

УДК 519.6+004.9:504.064

РАЗРАБОТКА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДЛЯ КОНТРОЛЯ И ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ ТЕПЛОПЕРЕДАЧИ И ПОТЕРИ ВЛАГИ ПРИ ХРАНЕНИИ ПОРИСТЫХ ТЕЛ

¹*Равшанов Н.*, ²*Шадманов И.У.*, ^{2*}*Адизова З.М.***zuhroadizova096@gmail.com*¹Научно-исследовательский институт развития цифровых технологий и искусственного интеллекта,

100125, Узбекистан, г. Ташкент, м-в Буз-2, д. 17А;

²Бухарский государственный университет,

200118, Узбекистан, Бухара, ул. М. Икбол, д. 11.

В современном мире проблема хранения зерновых культур и продуктов их переработки играет важнейшую роль в обеспечении продовольственной безопасности. Одним из ключевых аспектов сохранения качества зерна является контроль процессов тепло- и влагообмена в хранилищах. Мониторинг и прогнозирование этих процессов становятся неотъемлемой частью современных технологий хранения, позволяя улучшить условия хранения, сократить потери продукции, обеспечить стабильное качество зерна на протяжении всего периода хранения. В данной статье будут рассмотрены основные аспекты контроля и прогнозирования процессов тепло- и влагообмена при хранении зерновой продукции и их значение для агропромышленного комплекса. При анализе экспериментальной работы были получены преимущественно зерна пшеницы.

Ключевые слова: математическая модель, температура, влажность, теплопередача, температура окружающей среды.

Цитирование: *Равшанов Н., Шадманов И.У., Адизова З.М.* Разработка математической модели для контроля и прогнозирования процессов теплопередачи и потери влаги при хранении пористых тел // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2024. – № 6(62). – С. 57-72.

1 Введение

Потери и порча продовольствия во всем мире стали горячей темой для исследований из-за их значительного влияния на окружающую среду, экономику и общество [1]. Примерно треть продуктов питания, производимых в мире, ежегодно выбрасывается [2]. Из-за плохого управления хранением зерна его качество и пищевая ценность [3] быстро ухудшаются во время хранения. Хранящееся зерно изучалось как хранящееся зерно.

Содержание как один из важнейших факторов хранения зерна [4] тесно связано с активностью насекомых и микрофлорой. Скорость порчи зерна в основном определяется температурой и распределением влаги внутри зерновой массы [5]. То есть взаимодействие этих факторов влияет на безопасность экосистемы хранящегося зерна. Таким образом, даже если методы хранения хороши, безопасное хранение зерна не может быть эффективно гарантировано, и объем зерна тогда подвергается риску порчи.

В области пищевых технологий основные исследования были сосредоточены на методах сокращения времени сушки, например, за счет использования дополнительных источников тепла (микроволн и излучения) для ускорения процесса сублимационной сушки и повышения производительности [6].

Разработка математической модели, численных алгоритмов и программных средств для мониторинга и прогнозирования процессов тепловлагообмена при хранении зерновых продуктов является важной задачей, особенно в контексте сельского хозяйства и продовольственной безопасности. Процессы тепловлагообмена могут существенно влиять на качество и безопасность зерновых продуктов при хранении.

В исследовании [7] автор использовал модель, называемую моделью цикла гистерезиса, для описания средней температуры зернового вороха и суточных колебаний температуры воздуха, предоставив модель прогнозирования, которая была получена с использованием ряда Фурье на основе метода наименьших квадратов. Здесь модель ряда Фурье используется для прогнозирования температуры статистики зерна на основе суточной температуры воздуха. Находя связь между температурой воздуха и температурой урожая зерна, называемую коэффициентами преобразования, НСМ определяет оптимальный порядок построения модели с использованием информационных критериев Акаике. Этот метод может отражать временную задержку изменения температуры зернового вороха при изменении температуры воздуха и требует только одной переменной (то есть значения температуры воздуха). Эксперименты, проведенные с использованием модели, включали прогнозирование температуры и сравнение фактических результатов, полученных при хранении зерна в течение 425 дней, с фактическими значениями, наблюдаемыми в экспериментах, что привело к удовлетворительным результатам.

В статье [8] приведены сведения о характере изменения условий окружающей среды (температуры, относительной влажности) при хранении пшеницы в силосах из гофрированного оцинкованного железа, хранении в закрытых помещениях и под навесами.

В [9] исследование выявило влияние относительной влажности и изменений температуры при хранении на влажность хранящихся соевых бобов и кукурузных зерен.

В исследовании [10] авторами разработана трехмерная переходная комбинированная модель (модель пространства, почвы и теплопроводности насыпного зерна) для прогнозирования температуры зерна в зернохранилище. Для моделирования температуры зерна использовались различные сетки (изменение сетки по всей области или границе), в том числе линейные и гибридные (линейные и квадратичные) элементы. Сравнивалась точность прогнозов температуры, полученных с разных сеток. Учитывая небольшое увеличение точности за счет увеличения времени, затрачиваемого на очистку сетки на границе, эта же сетка оказалась предпочтительнее для прогнозирования температуры зерна в ящике цельнозерновой продукции с очисткой сетки по всей площади.

Резервуары, предназначенные для хранения сельскохозяйственной продукции на открытом воздухе, имеют форму прямоугольной параллельной трубы, нижняя граница которой теплоизолирована, а верхняя граница сообщается с окружающей средой. Для сушеных сельскохозяйственных продуктов характерно выделение тепла за счет биологических и химических изменений клеток живой массы в виде показательных зависимостей. С учетом этого фактора динамика теплового состояния массы описывается уравнением теплопередачи [1, 11, 12].

По результатам [13], исследования среднее значение влажности зерна составило 13,6%, а среднее значение температуры внутри зерна — 12,3°C. Средняя влажность зерна, хранящегося на напольном складе, составила 13,7%, а средняя температура внутри склада составила 21,9°C. Но внешние условия при хранении не меняются. Среднее значение влажности наружного воздуха составило 86,5%, а среднее значение температуры воздуха 9,17°C. Встречаемость животных-вредителей при хранении в хранимой зерновой продукции не учитывалась. Содержание воды в зерне меняется в зависимости от изменения влажности и температуры воздуха.

Как отмечено в работе [14] послеуборочная обработка необходима для хранения полевого зерна после уборки. При послеуборочной обработке основная часть зерна очищается от примесей и при необходимости подсушивается до влажности 14–14,5% от массы зерна. Целью хранения является сохранение и улучшение качества зерна. Технологические свойства можно улучшить при правильном обслуживании. Склады должны быть достаточно прочными, чтобы защитить зерно от потери веса, вызванной атмосферными условиями и животными-вредителями. Не допускаем снижения массы зерна, вызванного дыханием, диффузией и механическими повреждениями при хранении [15].

Кроме того, в работе [16] обнаружили, что предыдущая история хранения (содержание влаги и продолжительность) влияет на последующее хранение. Более длительное хранение при той же влажности приводило к более низкому последующему хранению, а хранение при более высокой влажности в течение того же периода времени приводило к более низкому последующему хранению.

В работе [17] отмечено, что сушка в теле зерна была традиционным и часто используемым методом: этот метод необходимо совершенствовать для предотвращения загрязнения и улучшения качества сушки. Однако наибольшие потери после сбора урожая несет способ хранения, поскольку если условия хранения (слишком высокая температура и влажность воздуха) не соответствуют конечному составу высушенного продукта, происходит процесс гниения.

Температура и влажность являются основными показателями, влияющими на успешное осуществление длительного хранения зерна. Температура хранящегося зерна – важный параметр, на который влияет наличие кислорода. Хранение зерна в закрытых местах приводит к уменьшению содержания углекислого газа и кислорода за счет постоянного дыхания. Поэтому интенсивность дыхания зерна постепенно снижается. Вентиляция должна обеспечивать подачу воздуха с низкой влажностью воздуха, даже если температура воздуха должна быть не менее чем на 5°C ниже температуры вентилируемого зерна. Гигроскопичность, способность поглощать и выделять водяной пар, оказывает существенное влияние на качество зерна и его способность храниться. Содержание воды в зерне меняется в зависимости от изменения влажности и температуры воздуха. Снижение обводнённости зерна часто осуществляется путём остаточной сушки (влажность менее 15%); стабильность при хранении обеспечивается при влажности 12 % [18, 19].

Характеристики хранящихся зерновых культур оказывают существенное влияние на техническое решение отдельных площадей хранения, а также технические средства, используемые для обеспечения технологий хранения, а именно хранения, вентиляции и разбрасывания. Однако в работе [20] показано, что с повышением температуры сушки кукурузы (60°C) адгезионные свойства зернопродуктов, высушенных горячим воздухом, снижаются, тогда как конечная адгезия существенно возрастает. Зеренная структура также была модифицирована после обработки горячим возду-

хом. Все эти изменения приводят к потере влаги зерном при температуре 105°C при добавленной искусственной аэрации всего 2%. Когда температура искусственной вентиляции была выше 75°C , объемная плотность значительно увеличивалась с повышением температуры, но количество влаги, добавляемой при кондиционировании, и конечное содержание влаги в продукте не менялись. Когда температура искусственной вентиляции была ниже 75°C , количество сырого материала значительно уменьшалось, что указывает на то, что относительное количество.

В зернохранилищах происходят сложные химические процессы. В конечном итоге [21], это может привести к потере пищевой ценности. Часть потерь вызвана естественной реакцией (дыхание зерна), другая часть потерь вызвана химическими реакциями, вызванными нарушением технологической дисциплины при обработке и хранении круп после уборки.

Основные характеристики зерна применительно к хранению зерна следующие:

- объемная масса зерна и фракция пустот;
- насыпка круп;
- температура зерна;
- сбалансированное количество воды в зерне;
- состав вредных соединений.

Технология и методы хранения влияют на температуру и влажность материала, что может повлиять на срок хранения и развитие тонн животных-вредителей.

На основании результатов экспериментальных измерений и их оценки можно сказать, что на условия хранения зерна кукурузы большое влияние оказывают внешние условия при хранении, то есть температура воздуха и внешняя влажность.

В данных условиях хорошие результаты [22], наблюдались у несушек, хранившихся с дополнительной вентиляцией в стальных силосах. Средняя влажность зерна составила 13,6%, а средняя температура силоса — $12,3^{\circ}\text{C}$.

Средняя влажность зерна кукурузы, хранящегося на напольном складе, составила 13,7%, а средняя температура внутри склада составила $21,9^{\circ}\text{C}$, но внешние условия в процессе хранения не изменились. Среднее значение влажности наружного воздуха составило 86,5%, а среднее значение температуры воздуха $9,17^{\circ}\text{C}$. Содержание воды в зерне меняется в зависимости от изменения влажности и температуры воздуха. Снижение обводнённости зерна чаще всего производят путём остаточной сушки (влажность менее 15 %), устойчивость при хранении обеспечивается при влажности 12 %.

В работе [23] анализируются эффекты конвективного тепло- и массообмена, скорость испарения воды и важность объемного источника тепла в условиях реальной температуры на входе. Несмотря на проводимые работы, существует потребность в математическом моделировании, учитывающем процесс сублимации в совокупности. В статье представлены задачи тепломассообмена, описывающие сублимацию в полупористой среде. Математическая модель учитывает конвективный тепломассоперенос и объемный источник тепла в осушенных и мерзлых регионах. Изучено также влияние конвекции, вызванной массопереносом кристаллов льда.

В работе [24] было проведено многофакторное лабораторное исследование с целью определения основных причин изменения показателей качества в хранимой зерновой экосистеме. В ходе испытания три разных сорта пшеницы хранились в течение 160 дней при температуре $22\text{--}23^{\circ}\text{C}$ и двух разных уровнях относительной влажности:

- В качестве основных факторов, влияющих на изменение качества, были определены время хранения, уровень влажности, плотность скрытой зараженности насекомыми и уровень грибковой обсемененности;
- Было обнаружено, что скорость роста популяции насекомых значительно различается среди сортов;
- Ухудшение качества, наблюдаемое между тремя сортами, связано не с их твердостью, а с соотношением между зерном и относительной влажностью.

Работа дает важную информацию для улучшения условий хранения зерна и борьбы с биотическими факторами порчи.

В исследовании [25] была разработана двумерная конечно-элементная модель нелинейной теплопередачи для прогнозирования распределения температуры пшеницы в цилиндрическом резервуаре для хранения. В модели электронагреватель для внутреннего производства тепла расположен в центре бака. В этой исследовательской работе представлены новые теоретические основы и практические подходы для управления распределением температуры в резервуарах для хранения и оптимизации процессов хранения.

Сушеные продукты хранятся долго, поскольку содержание влаги в них очень низкое и подавляет рост микроорганизмов. Хотя сушка на солнце является популярным методом, во многих сельских районах нет подходящего для этого климата. Поэтому важно разработать сушилку, работающую с другими технологиями. В статье [26] представлена конструкция и изготовление сушилки на основе биомассы, которую можно использовать для сушки сельскохозяйственной продукции в сельской местности. Биомасса, используемая в газификаторе, дешева и доступна на местном уровне. Сушилка предназначена для сушки тапиоки и регулярной проверки эффективности сушилки на протяжении всего процесса сушки. Сушка осуществлялась при постоянном массовом расходе генераторного газа в пределах температур 60–70°C. Конечная влажность тапиоки составляет от 5% до 12%. Сушилка на основе биомассы сокращает время сушки на 50% по сравнению с сушкой на открытом солнце. Опыт показал, что сушилки на основе биомассы более эффективны, чем традиционная сушка на открытом солнце.

2 Постановка задачи

Зерновые хранилища под открытым небом напоминают прямоугольник, взаимодействующий с окружающей средой. Предложенная математическая модель уравнения теплопередачи учитывает внутреннюю теплоотдачу и влажность и описывает динамику теплового состояния массы:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \tau} = & \frac{\partial}{\partial x} \left(a_{11}(x; z; \tau) \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(a_{11}(x; z; \tau) \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left(a_{12}(x; z; \tau) \frac{\partial Q}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(a_{12}(x; z; \tau) \frac{\partial Q}{\partial z} \right) + F_1(x; z; \tau); \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial \tau} = & \frac{\partial}{\partial x} \left(a_{21}(x; z; \tau) \frac{\partial Q}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(a_{21}(x; z; \tau) \frac{\partial Q}{\partial z} \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left(a_{22}(x; z; \tau) \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(a_{22}(x; z; \tau) \frac{\partial T}{\partial z} \right) + F_2(x; z; \tau) \end{aligned} \quad (2)$$

с начальными

$$T(x, z, \tau) |_{\tau=0} = T_0(x, z); \quad (3)$$

$$Q(x, z, \tau) |_{\tau=0} = Q_0(x, z) \quad (4)$$

и граничными условиями:

$$\mu \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = \psi_1 (T - T_{tash}); \quad (5)$$

$$\mu \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=L_x} = \psi_1 (T - T_{tash}); \quad (6)$$

$$\mu \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=0} = \psi_1 (T - T_{tash}); \quad (7)$$

$$\mu \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=L_z} = \psi_1 (T - T_{tash}); \quad (8)$$

$$\omega \frac{\partial Q}{\partial x} \Big|_{x=0} = \psi_2 (Q - Q_{tash}); \quad (9)$$

$$\omega \frac{\partial Q}{\partial x} \Big|_{x=L_x} = \psi_2 (Q - Q_{tash}); \quad (10)$$

$$\omega \frac{\partial Q}{\partial z} \Big|_{z=0} = \psi_2 (Q - Q_{tash}); \quad (11)$$

$$\omega \frac{\partial Q}{\partial z} \Big|_{z=L_z} = \psi_2 (Q - Q_{tash}). \quad (12)$$

Здесь T и Q – значения температуры и влаги пористого тела; $a_{11}(x, z, \tau)$, $a_{22}(x, z, \tau)$ – коэффициенты теплопроводности; $a_{12}(x, z, \tau)$, $a_{21}(x, z, \tau)$ – коэффициенты влагопроводности; $F_1(x, z; \tau) = b \cdot e^{-\zeta\tau}$ – интенсивность внутреннего тепловыделения массы; $b = \frac{Q}{c_1}$ – коэффициент тепловыделения; c_1 – удельная теплоёмкость; ζ – эмпирический параметр; $F_2(x, z; \tau) = \rho m_0 e^{-\xi\tau}$ – интенсивность внутренних источников влаги; ρ – плотность материала; ξ – коэффициент сушки; m_0 – максимальная интенсивность испарения; β_1 – коэффициент теплоотдачи; T_{tash} – температура окружающей среды; β_2 – коэффициент влагоотдачи; Q_{tash} – влажность окружающей среды.

3 Метод решения

Для решения задачи (1)-(12) используем конечно-разностный метод, заменяя область непрерывного решения на сеточную и введем пространственно-временной сетки:

$$\Omega_{xz\tau} = \{ (x_i = i\Delta x, z_j = j\Delta z, \tau_n = n \Delta\tau); \\ i = \overline{1, N_x}; j = \overline{1, M_y}, n = \overline{0, N_\tau}, \Delta\tau = 1/N_\tau \},$$

заменяем дифференциальные операторы уравнения (1) на разностные по Ox :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{T_{i,j}^{n+1/2} - T_{i,j}^n}{\Delta\tau/2} + \frac{1}{2} \frac{T_{i+1,j}^{n+1/2} - T_{i+1,j}^n}{\Delta\tau/2} = \\ & = \frac{1}{\Delta x^2} \left(a_{11,i+0,5,j} T_{i+1,j}^{n+1/2} - (a_{11,i+0,5,j} + a_{11,i-0,5,j}) T_{i,j}^{n+1/2} + a_{11,i-0,5,j} T_{i-1,j}^{n+1/2} \right) + \\ & + \frac{1}{\Delta z^2} \left(a_{11,i,j+0,5} T_{i,j+1}^n - (a_{11,i,j+0,5} + a_{11,i,j-0,5}) T_{i,j}^n + a_{11,i,j-0,5} T_{i,j-1}^n \right) + \\ & + \frac{1}{\Delta x^2} \left(a_{12,i+0,5,j} Q_{i+1,j}^n - (a_{12,i+0,5,j} + a_{12,i-0,5,j}) Q_{i,j}^n + a_{12,i-0,5,j} Q_{i-1,j}^n \right) + \\ & + \frac{1}{\Delta z^2} \left(a_{12,i,j+0,5} Q_{i,j+1}^n - (a_{12,i,j+0,5} + a_{12,i,j-0,5}) Q_{i,j}^n + a_{12,i,j-0,5} Q_{i,j-1}^n \right) + \frac{1}{2} F_{1,i,j} \end{aligned}$$

и группируя схожих членов, получим:

$$\begin{aligned} & - \left(\left(\frac{1}{\Delta\tau} - \frac{a_{11,i,j+0,5} + a_{11,i,j-0,5}}{\Delta z^2} \right) T_{i,j}^n + \right. \\ & + \frac{1}{\Delta\tau} T_{i+1,j}^n + \frac{a_{11,i,j+0,5}}{\Delta z^2} T_{i,j+1}^n + \frac{a_{11,i,j-0,5}}{\Delta z^2} T_{i,j-1}^n - \\ & - \left(\frac{a_{12,i+0,5,j} + a_{12,i-0,5,j}}{\Delta x^2} + \frac{a_{12,i,j+0,5} + a_{12,i,j-0,5}}{\Delta z^2} \right) Q_{i,j}^n + \frac{a_{12,i+0,5,j}}{\Delta x^2} Q_{i+1,j}^n + \\ & \left. + \frac{a_{12,i-0,5,j}}{\Delta x^2} Q_{i-1,j}^n + \frac{a_{12,i,j+0,5}}{\Delta z^2} Q_{i,j+1}^n + \frac{a_{12,i,j-0,5}}{\Delta z^2} Q_{i,j-1}^n + \frac{1}{2} F_{1,i,j} \right). \end{aligned}$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} b_{i,j} &= \frac{a_{11,i+0,5,j} + a_{11,i-0,5,j}}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta\tau}; \quad c_{i,j} = \frac{a_{11,i+0,5,j}}{\Delta x^2} - \frac{1}{\Delta\tau}; \\ d_{i,j} &= \left(\frac{1}{\Delta\tau} - \frac{a_{11,i,j+0,5} + a_{11,i,j-0,5}}{\Delta z^2} \right) T_{i,j}^n + \\ & + \frac{1}{\Delta\tau} T_{i+1,j}^n + \frac{a_{11,i,j+0,5}}{\Delta z^2} T_{i,j+1}^n + \frac{a_{11,i,j-0,5}}{\Delta z^2} T_{i,j-1}^n - \\ & - \left(\frac{a_{12,i+0,5,j} + a_{12,i-0,5,j}}{\Delta x^2} + \frac{a_{12,i,j+0,5} + a_{12,i,j-0,5}}{\Delta z^2} \right) Q_{i,j}^n + \frac{a_{12,i+0,5,j}}{\Delta x^2} Q_{i+1,j}^n + \\ & + \frac{a_{12,i-0,5,j}}{\Delta x^2} Q_{i-1,j}^n + \frac{a_{12,i,j+0,5}}{\Delta z^2} Q_{i,j+1}^n + \frac{a_{12,i,j-0,5}}{\Delta z^2} Q_{i,j-1}^n + \frac{1}{2} F_{1,i,j}, \end{aligned}$$

получим систему трех диагональных алгебраических уравнений:

$$a_{i,j} T_{i-1,j}^{n+1/2} - b_{i,j} T_{i,j}^{n+1/2} + c_{i,j} T_{i+1,j}^{n+1/2} = -d_{i,j}. \quad (13)$$

Далее, граничное условие (5) аппроксимируем по Ox , получим:

$$\mu \frac{-3T_{0,j}^{n+1/2} + 4T_{1,j}^{n+1/2} - T_{2,j}^{n+1/2}}{2\Delta x} = -\psi_1 \left(T_{\text{tash}} - T_{0,j}^{n+1/2} \right). \quad (14)$$

Из системы уравнений (13), при $i = 1$, получим:

$$a_{1,j} T_{0,j}^{n+1/2} - b_{1,j} T_{1,j}^{n+1/2} + c_{1,j} T_{2,j}^{n+1/2} = -d_{1,j}. \quad (15)$$

Поставив $T_{2,j}^{n+1/2}$ из (15) в (14), найдём $T_{0,j}^{n+1/2}$:

$$T_{0,j}^{n+1/2} = \frac{4\mu c_{1,j} - b_{1,j}\mu}{3\mu c_{1,j} - a_{1,j}\mu + 2\Delta x\psi_1 c_{1,j}} T_{1,j}^{n+1/2} + \frac{d_{1,j}\mu + 2\Delta x\psi_1 c_{1,j} T_{\text{tash}}}{3\mu c_{1,j} - a_{1,j}\mu + 2\Delta x\psi_1 c_{1,j}}.$$

Аналогично аппроксимируя граничное условие (6) по O_x , получим:

$$\mu \frac{T_{N-2,j}^{n+1/2} - 4T_{N-1,j}^{n+1/2} + 3T_{N,j}^{n+1/2}}{2\Delta x} = -\psi_1 \left(T_{tash} - T_{N,j}^{n+1/2} \right). \quad (16)$$

Применяя метод прогонки для последовательности при N , $N-1$ и $N-2$ найдём

$$T_{N-1,j}^{n+1/2} \quad \text{и} \quad T_{N-2,j}^{n+1/2}.$$

$$T_{N-1,j}^{n+1/2} = \alpha_{N-1,j} T_{N,j}^{n+1/2} + \beta_{N-1,j}; \quad (17)$$

$$T_{N-2,j}^{n+1/2} = \alpha_{N-2,j} \alpha_{N-1,j} T_{N,j}^{n+1/2} + \alpha_{N-2,j} \beta_{N-1,j} + \beta_{N-2,j}. \quad (18)$$

Поставив $T_{N-1,j}^{n+1/2}$ из (17) и $T_{N-2,j}^{n+1/2}$ из (18) в (16), найдём $T_{N,j}^{n+1/2}$:

$$T_{N,j}^{n+1/2} = \frac{(4\beta_{N-1,j} - \alpha_{N-2,j}\beta_{N-1,j} - \beta_{N-2,j})\mu - 2\psi_1\Delta x T_{tash}}{\alpha_{N-2,j}\alpha_{N-1,j}\mu - 4\alpha_{N-1,j}\mu + 3\mu - 2\psi_1\Delta x}. \quad (19)$$

Значения последовательности температуры $T_{i,j}^{n+1/2}$, $T_{N-1,j}^{n+1/2}$, $T_{N-2,j}^{n+1/2}$, ..., $T_{1,j}^{n+1/2}$ определяется методом обратной прогонки по уменьшению значения i последовательности:

$$T_{i,j}^{n+1/2} = \alpha_{i,j} T_{i,j}^{n+1/2} + \beta_{i,j}, \quad i = N-1, 1, j = 0, M. \quad (20)$$

Аналогично уравнение (2) аппроксимируем по O_x конечными разностями соотношениями:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{Q_{i,j}^{n+1/2} - u_{i,j}^n}{\Delta\tau/2} + \frac{1}{2} \frac{Q_{i+1,j}^{n+1/2} - Q_{i+1,j}^n}{\Delta\tau/2} = \\ & + \frac{1}{\Delta z^2} (a_{21,i,j+0,5} Q_{i,j+1}^n - (a_{21,i,j+0,5} + a_{21,i,j-0,5}) Q_{i,j}^n + a_{21,i,j-0,5} Q_{i,j-1}^n) \\ & \frac{1}{\Delta x^2} (a_{22,i+0,5,j} T_{i+1,j}^n - (a_{22,i+0,5,j} + a_{22,i-0,5,j}) T_{i,j}^n + a_{22,i-0,5,j} T_{i-1,j}^n) \\ & \frac{1}{\Delta z^2} (a_{22,i,j+0,5} T_{i,j+1}^n - (a_{22,i,j+0,5} + a_{22,i,j-0,5}) T_{i,j}^n + a_{22,i,j-0,5} T_{i,j-1}^n) + \frac{1}{2} F_{2,i,j}; \end{aligned}$$

группируя схожих членов и, получим:

$$\begin{aligned} & \frac{a_{21,i-0,5,j}}{\Delta x^2} Q_{i-1,j}^{n+1/2} - \left(\frac{a_{21,i+0,5,j} + a_{21,i-0,5,j}}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta\tau} \right) Q_{i,j}^{n+1/2} + \\ & + \left(\frac{a_{21,i+0,5,j}}{\Delta x^2} - \frac{1}{\Delta\tau} \right) Q_{i+1,j}^{n+1/2} = \\ & - \left(\left(\frac{1}{\Delta\tau} - \frac{a_{21,i,j+0,5} + a_{21,i,j-0,5}}{\Delta z^2} \right) Q_{i,j}^n + \frac{1}{\Delta\tau} Q_{i+1,j}^n + \right. \\ & \quad \left. + \frac{a_{21,i,j+0,5}}{\Delta z^2} Q_{i,j+1}^n + \frac{a_{21,i,j-0,5}}{\Delta z^2} Q_{i,j-1}^n - \right. \\ & - \left(\frac{a_{22,i+0,5,j} + a_{22,i-0,5,j}}{\Delta x^2} + \frac{a_{22,i,j+0,5} + a_{22,i,j-0,5}}{\Delta z^2} \right) T_{i,j}^n + \frac{a_{22,i+0,5,j}}{\Delta x^2} T_{i+1,j}^n + \\ & \quad \left. + \frac{a_{22,i-0,5,j}}{\Delta x^2} T_{i-1,j}^n + \frac{a_{22,i,j+0,5}}{\Delta z^2} T_{i,j+1}^n + \frac{a_{22,i,j-0,5}}{\Delta z^2} T_{i,j-1}^n + \frac{1}{2} F_{2,i,j} \right). \end{aligned}$$

Введем обозначения:

$$a_{i,j} = \frac{a_{21,i-0,5,j}}{\Delta x^2}; \quad b_{i,j} = \frac{a_{21,i+0,5,j} + a_{21,i-0,5,j}}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta\tau}; \quad c_{i,j} = \frac{a_{21,i+0,5,j}}{\Delta x^2} - \frac{1}{\Delta\tau};$$

$$\begin{aligned}
d_{i,j} = & \left(\frac{1}{\Delta\tau} - \frac{a_{21,i,j+0,5} + a_{21,i,j-0,5}}{\Delta z^2} \right) Q_{i,j}^n + \frac{1}{\Delta\tau} Q_{i+1,j}^n + \\
& + \frac{a_{21,i,j+0,5}}{\Delta z^2} Q_{i,j+1}^n + \frac{a_{21,i,j-0,5}}{\Delta z^2} Q_{i,j-1}^n - \\
- & \left(\frac{a_{22,i+0,5,j} + a_{22,i-0,5,j}}{\Delta x^2} + \frac{a_{22,i,j+0,5} + a_{22,i,j-0,5}}{\Delta z^2} \right) T_{i,j}^n + \frac{a_{22,i+0,5,j}}{\Delta x^2} T_{i+1,j}^n + \\
& + \frac{a_{22,i-0,5,j}}{\Delta x^2} T_{i-1,j}^n + \frac{a_{22,i,j+0,5}}{\Delta z^2} T_{i,j+1}^n + \frac{a_{22,i,j-0,5}}{\Delta z^2} T_{i,j-1}^n + \frac{1}{2} F_{2,i,j}.
\end{aligned}$$

и получим систему трёхдиагональных алгебраических уравнений относительно искомым переменных:

$$\overline{a_{i,j}} Q_{i-1,j}^{n+1/2} - \overline{b_{i,j}} Q_{i,j}^{n+1/2} + \overline{c_{i,j}} Q_{i+1,j}^{n+1/2} = -\overline{d_{i,j}}. \quad (21)$$

Далее, граничную условие (9) аппроксимируем со вторым порядком точности по Ox и получим:

$$\omega \frac{-3Q_{0,j}^{n+1/2} + 4Q_{1,j}^{n+1/2} - Q_{2,j}^{n+1/2}}{2\Delta x} = -\psi_2 \left(Q_{tash} - Q_{0,j}^{n+1/2} \right). \quad (22)$$

Из системы уравнения (21) при $i = 1$, получим:

$$\overline{a_{1,j}} Q_{0,j}^{n+1/2} - \overline{b_{1,j}} Q_{1,j}^{n+1/2} + \overline{c_{1,j}} Q_{2,j}^{n+1/2} = -\overline{d_{1,j}}. \quad (23)$$

Поставив $Q_{2,j}^{n+1/2}$ из (23) в (22), найдем значение $Q_{0,j}^{n+1/2}$:

$$Q_{0,j}^{n+1/2} = \frac{4\omega\overline{c_{1,j}} - \overline{b_{1,j}}\omega}{3\omega\overline{c_{1,j}} - \overline{a_{1,j}}\omega + 2\Delta x\psi_2\overline{c_{1,j}}} Q_{1,j}^{n+1/2} + \frac{\overline{d_{1,j}}\omega + 2\Delta x\psi_2\overline{c_{1,j}}Q_{tash}}{3\omega\overline{c_{1,j}} - \overline{a_{1,j}}\omega + 2\Delta x\psi_2\overline{c_{1,j}}}. \quad (24)$$

где из соотношения (24) прогоночные коэффициенты определяются с помощью:

$$\overline{\alpha_{0,j}} = \frac{4\omega\overline{c_{1,j}} - \overline{b_{1,j}}\omega}{3\omega\overline{c_{1,j}} - \overline{a_{1,j}}\omega + 2\Delta x\psi_2\overline{c_{1,j}}}; \quad \overline{\beta_{0,j}} = \frac{\overline{d_{1,j}}\omega + 2\Delta x\psi_2\overline{c_{1,j}}Q_{tash}}{3\omega\overline{c_{1,j}} - \overline{a_{1,j}}\omega + 2\Delta x\psi_2\overline{c_{1,j}}}.$$

Аналогично аппроксимируя граничному условию (10) по Ox и получим:

$$\omega \frac{Q_{N-2,j}^{n+1/2} - 4Q_{N-1,j}^{n+1/2} + 3Q_{N,j}^{n+1/2}}{2\Delta x} = -\psi_2 \left(T_{tash} - T_{N,j}^{n+1/2} \right). \quad (25)$$

Применяя метод прогонки для последовательности N , $N-1$ и $N-2$ найдём значение $x_{N-1,j}^{n+1/2}$ и $Q_{N-2,j}^{n+1/2}$:

$$Q_{N-1,j}^{n+1/2} = \overline{\alpha_{N-1,j}} Q_{N,j}^{n+1/2} + \overline{\beta_{N-1,j}}; \quad (26)$$

$$Q_{N-2,j}^{n+1/2} = \alpha_{N-2,j} Q_{N-1,j}^{n+1/2} + \beta_{N-2,j} Q_{N-2,j}^n = \alpha_{N-2,j} \alpha_{N-1,j} Q_{N,j}^{n+1/2} + \beta_{N-2,j}. \quad (27)$$

Поставив $Q_{N-1,j}^{n+1/2}$ из (26) и $Q_{N-2,j}^{n+1/2}$ из (27), найдем $Q_{N,j}^{n+1/2}$:

$$Q_{N,j}^{n+1/2} = \frac{(4\beta_{N-1,j} - \alpha_{N-2,j}\beta_{N-1,j})\omega - 2\psi_2\Delta x Q_{tash}}{\alpha_{N-2,j}\alpha_{N-1,j}\omega - 4\alpha_{N-1,j}\Delta x}. \quad (28)$$

Значения последовательности влаги $Q_{N,j}^{n+1/2}$ определяются методом обратной прогонки по уменьшению и последовательности:

$$Q_{i,j}^{n+1/2} = \alpha_{i,j} Q_{i-1,j}^{n+1/2} + \beta_{i,j} Q_{N-2,j}^{n+1/2}, \dots, Q_{1,j}^{n+1/2} \quad \text{где } i = N-1, j = 0, M. \quad (29)$$

Далее, уравнение (1) аппроксимируем по Oy :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^{n+1/2}}{\Delta\tau/2} + \frac{1}{2} \frac{T_{i,j+1}^{n+1} - T_{i+1,j}^{n+1/2}}{\Delta\tau/2} = \\ & = \frac{1}{\Delta x^2} \left(a_{11,i+0,5,j} T_{i+1,j}^{n+1/2} - (a_{11,i+0,5,j} + a_{11,i-0,5,j}) T_{i,j}^{n+1/2} + a_{11,i-0,5,j} T_{i-1,j}^{n+1/2} \right) + \\ & + \frac{1}{\Delta z^2} \left(a_{11,i,j+0,5} T_{i,j+1}^{n+1} - (a_{11,i,j+0,5} + a_{11,i,j-0,5}) T_{i,j}^{n+1} + a_{11,i,j-0,5} T_{i,j-1}^{n+1} \right) + \\ & + \frac{1}{\Delta x^2} \left(a_{12,i+0,5,j} Q_{i+1,j}^{n+1/2} - (a_{12,i+0,5,j} + a_{12,i-0,5,j}) Q_{i,j}^{n+1/2} + a_{12,i-0,5,j} Q_{i-1,j}^{n+1/2} \right) + \\ & + \frac{1}{\Delta z^2} \left(a_{12,i,j+0,5} Q_{i,j+1}^{n+1/2} - (a_{12,i,j+0,5} + a_{12,i,j-0,5}) Q_{i,j}^{n+1/2} + a_{12,i,j-0,5} Q_{i,j-1}^{n+1/2} \right) + \frac{1}{2} F_{1,i,j}; \end{aligned}$$

и группируя схожих членов, получим:

$$\begin{aligned} & \frac{a_{11,i,j-0,5}}{\Delta z^2} T_{i,j-1}^{n+1} - \left(\frac{a_{11,i+0,5,j} + a_{11,i-0,5,j}}{\Delta z^2} + \frac{1}{\Delta\tau} \right) T_{i,j}^{n+1} + \\ & + \left(\frac{a_{11,i,j+0,5}}{\Delta z^2} - \frac{1}{\Delta\tau} \right) T_{i,j+1}^{n+1} = \\ & - \left(\left(\frac{1}{\Delta\tau} - \frac{a_{11,i+0,5,j} + a_{11,i-0,5,j}}{\Delta x^2} \right) T_{i,j}^{n+1/2} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{\Delta\tau} T_{i,j+1}^{n+1/2} + \frac{a_{11,i+0,5,j}}{\Delta x^2} T_{i+1,j}^{n+1/2} + \frac{a_{11,i-0,5,j}}{\Delta x^2} T_{i-1,j}^{n+1/2} - \right. \\ & \left. - \left(\frac{a_{12,i+0,5,j} + a_{12,i-0,5,j}}{\Delta x^2} + \frac{a_{12,i,j+0,5} + a_{12,i,j-0,5}}{\Delta z^2} \right) Q_{i,j}^{n+1/2} + \frac{a_{12,i+0,5,j}}{\Delta x^2} Q_{i+1,j}^{n+1/2} + \right. \\ & \left. + \frac{a_{12,i-0,5,j}}{\Delta x^2} Q_{i-1,j}^{n+1/2} + \frac{a_{12,i,j+0,5}}{\Delta z^2} Q_{i,j+1}^{n+1/2} + \frac{a_{12,i,j-0,5}}{\Delta z^2} Q_{i,j-1}^{n+1/2} + \frac{1}{2} F_{1,i,j} \right). \end{aligned}$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} \bar{a}_{i,j} &= \frac{a_{11,i,j-0,5}}{\Delta z^2}; \quad \bar{b}_{i,j} = \frac{a_{11,i,j+0,5} + a_{11,i,j-0,5}}{\Delta z^2} + \frac{1}{\Delta\tau}; \quad \bar{c}_{i,j} = \frac{a_{11,i,j+0,5}}{\Delta z^2} - \frac{1}{\Delta\tau}; \\ \bar{d}_{i,j} &= \left(\frac{1}{\Delta\tau} - \frac{a_{11,i+0,5,j} + a_{11,i-0,5,j}}{\Delta x^2} \right) T_{i,j}^{n+1/2} + \frac{1}{\Delta\tau} T_{i,j+1}^{n+1/2} + \frac{a_{11,i+0,5,j}}{\Delta x^2} T_{i+1,j}^{n+1/2} + \\ & + \frac{a_{11,i-0,5,j}}{\Delta x^2} T_{i-1,j}^{n+1/2} - \left(\frac{a_{12,i+0,5,j} + a_{12,i-0,5,j}}{\Delta x^2} + \frac{a_{12,i,j+0,5} + a_{12,i,j-0,5}}{\Delta z^2} \right) Q_{i,j}^{n+1/2} + \\ & + \frac{a_{12,i+0,5,j}}{\Delta x^2} Q_{i+1,j}^{n+1/2} + \frac{a_{12,i-0,5,j}}{\Delta x^2} Q_{i-1,j}^{n+1/2} + \frac{a_{12,i,j+0,5}}{\Delta z^2} Q_{i,j+1}^{n+1/2} + \frac{a_{12,i,j-0,5}}{\Delta z^2} Q_{i,j-1}^{n+1/2} + \frac{1}{2} F_{1,i,j}. \end{aligned}$$

и получим систему трёхдиагональных алгебраических уравнений относительно искомых переменных:

$$\bar{a}_{i,j} T_{i,j-1}^{n+1} - \bar{b}_{i,j} T_{i,j}^{n+1} + \bar{c}_{i,j} T_{i,j+1}^{n+1} = -\bar{d}_{i,j}. \quad (30)$$

Далее, граничную условие (7) аппроксимируем по Oy получим:

$$\mu \frac{-3T_{i,0}^{n+1} + 4T_{i,1}^{n+1} - T_{i,2}^{n+1}}{2\Delta z} = -\psi_1 (T_{i,0}^{n+1} - T_{i,0}^{n+1}). \quad (31)$$

Из системы уравнения (30) когда $j=1$ получим:

$$\bar{a}_{i,1} T_{i,0}^{n+1} - \bar{b}_{i,1} T_{i,1}^{n+1} + \bar{c}_{i,1} T_{i,2}^{n+1} = -\bar{d}_{i,1}. \quad (32)$$

Поставив $T_{i,2}^{n+1}$ из (32) в (31), найдем значение $T_{i,0}^{n+1}$:

$$T_{i,0}^{n+1} = \frac{4\mu\bar{c}_{i,1} - \bar{b}_{i,1}\mu}{3\mu\bar{c}_{i,1} - \bar{a}_{i,1}\mu + 2\Delta z\psi_1\bar{c}_{i,1}} T_{i,1}^{n+1} + \frac{\bar{d}_{i,1}\mu + 2\Delta z\psi_1\bar{c}_{i,1}T_{tash}}{3\mu\bar{c}_{i,1} - \bar{a}_{i,1}\mu + 2\Delta z\psi_1\bar{c}_{i,1}}, \quad (33)$$

где прогоночные коэффициенты определяются с помощью следующих соотношениях:

$$\bar{\alpha}_{i,0} = \frac{4\mu\bar{c}_{i,1} - \bar{b}_{i,1}\mu}{3\mu\bar{c}_{i,1} - \bar{a}_{i,1}\mu + 2\Delta z\psi_1\bar{c}_{i,1}}$$

и

$$\bar{\beta}_{i,0} = \frac{\bar{d}_{i,1}\mu + 2\Delta z\psi_1\bar{c}_{i,1}T_{tash}}{3\mu\bar{c}_{i,1} - \bar{a}_{i,1}\mu + 2\Delta z\psi_1\bar{c}_{i,1}}.$$

Далее аппроксимируя граничное условие (8) по Oy получим:

$$\mu \frac{T_{i,M-2}^{n+1} - 4T_{i,M-1}^{n+1} + 3T_{i,M}^{n+1}}{2\Delta z} = -\psi_1 (T_{tash} - T_{i,M}^{n+1}). \quad (34)$$

Применяя метод прогонки для последовательности $M, M-1$ и $M-2$, найдём значение

$$T_{i,M-1}^{n+1} \quad \text{и} \quad T_{i,M-2}^{n+1}.$$

$$T_{i,M-1}^{n+1} = \bar{\alpha}_{i,M-1}T_{i,M}^{n+1} + \bar{\beta}_{i,M-1}; \quad (35)$$

$$\begin{aligned} T_{i,M-2}^{n+1} &= \bar{\alpha}_{i,M-2}T_{i,M-1}^{n+1} + \bar{\beta}_{i,M-2} = \bar{\alpha}_{i,M-2} \left(\bar{\alpha}_{i,M-1}T_{i,M}^{n+1} + \bar{\beta}_{i,M-1} \right) + \bar{\beta}_{i,M-2} = \\ &= \bar{\alpha}_{i,M-2}\bar{\alpha}_{i,M-1}T_{i,M}^{n+1} + \bar{\alpha}_{i,M-2}\bar{\beta}_{i,M-1} + \bar{\beta}_{i,M-2} \end{aligned} \quad (36)$$

Поставив T_i^{n+1} из (35) и T_i^{n+1} из (36) в (34), найдём T_i^{n+1} :

$$T_{i,M}^{n+1} = \frac{\left(4\bar{\beta}_{i,M-1} - \bar{\alpha}_{i,M-2}\bar{\beta}_{i,M-1} - \bar{\beta}_{i,M-2} \right) \mu - 2\psi_1\Delta zT_{tash}}{\bar{\alpha}_{i,M-2}\bar{\alpha}_{i,M-1}\mu - 4\bar{\alpha}_{i,M-1}\mu + 3\mu - 2\psi_1\Delta z} \quad (37)$$

Значения температуры $T_{i,M-1}^{n+1}, T_{i,M-2}^{n+1}, \dots, T_{i,1}^{n+1}$ определяются методом обратной прогонки по уменьшению последовательности значение j :

$$T_{i,j}^{n+1} = \bar{\alpha}_{i,j}T_{i,j+1}^{n+1} + \bar{\beta}_{i,j} \quad \text{где, } i = \overline{0, N}, \quad j = \overline{M-1, 1}. \quad (38)$$

Далее, аналогично уравнение (2) аппроксимируем по Oy :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \frac{Q_{i,j}^{n+1} - Q_{i,j}^{n+1/2}}{\Delta\tau/2} + \frac{1}{2} \frac{Q_{i,j+1}^{n+1} - Q_{i+1,j}^{n+1/2}}{\Delta\tau/2} = \\ &= \frac{1}{\Delta x^2} \left(a_{21,i+0,5,j} Q_{i+1,j}^{n+1/2} - (a_{21,i+0,5,j} + a_{21,i-0,5,j}) Q_{i,j}^{n+1/2} + a_{21,i-0,5,j} Q_{i-1,j}^{n+1/2} \right) + \\ &\quad + \frac{1}{\Delta z^2} \left(a_{21,i,j+0,5} Q_{i,j+1}^{n+1} - (a_{21,i,j+0,5} + a_{v,i,j-0,5}) Q_{i,j}^{n+1} + a_{21,i,j-0,5} Q_{i,j-1}^{n+1} \right) + \\ &\quad + \frac{1}{\Delta x^2} \left(a_{22,i+0,5,j} T_{i+1,j}^{n+1/2} - (a_{22,i+0,5,j} + a_{22,i-0,5,j}) T_{i,j}^{n+1/2} + a_{22,i-0,5,j} T_{i-1,j}^{n+1/2} \right) + \\ &\quad + \frac{1}{\Delta z^2} \left(a_{22,i,j+0,5} T_{i,j+1}^{n+1/2} - (a_{22,i,j+0,5} + a_{22,i,j-0,5}) T_{i,j}^{n+1/2} + a_{22,i,j-0,5} T_{i,j-1}^{n+1/2} \right) + \frac{1}{2} F_{2,i,j}; \end{aligned}$$

и группируя схожих членов, получим:

$$\begin{aligned} & \frac{a_{21,i,j-0,5}}{\Delta z^2} Q_{i,j-1}^{n+1} - \left(\frac{a_{21,i+0,5,j} + a_{21,i-0,5,j}}{\Delta z^2} + \frac{1}{\Delta \tau} \right) Q_{i,j}^{n+1} + \\ & \quad + \left(\frac{a_{21,i,j+0,5}}{\Delta z^2} - \frac{1}{\Delta \tau} \right) Q_{i,j+1}^{n+1} = \\ & - \left(\left(\frac{1}{\Delta \tau} - \frac{a_{21,i+0,5,j} + a_{21,i-0,5,j}}{\Delta x^2} \right) Q_{i,j}^{n+1/2} + \frac{1}{\Delta \tau} Q_{i,j+1}^{n+1/2} + \frac{a_{21,i+0,5,j}}{\Delta x^2} Q_{i+1,j}^{n+1/2} + \right. \\ & \quad \left. + \frac{a_{21,i-0,5,j}}{\Delta x^2} Q_{i-1,j}^{n+1/2} - \left(\frac{a_{22,i+0,5,j} + a_{22,i-0,5,j}}{\Delta x^2} + \frac{a_{22,i,j+0,5} + a_{22,i,j-0,5}}{\Delta z^2} \right) T_{i,j}^{n+1/2} + \right. \\ & \quad \left. + \frac{a_{22,i+0,5,j}}{\Delta x^2} T_{i+1,j}^{n+1/2} + \frac{a_{22,i-0,5,j}}{\Delta x^2} T_{i-1,j}^{n+1/2} + \frac{a_{22,i,j+0,5}}{\Delta z^2} T_{i,j+1}^{n+1/2} + \frac{a_{22,i,j-0,5}}{\Delta z^2} T_{i,j-1}^{n+1/2} + \frac{1}{2} F_{2,i,j} \right). \end{aligned}$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} \bar{\bar{a}}_{i,j} &= \frac{a_{21,i,j-0,5}}{\Delta z^2}; \bar{\bar{b}}_{i,j} = \frac{a_{21,i,j+0,5} + a_{21,i,j-0,5}}{\Delta z^2} + \frac{1}{\Delta \tau}; \bar{\bar{c}}_{i,j} = \frac{a_{21,i,j+0,5}}{\Delta z^2} - \frac{1}{\Delta \tau}; \\ \bar{\bar{d}}_{i,j} &= \left(\frac{1}{\Delta \tau} - \frac{a_{21,i+0,5,j} + a_{21,i-0,5,j}}{\Delta x^2} \right) Q_{i,j}^{n+1/2} + \frac{1}{\Delta \tau} Q_{i,j+1}^{n+1/2} + \frac{a_{21,i+0,5,j}}{\Delta x^2} Q_{i+1,j}^{n+1/2} + \\ & \quad + \frac{a_{21,i-0,5,j}}{\Delta x^2} Q_{i-1,j}^{n+1/2} - \left(\frac{a_{22,i+0,5,j} + a_{22,i-0,5,j}}{\Delta x^2} + \frac{a_{22,i,j+0,5} + a_{22,i,j-0,5}}{\Delta z^2} \right) T_{i,j}^{n+1/2} + \\ & \quad + \frac{a_{22,i+0,5,j}}{\Delta x^2} T_{i+1,j}^{n+1/2} + \frac{a_{22,i-0,5,j}}{\Delta x^2} T_{i-1,j}^{n+1/2} + \frac{a_{22,i,j+0,5}}{\Delta z^2} T_{i,j+1}^{n+1/2} + \frac{a_{22,i,j-0,5}}{\Delta z^2} T_{i,j-1}^{n+1/2} + \frac{1}{2} F_{2,i,j}. \end{aligned}$$

и получим систему трёхдиагональных алгебраических уравнений относительно искомых переменных:

$$\bar{\bar{a}}_{i,j} Q_{i,j-1}^{n+1} - \bar{\bar{b}}_{i,j} Q_{i,j}^{n+1} + \bar{\bar{c}}_{i,j} Q_{i,j+1}^{n+1} = -\bar{\bar{d}}_{i,j}. \quad (39)$$

Далее, граничную условию (11) аппроксимируем по Oy , получим:

$$\omega \frac{-3Q_{i,0}^{n+1} + 4Q_{i,1}^{n+1} - Q_{i,2}^{n+1}}{2\Delta z} = -\psi_2 (Q_{tash} - Q_{i,0}^{n+1}). \quad (40)$$

Из системы уравнений (39) когда $j=1$, получим:

$$\bar{\bar{a}}_{i,1} Q_{i,0}^{n+1} - \bar{\bar{b}}_{i,1} Q_{i,1}^{n+1} + \bar{\bar{c}}_{i,1} Q_{i,2}^{n+1} = -\bar{\bar{d}}_{i,1}. \quad (41)$$

Поставив $Q_{i,2}^{n+1}$ из (41) в (40), найдем значение $Q_{i,0}^{n+1}$:

$$Q_{i,0}^{n+1} = \frac{4\omega \bar{\bar{c}}_{i,1} - \bar{\bar{b}}_{i,1}\omega}{3\omega \bar{\bar{c}}_{i,1} - \bar{\bar{a}}_{i,1}\omega + 2\Delta z \psi_2 \bar{\bar{c}}_{i,1}} u_{i,1}^{n+1} + \frac{\bar{\bar{d}}_{i,1}\omega + 2\Delta z \psi_2 \bar{\bar{c}}_{i,1} Q_{tash}}{3\omega \bar{\bar{c}}_{i,1} - \bar{\bar{a}}_{i,1}\omega + 2\Delta z \psi_2 \bar{\bar{c}}_{i,1}}. \quad (42)$$

Из соотношения (42) следует, что прогоночные коэффициенты $\bar{\bar{\alpha}}_{i,0}$ и $\bar{\bar{\beta}}_{i,0}$ вычисляются с помощью:

$$\bar{\bar{\alpha}}_{i,0} = \frac{4\omega \bar{\bar{c}}_{i,1} - \bar{\bar{b}}_{i,1}\omega}{3\omega \bar{\bar{c}}_{i,1} - \bar{\bar{a}}_{i,1}\omega + 2\Delta z \psi_2 \bar{\bar{c}}_{i,1}}$$

и

$$\bar{\bar{\beta}}_{i,0} = \frac{\bar{\bar{d}}_{i,1}\omega + 2\Delta z\psi_2\bar{\bar{c}}_{i,1}Q_{tash}}{3\omega\bar{\bar{c}}_{i,1} - \bar{\bar{a}}_{i,1}\omega + 2\Delta z\psi_2\bar{\bar{c}}_{i,1}}.$$

Аналогично аппроксимируя граничную условие (12) по Oy , со вторым порядком точности получим:

$$\omega \frac{Q_{i,M-2}^{n+1} - 4Q_{i,M-1}^{n+1} + 3Q_{i,M}^{n+1}}{2\Delta z} = -\psi_2 (Q_{tash} - Q_{i,M}^{n+1}). \quad (43)$$

Применяя метод прогонки для последовательности индексов M , $M-1$ и $M-2$ найдем значение $Q_{i,M-1}^{n+1}$ и $Q_{i,M-2}^{n+1}$ следующим образом:

$$Q_{i,M-1}^{n+1} = \bar{\alpha}_{i,M}Q_{i,M}^{n+1} + \bar{\beta}_{i,M-1}, \quad (44)$$

$$\begin{aligned} Q_{i,M-2}^{n+1} &= \bar{\alpha}_{i,M-2}Q_{i,M-1}^{n+1} + \bar{\beta}_{i,M-2} = \bar{\alpha}_{i,M-2}\bar{\alpha}_{i,M}Q_{i,M}^{n+1} + \bar{\beta}_{i,M-2}(\bar{\alpha}_{i,M-1}Q_{i,M}^{n+1} + \bar{\beta}_{i,M-1}) \\ &= \bar{\alpha}_{i,M-2}\bar{\alpha}_{i,M}Q_{i,M}^{n+1} + \bar{\alpha}_{i,M-2}\bar{\beta}_{i,M-1} + \bar{\beta}_{i,M-2}. \end{aligned} \quad (45)$$

Поставив $Q_{i,M-1}^{n+1}$ из (44) и $Q_{i,M-2}^{n+1}$ из (45) в (43), найдем $Q_{i,M}^{n+1}$:

$$Q_{i,M}^{n+1} = \left(\frac{4\beta_{i,M-1} - \bar{\alpha}_{i,M}\bar{\beta}_{i,M-1} - \bar{\beta}_{i,M}}{\bar{\alpha}_{i,M-2}\alpha_{i,M} - 4\alpha_{i,M}\omega + 3\omega - 2\psi_2\Delta z Q_{tash}} \right) \omega - 2\psi_2\Delta z. \quad (46)$$

Значения влаги $Q_i^{n+1}, Q_{i,M-1}^{n+1}, \dots, Q_{i,1}^{n+1}$ последовательно определяются методом обратной прогонки по уменьшению значения индекса j :

$$Q_{i,j}^{n+1} \equiv \alpha_{i,j}Q_{i+1,j}^{n+1} + \beta_{i,j}, \quad \text{где } i = 0, N, j = M-1, 1. \quad (47)$$

Математическая модель и разработанный численный алгоритм процессов теплопередачи и потери влаги для контроля и прогнозирования при хранении пористых тел, представляет собой мощный инструмент для оптимизации условий хранения и повышения эффективности управления этими процессами. В частности, целью данной модели является не только описать динамику теплопередачи и влагообмена, но и обеспечить возможность предсказания изменений этих параметров в зависимости от внешних условий и свойств материала.

4 Заключение

В данной статье разработана математическая модель изменения температуры при хранении зерна под влиянием влажности, внутреннего теплообмена и температуры окружающей среды и ее численное решение. Численное решение на основе метода конечных разностей аппроксимирует граничные условия для пространственно-временных переменных с двойной точностью, что обеспечивает абсолютную устойчивость. Рассмотрены основные аспекты мониторинга (анализа) и прогнозирования процессов теплопроводности и влажности зернопродуктов при качественном хранении и их значение для зерновой отрасли. Проведены вычислительные эксперименты для изучения процесса переноса и диффузии вредных веществ в атмосфере с учетом орографии рассматриваемой территории.

Литература

- [1] *Kotykova O., Babych M.* Economic Impact of Food Loss and Waste // *Agris on-line Papers in Economics and Informatics.* – 2019. – Т. 11. – С. 55–71. – <https://doi.org/10.7160/aol.2019.110306>.

- [2] *Kummu M. et al.* Lost food, wasted resources: Global food supply chain losses and their impacts on freshwater, cropland, and fertiliser use // *Science of the Total Environment*. – 2012. – Т. 438. – С. 477–489.
- [3] *Befikadu D.* Factors affecting quality of grain stored in Ethiopian traditional storage structures and opportunities for improvement // *International Journal of Sciences: Basic and Applied Research*. – 2014. – Т. 18. – № 1. – С. 235–257.
- [4] *Mohapatra D. et al.* Critical factors responsible for fungi growth in stored food grains and non-chemical approaches for their control // *Industrial Crops and Products*. – 2017. – Т. 108. – С. 162–182.
- [5] *Ziegler V., Paraginski R. T., Ferreira C. D.* Grain storage systems and effects of moisture, temperature, and time on grain quality: A review // *Journal of Stored Products Research*. – 2021. – Т. 91. – С. 101770.
- [6] *Duan X. et al.* Trends in microwave-assisted freeze drying of foods // *Drying Technology*. – 2010. – Т. 28. – № 4. – С. 444–453.
- [7] *Wang Q. et al.* Analysis and prediction of grain temperature from air temperature to ensure the safety of grain storage // *International Journal of Food Properties*. – 2020. – Т. 23. – № 1. – С. 1200–1213.
- [8] *Friedmann M. A., Maier D. E.* Advances in bulk storage of cereals and grains // *Advances in Postharvest Management of Cereals and Grains*. – Burleigh Dodds Science Publishing, 2020. – С. 125–170.
- [9] *Muga F. C., Marenya M. O., Workneh T. S.* Effect of temperature, relative humidity, and moisture on aflatoxin contamination of stored maize kernels // *Bulgarian Journal of Agricultural Science*. – 2019. – Т. 25. – № 2.
- [10] *Lawrence J.* Three-dimensional transient heat, mass, momentum, and species transfer stored grain ecosystem model using the finite element method // Ph.D. dissertation, Purdue University. – 2010.
- [11] *Shadmanov I., Shafiyev T.* E3S Web Conf. // Т. 431. – 2023. – С. 01060.
- [12] *Luikov A. V.* Systems of differential equations of heat and mass transfer in capillary-porous bodies // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. – 1975. – Т. 18. – № 1. – С. 1–14.
- [13] *Angelovič M. et al.* Efekti uslova i vremena čuvanja na tok vlage i temperature zrna kukuruza // *Savremena poljoprivredna tehnika*. – 2015. – Т. 41. – № 1. – С. 1–8.
- [14] *Yang J. et al.* Influence of hot air and natural drying on extrusion properties of maize // *American Society of Agricultural and Biological Engineers*. – 2011. – С. 1.
- [15] *Angelovič M. et al.* The effect of conditions and storage time on course of moisture and temperature of maize grains // *BIO Web of Conferences*. – 2018. – Т. 10. – С. 02001.
- [16] *Paraginski R. T. et al.* Physicochemical and pasting properties of maize as affected by storage temperature // *Journal of Stored Products Research*. – 2014. – Т. 59. – С. 209–214.
- [17] *Marks B. P., Strohshine R. L.* Effects of previous storage history, hybrid, and drying method on the storability of maize grain (corn) // *Journal of Stored Products Research*. – 1995. – Т. 31. – № 4. – С. 343–354.
- [18] *Talla A.* Predicting sorption isotherms and net isosteric heats of sorption of maize grains at different temperatures // *International Journal of Food Engineering*. – 2014. – Т. 10. – № 3. – С. 393–401.
- [19] *Lopes D. C. et al.* Management of stored maize by AERO controller in five Brazilian locations: a simulation study // *Biosystems Engineering*. – 2008. – Т. 101. – № 3. – С. 325–330.

- [20] *Burris J. S.* Impact of dehumidification drying on seed quality and preconditioning in maize // *Postharvest Biology and Technology*. – 1993. – T. 3. – № 2. – C. 155–164.
- [21] *Daniel I. O. et al.* Moisture sorption in commercial hybrid maize (*Zea mays* L.) seeds during storage at ambient tropical conditions. – 2012.
- [22] *Guo, Wei et al.* A Thick-Layer Drying Kinetic Model and Drying Characteristics of Moisture-Containing Porous Materials // *International Communications in Heat and Mass Transfer*. – 2023. – T. 149. – C. 107133. – <https://doi.org/10.1016/j.icheatmasstransfer.2023.107133>.
- [23] *Madhankumar, S. et al.* A Review on the Latest Developments in Solar Dryer Technologies for Food Drying Process // *Sustainable Energy Technologies and Assessments*. – 2023. – T. 58. – C. 103298. – <https://doi.org/10.1016/j.seta.2023.103298>.
- [24] *Chaurasiya, Vikas, and Jitendra Singh.* An Analytical Study of Coupled Convective Heat and Mass Transfer with Volumetric Heating Describing Sublimation of a Porous Body under Most Sensitive Temperature Inputs: Application of Freeze-Drying // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. – 2023. – T. 214. – C. 124294. – <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2023.124294>.
- [25] *Fourar-Belaiifa, Rebiha et al.* A Systemic Approach to Qualitative Changes in the Stored-Wheat Ecosystem: Prediction of Deterioration Risks in Unsafe Storage Conditions in Relation to Relative Humidity Level, Infestation by *Sitophilus Oryzae* (L.), and Wheat Variety // *Journal of Stored Products Research*. – 2011. – T. 47. – № 1. – C. 48–61. – <https://doi.org/10.1016/j.jspr.2010.09.002>.
- [26] *Feng Y., Cao H., Song H., Huang K., Zhang Y., Zhang Y., Li S., Li Y., Lu J., and Guan X.* Recent Advances in Food Technology // *Trends in Food Science Technology*. – 2024. – T. 147. – C. 104452.

Поступила в редакцию 19.11.2024

UDC 519.6+004.9:504.064

DEVELOPMENT OF A MATHEMATICAL MODEL FOR MONITORING AND FORECASTING HEAT TRANSFER PROCESSES AND MOISTURE LOSS DURING STORAGE OF POROUS BODIES

¹*Ravshanov N.*, ²*Shadmanov I.U.*, ^{2*}*Adizova Z.M.*

*zuhroadizova096@gmail.com

¹Digital Technologies and Artificial Intelligence Development Research Institute,
17A, Buz-2, Tashkent, 100125 Uzbekistan;

²Bukhara State University,
11, Muhammad Ikbol str., Bukhara, 705018 Uzbekistan.

In the modern world, the problem of storing grain crops and their processed products plays a vital role in ensuring food security. One of the key aspects of preserving grain quality is monitoring heat and moisture exchange processes in storage facilities. Monitoring and forecasting these processes are becoming an integral part of modern storage technologies, allowing to improve storage conditions, reduce product losses, and ensure stable grain quality throughout the entire storage period. This article will consider the main aspects of monitoring and forecasting heat and moisture exchange processes during

storage of grain products and their importance for the agro-industrial complex. When analyzing the experimental work, mainly wheat grains were obtained.

Keywords: mathematical model, temperature, humidity, heat transfer, ambient temperature.

Citation: Ravshanov N., Shadmanov I.U., Adizova Z.M. 2024. Development of a mathematical model for monitoring and forecasting heat transfer processes and moisture loss during storage of porous bodies. *Problems of Computational and Applied Mathematics*. 6(62): 57-72.

ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

№ 6(62) 2024

Журнал основан в 2015 году.

Издается 6 раз в год.

Учредитель:

Научно-исследовательский институт развития цифровых технологий и
искусственного интеллекта.

Главный редактор:

Равшанов Н.

Заместители главного редактора:

Азамов А.А., Арипов М.М., Шадиметов Х.М.

Ответственный секретарь:

Ахмедов Д.Д.

Редакционный совет:

Азамова Н.А., Алоев Р.Д., Амиргалиев Е.Н. (Казахстан), Бурнашев В.Ф.,
Загребина С.А. (Россия), Задорин А.И. (Россия), Игнатъев Н.А.,
Ильин В.П. (Россия), Исмагилов И.И. (Россия), Кабанихин С.И. (Россия),
Карачик В.В. (Россия), Курбонов Н.М., Маматов Н.С., Мирзаев Н.М.,
Мирзаева Г.Р., Мухамадиев А.Ш., Назирова Э.Ш., Нормуродов Ч.Б.,
Нуралиев Ф.М., Опанасенко В.Н. (Украина), Расулмухамедов М.М., Расулов А.С.,
Садуллаева Ш.А., Старовойтов В.В. (Беларусь), Хаётов А.Р., Халджигитов А.,
Хамдамов Р.Х., Хужаев И.К., Хужаеров Б.Х., Чье Ен Ун (Россия),
Шабозов М.Ш. (Таджикистан), Dimov I. (Болгария), Li Y. (США),
Mascagni M. (США), Min A. (Германия), Schaumburg H. (Германия),
Singh D. (Южная Корея), Singh M. (Южная Корея).

Журнал зарегистрирован в Агентстве информации и массовых коммуникаций при
Администрации Президента Республики Узбекистан.

Регистрационное свидетельство №0856 от 5 августа 2015 года.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

При перепечатке материалов ссылка на журнал обязательна.

За точность фактов и достоверность информации ответственность несут авторы.

Адрес редакции:

100125, г. Ташкент, м-в. Буз-2, 17А.

Тел.: +(998) 712-319-253, 712-319-249.

Э-почта: journals@airi.uz.

Веб-сайт: <https://journals.airi.uz>.

Дизайн и вёрстка:

Шарипов Х.Д.

Отпечатано в типографии НИИ РЦТТИИ.

Подписано в печать 27.12.2024 г.

Формат 60x84 1/8. Заказ №8. Тираж 100 экз.

PROBLEMS OF COMPUTATIONAL AND APPLIED MATHEMATICS

No. 6(62) 2024

The journal was established in 2015.
6 issues are published per year.

Founder:

Digital Technologies and Artificial Intelligence Development Research Institute.

Editor-in-Chief:

Ravshanov N.

Deputy Editors:

Azamov A.A., Aripov M.M., Shadimetov Kh.M.

Executive Secretary:

Akhmedov D.D.

Editorial Council:

Azamova N.A., Alov R.D., Amirgaliev E.N. (Kazakhstan), Burnashev V.F.,
Zagrebina S.A. (Russia), Zadorin A.I. (Russia), Ignatiev N.A., Ilyin V.P. (Russia),
Ismagilov I.I. (Russia), Kabanikhin S.I. (Russia), Karachik V.V. (Russia), Kurbonov
N.M., Mamatov N.S., Mirzaev N.M., Mirzaeva G.R., Mukhamadiev A.Sh., Nazirova
E.Sh., Normurodov Ch.B., Nuraliev F.M., Opanasenko V.N. (Ukraine), Rasulov A.S.,
Sadullaeva Sh.A., Starovoitov V.V. (Belarus), Khayotov A.R., Khaldjigitov A.,
Khamdamov R.Kh., Khujaev I.K., Khujayorov B.Kh., Chye En Un (Russia),
Shabozov M.Sh. (Tajikistan), Dimov I. (Bulgaria), Li Y. (USA), Mascagni M. (USA),
Min A. (Germany), Schaumburg H. (Germany), Singh D. (South Korea),
Singh M. (South Korea).

The journal is registered by Agency of Information and Mass Communications under the
Administration of the President of the Republic of Uzbekistan.

The registration certificate No. 0856 of 5 August 2015.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

At a reprint of materials the reference to the journal is obligatory.

Authors are responsible for the accuracy of the facts and reliability of the information.

Address:

100125, Tashkent, Buz-2, 17A.

Tel.: +(998) 712-319-253, 712-319-249.

E-mail: journals@airi.uz.

Web-site: <https://journals.airi.uz>.

Layout design:

Sharipov Kh.D.

DTAIDRI printing office.

Signed for print 27.12.2024

Format 60x84 1/8. Order No. 8. Printed copies 100.

Содержание

<i>Равшанов Н., Насруллаев П.</i> Математическое моделирование процесса переноса и диффузии загрязняющих веществ в приземном слое атмосферы с учетом рельефа местности	5
<i>Каримов М.М., Каршиев Д.А.</i> Моделирование процесса нелинейной фильтрации подземных вод в пористой среде	23
<i>Равшанов Н., Махмудов Р.З.</i> Регрессионный анализ состава пыли в атмосферном воздухе города	34
<i>Холмуродов А.Э., Матанов М.Ч.</i> Модель сейсмического возбуждения полупространственного распространения волн Рэлея	45
<i>Равшанов Н., Шадманов И.У., Адизова З.М.</i> Разработка математической модели для контроля и прогнозирования процессов теплопередачи и потери влаги при хранении пористых тел	57
<i>Палванов Б.Ю., Жафаров С., Исламов Ю.Н.</i> Моделирование процесса сепарирования сыпучих смесей центробежным сепаратором с учетом изменения коэффициента сопротивления частиц	73
<i>Убайдуллаев М.Ш.</i> Моделирование процесса влажного осаждения радиоактивных примесей в атмосфере с использованием модели DERMA	91
<i>Мурадов Ф.А.</i> Усовершенствованная математическая модель процесса распространения газовых смесей и аэрозольных частиц в атмосфере и численный алгоритм решения задачи методом физического расщепления	105
<i>Суллокова Л.Ф., Ахмеджанова З.И.</i> Модели и алгоритмы обработки данных в транспортной логистике сельскохозяйственных регионов с использованием многокритериальных эволюционных алгоритмов	125
<i>Мухамедиева Д.Т., Раупова М.Х.</i> Решение сложных задач смешанно-бинарной ограниченной оптимизации	137

Contents

<i>Ravshanov N., Nasrullaev P.</i>	
Mathematical modeling of pollutant transport and diffusion in the near-surface atmospheric layer with consideration of terrain characteristics	5
<i>Karimov M.M., Karshiev D.A.</i>	
Modeling of the nonlinear groundwater filtration process in a porous medium . .	23
<i>Ravshanov N., Mahmudov R.Z.</i>	
Analysis of dust composition in the atmospheric air of the city	34
<i>Kholmurodov A.E., Matanov M.Ch.</i>	
Seismic excitation model of half-space propagation of Rayleigh waves	45
<i>Ravshanov N., Shadmanov I.U., Adizova Z.M.</i>	
Development of a mathematical model for monitoring and forecasting heat transfer processes and moisture loss during storage of porous bodies	57
<i>Palvanov B.Y., Jafarov S.K., Islamov Y.N.</i>	
Modeling the separation process of bulk mixtures by a centrifugal separator taking into account the change in the particle resistance coefficient	73
<i>Ubaydullaev M.Sh.</i>	
Modeling the process of wet deposition of radioactive impurities in the atmosphere using the model DERMA	91
<i>Muradov F.A.</i>	
Advanced mathematical model of propagation of gas mixtures and aerosol particles in the atmosphere and numerical solution algorithm based on physical splitting method	105
<i>Sulyukova L.F., Akhmedjanova Z.I.</i>	
Models and algorithms for data processing in transport logistics of agricultural regions using multi-criteria evolutionary algorithms	125
<i>Mukhamediyeva D.T., Raupova M.H.</i>	
Solving complex mixed-binary constrained optimization problems	137