды могут привести к значительным различиям во времени реакции, при этом области, близкие к границам, демонстрируют более длительное время достижения устойчивого состояния. Это открытие подчеркивает необходимость пространственно распределенных моделей, которые могут учитывать присущую пористым средам изменчивость:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\sigma_x\frac{\partial h}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\sigma_y\frac{\partial h}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\sigma_z\frac{\partial h}{\partial z}\right)=-f\left(r,\,t\right), \tag{18}$$

которое представляет поток грунтовых вод в неоднородном анизотропном водоносном горизонте, это уравнение решается для получения потенциального скалярного поля напора h, из которого мы определяем скорости и направления потока из конкретного вектора расхода. В случае устойчивого потока в однородном изотропном и ограниченном водоносном горизонте закон непрерывности или сохранения гарантирует, что (18) сводится к уравнению Лапласа.

Произвольные изменения уровня воды приводят к взаимодействию двух слоев гидродинамических состояний подземных вод. В таких условиях необходимо обращать внимание на взаимодействие минерализованных вод с пластами от границ залегания грунтовых вод в пластах. Поведение подземных вод в таких условиях можно описать с помощью следующей системы уравнений в частных производных [18]:

$$\left.\begin{aligned}&\mu\frac{\partial h}{\partial t}=-k_b\frac{h-H}{m}+f-\omega,\\&\mu^*\frac{\partial H}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(T\frac{\partial H}{\partial x}\right)-k\frac{H-h}{m}.\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

В (19), где $h(x,t)$, $H(x,t)$ – уровни поверхностных и напорных вод; μ, μ^* – коэффициенты водоотдачи (водоненасыщенности) в верхних и нижних слоях; m – прочность слоя; k_b, k – коэффициенты фильтрации верхнего и нижнего слоев; T – фильтрационная проницаемость основного горизонта; f – внешние факторы; ω – испарение.

Для детального и всестороннего изучения процесса изменения уровня грунтовых вод и концентрации солей необходимо разработать усовершенствованную математическую модель, описывающую основные характеристики объекта. Для мониторинга и прогнозирования геофильтрационных процессов с помощью математического моделирования, а также разработки предложений и рекомендаций данная задача выражается в виде системы нелинейных дифференциальных уравнений следующего вида:

$$\left.\begin{aligned} &\mu\frac{\partial h}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(kh\frac{\partial h}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(kh\frac{\partial h}{\partial y}\right)+f-\omega,\\ &\mu h\frac{\partial \theta}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(Dh\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(Dh\frac{\partial \theta}{\partial y}\right)-v_x h\frac{\partial \theta}{\partial x}-v_y h\frac{\partial \theta}{\partial y}+f\theta_f. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

В (20), здесь $h(x,y,t)$ – уровень поверхностных вод; μ – коэффициент водоотдачи; k – коэффициент фильтрации; f – внешние факторы; ω – испарение; $\theta(x,y,t)$ – концентрация соли; v_x, v_y – скорости фильтрации; D – коэффициент диффузии; θ_f – концентрация солей (из инфильтрационных вод).

Система уравнений (2) решается на основе следующих начальных и граничных условий:

$$h(x,y,t_0)=h_0,\ \theta(x,y,t_0)=\theta_0,\ t=t_0,$$

граничные условия:

$$\begin{aligned} kh\frac{\partial h}{\partial x}\bigg|_{x=0}&=-\lambda(h-h_0),\ kh\tfrac{\partial h}{\partial x}\big|_{x=L}=\lambda(h-h_0),\\ kh\frac{\partial h}{\partial y}\bigg|_{y=0}&=-\lambda(h-h_0), kh\frac{\partial h}{\partial y}\bigg|_{y=L}=\lambda(h-h_0),\\ \mu h\frac{\partial \theta}{\partial x}\bigg|_{x=0}&=-(\theta-\theta_0), \mu h\frac{\partial \theta}{\partial x}\bigg|_{x=L}=(\theta-\theta_0),\\ \mu h\frac{\partial \theta}{\partial y}\bigg|_{y=0}&=-(\theta-\theta_0), \mu h\frac{\partial \theta}{\partial y}\bigg|_{y=L}=(\theta-\theta_0), \end{aligned}$$

где h_0 – начальное значение уровня поверхностной воды; λ – коэффициент массопередачи через расчетную границу; t_0– время начала; θ_0 – начальное значение концентрации солей в водоносном горизонте.

В статье [19] рассматривается информационное обеспечение системы моделирования гидрогеологических процессов на основе технологии географических информационных систем (ГИС) для обработки пространственно распределенной информации с учетом опыта создания геобазы данных ресурсов подземных вод. Геофильтрации подземных вод взаимосвязь между грунтовыми водами и подповерхностными водами выражается с помощью уравнения Буссинеска следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} &\mu\frac{\partial h}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k_1 m\frac{\partial h}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k_1 m\frac{\partial h}{\partial y}\right)+\eta W,\\ &\mu\frac{\partial H}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k_2 m\frac{\partial H}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k_2 m\frac{\partial H}{\partial y}\right)-\eta W_1. \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

В (21), здесь $h\,(x,y,t)$, $H\,(x,y,t)$ – уровень грунтовых вод; $m=\Delta h-h_0=\Delta H-H_0$ прочность слоя; μ – коэффициент водоотдачи; k_1, k_2 – коэффициенты фильтрации; W_1 – скважен.

$$h\left|_{t=0}\right.=h_0, H\left|_{t=0}\right.=H_0,$$

граничные условия:

$$
\begin{gathered}
m\frac{\partial h}{\partial x}\bigg|_{x=0} = -(h-h_0),\ m\frac{\partial h}{\partial x}\bigg|_{x=L} = (h-h_0),\\
m\frac{\partial h}{\partial y}\bigg|_{y=0} = -(h-h_0),\ m\frac{\partial h}{\partial y}\bigg|_{y=L} = (h-h_0),\\
m\frac{\partial H}{\partial x}\bigg|_{x=0} = -(H-H_0),\ m\frac{\partial H}{\partial x}\bigg|_{x=L} = (H-H_0),\\
m\frac{\partial H}{\partial y}\bigg|_{y=0} = -(H-H_0),\ \mu h\frac{\partial H}{\partial y}\bigg|_{y=L} = (H-H_0),
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
H\left|_{x=m+0} = h\right|_{x=m-0}\ ,\quad H\left|_{y=m+0} = h\right|_{y=m-0},\\
k_2 m\frac{\partial H}{\partial x}\left|_{x=m+0} = k_1 m\frac{\partial h}{\partial x}\right|_{x=m-0},\ k_2 m\frac{\partial H}{\partial y}\left|_{y=m+0} = k_1 m\frac{\partial h}{\partial y}\right|_{y=m-0},
\end{gathered}
$$

где h_0 , H_0 – начальные значения уровней грунтовых вод.

Интеграция стохастических элементов в модели потока грунтовых вод также набирает обороты. В работе [20] подчеркиваются необходимость более стохастических терминов при моделировании неустойчивого потока грунтовых вод в неоднородных водоносных горизонтах. Их выводы показывают, что включение изменчивости гидравлической проводимости может привести к более точным прогнозам поведения грунтовых вод, особенно в сложных геологических условиях.

В условиях острого дефицита водных ресурсов вопросы водоснабжения населения, особенно в экологически неблагополучных зонах Средней Азии, Хивы, Бухары, в том числе на территориях Каракалпакстана, становятся особенно актуальными. Одним из основных источников хозяйственно-питьевого водоснабжения населения в таких условиях являются подземные воды, образующиеся при строительстве подземных водозаборов.

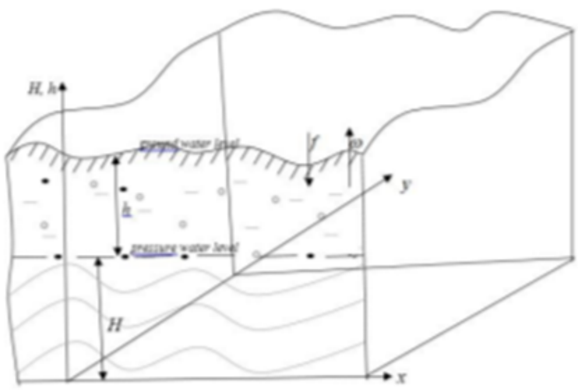

Рис. 4 Схематическое изображение объекта исследования.

При математическом моделировании мониторинга и прогнозирования уровня подземных вод и гидродинамических процессов, происходящих в них, с учетом взаимодействия внешних факторов: испарения и инфильтрации, изучаемый объект схематически представлен в виде, показанном на рис. 4. По результатам анализа гидрогеологических условий территорию по возобновлению подземных вод (ПВВ) в геофильтрационном отношении следует рассматривать как двухслойную в среде, состоящую из двух водоносных горизонтов. Принятые условия прогнозирования изменения уровня

грунтовых вод (грунтовых и напорных водоносных горизонтов) в процессе фильтрации дают основание представить математическую модель объекта в виде системы нелинейных уравнений в частных производных:
Принятые условия прогнозирования изменения уровня грунтовых вод (грунтовых и напорных водоносных горизонтов) в процессе фильтрации дают основание представить математическую модель объекта в виде системы нелинейных уравнений в частных производных [21]:

$$\left.\begin{aligned} \mu_1 n_0 \frac{\partial h}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(k_1 m \frac{\partial h}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k_1 m \frac{\partial h}{\partial y}\right) + f - \omega, \\ \mu_2 \frac{\partial H}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(k_2 m \frac{\partial H}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k_2 m \frac{\partial H}{\partial y}\right) - \eta Q. \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

В (22), где $h(x,y,t)$, $H(x,y,t)$ – уровни грунтовых и напорных вод; μ – коэффициент водоотдачи. m – мощность разделительного слоя; $k_1, k_2,$ – коэффициенты фильтрации верхнего и нижнего слоев; Q – расход; f – внешний источник; w – испарение; n_0 – активная пористость грунта в соответствующих зонах. n – коэффициент приведения модели к размерному виду

$$h\left|_{t=0}\right. = h_0,\ H\left|_{t=0}\right. = H_0,$$

$$\mu_1 m \frac{\partial h}{\partial x}\bigg|_{x=0} = -(h - h_0),\ \mu_1 m \frac{\partial h}{\partial x}\bigg|_{x=L_x} = (h - h_0),$$

$$\mu_1 m \frac{\partial h}{\partial y}\bigg|_{y=0} = -(h - h_0),\ \mu_1 m \frac{\partial h}{\partial y}\bigg|_{y=L_y} = (h - h_0),$$

$$\mu_2 m \frac{\partial H}{\partial x}\bigg|_{x=0} = -(H - H_0), \mu_2 m \frac{\partial H}{\partial x}\bigg|_{x=L_x} = (H - H_0),$$

$$\mu_2 m \frac{\partial H}{\partial y}\bigg|_{y=0} = -(H - H_0), \mu_2 m \frac{\partial H}{\partial y}\bigg|_{y=L_y} = (H - H_0),$$

$$H\left|_{x=m+0}\right. = h\left|_{x=m-0}\right.,\quad H\left|_{y=m+0}\right. = h\left|_{y=m-0}\right.,$$

$$k_2 m \frac{\partial H}{\partial x}\left|_{x=m+0}\right. = k_1 m \frac{\partial h}{\partial x}\left|_{x=m-0}\right.,\ k_2 m \frac{\partial H}{\partial y}\left|_{y=m+0}\right. = k_1 m \frac{\partial h}{\partial y}\left|_{y=m-0}\right.,$$

где h, H – начальные значения уровней грунтовых и напорных вод.

Как показывает анализ тематической научной литературы, в этом направлении уже получен ряд значительных результатов теоретического и практического характера. Тем не менее, по-прежнему имеют место определенные пробелы в знаниях и необходимость в дальнейшем развитии методологии математического моделирования, позволяющей комплексно анализировать процессы движения и изменения химического состава грунтовых и напорных вод, а также оценивать и прогнозировать мелиоративное состояние сельскохозяйственных земель.

С учетом актуальности рассматриваемой научной проблемы, целью и задачей дальнейшего исследования выше указанной проблемы является разработке новых и усовершенствовании существующих математических моделей и численных алгоритмов решения задач движения подземных вод в многослойных пористых средах с учётом влияния различных факторов на изменения уровня подземных вод и концентрации солей в них, а также поддержки принятия решений по управлению водным режимом сельскохозяйственных угодий.

4 Заключение

В заключение следует отметить, что математическое моделирование нелинейных процессов фильтрации в многослойных неоднородных пористых средах является многогранным начинанием, требующим всестороннего понимания динамики жидкости, явлений переноса и взаимодействия между различными слоями пористых материалов. Интеграция передовых математических моделей, численного моделирования и инновационных вычислительных методов имеет важное значение для точного отражения сложностей этих систем. Поскольку исследования в этой области продолжают развиваться, будет крайне важно усовершенствовать существующие модели и разработать новые методологии, которые могут решать проблемы, связанные с неоднородным и нелинейным поведением в системах грунтовых вод.

Литература

[1] *Dassargues A.* Hydrogeology. First Edition // Boca Raton (USA): Taylor Francis, 2019.

[2] *Baev O.A.* Calculations of steady free seepage from unlined canals // L. Reclam. Hydraul. Eng. – 2022. – No. 3.

[3] *Павловский Н.Н.* Неравномерное движение грунтовых вод. – Ленинград: КУБУЧ, 1932. – 80 с.

[4] *Костяков А.Н.* Основы мелиораций. – М.: СЕЛЬХОЗГИЗ, 1938. – 747 с.

[5] *Abdrazakov F.K. et al.* Theoretical studies of filtration from irrigation channels // L. Reclam. Hydraul. Eng. – 2024. – Vol. 14, No. 4. – P. 390-402.

[6] *Suo S., Liu M., Gan Y.* Modelling Imbibition Processes in Heterogeneous Porous Media // Porous Media. – 2019. – Vol. 126, No. 3. – P. 615-631.

[7] *Zhang C. et al.* A chaotic dynamical approach to simulate heterogeneous groundwater flow movement // 3rd Int. Conf. on Comp. Sys. and Com. (ICCSC 2017). – 2017.

[8] *Michuta O.R., Martyniuk P.M.* Nonlinear Evolutionary Problem of Filtration Consolidation With the Non-Classical Conjugation Condition // J. Optim. Differ. Equations Their Appl. – 2022. – Vol. 30, No. 1.

[9] *Kayumov S. et al.* A multiparameter mathematical model for the problem of nonlinear filtration of fluids in two-layer media // J. Phys. Conf. Ser. – 2024. – Vol. 2697, No. 1.

[10] *Arbabi S., Sahimi M.* The Transition from Darcy to Nonlinear Flow in Heterogeneous Porous Media: I—Single-Phase Flow // Transp. Porous Media. – 2024. – Vol. 151, No. 4. – P. 795-812.

[11] *Ku C.Y. et al.* 2020. Modeling Transient Flows in Heterogeneous Layered Porous Media Using the Space–Time Trefftz Method // Appl. Sci. – 2021. – Vol. 11, No. 8.

[12] *Natalia I., Petro M., Olga M.* Mathematical model of filtration under conditions of variable porosity taking into account biocolmatage // Model. Control Inf. Technol. – 2020. – No. 4. – P. 43-46.

[13] *Abubakar A.D. et al.* Mathematical Modeling of Effect of Pumping Rate on Contaminant Transport in Riverbank Filtration System // J. Appl. Sci. Environ. Manag. – 2021. – Vol. 25, No. 2. – P. 199-208.

[14] *Michuta O. et al.* A finite-element study of elastic filtration in soils with thin inclusions // Eastern-European J. Enterp. Technol. – 2020. – Vol. 5, No. 5(107). – P. 41-48.

[15] *Benes M., Pazanin I.* Homogenization of degenerate coupled transport processes in porous media with memory terms // Math. Methods Appl. Sci. – 2019. – Vol. 42, No. 18. – P. 6227-6258.

[16] *Ravshanov N. et al.* Numerical study of fluid filtration in three-layer interacting pressure porous formations // E3S Web Conf. – 2021. – Vol. 264. – 01018.

[17] *Simpson M.J.* Calculating Groundwater Response Times for Flow in Heterogeneous Porous Media // Groundwater. – 2018. – Vol. 56, No. 2. – P. 337-342.

[18] *Равшанов Н.* Математическое моделирование изменения уровня грунтовых вод в двухслойных средах // J. Innov. RESEACH Econ. – 2022. – Vol. 1, No. 1.

[19] *Djumanov J.X. et al.* Development Of A Hydrogeological Simulation Model Of Geofiltration Processes In Regional Aquifers Of Fergana Valley // IEEE Int. Conf. on Infor. Sci. and Commu. Tech. (ICISCT). – 2019. – P. 1-5.

[20] *Cayar M., Kavvas M.L.* Ensemble average and ensemble variance behavior of unsteady, one-dimensional groundwater flow in unconfined, heterogeneous aquifers: an exact second-order model // Stoch. Environ. Res. Risk Assess. – 2009. – Vol. 23, No. 7. – P. 947-956.

[21] *Daliev S. et al.* Numerical study of filtration process of ground and pressure waters in multilayer porous media // IOP Conf. Ser. Mater. Sci. Eng. – 2020. – Vol. 896, No. 1. – 012069.

Поступила в редакцию 11.02.2025

UDC 519.6

STUDY AND ANALYSIS OF MATHEMATICAL MODELS OF GROUNDWATER FILTRATION PROCESSES IN MULTILAYER HETEROGENEOUS POROUS MEDIA

[1*]***Ravshanov N.***, [1]***Sadullayev S.***, [3]***Shadmanova K.U.***, [2]***Jurabaev Kh.A.***

*ravshanzade-09@mail.ru

[1]Digital Technologies and Artificial Intelligence Development Research Institute,
17A, Buz-2, Tashkent, 100125 Uzbekistan;
[2]Ministry of Digital Technologies of the Republic of Uzbekistan,
4, Ibrohim Muminov str., Tashkent, 100164, Uzbekistan;
[3]Bukhara State University,
705018, Muhammad Ikbol 11, Bukhara, Uzbekistan.

Modeling of nonlinear filtration processes in multilayer heterogeneous porous media is a complex area that combines various mathematical and physical principles to understand the dynamics of fluid in porous structures. The complexity of these processes is influenced by the heterogeneity of the medium, the nonlinear nature of the fluid flow and the interaction between different layers of porous materials. The paper presents a detailed analysis of the obtained fundamental and applied research in the field of groundwater filtration in homogeneous, heterogeneous and multilayer porous media based on the laws of A. Darcy, J. Dupuis, N.E. Zhukovsky, F. Forchheimer and others.

Keywords: mathematical model, filtration, groundwater, heterogeneous porous medium.

Citation: Ravshanov N., Sadullayev S., Shadmanova K.U., Jurabaev Kh.A. 2025. Study and analysis of mathematical models of groundwater filtration processes in multilayer heterogeneous porous media. *Problems of Computational and Applied Mathematics.* 1(63): 41-56.

ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

№ 1(63) 2025

Журнал основан в 2015 году.
Издается 6 раз в год.

Учредитель:
Научно-исследовательский институт развития цифровых технологий и искусственного интеллекта.

Журнал зарегистрирован в Агентстве информации и массовых коммуникаций при Администрации Президента Республики Узбекистан.
Регистрационное свидетельство №0856 от 5 августа 2015 года.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

Адрес редакции:
100125, г. Ташкент, м-в. Буз-2, 17А.
Тел.: +(998) 712-319-253, 712-319-249.
Э-почта: journals@airi.uz.
Веб-сайт: https://journals.airi.uz.

Дизайн и вёрстка:
Шарипов Х.Д.

Отпечатано в типографии НИИ РЦТИИ.
Подписано в печать 28.02.2025 г.
Формат 60x84 1/8. Заказ №1. Тираж 100 экз.

PROBLEMS OF COMPUTATIONAL AND APPLIED MATHEMATICS

No. 1(63) 2025

The journal was established in 2015.
6 issues are published per year.

Founder:
Digital Technologies and Artificial Intelligence Development Research Institute.

The journal is registered by Agency of Information and Mass Communications under the Administration of the President of the Republic of Uzbekistan.
The registration certificate No. 0856 of 5 August 2015.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

Address:
100125, Tashkent, Buz-2, 17A.
Tel.: +(998) 712-319-253, 712-319-249.
E-mail: `journals@airi.uz`.
Web-site: `https://journals.airi.uz`.

Layout design:
Sharipov Kh.D.

DTAIDRI printing office.
Signed for print 28.02.2025
Format 60x84 1/8. Order No. 1. Printed copies 100.

Содержание

Contents

№ 1(63) 2025

ISSN 2181-8460

HISOBLASH VA AMALIY MATEMATIKA MUAMMOLARI

ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

PROBLEMS OF COMPUTATIONAL AND APPLIED MATHEMATICS

RAQAMLI TEXNOLOGIYALAR VA
SUN'IY INTELLEKTNI RIVOJLANTIRISH
ILMIY-TADQIQOT INSTITUTI