

УДК 519.622.2

ОСЦИЛЛЯТОР ФИТЦХЬЮ-НАГУМО С ПЕРЕМЕННОЙ НАСЛЕДСТВЕННОСТЬЮ И ВНЕШНИМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ*

¹*Алимова Н.Б.,* ^{2*}*Паровик Р.И.*

*parovik@ikir.ru

¹Ташкентский государственный университет экономики,
Узбекистан, г. Ташкент, Ислама Каримова, 49;²Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН,
Россия, Камчатский край, с. Паратунка, ул. Мирная, д. 7.

В статье исследуются осциллограммы и фазовые траектории нелинейного осциллятора ФитцХью-Нагумо с переменной наследственностью (дробный осциллятор ФитцХью-Нагумо), построенные с помощью численного алгоритма нелокальной явной конечно-разностной схемы первого порядка точности. Модельное уравнение для дробного осциллятора ФитцХью-Нагумо содержит производные дробных переменных порядков типа Герасимова-Капуто, а также функцию внешнего воздействия, которые зависят от времени. Для нелокальной конечно-разностной схемы с помощью правила Рунге и компьютерных экспериментов дается оценка вычислительной точности. Показано, что при увеличении узлов расчетной сетки вычислительная точность стремится к теоретическим оценкам. Далее в статье проводится исследование динамических режимов дробного осциллятора ФитцХью-Нагумо с помощью бифуркационных диаграмм. Показано, что регулярные режимы могут характеризоваться не только релаксационными колебаниями, но и затухающими. Тип режима зависит от значений параметров внешнего воздействия, а также от значений начальных условий. Показано также, что предельные циклы не всегда могут быть устойчивыми. Были построены бифуркационные диаграммы, которые подтвердили динамику, полученную с помощью осциллограмм и фазовых траекторий.

Ключевые слова: дробный осциллятор ФитцХью-Нагумо, осциллограммы, фазовые траектории, нелокальная явная конечно-разностная схема, предельный цикл, устойчивость, бифуркационная диаграмма.

Цитирование: Алимова Н.Б., Паровик Р.И. Осциллятор ФитцХью-Нагумо с переменной наследственностью и внешним воздействием // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2025. – № 1(63). – С. 5-16.

1 Введение

В работах 60-ых годов Р. ФитцХью [1] и Дж. Нагумо [2] была предложена математическая модель (осциллятор ФитцХью-Нагумо) для описания возбуждения нервного импульса в мембране. Модель описывает быструю и медленную динамику двух переменных — "возбуждающей" переменной (автоколебания), которая характеризует мембранный потенциал в биологической возбудимой ткани и "восстанавливающей" переменной, отвечающей за ток восстановления. Модель являлась упрощенной версией ранее известной модели Ходжкина-Хаскли [3] и широко используются в нейробиологии для описания активации и деактивации нейронов.

*Работа выполнена в рамках государственного задания ИКИР ДВО РАН №124012300245-2.

Необходимо отметить, что существует модель ФитцХью-Нагумо [1], которая учитывает пространственное распространение возбуждения нейронов, что позволяет изучать пространственно-временные паттерны в нейронных системах. Такие модели описываются уравнениями в частных производных диффузионного типа [4].

В настоящей работе мы будем изучать модель ФитцХью-Нагумо, которая описывает возбуждение нейрона в биологических тканях с учетом наследственности. Наследственность — это свойство динамической системы помнить о оказанном на нее воздействии. Это воздействие проявляется не сразу, а с течением некоторого времени. С точки зрения математики такие системы с наследственностью можно описать с помощью интегро-дифференциальных уравнений с разностными ядрами — функциями памяти.

В случае, если функции памяти являются степенными, то мы можем перейти к понятию дробной производной и соответственно к дробным дифференциальным уравнениям [5]. Осцилляторы, которые описываются с помощью дробных дифференциальных уравнений будем называть дробными осцилляторами.

Первые работы по исследованию дробного осциллятора ФитцХью-Нагумо были проведены в статьях [6–8]. В этих работах была построена математическая модель ФитцХью-Нагумо в терминах дробной производной Герасимова-Капуто постоянного порядка [9, 10], исследованы количественные и качественные свойства решения предложенной модели.

Статья [11] была посвящена дальнейшему развитию дробной математической модели ФитцХью-Нагумо, предложенной в статьях [6–8], которое заключалось в учете переменных по времени порядков дробных производных типа Герасимова-Капуто и интенсивности раздражителя. Было показано с помощью компьютерных экспериментов, что в этом случае существуют предельные циклы, которые могут быть устойчивыми.

Целью настоящей работы является дальнейшее продолжение исследования осциллограмм и фазовых траекторий при различных значениях параметров и функций в модельном уравнении дробного осциллятора ФитцХью-Нагумо, а также исследование численного алгоритма его решения.

2 Постановка задачи

Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\begin{aligned} \partial_{0t}^{\alpha(t)} x(t) - c(x^2(t) + p) \partial_{0t}^{\beta(t)} x(t) + qx(t) + gx^3(t) &= a + bz(t), \\ x(0) &= k_1, \quad \dot{x}(0) = k_2, \end{aligned} \quad (1)$$

где a, b, c — константы, удовлетворяющие условиям $1 - 2b/3 < a < 1, 0 < b < 1, b < c^2$, $x(t) \in C^2[0, T]$ — мембранный потенциал, $q, g > 0$ — заданные константы, $z(t) \in C[0, T]$ — функция внешнего воздействия, которая отвечает за интенсивность раздражителя, $t \in [0, T]$ — время рассматриваемого процесса, $T > 0$ — время моделирования, k_1, k_2 — константы, которые определяют начальные условия, операторы дробных производных переменных порядков имеют вид:

$$\partial_{0t}^{\alpha(t)} x(t) = \frac{1}{\Gamma(2 - \alpha(t))} \int_0^t \frac{\ddot{x}(\tau) d\tau}{(t - \tau)^{\alpha(t)-1}}, \quad \partial_{0t}^{\beta(t)} x(t) = \frac{1}{\Gamma(1 - \beta(t))} \int_0^t \frac{\dot{x}(\tau) d\tau}{(t - \tau)^{\beta(t)}},$$

понимаются в смысле типа Герасимова-Капуто [9, 10], порядки которых $1 < \alpha(t) < 2, 0 < \beta(t) < 1$ являются функциями из класса $C[0, T]$. Свойства производных дробных переменных порядков можно изучить в обзорных статьях [12, 13].

Задачу Коши (1) мы будем называть дробным осциллятором ФитцХью-Нагумо. Он описывает нелинейные автоколебания с учетом переменной наследственности и внешнего воздействия.

Замечание 1. Отметим, что в случае, когда $\alpha(t), \beta(t), z(t)$ являются константами мы приходим к результатам, полученным в работах [6–8]. В случае, когда $\alpha(t) = \beta(t) = 1$ и $z(t)$ является константой, то мы переходим к классическому осциллятору ФитцХью-Нагумо [1, 2].

Замечание 2. Классический осциллятор ФитцХью-Нагумо относится к классу автоколебательных систем типа Льенара [14]. Поэтому для таких систем существует единственный устойчивый предельный цикл [15]. Для дробного осциллятора ФитцХью-Нагумо нет строгого доказательства существования и единственности устойчивого предельного цикла. Однако с помощью компьютерных экспериментов в статье [11] было показано, что дробный осциллятор ФитцХью-Нагумо может обладать единственным устойчивым предельным циклом.

Замечание 3. Отдельный интерес представляет исследование вопроса существования и единственности задачи Коши (1). Для широкого класса нелинейных дробных осцилляторов с постоянной наследственностью эти вопросы были изучены в статье [16].

3 Методика решения

В качестве численного метода возьмем нелокальную явную конечно-разностную схему первого порядка точности.

На равномерной сетке с числом узлов N и шагом дискретизации $\tau = T/N$ введем следующую схему ($x_k, \alpha_k, \beta_k, z_k$ – сеточные функции):

$$\begin{aligned} x_1 &= k_1 + \tau k_2, \quad k = 0, \\ x_2 &= \frac{1}{A_1 + cB_1(x_1^2 + p)}(a + bz_1 + (2A_1 + cB_1(x_1^2 + p) - q)x_1 - x_1^3g - A_1x_0), \quad k = 1, \\ x_{k+1} &= \frac{1}{A_k + cB_k(x_k^2 + p)}(a + bz_k + (2A_k + cB_k(x_k^2 + p) - q)x_k - x_k^3g - A_kx_{k-1} - \\ &\quad - B_kc(x_k^2 + p) \sum_{j=1}^{k-1} \left((j+1)^{1-\beta_k} - j^{1-\beta_k} \right) (x_{k-j+1} - x_{k-j}) - \\ &\quad - A_k \sum_{j=1}^{k-1} \left((j+1)^{2-\alpha_k} - j^{2-\alpha_k} \right) (x_{k-j+1} - 2x_{k-j} + x_{k-j-1})). \end{aligned} \quad (2)$$

$$A_k = \frac{\tau^{\alpha_k}}{\Gamma(3-\alpha_k)}, \quad B_k = \frac{\tau^{\beta_k}}{\Gamma(2-\beta_k)}, \quad \Gamma(\cdot) - \text{гамма-функция}, \quad k = 2, \dots, N-1.$$

Полученная схема (2) является нелокальной явной конечно-разностной схемой. Схема является условно-устойчивой и сходится с первым порядком [17].

Проведем исследование вычислительного порядка сходимости с помощью тестовых примеров. Расчеты далее проводились в среде компьютерной математики Maple2021 [18, 19].

Для этой цели мы будем использовать правило Рунге или метод двойного пересчета для вычислительной точности численного алгоритма (2) по формуле:

$$p = \log_2(\xi_j/\xi_{j+1}), \quad (3)$$

где $\xi = \max_i |x_i - x_{2i}|$ — погрешность, x_i — численное решение, вычисленное на шаге τ по схеме (2), x_{2i} — численное решение, вычисленное на шаге $\tau/2$ по схеме (2), j — индекс, число итераций.

Пример 1. Функции в системе (1) выберем следующими:

$$\alpha(t) = \alpha_0 - M_1 \frac{t}{T}, \beta(t) = \beta_0 - M_2 \frac{t}{T}, z(t) = z_0 + \varphi \sin(\omega t). \quad (4)$$

Значения параметров системы (1) выберем следующими: $\alpha_0 = 2; \beta_0 = 1; M_1 = 0,01; M_2 = 0,08; \varphi = \omega = 1; z_0 = -0,4; c = 3; a = 0,7; b = 0,8; k_1 = k_2 = 0; t \in [0, 1]$.

Используя правило Рунге (3) для нелокальной явной конечно-разностной схемы (2), мы получаем табл. 1.

Таблица 1 Вычислительная точность схемы (2)

N	τ	ξ	p
10	1/10	0,04596925928	-
20	1/20	0,02466742450	0,8980623262
40	1/40	0,01296627572	0,9278429369
80	1/80	0,006679309148	0,9569933608
160	1/160	0,003395670861	0,9760022634
320	1/320	0,001713143027	0,9870510222

Из табл. 1 мы видим, что порядок вычислительной точности p стремиться к единице при увеличении узлов расчетной сетки N , то есть

$$\lim_{N \rightarrow \infty} p = 1.$$

Пример 2. Функция интенсивности раздражителя $z(t) = \varphi e^{-\omega t}$, а остальные функции в (4) и значения параметров выберем из предыдущего примера. Результаты расчетов приведены в табл. 2.

Таблица 2 Вычислительная точность схемы (2)

N	τ	ξ	p
10	1/10	0,05174310207	-
20	1/20	0,02754676861	0,9094834556
40	1/40	0,01439778613	0,9360360989
80	1/80	0,007390819205	0,9620408057
160	1/160	0,003750274089	0,9787382439
320	1/320	0,001890368496	0,9883285477

Из табл. 2 также мы видим, что порядок вычислительной точности p стремится к теоретическому.

Пример 3. Функции в системе (1) имеют вид:

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= \alpha_0 - M_1 \cos(\varphi_1 t + f_1), \\ \beta(t) &= \beta_0 - M_2 \cos(\varphi_2 t + f_2), \quad z(t) = z_0 + \varphi \sin(\omega t). \end{aligned} \quad (5)$$

Таблица 3 Вычислительная точность схемы (2)

N	τ	ξ	p
10	1/10	0,04019458435	-
20	1/20	0,02083873083	0,9477337178
40	1/40	0,01054792732	0,9823078785
80	1/80	0,005223358112	1,013910013
160	1/160	0,002550333241	1,034291848
320	1/320	0,001235108874	1,046047550

Результаты расчетов приведены в табл. 3.

Из табл. 3 мы можем заметить, что погрешность ξ уменьшается примерно в 2 раза при уменьшении в 2 раза шага дискретизации τ , а порядок вычислительной точности близок к единице.

Исходя из выше сказанного мы подтвердили с помощью тестовых приверов, что численная схема (2) имеет первый порядок точности. В настоящей статье нас будет устраивать такой порядок точности для схемы (2), поэтому мы далее ее будем использовать при исследовании динамических режимов.

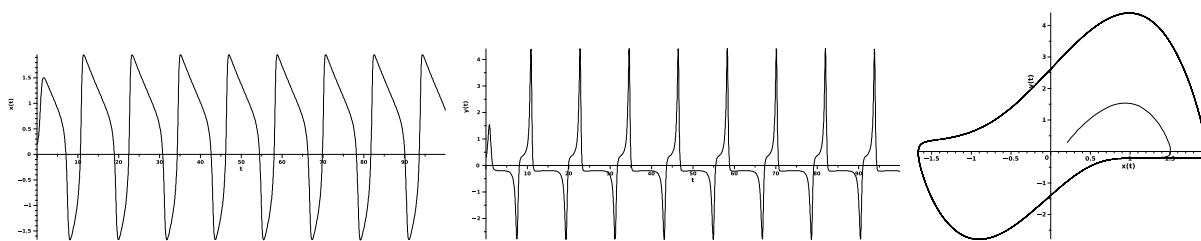
В силу того, что явная схема является условно устойчивой, то мы будем выбирать шаг дискретизации таким, чтобы выполнялось условие устойчивости согласно статье [17].

4 Результаты моделирования

Рассмотрим некоторые примеры с целью исследования динамических режимов дробного осциллятора Фитц-Хью-Нагумо (1). Визуализация результатов проводилась в среде компьютерной математики Maple2021, а также Python.

Пример 4. (Классический осциллятор ФитцХью-Нагумо [1]) Функции в системе (1) выберем в виде (4). Значения параметров: $\alpha_0 = 2; \beta_0 = 1; M_1 = M_2 = \varphi = 0; \omega = 1; c = 3; a = 0,7; b = 0,7; k_1 = 0,2; k_2 = 0,3; z_0 = -0,4; t \in [0, 100]; N = 3000$.

Результаты расчетов приведены на рис. 2 по нелокальной конечно-разностной схеме (2) в виде осциллограмм и фазовой траектории.

**Рис. 1** Осциллограммы и фазовая траектория для примера 4

На рис. 1 приведены типичные осциллограммы и фазовая траектория классического осциллятора ФитцХью-Нагумо [1], здесь $y(t) = \dot{x}(t)$ скорость изменения мембранного потенциала. Фазовая траектория выходит на предельный цикл (аттрактор), который является единственным и устойчивым [15].

Необходимо отметить, что параметры a и b влияют на колебательные режимы осциллятора, например, могут быть затухающие колебания (рис. 2).

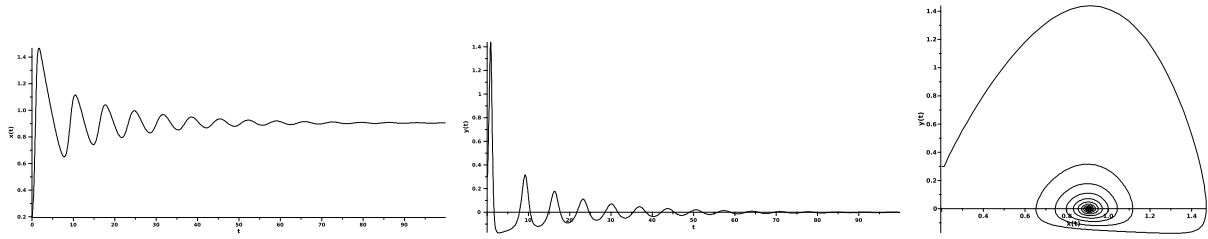


Рис. 2 Осциллограммы и фазовая траектория для примера 4 при $a = 0,7$ и $b = 0,8$

Пример 5. (Дробный осциллятор ФитцХью-Нагумо [6]). Функции в системе (1) выберем в виде (5). Значения параметров: $\alpha_0 = 1,8$; $\beta_0 = 0,9$; $M_1 = M_2 = \varphi = 0$; $\omega = 1$; $c = 3$; $a = 0,7$; $b = 0,5$; $k_1 = 0,2$; $k_2 = 0,3$; $t \in [0, 100]$; $N = 3000$.

Результаты расчетов по численной схеме (2) приведены на рис. 3.

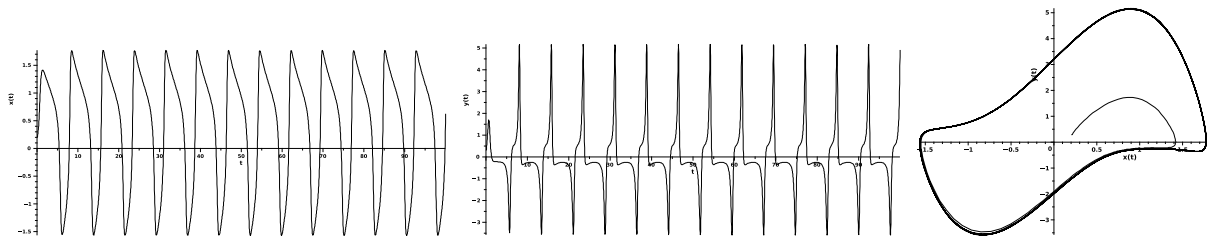


Рис. 3 Осциллограммы и фазовая траектория для примера 5

Видно, что осциллограммы и фазовые траектории на рис. 1 и рис. 3 отличаются. Как показали авторы работы [6] предельный цикл в этом случае, может быть устойчивым (рис. 4).

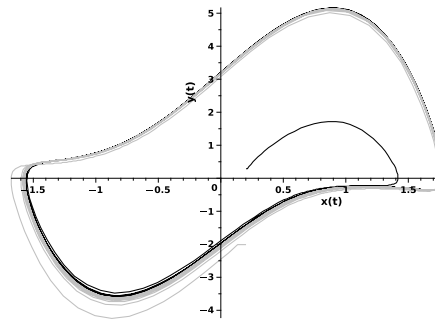


Рис. 4 Устойчивость предельного цикла для примера 5 при различных начальных условиях $(0, 2; 0, 3)$ и $(0, 2; -2)$.

Однако устойчивость предельного цикла существует не всегда. Приведем следующий контрпример (рис. 5).

Мы на рис. 5 видим, что фазовая траектория, которая начинается внутри предельного цикла $(0, 2; 0, 3)$ выходит на это предельный цикл со временем, однако фазовая траектория, которая начинается вне этого предельного цикла $(4, 0, 3)$ выходит на устойчивый фокус. Обычно, про такой предельный цикл говорят, что он полустойчивый.

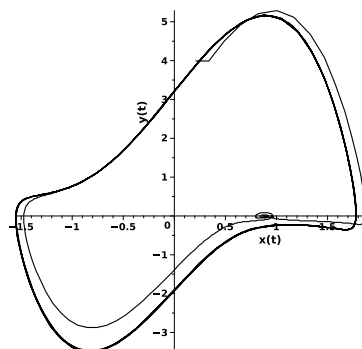


Рис. 5 Неустойчивость предельного цикла для примера 5 при различных начальных условиях $(0, 2; 0, 3)$ и $(0, 2; 4)$.

Пример 6. (Дробный осциллятор ФитцХью-Нагумо (1)). Значения параметров выберем следующими: $\alpha_0 = 1, 8$; $\beta_0 = 0, 9$; $M_1 = 0$; $M_2 = \omega = 1$; $\varphi = 0, 01$; $c = 3$; $a = 0, 7$; $b = 0, 5$; $k_1 = 0, 2$; $k_2 = 0, 3$; $t \in [0, 100]$; $N = 3000$.

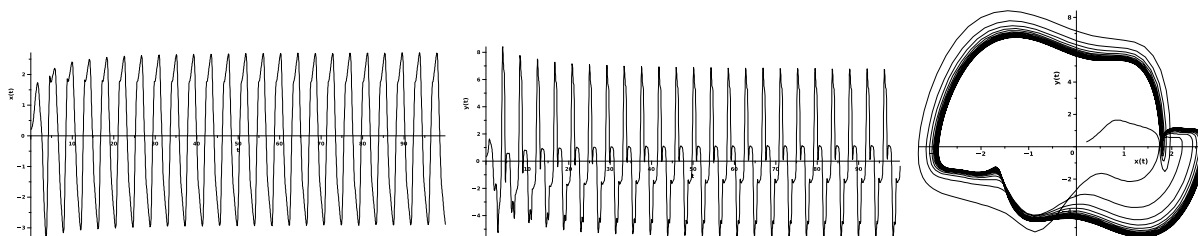


Рис. 6 Осциллограммы и фазовая траектория для примера 6

На рис. 6 приведены расчетные кривые осциллограмм и фазовая траектория. Видно, что предельный цикл имеет принципиально другую и более сложную форму. Интересно отметить, что этот предельный цикл будет являться полуустойчивым (рис. 7).

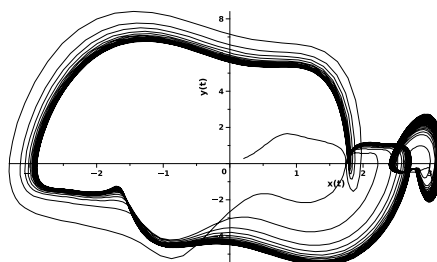


Рис. 7 Неустойчивость предельного цикла для примера 6 при различных начальных условиях $(0, 2; 0, 3)$ и $(3; 2)$.

Мы видим на рис. 7, что фазовая траектория, которая начинается вне предельного цикла выходит на совершенно другой предельный цикл.

Пример 7. (Построение бифуркационных диаграмм.) Кривые называют бифуркационными диаграммами, если они показывают как может измениться динамика (решение), рассматриваемой системы при изменении значений ее ключевых параметров из заданного диапазона.

Приведем пример, когда бифуркационная диаграмма описывает смену динамических режимов. В примере 4 на рис. 1 и рис. 2 были построены в зависимости от различных значений параметра b два регулярных режима: первый соответствует предельному циклу (рис. 1), а второй — устойчивому фокусу (рис. 2). Поэтому имеет определенный смысл построить бифуркационную диаграмму для зависимости $x(b)$. Выберем диапазон изменения значений параметра b из отрезка $[0, 1]$ с шагом $h = 1/1000$. Это означает, что для каждого значения параметра b мы решаем по численному алгоритму (2) задачу Коши (1) и таких значений ровно 1000. Такая процедура увеличивает вычислительную нагрузку, поэтому мы для построения бифуркационной диаграммы воспользуемся языком программирования Python в системе PyCharm [20] (рис. 8).

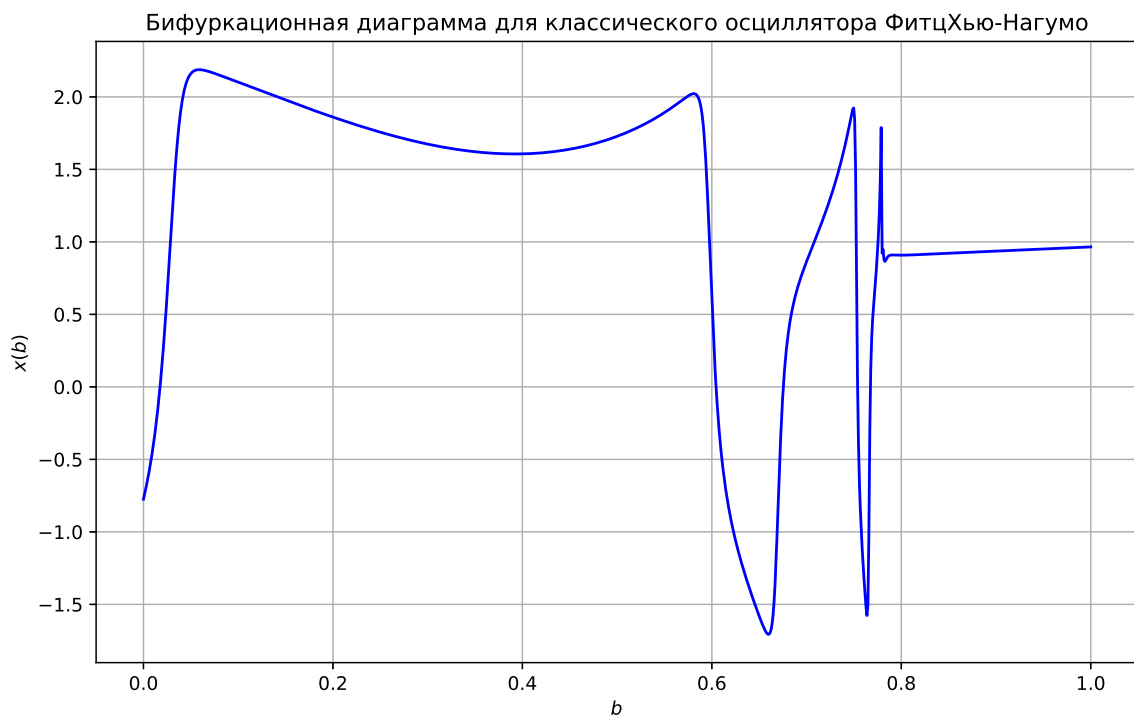


Рис. 8 Бифуркационная диаграмма $x(b)$ для классического осциллятора ФитцХью-Нагумо примера 4

На бифуркационной диаграмме видно, что есть два участка кривой, когда x сильно меняется $b \in [0; 0,782]$ и когда меняется незначительно (прямолинейно) $b \in [0,783; 1]$. Рис. 1 был построен при $b = 0,5$, что привело нас к предельному циклу, а рис. 2 — при $b = 0,8$, что соответствует устойчивому фокусу.

Приведем другой более общий пример. Для примера 6 выберем следующие значения $M_1 = 0,1$ и $\varphi = 1$. На рис. 9 приведена для этого случая фазовая траектория.

На рис. 10 приведены бифуркационные диаграммы для $x(z)$, $x(\alpha)$, $x(\beta)$ и для $y(z)$, $y(\alpha)$, $y(\beta)$.

Несмотря на сложную динамику, фазовая траектория (рис. 8) выходит на предельный цикл. Расчетные кривые зависимости решения $x(t)$ от функций $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $z(t)$ так же показывают, что регулярность динамического режима определяется до-

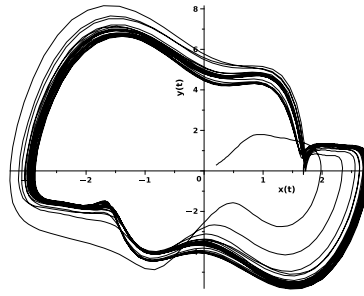


Рис. 9 Неустойчивость предельного цикла для примера 6 при различных начальных условиях $(0, 2; 0, 3)$ и $(3; 2)$.

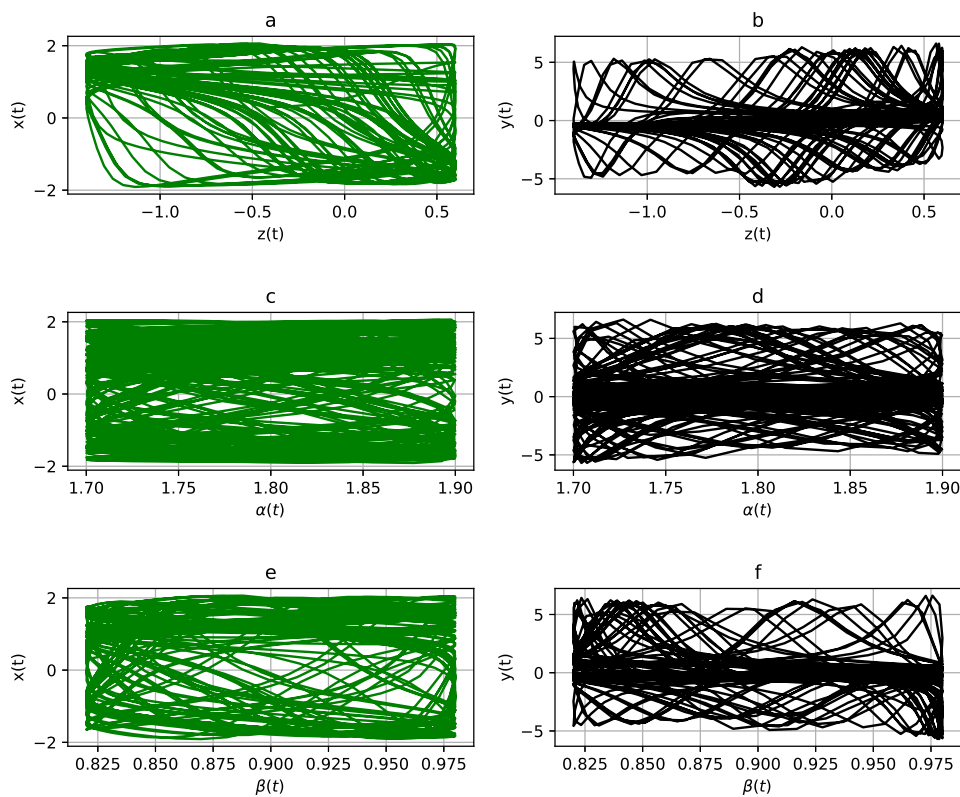


Рис. 10 Неустойчивость предельного цикла для примера 6 при различных начальных условиях $(0, 2; 0, 3)$ и $(3; 2)$.

статочным плотным заполнением некоторой конечной области на координатной плоскости на рис. 9, что также подтверждается результатами статьи [21].

5 Заключение

В статье предложена модель дробного осциллятора ФитцХью-Нагумо с переменной памятью и функцией внешнего воздействия. С помощью численного алгоритма нелокальной явной конечно-разностной схемы первого порядка точности. Показано с помощью правила Рунге и тестовых примеров, что вычислительная точность метода стремиться к теоретическому значению порядка точности. Приведены примеры

работы вычислительной схемы при различных значениях модельного уравнения, а также начальных значений. Показано, что полученные при расчетах фазовые траектории как правило выходят на предельный цикл, который может быть устойчивым. Однако эта устойчивость существует не всегда.

Вопрос строгого обоснования существования и единственности устойчивого предельного цикла пока остается открытым. Для более строго определения условий существования и единственности предельного цикла, а также его устойчивости необходимы аналоги теорем Ляпуна [14] и Бендиксона [22]. Однако результаты, полученные в статье позволяют применять дробный осциллятор ФитцХью-Нагумо для описания автоколебательных процессов, например, микросейсмических колебаний [23] или для описания эффекта острого резонанса в сейсмологии [24].

Дальнейшее развитие исследований может быть связано с построением карт динамических режимов, что является достаточно трудоемкой в вычислительном плане задачей. Подобные задачи могут быть решены на вычислительном сервере с привлечением методов параллельного программирования [25].

Литература

- [1] *FitzHugh R.* Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane // *Biophysical Journal*, – 1961. – no1. – P. 446–446.
- [2] *Nagumo J., Arimoto S., Yoshizawa S.* An active pulse transmission line simulating nerve axon // *Proc. Ire.*, – 1962. – no 50. – P. 2061–2070.
- [3] *Hodgkin A.L., Huxley A.F.* A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve // *J Physiol.*, — 1952. – no 117(4). – P. 500–544. doi: <http://dx.doi.org/10.1113/jphysiol.1952.sp004764>.
- [4] *Казарников А.В., Ревина С.В.* Монотонная неустойчивость в системе ФитцХью-Нагумо с диффузией // *Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Естественные науки*, – 2018. – № 4(200). – С. 18–24.
- [5] *Нахушев А.М.* Дробное исчисление и его применение. — М.: Физматлит, 2003. 272 с.
- [6] *Lipko O.D.* Mathematical model of propagation of nerve impulses with regard hereditarity // *Vestnik KRAUNC. Fiziko-Matematicheskie Nauki*, – 2017. – no. 1(17). – P. 33–43. doi: <http://dx.doi.org/10.18454/2079-6641-2017-17-1-33-43>.
- [7] *Lipko O.D., Parovik R.I.* Some aspects of investigation of limit cycles of Fitzhugh-Nagumo oscillator with degree memory // *Journal of Physics: Conference Series*, – 2018. – vol. 1141. 012125. doi: <http://dx.doi.org/10.1088/1742-6596/1141/1/012125>.
- [8] *Lipko O.D., Parovik R.I.* The study of chaotic and regular regimes of the fractal oscillators FitzHugh-Nagumo // *E3S Web of Conferences*, – 2018. – vol. 62. 02017. doi: <http://dx.doi.org/10.1051/e3sconf/20186202017>.
- [9] *Novozhenova O.G.* Life And Science of Alexey Gerasimov, One of the Pioneers of Fractional Calculus in Soviet Union // *FCAA*, – 2017. – vol. 20. – P. 790–809. doi: <http://dx.doi.org/10.1515/fca-2017-0040>.
- [10] *Caputo M., Fabrizio M.* On the notion of fractional derivative and applications to the hysteresis phenomena // *Meccanica*, – 2017. – vol. 52. – P. 3043–3052. doi: <http://dx.doi.org/10.1007/s11012-017-0652-y>.
- [11] *Алимова Н.Б.* Математическое моделирование автоколебаний нейрона в клеточной мембране с использованием дробной модели ФитцХью-Нагумо с функцией интенсивности раздражителя // *Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки*, – 2017. – Т. 48. № 3 – P. 59–69. doi: <http://dx.doi.org/10.26117/2079-6641-2024-48-3-56-69>.

- [12] *Sun H., Chang A., Zhang, Y. et al.* A Review on Variable-Order Fractional Differential Equations: Mathematical Foundations, Physical Models, Numerical Methods and Applications // FCAA, – 2019. – no. 22. P. 27–59. doi: <http://dx.doi.org/10.1515/fca-2019-0003>.
- [13] *Patnaik S., Hollkamp J. P., Semperlotti F.* Applications of variable-order fractional operators: A review // Proc. R. Soc. A R. Soc. Publ. – 2020. – no. 476. – P. 20190498. doi: <http://dx.doi.org/10.1098/rspa.2019.0498>.
- [14] *Liénard A.* Etude des oscillations entretenues // Revue générale de l'électricité, – 1928. – no. 23. – P. 901–912.
- [15] *Perko L.* Differential Equations and Dynamical System. Vol. 7. — Heidelberg: Springer Science & Business Media, – 2013. – 557 p.
- [16] *Паровик Р.И.* Существование и единственность задачи Коши для фрактального нелинейного уравнения осциллятора // Узбекский математический журнал. – 2017. – № 4. – С. 110–118.
- [17] *Parovik R.I.* Explicit Finite-Difference Scheme for the Numerical Solution of the Model Equation of Nonlinear Hereditary Oscillator with Variable-Order Fractional Derivatives // Archives of Control Sciences, – 2016. – vol. 26. – no. 3. – P. 429–435. doi: <http://dx.doi.org/10.1515/acsc-2016-002>.
- [18] *Liengme B.V.* Maple: A Primer. — London, UK: IOP Concise Physics, – 2019. – 171 p. doi: <http://dx.doi.org/10.1088/2053-2571/ab0bb3>
- [19] *Imokrane J.F.* Bien débiter en MAPLE. — Toulouse, French: CEPADUES, – 2023. – 200 p.
- [20] *Van Horn B.M. II, Nguyen Q.* Hands-On Application Development with PyCharm: Build Applications like a Pro with the Ultimate Python Development Tool. — Birmingham, UK: Packt Publishing Ltd., – 2023. – 652 p.
- [21] *Паровик, Р.И.* Исследование бифуркационных диаграмм дробной динамической системы Селькова для описания автоколебательных режимов микросейсм / Р. И. Паровик // Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки, – 2024. – Т. 49. – №4. – С. 24–35. doi: <http://dx.doi.org/10.26117/2079-6641-2024-49-4-24-35>.
- [22] *Bendixson I.* Sur les courbes définies par des équations différentielles // Acta Math, – 1901. – vol. 24(1), – P. 1–88.
- [23] *Parovik R.I.* Studies of the Fractional Selkov Dynamical System for Describing the Self-Oscillatory Regime of Microseisms // Mathematics, – 2022. – vol. 10. – no. 22. 4208. doi: <http://dx.doi.org/10.3390/math10224208>.
- [24] *Ведяков И.И., Востров В.К.* Аварийные расчетные ситуации и аварийные сейсмические нагрузки // Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений, – 2016. – №5. – С. 33–38.
- [25] *Pin V.P., Skopin I.N.* About performance and intellectuality of supercomputer modeling // Programming and Computer Software, – 2016. – vol. 4. – no. 1. – P. 5–16. doi: <http://dx.doi.org/10.1134/S0361768816010047>.

Поступила в редакцию 13.01.2025

UDC 519.622.2

FITZHUGH-NAGUMO OSCILLATOR WITH VARIABLE HEREDITY AND EXTERNAL FORCING*

¹*Alimova N.B.*, ^{2*}*Parovik R.I.*

*parovik@ikir.ru

¹Tashkent State University of Economics,
Islom Karimov 49, Tashkent, 100066 Uzbekistan;

²Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation FEB RAS,
Mirnaya st., 7, Kamchatka, Paratunka, Russia.

The paper studies oscillograms, phase trajectories and bifurcation diagrams of the nonlinear FitzHugh-Nagumo oscillator with variable heredity (fractional FitzHugh-Nagumo oscillator). The model equation for the fractional FitzHugh-Nagumo oscillator contains derivatives of fractional variables of the Gerasimov-Caputo type, as well as a function of external influence, which depend on time. Local initial conditions are valid for the model equation of the fractional oscillator. Due to the nonlinearity of the fractional FitzHugh-Nagumo oscillator, a numerical algorithm based on a nonlocal finite-difference scheme of the first order of accuracy was used. Then, using the Runge rule and computer experiments, an estimate of the computational accuracy is given. The numerical algorithm was implemented in the Maple 2021 environment for constructing oscillograms and phase trajectories and in Python for constructing bifurcation diagrams. It is shown that with an increase in the nodes of the computational grid, the computational accuracy tends to theoretical estimates. Further in the article the dynamic modes of the fractional FitzHugh-Nagumo oscillator are studied using bifurcation diagrams. It is shown that regular modes can be characterized not only by relaxation oscillations, but also by damped ones. The mode type depends on the values of the external action parameters, as well as on the values of the initial conditions. It is also shown that limit cycles may not always be stable. Bifurcation diagrams were constructed, which confirmed the dynamics obtained using oscillograms and phase trajectories. The question of rigorous justification of the existence of a unique stable limit cycle remains open. For a more rigorous definition of the conditions for the existence and uniqueness of a limit cycle, as well as its stability, analogs of the theorems of Liénard and Bendixson are needed. However, the results obtained in the article allow the fractional FitzHugh-Nagumo oscillator to be used to describe self-oscillatory processes. Further development of research can be associated with the construction of maps of dynamic modes, which is a rather labor-intensive task in computational terms. Such problems can be solved on a computing server using parallel programming methods.

Keywords: fractional FitzHugh-Nagumo oscillator, oscillograms, phase trajectories, nonlocal explicit finite-difference scheme, limit cycle, stability, bifurcation diagram.

Citation: Alimova N.B., Parovik R.I. 2025. FitzHugh-Nagumo oscillator with variable heredity and external forcing. *Problems of Computational and Applied Mathematics*. 1(63): 5-16.

*The work was carried out within the framework of the state assignment of IKIR FEB RAS (no. 124012300245-2).

ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

№ 1(63) 2025

Журнал основан в 2015 году.

Издается 6 раз в год.

Учредитель:

Научно-исследовательский институт развития цифровых технологий и
искусственного интеллекта.

Главный редактор:

Равшанов Н.

Заместители главного редактора:

Азамов А.А., Арипов М.М., Шадиметов Х.М.

Ответственный секретарь:

Ахмедов Д.Д.

Редакционный совет:

Алоев Р.Д., Амиргалиев Е.Н. (Казахстан), Арушанов М.Л., Бурнашев В.Ф.,
Загребина С.А. (Россия), Задорин А.И. (Россия), Игнатъев Н.А.,
Ильин В.П. (Россия), Исмагилов И.И. (Россия), Кабанихин С.И. (Россия),
Карачик В.В. (Россия), Курбонов Н.М., Маматов Н.С., Мирзаев Н.М.,
Мухамадиев А.Ш., Назирова Э.Ш., Нормуродов Ч.Б., Нуралиев Ф.М.,
Опанасенко В.Н. (Украина), Расулмухамедов М.М., Расулов А.С., Садуллаева
Ш.А., Старовойтов В.В. (Беларусь), Хаётов А.Р., Халджигитов А., Хамдамов Р.Х.,
Хужаев И.К., Хужаеров Б.Х., Чье Ен Ун (Россия), Шабозов М.Ш. (Таджикистан),
Dimov I. (Болгария), Li Y. (США), Mascagni M. (США), Min A. (Германия),
Schaumburg H. (Германия), Singh D. (Южная Корея), Singh M. (Южная Корея).

Журнал зарегистрирован в Агентстве информации и массовых коммуникаций при
Администрации Президента Республики Узбекистан.

Регистрационное свидетельство №0856 от 5 августа 2015 года.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

При перепечатке материалов ссылка на журнал обязательна.

За точность фактов и достоверность информации ответственность несут авторы.

Адрес редакции:

100125, г. Ташкент, м-в. Буз-2, 17А.

Тел.: +(998) 712-319-253, 712-319-249.

Э-почта: journals@airi.uz.

Веб-сайт: <https://journals.airi.uz>.

Дизайн и вёрстка:

Шарилов Х.Д.

Отпечатано в типографии НИИ РЦТИИ.

Подписано в печать 28.02.2025 г.

Формат 60x84 1/8. Заказ №1. Тираж 100 экз.

PROBLEMS OF COMPUTATIONAL AND APPLIED MATHEMATICS

No. 1(63) 2025

The journal was established in 2015.
6 issues are published per year.

Founder:

Digital Technologies and Artificial Intelligence Development Research Institute.

Editor-in-Chief:

Ravshanov N.

Deputy Editors:

Azamov A.A., Aripov M.M., Shadimetov Kh.M.

Executive Secretary:

Akhmedov D.D.

Editorial Council:

Aloev R.D., Amirgaliev E.N. (Kazakhstan), Arushanov M.L., Burnashev V.F.,
Zagrebina S.A. (Russia), Zadorin A.I. (Russia), Ignatiev N.A., Ilyin V.P. (Russia),
Ismagilov I.I. (Russia), Kabanikhin S.I. (Russia), Karachik V.V. (Russia), Kurbonov
N.M., Mamatov N.S., Mirzaev N.M., Mukhamadiev A.Sh., Nazirova E.Sh.,
Normurodov Ch.B., Nuraliev F.M., Opanasenko V.N. (Ukraine), Rasulov A.S.,
Sadullaeva Sh.A., Starovoitov V.V. (Belarus), Khayotov A.R., Khaldjigitov A.,
Khamdamov R.Kh., Khujaev I.K., Khujayorov B.Kh., Chye En Un (Russia),
Shabozov M.Sh. (Tajikistan), Dimov I. (Bulgaria), Li Y. (USA), Mascagni M. (USA),
Min A. (Germany), Schaumburg H. (Germany), Singh D. (South Korea),
Singh M. (South Korea).

The journal is registered by Agency of Information and Mass Communications under the
Administration of the President of the Republic of Uzbekistan.

The registration certificate No. 0856 of 5 August 2015.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

At a reprint of materials the reference to the journal is obligatory.

Authors are responsible for the accuracy of the facts and reliability of the information.

Address:

100125, Tashkent, Buz-2, 17A.

Tel.: +(998) 712-319-253, 712-319-249.

E-mail: journals@airi.uz.

Web-site: <https://journals.airi.uz>.

Layout design:

Sharipov Kh.D.

DTAIDRI printing office.

Signed for print 28.02.2025

Format 60x84 1/8. Order No. 1. Printed copies 100.

Содержание

Алимова Н.Б., Паровик Р.И.

Осциллятор ФитцХью-Нагумо с переменной наследственностью и внешним воздействием 5

Хакназарова Д., Садуллаев С., Муродуллаев Б.

Численное моделирование процесса геофильтрации на орошаемых землях с учетом физических факторов 17

Набиева И.С.

Численное моделирование переноса и диффузии загрязняющих частиц с учетом характеристик воздушного потока и температуры 27

Равшанов Н., Садуллаев С., Шадманова К.У., Журабаев Х.А.

Исследование и анализ математических моделей процессов фильтрации подземных вод в многослойных неоднородных пористых средах 41

Таштемирова Н.

Математическая модель и численный алгоритм для исследования процесса распространения пылевых и мелкодисперсных аэрозолей в атмосфере 57

Боборахимов Б.И.

Численное моделирование турбулентного переноса примесей в пространственно неоднородной среде атмосферы 77

Икрамов А.М.

Численное моделирование трехмерных нестационарных процессов теплопроводности в неоднородных телах 99

Каюмов А.А., Искандарова Ш.Б.

Численное исследование влияния моментов на изгиб пластины при нестационарном нагружении 108

Бердимуратов М.Б.

Сравнительный анализ оценки неизвестных параметров гамма-распределения с цензурированными справа данными в неполных статистических моделях . 116

Contents

Alimova N.B., Parovik R.I.

FitzHugh-Nagumo oscillator with variable heredity and external forcing 5

Haknazarova D., Sadullaev S., Murodullaev B.

Numerical modeling of the geofiltration process on irrigated lands taking into account physical factors 17

Nabieva I.S.

Numerical modeling of the transport and diffusion of pollutant particles taking into account airflow characteristics and temperature 27

Ravshanov N., Sadullayev S., Shadmanova K.U., Jurabaev Kh.A.

Study and analysis of mathematical models of groundwater filtration processes in multilayer heterogeneous porous media 41

Tashtemirova N.

Mathematical model and numerical algorithm for studying the process of dispersion of dust and fine aerosols in the atmosphere 57

Boborakhimov B.I.

Numerical modeling of turbulent transport of impurities in a spatially inhomogeneous atmospheric environment 77

Ikramov A.M.

Numerical modeling of three-dimensional unsteady heat conduction processes in inhomogeneous bodies 99

Kayumov A.A., Iskandarova Sh.B.

Numerical study of the influence of moments on plate bending under transient loading 108

Berdimuradov M.B.

Comparative analysis of unknown parameter estimation of the gamma distribution with right-censored data in incomplete statistical models 116

HISOBLASH VA AMALIY MATEMATIKA MUAMMOLARI

ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ
И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
PROBLEMS OF COMPUTATIONAL
AND APPLIED MATHEMATICS

