

УДК 519.6:628.395

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ПЕРЕНОСА И ДИФФУЗИИ ЗАГРЯЗНЯЮЩИХ ВЕЩЕСТВ В ПРИЗЕМНОМ СЛОЕ АТМОСФЕРЫ С УЧЕТОМ РЕЛЬЕФА МЕСТНОСТИ

^{1*}Равшанов Н., ²Насруллаев П.

*ravshanzade-09@mail.ru

¹Ташкентский педиатрический медицинский институт,
100140, Узбекистан, г. Ташкент, ул. Богишамол, 223;²Научно-исследовательский институт развития цифровых технологий и искусственного интеллекта,
100125, Узбекистан, г. Ташкент, Мирзо-Улугбекский р-он, м-в Буз-2, д. 17А.

Для мониторинга и прогнозирования экологического состояния приземного слоя атмосферы в работе предложены математическая модель и численный алгоритм, учитывающие погодные и климатические факторы. В модели отражены: скорости движения воздушных масс и осаждения частиц в пограничном слое атмосферы, их влияние на концентрацию загрязняющих веществ в результате разложения и фотохимических трансформаций, а также снижение концентрации из-за вымывания, зависящего от интенсивности осадков. В расчетах также учитываются другие возмущающие факторы, воздействующие на процесс переноса и диффузии аэрозольных частиц. Скорость осаждения частиц рассчитывается с учетом их диаметра, плотности, ускорения силы тяжести и динамической вязкости атмосферы. Процесс переноса и диффузии загрязняющих веществ в приземном слое атмосферы разделен на две подзадачи. Для вычисления концентрации загрязняющих веществ в атмосфере решаются уравнения гидромеханики с соответствующими краевыми условиями. Для учета топографии местности рассматривается задача течения идеальной несжимаемой жидкости, где поле скоростей определяется решением уравнения для потенциала скорости с учетом деформации потока при обтекании рельефа.

Ключевые слова: математическая модель, конечно-разностный метод, перенос и диффузия загрязняющих веществ, рельеф местности, динамическая вязкость атмосферы.

Цитирование: Равшанов Н., Насруллаев П. Математическое моделирование процесса переноса и диффузии загрязняющих веществ в приземном слое атмосферы с учетом рельефа местности // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2024. – № 6(62). – С. 5-22.

1 Введение

Охрана окружающей среды, в частности атмосферы, почвенно-грунтовых слоев и подземных вод, является одной из наиболее актуальных проблем современности. Антропогенное воздействие на природные экосистемы неизбежно обостряет экологическую ситуацию. Ежегодные доклады, публикуемые Международным союзом охраны природы и природных ресурсов (IUCN), свидетельствуют о том, что состояние окружающей среды неуклонно ухудшается.

Анализ многолетних данных показывает, что производственная деятельность человека нанесла серьезный ущерб пограничному слою атмосферы, почвенно-грунтовым слоям и подземным водам, нарушив природный баланс, сложившийся за длительный

период существования планеты. В настоящее время проблема охраны окружающей среды стоит особенно остро, что обусловлено значительным, а порой и катастрофическим влиянием хозяйственной деятельности человека на природу.

Комплексные исследования, проведенные экологами и учеными, показали, что атмосфера Земли оказывает не только прямое, но и косвенное влияние на биологическое разнообразие и живые организмы. От ее состояния зависят характеристики солнечной радиации, достигающей поверхности планеты, климат и иные факторы, определяющие существование биосферы.

Исходя из вышеизложенного, для принятия взвешенных управленческих решений необходимо проводить комплексные исследования, учитывающие погодноклиматические условия, орографию земной поверхности и иные внешние возмущающие факторы, влияющие на процесс распространения вредных веществ в атмосфере. Цель подобных исследований – снизить негативное воздействие на биосферу. Таким образом, комплексное изучение, мониторинг, прогнозирование и анализ процессов переноса и диффузии загрязняющих примесей в атмосфере являются одними из наиболее актуальных задач в области охраны окружающей среды.

Одним из эффективных инструментов решения задач, связанных с исследованием переноса и диффузии загрязняющих веществ в атмосфере, является математический аппарат, включающий математические модели, численные алгоритмы и соответствующие программно-вычислительные средства, позволяющие проводить расчетные эксперименты.

В области математического моделирования и численных методов, используемых для решения задач переноса и диффузии загрязняющих веществ в приземном слое атмосферы, достигнуты значительные теоретические и прикладные результаты. Так, в работе [1] предложен метод расчета вертикальных коэффициентов турбулентной диффузии в условиях сложного рельефа местности и больших времен экспозиции. Данный метод основан на анализе распределения загрязняющих веществ от точечного источника в приземном слое атмосферы с учетом шероховатости и температурной неоднородности подстилающей поверхности.

Измерения концентраций вредных веществ, выполненные с использованием мхов-биомониторов в районе ТЭЦ города Новосибирска, позволили авторам [1] при моделировании вертикального переноса применять параметризацию коэффициента турбулентной диффузии. Для учета неоднородности подстилающей поверхности также вводится эмпирический коэффициент шероховатости. По данным различных исследователей, значения этого коэффициента существенно варьируются даже для относительно простых типов рельефа [2–4].

В работе [5] предложена методика расчета переноса и диффузии аэрозольных загрязняющих веществ, основанная на методах вычислительной гидродинамики. Такой подход позволяет учитывать сложный рельеф местности, характер застройки и другие условия рассматриваемой области. В качестве примера рассмотрен перенос ацетоновых выбросов от изолированного источника, расположенного вблизи здания. Полученные результаты наглядно демонстрируют сложный характер распределения концентраций в непосредственной близости от строений, а также в условиях плотной застройки и сложного рельефа. Без применения современных вычислительных методов столь детальное моделирование было бы практически невозможно.

В работе [6] представлена математическая модель пограничного слоя атмосферы для расчета рассеяния примесей по исходной метеорологической информации. Применяемые данные определяются постановкой задачи: это могут быть результаты

стандартных аэросиноптических измерений или, при необходимости, данные краткосрочных метеопрогнозов. Авторы отмечают, что модель может основываться преимущественно на аэрологической или приземной метеорологической информации. Хотя общие принципы преобразования исходных данных во входные параметры пограничного слоя известны, для практического их использования при расчетах рассеяния примесей требуется дополнительная математическая проработка.

Поскольку корректность моделирования дисперсионных полей вокруг зданий в значительной степени зависит от адекватного воспроизведения структуры ветрового потока, в работе [7] представлен обзор современных экспериментальных и численных исследований, посвященных дисперсии загрязняющих веществ в городской среде. Отмечены типичные ошибки, приводящие к неудовлетворительным результатам численного моделирования, и даны практические рекомендации по разработке единых методик верификации и валидации численных моделей, применяемых при оценке качества воздуха в городах.

В работе [8] оценивается качество воздуха в помещениях станций метро Барселоны. Концентрации PM_{2.5} на платформах четырех станций измерялись в течение двух разных сезонов с определением их химического состава. Метод положительной матричной факторизации был применен для выявления и количественной оценки вклада основных источников PM_{2.5}. Средние концентрации PM_{2.5} изменялись в зависимости от конструктивных особенностей станций и сезонных факторов.

В составе PM_{2.5} обнаружены гематит, углеродистый аэрозоль, корковые вещества, вторичные неорганические соединения, микроэлементы, нерастворимые сульфаты и галет. Также были идентифицированы органические соединения: никотин, левоглюкозан и ароматические мускусные компоненты. Источниками PM_{2.5} в метро выступали выбросы от рельсов, колес, контактных сетей, тормозных колодок и пантографов. Химический профиль загрязнителей от метро различался в зависимости от конкретной станции, но преобладающим элементом всегда был Fe. Необходимость мер контроля над этими источниками подчеркивается важностью улучшения качества воздуха в метро.

В статье [9] представлены математические модели, описывающие транспорт питательных веществ почвы (калий, фосфат, нитрат) в сточных водах. Цель исследования заключалась в описании процессов переноса питательных веществ с учетом эффекта отрыва осадков и определении факторов, наиболее влияющих на их транспорт. Авторы объединили уравнение сохранения массы и процесс отрыва осадков, дополнительно расширив модель для прогнозирования стока питательных веществ в поверхностных водах почв плато Лесс в северо-западном Янлине (Китай). Глубина смешивания была представлена как функция времени под влиянием осадков, а не считалась постоянной, как в предыдущих моделях.

Предложенная модель была протестирована с использованием двух подмоделей – полного и неполного смешивания. Модель полного смешивания, более простая в практическом применении, точно отражала общие тенденции стока хорошо адсорбируемых питательных веществ и их перемещение по крутым склонам, тогда как модель неполного смешивания позволяла лучше предсказывать максимальные наблюдаемые концентрации исследуемых питательных компонентов. Оценка параметров показала, что обе модели можно применять для описания переноса питательных веществ в стоке под воздействием осадков.

В работе [10] рассмотрено аналитическое решение дробного двумерного уравнения адвекции-диффузии, основанного на двухпоточной эволюционной модели, кото-

рая является модификацией закона Фика, примененного к дисперсии загрязняющих веществ в планетарном пограничном слое. Решение было получено с помощью преобразования Лапласа и разложения функции Миттаг-Леффлера, используемой при решении дробных дифференциальных уравнений. Полученные результаты отличаются быстрой сходимостью и хорошо согласуются с данными Копенгагенского эксперимента (условия умеренно нестабильной атмосферы) и Ханфордского эксперимента (от устойчивых до нейтральных условий). Было продемонстрировано влияние дробной производной и члена четвертого порядка, отвечающего за эффект удержания в двухпоточной эволюционной модели. Для Копенгагенского эксперимента наилучшее соответствие наблюдалось при $\alpha = 0,95$ (дробный порядок) и $\beta = 0,50$ (параметр удержания), обеспечивая нормированную среднеквадратичную ошибку 0,10 и 100% попадание результатов в диапазон удвоенных наблюдаемых значений. Для Ханфордского эксперимента оптимальными оказались $\alpha = 1,0$ и $\beta = 1,0$, что дало нормированную среднеквадратичную ошибку 0,15 и 83% результатов в пределах удвоенного диапазона наблюдений, а также продемонстрировало зависимость параметров от стабильности атмосферы.

Процесс рассеяния загрязняющих веществ в атмосфере можно рассматривать как совокупный результат различных механизмов переноса загрязнителей от источника к рецептору [11]. К ним относятся адвекция воздушным потоком, перемешивание за счет атмосферной турбулентности и массовая диффузия, вызванная градиентами концентраций. На рассеяние влияют также физико-химические свойства выбросов, расположение источника и особенности рельефа по ветру от точки выброса. В работе [11] детально обсуждаются различные физические и математические аспекты переноса и диффузии загрязняющих веществ в пограничном слое атмосферы, рассматриваются особенности рассеивания при слабом ветре, а также обозначены текущие проблемы моделирования пограничного слоя в таких условиях.

Процессы переноса и диффузии загрязняющих веществ на сложной местности гораздо сложнее, чем на равнинных территориях, поскольку на них влияют атмосферные взаимодействия с рельефом на различных пространственных масштабах [12]. В данной статье рассматриваются последние достижения в этой области с точки зрения как экспериментальных, так и моделированных подходов. Обозначаются актуальные вопросы и проблемы, связанные с нашим пониманием и описанием атмосферных процессов, определяющих судьбу загрязняющих веществ в горных районах.

Особое внимание уделено новым методам измерения, позволяющим получать пространственно распределенную информацию о турбулентности и параметрах качества воздуха, а также трудностям, возникающим при использовании метеорологических и дисперсионных моделей для воспроизведения мелкомасштабных процессов, зависящих от орографии. Кроме того, обсуждаются конкретные потребности и возможные направления дальнейших исследований.

Модели воздействия необходимы для оценки хронических последствий для здоровья ультрадисперсных частиц ($<0,1$ мкм) в окружающей среде [13]. Авторы работы разработали модель регрессии землепользования для оценки концентраций ультрадисперсных частиц (УЧД) в Торонто, Канада, опираясь на данные мобильного мониторинга, собранные в летний/зимний периоды 2010–2011 гг. В анализ включено 405 участков дорог. Итоговая модель объяснила 67% пространственной вариации средних значений УДЧ, учитывая логарифмические расстояния до автомагистралей, крупных дорог, центрального делового района, аэропорта Пирсон и автобусных маршрутов, а также параметры, связанные с количеством уличных деревьев, на-

личием парков, открытых пространств и протяженностью автобусных маршрутов в пределах 100-метровой буферной зоны. Проверка модели на внешних данных не выявила систематических отклонений между измеренными и прогнозируемыми значениями, хотя коэффициент детерминации снизился (до 50%). Полученная модель будет использоваться для оценки хронических эффектов влияния УДЧ на здоровье населения Торонто.

Длительное воздействие основных загрязняющих веществ, связанных с транспортом, может негативно сказаться на здоровье, однако лишь немногие исследования изучали влияние таких загрязнителей на смертность [14]. Авторами изучены ассоциации между шестью основными транспортными загрязняющими веществами и смертностью от всех причин и отдельных групп заболеваний в период 2003 - 2010 гг. с использованием линейных и кусочно-линейных моделей регрессии Пуассона на уровне малых территорий. Линейные модели показали в основном отрицательную или нулевую связь с общей, сердечно-сосудистой и респираторной смертностью.

В кусочно-линейных моделях наблюдались положительные ассоциации в диапазоне низкого воздействия (например, относительный риск для общей смертности 1,07 (95% доверительный интервал: 1,0-1,15) при увеличении концентрации первичных твердых частиц, связанных с выхлопными газами, $\leq 2,5$ мкм (PM_{2,5}) на 0,15 мкг/м³), тогда как при самом высоком воздействии ассоциации были отрицательными: относительный риск – 0,93 (95% доверительный интервал: 0,91-0,96). В целом, получены лишь слабые доказательства положительной связи со смертностью. Максимальные положительные ассоциации в группе низкого воздействия могут отражать остаточное искажение из-за неучтенных факторов, варьирующихся в зависимости от уровня воздействия.

В работе [15] предложен комплексный пространственно-распределенный подход к моделированию, объединяющий атмосферные отложения, эрозию почвы и транспорт по канализационным системам, с целью оценки переноса загрязняющих веществ, связанных с транспортом, в городских районах. Система применена к небольшому городскому водосбору вблизи Парижа. Рассмотрены два сценария моделирования с использованием экспериментально оцененных и смоделированных атмосферных осадков. Результаты сравнивались с непрерывными измерениями расхода воды и взвешенных твердых частиц (TSS) на выходе из водосбора. Несмотря на приемлемое согласие с экспериментальными данными, существенной разницы между двумя сценариями не обнаружено, что объясняется эффектом «первого смыва». Проанализировано содержание Cu, BaP и BbF в различных классах размеров частиц, а средние концентрации каждого загрязнителя сопоставлены с локальными измерениями. В заключение обсуждаются возможности повышения эффективности модели и совершенствования экспериментальных методов.

Данные о долгосрочном воздействии транспортного загрязнения на здоровье неоднозначны [16]. В Большом Лондоне авторы исследовали связь между транспортными загрязнителями и экстренными госпитализациями по кардиореспираторным заболеваниям, применяя линейные и кусочно-линейные модели регрессии Пуассона. Для детей и взрослых коэффициенты риска оказались близки к единице; у пожилых людей линейные модели выявили отрицательные связи, а кусочно-линейные модели показали нелинейные зависимости с положительными рисками при низком воздействии и отрицательными — при высоком. Был отмечен более высокий риск для наиболее социально уязвимых групп населения. Результаты не изменились после учета шумового загрязнения. Отсутствие четких положительных линейных связей может

указывать на остаточное смещение, а выявленная уязвимость обездоленных групп населения представляет значимый аспект для общественного здравоохранения.

В статье [17] решаются сопряженные стационарные и нестационарные задачи распространения загрязняющих веществ в приземном слое атмосферы. Учитывается коэффициент поглощения и прилипания аэрозольных частиц растительным покровом, и для этих задач получены аналитические решения. В исследовании [18] разработана математическая модель процесса переноса и диффузии вредных веществ в приземном слое атмосферы с учетом изменения коэффициента турбулентности по высоте и временной вариации направления ветра.

В работах [19, 20] предложены математические модели диффузии загрязняющих примесей в неподвижной, неограниченной среде и методы решения одно-, двух- и трехмерных постановок с учетом осаждения и захвата частиц элементами растительности, а также влияния метеорологических условий.

В статье [21] представлен математический подход, учитывающий не только основные факторы, но и явление захвата аэрозольных частиц растительностью в наземной среде. Алгоритм решения основан на разбиении исходной задачи на физические факторы: адвекцию, диффузию и поглощение вещества воздушными массами атмосферы. Вычислительные эксперименты проведены с использованием реальных метеорологических данных и информации об источниках загрязнения. Анализ результатов показал хорошее согласие с натурными измерениями и работами других авторов.

Опираясь на вышеупомянутые исследования, в данной работе рассматривается разработка математической модели и консервативного численного алгоритма, учитывающих не только погодные и климатические факторы, но и рельеф местности, существенно влияющий на движение воздушных масс. Это особенно важно для более точного описания процесса распределения концентрации загрязняющих веществ в приземном слое атмосферы.

2 Постановка задачи

Для мониторинга и прогнозирования состояния приземного слоя атмосферы можно сформулировать две взаимосвязанные задачи. Первая задача состоит в моделировании процесса переноса и диффузии загрязняющих веществ, с учетом погодных и климатических факторов, а также орографии местности, существенно влияющей на концентрацию вредных примесей. Вторая задача предполагает определение скоростей движения воздушных масс в пограничном слое атмосферы с учетом его деформации при обтекании рельефа местности.

Задача А) описывается следующим дифференциальным уравнением в частных производных

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \theta(x, y, z, t)}{\partial t} + \frac{\partial u(x, y, z, t) \theta(x, y, z, t)}{\partial x} + \frac{\partial v(x, y, z, t) \theta(x, y, z, t)}{\partial y} + \\ & + \frac{\partial w(x, y, z, t) \theta(x, y, z, t)}{\partial z} - w_g(t) \frac{\partial \theta(x, y, z, t)}{\partial z} = \\ & = \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_x \frac{\partial \theta(x, y, z, t)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu_y \frac{\partial \theta(x, y, z, t)}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu_z \frac{\partial \theta(x, y, z, t)}{\partial z} \right) + \\ & + Q(x, y, z, t) - \Phi_r \theta(x, y, z, t) - \Phi_v \theta(x, y, z, t) \end{aligned} \quad (1)$$

с соответствующими начальными и краевыми условиями:

$$\theta(x, y, z, t) = \theta^0(x, y, z) \text{ при } t = 0; \quad (2)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x, y, z, t)\theta(x, y, z, t)}{\partial x} = \eta_1(\theta(x, y, z, t) - \theta_v(x, y, z, t)) \text{ при } x = 0, \\ -\frac{\partial u(x, y, z, t)\theta(x, y, z, t)}{\partial x} = \eta_2(\theta(x, y, z, t) - \theta_v(x, y, z, t)) \text{ при } x = L_x, \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial v(x, y, z, t)\theta(x, y, z, t)}{\partial y} = \eta_3(\theta(x, y, z, t) - \theta_v(x, y, z, t)) \text{ при } y = 0, \\ -\frac{\partial v(x, y, z, t)\theta(x, y, z, t)}{\partial y} = \eta_4(\theta(x, y, z, t) - \theta_v(x, y, z, t)) \text{ при } y = L_y, \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} \mu_z \frac{\partial \theta(x, y, z, t)}{\partial z} = (\beta(x, y, z) - w_g)\theta(x, y, z, t) - Q_0(x, y, z, t) \text{ при } z = 0, \\ -\frac{\partial (w - w_g)\theta(x, y, z, t)}{\partial z} = \eta_5(\theta(x, y, z, t) - \theta_v(x, y, z, t)) \text{ при } z = L_z. \end{cases} \quad (5)$$

Здесь θ – концентрация распространяющегося вещества; t – время; x, y, z – координаты; u, v, w – составляющие скорости ветра по направлениям x, y, z , соответственно; w_g – скорость осаждения частицы; μ_x, μ_y, μ_z – соответственно, коэффициенты турбулентного перемешивания по горизонтали и вертикали; β – коэффициент взаимодействия с подстилающей поверхностью; Q – мощность выброса вредных веществ в атмосферу из стационарных источников; Q_0 – количества выброса аэрозольных частиц с поверхности земли; θ_v – концентрация взвешенных веществ поступающая через границы области решения задачи; $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5$ – безразмерные параметры; Φ_r – убыль концентрация загрязняющих веществ в атмосфере за счет разложения и фотохимической трансформации; Φ_ν – снижение концентрации загрязняющих веществ за счет вымывания, зависевший от интенсивности осадков, определяемой выражением

$$\Phi_\nu = \varphi_0 \left(\frac{\gamma}{\gamma_0} \right)^n \theta,$$

где – константа, характеризующая скорость вымывания; $\gamma = \frac{dQ}{dt}$; $\gamma_0 = 1 \frac{\text{мм}}{\text{ч}}$; n – показатель степени, в данном случае приблизительно равный 0,78.

В уравнении (1) w_g – скорость осаждения частиц определяется с помощью формулы:

$$w_g = \frac{d_b g \rho_b}{18 \eta}.$$

Здесь d_b – диаметр частиц; ρ_b – плотность частиц; g – ускорение силы тяжести; η – динамическая вязкость атмосферы. В математической постановке задачи описания точечного источника $Q(x, y, z, t)$ имеет следующий вид:

$$Q(x, y, z, t) = Q(t)_l \delta(x - x_l) \delta(y - y_l) \delta(z - z_k), l = 1, 2, 3, \dots, L. \quad (6)$$

Как видно из соотношения (6) источник $Q(t)_l$ является функцией от времени и функцией Дирака, которую можно задать в виде:

$$Q(t)_l = M_{\max}(1 - \exp^{-\chi t}),$$

где $M_{\max}$ – максимальная мощность источника χ .

3 Алгоритм решения

Для упрощения решения задачи (1)-(5) рассмотрим её в прямоугольной области, предположив, что источник загрязнения находится на поверхности земли. Для численного решения задачи (1)-(5) разобьём область изменения искомой величины на

сетку с шагами, соответствующими заданным граничным условиям:

$$\Omega_{xyzt} = \{(x_i = i\Delta x, y_j = j\Delta y, z_k = k\Delta z, \tau_n = n\Delta t); \\ i = \overline{0, N}; j = \overline{0, M}, k = \overline{0, L}, n = \overline{0, N_t}, \Delta t = \frac{1}{N_t}\}.$$

В процессе решения задачи (1)-(5) для обеспечения устойчивости используется неявная схема. Уравнение (1) аппроксимируется по направлению оси Ox следующим образом:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{\theta_{i,j,k}^{n+1/3} - \theta_{i,j,k}^n}{\Delta t/3} + \frac{1}{2} \frac{\theta_{i+1,j,k}^{n+1/3} - \theta_{i+1,j,k}^n}{\Delta t/3} + \frac{u_{i,j,k}^{n+1/3} \theta_{i,j,k}^{n+1/3} - u_{i-1,j,k}^{n+1/3} \theta_{i-1,j,k}^{n+1/3}}{2\Delta x} + \\ & + \frac{u_{i,j,k}^n \theta_{i,j,k}^n - u_{i-1,j,k}^n \theta_{i-1,j,k}^n}{2\Delta x} + \frac{v_{i,j,k}^n \theta_{i,j,k}^n - v_{i,j-1,k}^n \theta_{i,j-1,k}^n}{\Delta y} + \\ & + \frac{w_{i,j,k}^n \theta_{i,j,k}^n - w_{i,j,k-1}^n \theta_{i,j,k-1}^n}{\Delta z} - w_g^n \frac{\theta_{i,j,k}^n - \theta_{i,j,k-1}^n}{\Delta z} = \frac{1}{\Delta x^2} \left(\mu_{x,i+0,5,j} \theta_{i+1,j,k}^{n+1/3} - \right. \\ & \left. - (\mu_{x,i+0,5,j} + \mu_{x,i-0,5,j}) \theta_{i,j,k}^{n+1/3} + \mu_{x,i-0,5,j} \theta_{i-1,j,k}^{n+1/3} \right) + \\ & + \frac{1}{\Delta y^2} \left(\mu_{y,i,j+0,5} \theta_{i,j+1,k}^n - (\mu_{y,i,j+0,5} + \mu_{y,i,j-0,5}) \theta_{i,j,k}^n + \mu_{y,i,j-0,5} \theta_{i,j-1,k}^n \right) + \\ & + \frac{1}{\Delta z^2} \left(\mu_{z,k+0,5} \theta_{i,j,k+1}^n - (\mu_{z,k+0,5} + \mu_{z,k-0,5}) \theta_{i,j,k}^n + \mu_{z,k-0,5} \theta_{i,j,k-1}^n \right) + \\ & + \frac{1}{3} Q_{i,j,k}^{n+1/3} - \Phi_r \theta_{i,j,k}^{n+1/3} - \Phi_\nu \theta_{i,j,k}^{n+1/3}. \end{aligned}$$

Раскрыв скобки, получим следующее:

$$\begin{aligned} & \frac{3}{2\Delta t} \theta_{i,j,k}^{n+1/3} - \frac{3}{2\Delta t} \theta_{i,j,k}^n + \frac{3}{2\Delta t} \theta_{i+1,j,k}^{n+1/3} - \frac{3}{2\Delta t} \theta_{i+1,j,k}^n + \frac{u_{i,j,k}^{n+1/3}}{2\Delta x} \theta_{i,j,k}^{n+1/3} - \\ & - \frac{u_{i-1,j,k}^{n+1/3}}{2\Delta x} \theta_{i-1,j,k}^{n+1/3} + \frac{u_{i,j,k}^n}{2\Delta x} \theta_{i,j,k}^n - \frac{u_{i-1,j,k}^n}{2\Delta x} \theta_{i-1,j,k}^n + \frac{v_{i,j,k}^n}{\Delta y} \theta_{i,j,k}^n - \\ & - \frac{v_{i,j-1,k}^n}{\Delta y} \theta_{i,j-1,k}^n + \frac{w_{i,j,k}^n}{\Delta z} \theta_{i,j,k}^n - \frac{w_{i,j,k-1}^n}{\Delta z} \theta_{i,j,k-1}^n - \\ & - \frac{w_g^n}{\Delta z} \theta_{i,j,k}^n + \frac{w_g^n}{\Delta z} \theta_{i,j,k-1}^n = \\ & = \frac{\mu_{x,i+0,5,j}}{\Delta x^2} \theta_{i+1,j,k}^{n+1/3} - \frac{\mu_{x,i+0,5,j} + \mu_{x,i-0,5,j}}{\Delta x^2} \theta_{i,j,k}^{n+1/3} + \frac{\mu_{x,i-0,5,j}}{\Delta x^2} \theta_{i-1,j,k}^{n+1/3} + \\ & + \frac{\mu_{y,i,j+0,5}}{\Delta y^2} \theta_{i,j+1,k}^n - \frac{\mu_{y,i,j+0,5} + \mu_{y,i,j-0,5}}{\Delta y^2} \theta_{i,j,k}^n + \frac{\mu_{y,i,j-0,5}}{\Delta y^2} \theta_{i,j-1,k}^n + \\ & + \frac{\mu_{z,k+0,5}}{\Delta z^2} \theta_{i,j,k+1}^n - \frac{\mu_{z,k+0,5} + \mu_{z,k-0,5}}{\Delta z^2} \theta_{i,j,k}^n + \frac{\mu_{z,k-0,5}}{\Delta z^2} \theta_{i,j,k-1}^n + \\ & + \frac{1}{3} Q_{i,j,k}^{n+1/3} - \Phi_r \theta_{i,j,k}^{n+1/3} - \Phi_\nu \theta_{i,j,k}^{n+1/3}. \end{aligned}$$

Упростим подобные члены и получим следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$a_{i,j,k} \theta_{i-1,j,k}^{n+1/3} - b_{i,j,k} \theta_{i,j,k}^{n+1/3} + c_{i,j,k} \theta_{i+1,j,k}^{n+1/3} = -d_{i,j,k}. \quad (7)$$

Коэффициенты и свободный член системы (7) определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}
 a_{i,j,k} &= \frac{\mu_{x,i-0,5,j}}{\Delta x^2} + \frac{u_{i-1,j,k}^{n+1/3}}{2\Delta x}; \\
 b_{i,j,k} &= \frac{\mu_{x,i+0,5,j} + \mu_{x,i-0,5,j}}{\Delta x^2} + \frac{u_{i,j,k}^{n+1/3}}{2\Delta x} + \frac{3}{2\Delta t} + \Phi_r + \Phi_\nu; \\
 c_{i,j,k} &= \frac{\mu_{x,i+0,5,j}}{\Delta x^2} - \frac{3}{2\Delta t}; \\
 d_{i,j,k} &= \left(\frac{3}{2\Delta t} - \frac{\mu_{y,i,j+0,5} + \mu_{y,i,j-0,5}}{\Delta y^2} - \frac{\mu_{z,k+0,5} + \mu_{z,k-0,5}}{\Delta z^2} - \frac{u_{i,j,k}^n}{2\Delta x} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{v_{i,j,k}^n}{\Delta y} - \frac{w_{i,j,k}^n}{\Delta z} + \frac{w_g^n}{\Delta z} \right) \theta_{i,j,k}^n + \frac{u_{i-1,j,k}^n}{2\Delta x} \theta_{i-1,j,k}^n + \frac{3}{2\Delta t} \theta_{i+1,j,k}^n + \\
 &\quad + \left(\frac{\mu_{y,i,j-0,5}}{\Delta y^2} + \frac{v_{i,j-1,k}^n}{\Delta y} \right) \theta_{i,j-1,k}^n + \frac{\mu_{y,i,j+0,5}}{\Delta y^2} \theta_{i,j+1,k}^n + \\
 &\quad + \left(\frac{\mu_{z,k-0,5}}{\Delta z^2} + \frac{w_{i,j,k-1}^n}{\Delta z} - \frac{w_g^n}{\Delta z} \right) \theta_{i,j,k-1}^n + \frac{\mu_{z,k+0,5}}{\Delta z^2} \theta_{i,j,k+1}^n + \frac{1}{3} Q_{i,j,k}^{n+1/3}.
 \end{aligned}$$

Также граничное условие (3) для $x = 0$ аппроксимируем с точностью второго порядка следующим образом:

$$\frac{-3u_{0,j,k}^{n+1/3} \theta_{0,j,k}^{n+1/3} + 4u_{1,j,k}^{n+1/3} \theta_{1,j,k}^{n+1/3} - u_{2,j,k}^{n+1/3} \theta_{2,j,k}^{n+1/3}}{2\Delta x} = \eta_1 \theta_{0,j,k}^{n+1/3} - \eta_1 \theta_v.$$

Упростив это выражение, получим:

$$-3u_{0,j,k}^{n+1/3} \theta_{0,j,k}^{n+1/3} + 4u_{1,j,k}^{n+1/3} \theta_{1,j,k}^{n+1/3} - u_{2,j,k}^{n+1/3} \theta_{2,j,k}^{n+1/3} = 2\Delta x \eta_1 \theta_{0,j,k}^{n+1/3} - 2\Delta x \eta_1 \theta_v. \quad (8)$$

Из следующей трёх диагональной системы уравнений найдём $\theta_{2,j,k}^{n+1/3}$:

$$\begin{aligned}
 a_{1,j,k} \theta_{0,j,k}^{n+1/3} - b_{1,j,k} \theta_{1,j,k}^{n+1/3} + c_{1,j,k} \theta_{2,j,k}^{n+1/3} &= -d_{1,j,k}, \\
 \theta_{2,j,k}^{n+1/3} &= -\frac{a_{1,j,k}}{c_{1,j,k}} \theta_{0,j,k}^{n+1/3} + \frac{b_{1,j,k}}{c_{1,j,k}} \theta_{1,j,k}^{n+1/3} - \frac{d_{1,j,k}}{c_{1,j,k}}. \quad (9)
 \end{aligned}$$

Подставим (9) на место $\theta_{2,j,k}^{n+1/3}$ в (8) и получим

$$\begin{aligned}
 -3u_{0,j,k}^{n+1/3} \theta_{0,j,k}^{n+1/3} + 4u_{1,j,k}^{n+1/3} \theta_{1,j,k}^{n+1/3} + \frac{a_{1,j,k} u_{2,j,k}^{n+1/3}}{c_{1,j,k}} \theta_{0,j,k}^{n+1/3} - \\
 - \frac{b_{1,j,k} u_{2,j,k}^{n+1/3}}{c_{1,j,k}} \theta_{1,j,k}^{n+1/3} + \frac{d_{1,j,k} u_{2,j,k}^{n+1/3}}{c_{1,j,k}} &= 2\Delta x \eta_1 \theta_{0,j,k}^{n+1/3} - 2\Delta x \eta_1 \theta_v.
 \end{aligned}$$

Упростив подобные члены, придем к следующему:

$$\begin{aligned}
 &\left(a_{1,j,k} u_{2,j,k}^{n+1/3} - 3c_{1,j,k} u_{0,j,k}^{n+1/3} - 2\Delta x \eta_1 c_{1,j,k} \right) \theta_{0,j,k}^{n+1/3} = \\
 &= \left(b_{1,j,k} u_{2,j,k}^{n+1/3} - 4c_{1,j,k} u_{1,j,k}^{n+1/3} \right) \theta_{1,j,k}^{n+1/3} - d_{1,j,k} u_{2,j,k}^{n+1/3} - 2\Delta x \eta_1 c_{1,j,k} \theta_v.
 \end{aligned}$$

$\theta_{0,j,k}^{n+1/3}$ найдём следующим образом:

$$\begin{aligned} \theta_{0,j,k}^{n+1/3} = & \frac{b_{1,j,k}u_{2,j,k}^{n+1/3} - 4c_{1,j,k}u_{1,j,k}^{n+1/3}}{a_{1,j,k}u_{2,j,k}^{n+1/3} - 3c_{1,j,k}u_{0,j,k}^{n+1/3} - 2\Delta x\eta_1 c_{1,j,k}} \theta_{1,j,k}^{n+1/3} + \\ & + \frac{-d_{1,j,k}u_{2,j,k}^{n+1/3} - 2\Delta x\eta_1 c_{1,j,k}\theta_v}{a_{1,j,k}u_{2,j,k}^{n+1/3} - 3c_{1,j,k}u_{0,j,k}^{n+1/3} - 2\Delta x\eta_1 c_{1,j,k}}. \end{aligned}$$

Используя метод прогонки, найдём $\alpha_{0,j,k}$ и $\beta_{0,j,k}$:

$$\begin{aligned} \alpha_{0,j,k} &= \frac{b_{1,j,k}u_{2,j,k}^{n+1/3} - 4c_{1,j,k}u_{1,j,k}^{n+1/3}}{a_{1,j,k}u_{2,j,k}^{n+1/3} - 3c_{1,j,k}u_{0,j,k}^{n+1/3} - 2\Delta x\eta_1 c_{1,j,k}}; \\ \beta_{0,j,k} &= \frac{-d_{1,j,k}u_{2,j,k}^{n+1/3} - 2\Delta x\eta_1 c_{1,j,k}\theta_v}{a_{1,j,k}u_{2,j,k}^{n+1/3} - 3c_{1,j,k}u_{0,j,k}^{n+1/3} - 2\Delta x\eta_1 c_{1,j,k}}. \end{aligned}$$

Аналогично, аппроксимируем граничное условие (3) для $x = Lx$ с точностью второго порядка следующим образом:

$$\begin{aligned} -\frac{u_{N-2,j,k}^{n+1/3}\theta_{N-2,j,k}^{n+1/3} - 4u_{N-1,j,k}^{n+1/3}\theta_{N-1,j,k}^{n+1/3} + 3u_{N,j,k}^{n+1/3}\theta_{N,j,k}^{n+1/3}}{2\Delta x} = \\ = \eta_2\theta_{N,j,k}^{n+1/3} - \eta_2\theta_v; \end{aligned}$$

$$u_{N-2,j,k}^{n+1/3}\theta_{N-2,j,k}^{n+1/3} - 4u_{N-1,j,k}^{n+1/3}\theta_{N-1,j,k}^{n+1/3} + 3u_{N,j,k}^{n+1/3}\theta_{N,j,k}^{n+1/3} = -2\Delta x\eta_2\theta_{N,j,k}^{n+1/3} + 2\Delta x\eta_2\theta_v. \quad (10)$$

Применим метод прогонки последовательно для N , $N-1$ и $N-2$ и найдём $\theta_{N-1,j,k}^{n+1/3}$ и $\theta_{N-2,j,k}^{n+1/3}$:

$$\theta_{N-1,j,k}^{n+1/3} = \alpha_{N-1,j,k}\theta_{N,j,k}^{n+1/3} + \beta_{N-1,j,k}; \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \theta_{N-2,j,k}^{n+1/3} &= \alpha_{N-2,j,k}\theta_{N-1,j,k}^{n+1/3} + \beta_{N-2,j,k} = \\ &= \alpha_{N-2,j,k} \left(\alpha_{N-1,j,k}\theta_{N,j,k}^{n+1/3} + \beta_{N-1,j,k} \right) + \beta_{N-2,j,k} = \\ &= \alpha_{N-2,j,k}\alpha_{N-1,j,k}\theta_{N,j,k}^{n+1/3} + \alpha_{N-2,j,k}\beta_{N-1,j,k} + \beta_{N-2,j,k}. \end{aligned} \quad (12)$$

Подставив $\theta_{N-1,j,k}^{n+1/3}$ и $\theta_{N-2,j,k}^{n+1/3}$ в (11) и (12) вместо $\theta_{N-1,j,k}^{n+1/3}$ и $\theta_{N-2,j,k}^{n+1/3}$ в (10), найдём $\theta_{N,j,k}^{n+1/3}$:

$$u_{N-2,j,k}^{n+1/3}\theta_{N-2,j,k}^{n+1/3} - 4u_{N-1,j,k}^{n+1/3}\theta_{N-1,j,k}^{n+1/3} + 3u_{N,j,k}^{n+1/3}\theta_{N,j,k}^{n+1/3} = -2\Delta x\eta_2\theta_{N,j,k}^{n+1/3} + 2\Delta x\eta_2\theta_v;$$

$$\begin{aligned} &\alpha_{N-2,j,k}\alpha_{N-1,j,k}u_{N-2,j,k}^{n+1/3}\theta_{N,j,k}^{n+1/3} + \alpha_{N-2,j,k}\beta_{N-1,j,k}u_{N-2,j,k}^{n+1/3} + \\ &+ \beta_{N-2,j,k}u_{N-2,j,k}^{n+1/3} - 4\alpha_{N-1,j,k}u_{N-1,j,k}^{n+1/3}\theta_{N,j,k}^{n+1/3} - 4\beta_{N-1,j,k}u_{N-1,j,k}^{n+1/3} + \\ &+ 3u_{N,j,k}^{n+1/3}\theta_{N,j,k}^{n+1/3} = -2\Delta x\eta_2\theta_{N,j,k}^{n+1/3} + 2\Delta x\eta_2\theta_v; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\left(\alpha_{N-2,j,k}\alpha_{N-1,j,k}u_{N-2,j,k}^{n+1/3} - 4\alpha_{N-1,j,k}u_{N-1,j,k}^{n+1/3} + 3u_{N,j,k}^{n+1/3} + 2\Delta x\eta_2 \right) \theta_{N,j,k}^{n+1/3} = \\ &= 4\beta_{N-1,j,k}u_{N-1,j,k}^{n+1/3} - \alpha_{N-2,j,k}\beta_{N-1,j,k}u_{N-2,j,k}^{n+1/3} - \beta_{N-2,j,k}u_{N-2,j,k}^{n+1/3} + 2\Delta x\eta_2\theta_v; \end{aligned}$$

$$\theta_{N,j,k}^{n+1/3} = \frac{4\beta_{N-1,j,k}u_{N-1,j,k}^{n+1/3} - \alpha_{N-2,j,k}\beta_{N-1,j,k}u_{N-2,j,k}^{n+1/3} - \beta_{N-2,j,k}u_{N-2,j,k}^{n+1/3} + 2\Delta x\eta_2\theta_v}{\alpha_{N-2,j,k}\alpha_{N-1,j,k}u_{N-2,j,k}^{n+1/3} - 4\alpha_{N-1,j,k}u_{N-1,j,k}^{n+1/3} + 3u_{N,j,k}^{n+1/3} + 2\Delta x\eta_2}.$$

Выполненную выше последовательность действий применим для направлений Oy и Oz .

Для направления Oy :

$$\bar{a}_{i,j,k}\theta_{i,j-1,k}^{n+2/3} - \bar{b}_{i,j,k}\theta_{i,j,k}^{n+2/3} + \bar{c}_{i,j,k}\theta_{i,j+1,k}^{n+2/3} = -\bar{d}_{i,j,k},$$

где

$$\begin{aligned}\bar{a}_{i,j,k} &= \frac{\mu_{y,i,j-0,5}}{\Delta y^2} + \frac{v_{i,j-1,k}^{n+2/3}}{2\Delta y}; \\ \bar{b}_{i,j,k} &= \frac{\mu_{y,i,j+0,5} + \mu_{y,i,j-0,5}}{\Delta y^2} + \frac{v_{i,j,k}^{n+2/3}}{2\Delta y} + \frac{3}{2\Delta t} + \Phi_r + \Phi_\nu; \\ \bar{c}_{i,j,k} &= \frac{\mu_{y,i,j+0,5}}{\Delta y^2} - \frac{3}{2\Delta t}; \\ \bar{d}_{i,j,k} &= \left(\frac{3}{2\Delta t} - \frac{\mu_{x,i+0,5,j} + \mu_{x,i-0,5,j}}{\Delta x^2} - \frac{\mu_{z,k+0,5} + \mu_{z,k-0,5}}{\Delta z^2} - \frac{u_{i,j,k}^{n+1/3}}{\Delta x} - \frac{v_{i,j,k}^{n+1/3}}{2\Delta y} - \frac{w_{i,j,k}^{n+1/3}}{\Delta z} + \frac{w_g^{n+1/3}}{\Delta z} \right) \theta_{i,j,k}^{n+1/3} + \frac{v_{i,j-1,k}^{n+1/3}}{2\Delta y} \theta_{i,j-1,k}^{n+1/3} + \frac{3}{2\Delta t} \theta_{i,j+1,k}^{n+1/3} + \\ &+ \left(\frac{\mu_{x,i-0,5,j}}{\Delta x^2} + \frac{u_{i-1,j,k}^{n+1/3}}{\Delta x} \right) \theta_{i-1,j,k}^{n+1/3} + \frac{\mu_{x,i+0,5,j}}{\Delta x^2} \theta_{i+1,j,k}^{n+1/3} + \\ &+ \left(\frac{\mu_{z,k-0,5}}{\Delta z^2} + \frac{w_{i,j,k-1}^{n+1/3}}{\Delta z} - \frac{w_g^{n+1/3}}{\Delta z} \right) \theta_{i,j,k-1}^{n+1/3} + \frac{\mu_{z,k+0,5}}{\Delta z^2} \theta_{i,j,k+1}^{n+1/3} + \frac{1}{3} Q_{i,j,k}^{n+2/3}. \\ \bar{\alpha}_{i,0,k} &= \frac{\bar{b}_{i,1,k}v_{i,2,k}^{n+1/3} - 4\bar{c}_{i,1,k}v_{i,1,k}^{n+1/3}}{\bar{a}_{i,1,k}v_{i,2,k}^{n+1/3} - 3\bar{c}_{i,1,k}v_{i,0,k}^{n+1/3} - 2\Delta y\eta_3\bar{c}_{i,1,k}}; \\ \bar{\beta}_{i,0,k} &= \frac{-\bar{d}_{i,1,k}v_{i,2,k}^{n+1/3} - 2\Delta y\eta_3\bar{c}_{i,1,k}\theta_v}{\bar{a}_{i,1,k}v_{i,2,k}^{n+1/3} - 3\bar{c}_{i,1,k}v_{i,0,k}^{n+1/3} - 2\Delta y\eta_3\bar{c}_{i,1,k}}. \\ \theta_{i,M,k}^{n+2/3} &= \frac{4\bar{\beta}_{i,M-1,k}v_{i,M-1,k}^{n+2/3} - \bar{\alpha}_{i,M-2,k}\bar{\beta}_{i,M-1,k}v_{i,M-2,k}^{n+2/3} - \bar{\beta}_{i,M-2,k}v_{i,M-2,k}^{n+2/3} + 2\Delta y\eta_4\theta_v}{\bar{\alpha}_{i,M-2,k}\bar{\alpha}_{i,M-1,k}v_{i,M-2,k}^{n+2/3} - 4\bar{\alpha}_{i,M-1,k}v_{i,M-1,k}^{n+2/3} + 3v_{i,M,k}^{n+2/3} + 2\Delta y\eta_4}.\end{aligned}$$

Для направления Oz :

$$\bar{a}_{\rho,i,j,k}\rho_{i,j,k-1}^{n+1} - \bar{b}_{\rho,i,j,k}\rho_{i,j,k}^{n+1} + \bar{c}_{\rho,i,j,k}\rho_{i,j,k+1}^{n+1} = -\bar{d}_{\rho,i,j,k},$$

где

$$\begin{aligned}\bar{a}_{\rho,i,j,k} &= \frac{\mu_{z,k-0,5}}{\Delta z^2} + \frac{w_{i,j,k-1}^{n+1}}{2\Delta z} - \frac{w_g^{n+1}}{2\Delta z}; \\ \bar{b}_{\rho,i,j,k} &= \frac{\mu_{z,k+0,5} + \mu_{z,k-0,5}}{\Delta z^2} + \frac{w_{i,j,k}^{n+1}}{2\Delta z} - \frac{w_g^{n+1}}{2\Delta z} + \frac{3}{2\Delta t} + \Phi_r + \Phi_\nu; \\ \bar{c}_{\rho,i,j,k} &= \frac{\mu_{z,k+0,5}}{\Delta z^2} - \frac{3}{2\Delta t};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{d}_{i,j,k} = & \left(\frac{3}{2\Delta t} - \frac{\mu_{x,i+0,5,j} + \mu_{x,i-0,5,j}}{\Delta x^2} - \frac{\mu_{y,i,j+0,5} + \mu_{y,i,j-0,5}}{\Delta y^2} - \frac{u_{i,j,k}^{n+2/3}}{\Delta x} - \right. \\
& \left. - \frac{v_{i,j,k}^{n+2/3}}{\Delta y} - \frac{w_{i,j,k}^{n+2/3}}{2\Delta z} + \frac{w_g^{n+2/3}}{2\Delta z} \right) \theta_{i,j,k}^{n+2/3} + \left(\frac{w_{i,j,k-1}^{n+2/3}}{2\Delta z} - \frac{w_g^{n+2/3}}{2\Delta z} \right) \theta_{i,j,k-1}^{n+2/3} + \frac{3}{2\Delta t} \theta_{i,j,k+1}^{n+2/3} + \\
& + \left(\frac{\mu_{x,i-0,5,j}}{\Delta x^2} + \frac{u_{i-1,j,k}^n}{\Delta x} \right) \theta_{i-1,j,k}^{n+2/3} + \frac{\mu_{x,i+0,5,j}}{\Delta x^2} \theta_{i+1,j,k}^{n+2/3} + \\
& + \left(\frac{\mu_{y,i,j-0,5}}{\Delta y^2} + \frac{v_{i,j-1,k}^{n+2/3}}{\Delta y} \right) \theta_{i,j-1,k}^{n+2/3} + \frac{\mu_{y,i,j+0,5}}{\Delta y^2} \theta_{i,j+1,k}^{n+2/3} + \frac{1}{3} Q_{i,j,k}^{n+1}. \\
\bar{\alpha}_{i,j,0} = & \frac{\mu_{z,0} \bar{b}_{i,j,1} - 4\mu_{z,0} \bar{c}_{i,j,1}}{3\mu_{z,0} \bar{c}_{i,j,1} + 2\Delta z \beta_{i,j,k} \bar{c}_{i,j,1} - \mu_{z,0} \bar{a}_{i,j,1}}; \\
\bar{\beta}_{i,j,0} = & \frac{-\mu_{z,0} \bar{d}_{i,j,1} - 2\Delta z \bar{c}_{i,j,1} Q_{0,i,j,k}^{n+1}}{3\mu_{z,0} \bar{c}_{i,j,1} + 2\Delta z \beta_{i,j,k} \bar{c}_{i,j,1} - \mu_{z,0} \bar{a}_{i,j,1}}; \\
\theta_{i,j,L}^{n+1} = & \frac{4\bar{\beta}_{i,j,L-1} w_{a,i,j,L-1}^{n+1} - \bar{\alpha}_{i,j,L-2} \bar{\beta}_{i,j,L-1} w_{a,i,j,L-2}^{n+1} - \bar{\beta}_{i,j,L-2} w_{a,i,j,L-2}^{n+1} + 2\Delta z \eta_5 \theta_v}{\bar{\alpha}_{i,j,L-2} \bar{\alpha}_{i,j,L-1} w_{a,i,j,L-2}^{n+1} - 4\bar{\alpha}_{i,j,L-1} w_{a,i,j,L-1}^{n+1} + 3w_{a,i,j,L}^{n+1} + 2\Delta z \eta_5}.
\end{aligned}$$

Задача Б). Из постановки задачи (А) следует, что для интегрирования необходимо определить скорости движения воздушных масс в пограничном слое атмосферы, учитывая деформацию воздушного потока при обтекании элементов рельефа местности. Данный процесс рассматривается как модель течения идеальной несжимаемой жидкости, где поле скоростей вычисляется путем решения уравнения для потенциала скорости:

$$\frac{\partial^2 P(x, y, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P(x, y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P(x, y, z)}{\partial z^2} = 0 \quad (13)$$

с краевыми условиями

$$\frac{\partial P(x, y, z)}{\partial n} = 0; \quad (14)$$

$$\frac{\partial P(x, y, z)}{\partial n} = V_n; \quad (15)$$

$$P(x, y, z) = \tilde{P}. \quad (16)$$

Как следует из решения уравнений гидродинамики (13)-(16), они позволяют в первом приближении рассчитать потенциал скорости и поле скоростей воздушных масс в атмосфере при обтекании рельефа местности и учете шероховатости поверхности земли. Компоненты скорости ветра могут быть вычислены с использованием следующих соотношений:

$$u(x, y, z) = \frac{\partial P(x, y, z)}{\partial x}; v(x, y, z) = \frac{\partial P(x, y, z)}{\partial y}; w(x, y, z) = \frac{\partial P(x, y, z)}{\partial z}. \quad (17)$$

Далее на основе вычисленных значений скоростей перемещения воздушной массы атмосферы, можно решить задачу А).

Для вычисления потенциала скорости используем метод установления решения по времени:

$$\frac{\partial P(x, y, z, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 P(x, y, z, \tau)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P(x, y, z, \tau)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P(x, y, z, \tau)}{\partial z^2}. \quad (18)$$

Здесь τ – фиктивное время и при $\tau \rightarrow \infty$ решение уравнения (18) будет стремиться к «установлению», то есть к решению уравнения (13). Для численного интегрирования, как было предложено в работе [22], будем использовать попеременно-треугольный метод А.А. Самарского [23]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{P_{i,j,k}^{n+1/2} - P_{i,j,k}^n}{0.5\Delta\tau} = \frac{P_{i+1,j,k}^n - P_{i,j,k}^n}{\Delta x^2} + \frac{-P_{i-1,j,k}^{n+1/2} + P_{i,j,k}^{n+1/2}}{\Delta x^2} + \frac{P_{i,j,k}^n - P_{i,j+1,k}^n}{\Delta y^2} + \\ \frac{-P_{i,j,k}^{n+1/2} + P_{i,j-1,k}^{n+1/2}}{\Delta y^2} + \frac{P_{i,j,k+1}^n - P_{i,j,k}^n}{\Delta z^2} + \frac{-P_{i,j,k}^{n+1/2} + P_{i,j,k-1}^{n+1/2}}{\Delta z^2}; \\ \frac{P_{i,j,k}^{n+1} - P_{i,j,k}^{n+1/2}}{0.5\Delta\tau} = \frac{P_{i+1,j,k}^{n+1} - P_{i,j,k}^{n+1}}{\Delta x^2} + \frac{-P_{i-1,j,k}^{n+1/2} + P_{i,j,k}^{n+1/2}}{\Delta x^2} + \frac{P_{i,j,k}^{n+1} - P_{i,j+1,k}^{n+1}}{\Delta y^2} + \\ \frac{-P_{i,j,k}^{n+1/2} + P_{i,j-1,k}^{n+1/2}}{\Delta y^2} + \frac{P_{i,j,k+1}^{n+1} - P_{i,j,k}^{n+1}}{\Delta z^2} + \frac{-P_{i,j,k}^{n+1/2} + P_{i,j,k-1}^{n+1/2}}{\Delta z^2} \end{array} \right. \quad (19)$$

или

$$\left\{ \begin{array}{l} P_{i,j,k}^{n+1/2} - 0.5\Delta\tau \left(\frac{-P_{i-1,j,k}^{n+1/2} + P_{i,j,k}^{n+1/2}}{\Delta x^2} - \frac{-P_{i,j,k}^{n+1/2} + P_{i,j-1,k}^{n+1/2}}{\Delta y^2} - \frac{-P_{i,j,k}^{n+1/2} + P_{i,j,k-1}^{n+1/2}}{\Delta z^2} \right) = \\ = 0.5\Delta\tau \left(\frac{P_{i+1,j,k}^n - P_{i,j,k}^n}{\Delta x^2} + \frac{P_{i,j,k}^n - P_{i,j+1,k}^n}{\Delta y^2} + \frac{P_{i,j,k+1}^n - P_{i,j,k}^n}{\Delta z^2} \right) + P_{i,j,k}^n; \\ P_{i,j,k}^{n+1} - 0.5\tau \left(\frac{P_{i+1,j,k}^{n+1} - P_{i,j,k}^{n+1}}{\Delta x^2} - \frac{P_{i,j,k}^{n+1} - P_{i,j+1,k}^{n+1}}{\Delta y^2} - \frac{P_{i,j,k+1}^{n+1} - P_{i,j,k}^{n+1}}{\Delta z^2} \right) = \\ = 0.5\Delta\tau \left(\frac{-P_{i-1,j,k}^{n+1/2} + P_{i,j,k}^{n+1/2}}{\Delta x^2} + \frac{-P_{i,j,k}^{n+1/2} + P_{i,j-1,k}^{n+1/2}}{\Delta y^2} + \frac{-P_{i,j,k}^{n+1/2} + P_{i,j,k-1}^{n+1/2}}{\Delta z^2} \right) + P_{i,j,k}^{n+1/2}; \\ \left(\frac{0.5\Delta\tau}{\Delta x^2} + 1 \right) P_{i-1,j,k}^{n+1/2} + \left(1 - \frac{0.5\Delta\tau}{\Delta x^2} + \frac{0.5\Delta\tau}{\Delta y^2} + \frac{0.5\Delta\tau}{\Delta z^2} \right) P_{i,j,k}^{n+1/2} - \\ - 0.5\Delta\tau \left(\frac{P_{i,j-1,k}^{n+1/2}}{\Delta y^2} - \frac{P_{i,j,k-1}^{n+1/2}}{\Delta z^2} \right) = \\ = 0.5\Delta\tau \left(\frac{P_{i+1,j,k}^n - P_{i,j,k}^n}{\Delta x^2} + \frac{P_{i,j,k}^n - P_{i,j+1,k}^n}{\Delta y^2} + \frac{P_{i,j,k+1}^n - P_{i,j,k}^n}{\Delta z^2} \right) + P_{i,j,k}^n; \\ \left(1 + \frac{0.5\Delta\tau}{\Delta x^2} + \frac{0.5\Delta\tau}{\Delta y^2} + \frac{0.5\Delta\tau}{\Delta z^2} \right) P_{i,j,k}^{n+1} - 0.5\tau \left(\frac{P_{i+1,j,k}^{n+1}}{\Delta x^2} + \frac{P_{i,j+1,k}^{n+1}}{\Delta y^2} - \frac{P_{i,j,k+1}^{n+1}}{\Delta z^2} \right) = \\ = 0.5\Delta\tau \left(\frac{-P_{i-1,j,k}^{n+1/2} + P_{i,j,k}^{n+1/2}}{\Delta x^2} + \frac{-P_{i,j,k}^{n+1/2} + P_{i,j-1,k}^{n+1/2}}{\Delta y^2} + \frac{-P_{i,j,k}^{n+1/2} + P_{i,j,k-1}^{n+1/2}}{\Delta z^2} \right) + P_{i,j,k}^{n+1/2}. \end{array} \right. \quad (20)$$

Далее, используя систему разностных уравнений (20), на первом этапе вычисляется потенциальное значение давления в промежуточном временном слое $P_{i,j,k}^{n+1/2}$ с помощью первого конечно-разностного уравнения из системы (20). Затем, на основании вычисленного значения потенциального давления на временном слое « $n + 1/2$ », итерационным методом уточняется значение $P_{i,j,k}^{n+1}$ с использованием второго конечно-разностного уравнения системы (20). Условие сходимости итерационного метода задается следующим образом: $|P_{i,j,k}^{n+1} - P_{i,j,k}^n| \leq \varepsilon$. На основе вычисленного значения потенциального давления можно вычислить скорость воздушного потока

атмосферы для заданной области решения задачи с учетом орографии местности:

$$u_{i,j,k} = \frac{P_{i,j,k} - P_{i-1,j,k}}{\Delta x}; \quad v_{i,j,k} = \frac{P_{i,j,k} - P_{i-1,j,k}}{\Delta y}; \quad w_{i,j,k} = \frac{P_{i,j,k-1} - P_{i,j,k}}{\Delta z}. \quad (21)$$

4 Вычислительный эксперимент

Для тестирования предложенного численного алгоритма рассмотрим вариант решения задачи (19)-(20) при следующих входных данных: область решения в виде параллелепипеда с длиной – 12.5 м, шириной – 9.8 м и высотой 6.4 м. На границе задано условие первого рода – давление равно $P_n = 760. = 1013,25 = 101325$; начальное давление в области решения задачи $P^0 = 733$. Определяем процесс изменения давления со временем.

Аналитическое решение задачи имеет вид [24]:

$$P = P^0 \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{at}} \right) \operatorname{erf} \left(\frac{y}{2\sqrt{at}} \right) \operatorname{erf} \left(\frac{z}{2\sqrt{at}} \right) \right]. \quad (22)$$

Результаты проведенных численных расчетов приведены в таб. 1 и на рис. 1-3.

Таблица 1 Сопоставление аналитических и расчетных данных.

Время t (сек)	Расчет по разработанной численной модели	Расчет по аналитической Зависимости	Погрешность
10,0	733,14	732,58	0,56
13,54	735,12	737,18	-2,06
21,17	758,14	761,16	-3,02
31,18	761,13	764,15	-3,05

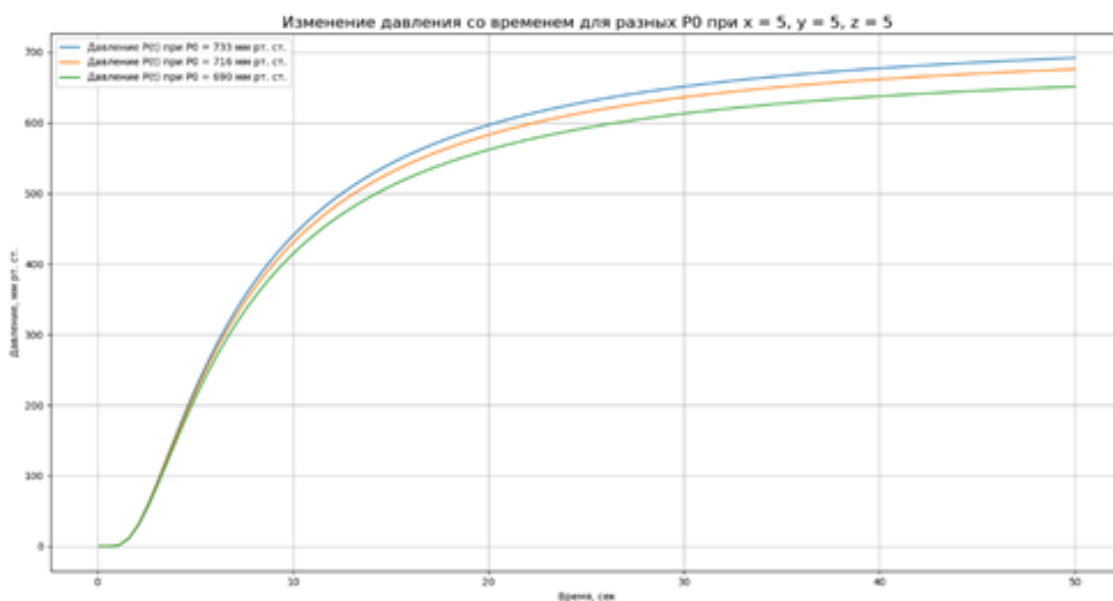


Рис. 1 Динамика изменения давления по времени при $P^0 = 733, P^0 = 716, P^0 = 690$ с координатами $x = 5, y = 5, z = 5$ соответственно.

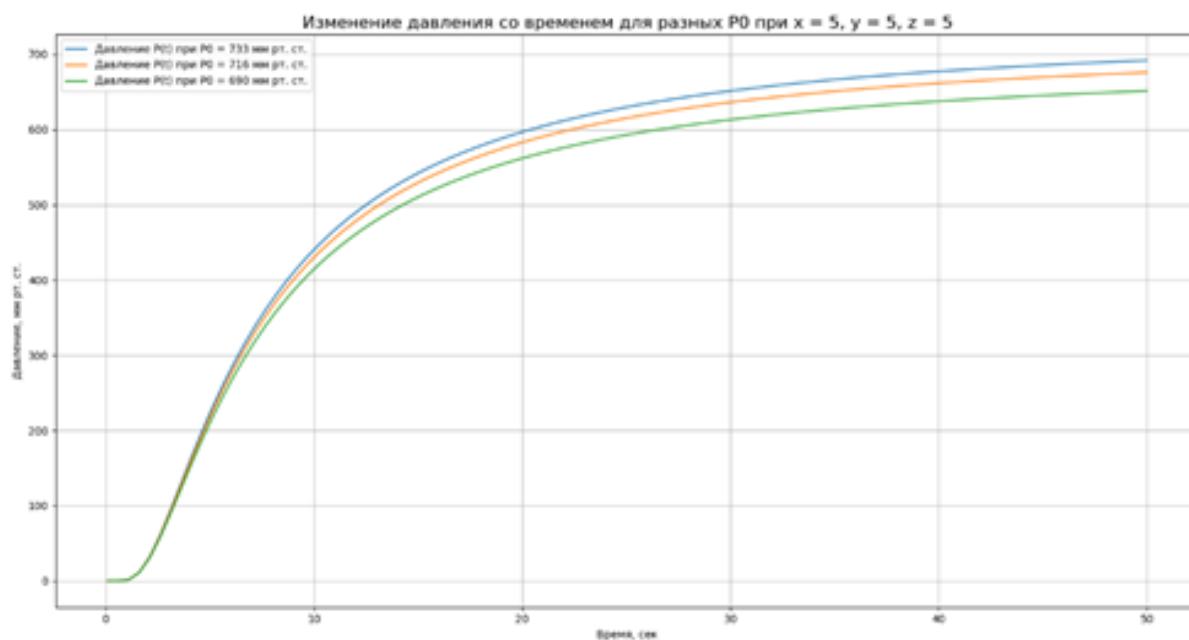


Рис. 2 Динамика изменения давления по времени при $P^0 = 733, P^0 = 716, P^0 = 690$ с координатами $x = 10, y = 10, z = 10$ соответственно.

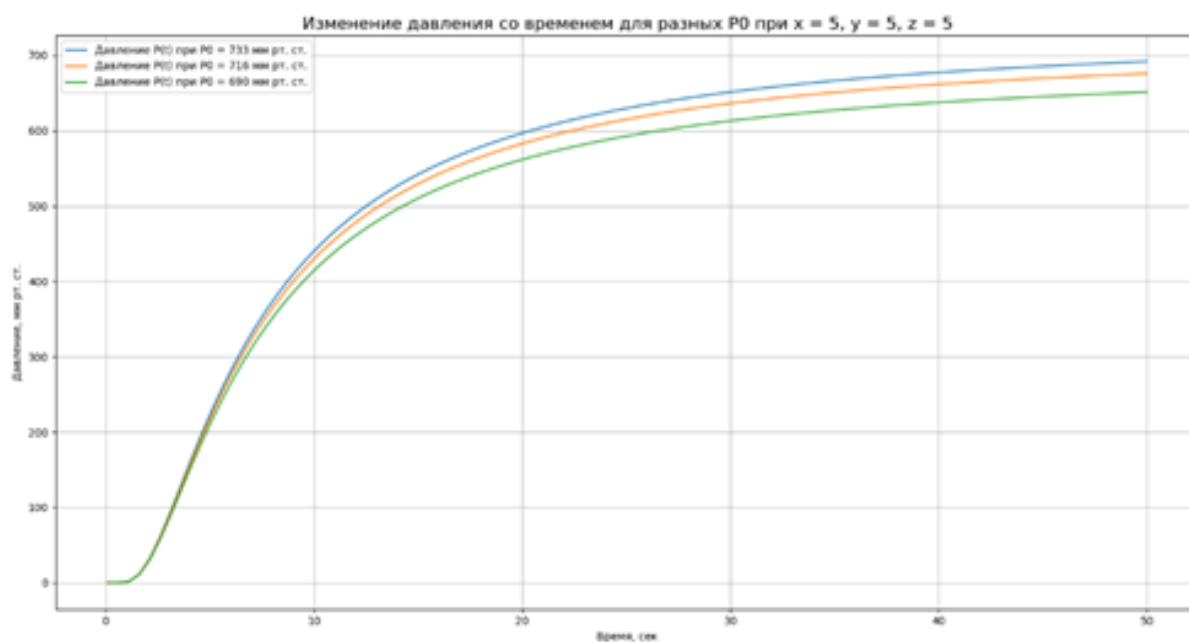


Рис. 3 Динамика изменения давления по времени при $P^0 = 733, P^0 = 716, P^0 = 690$ с координатами $x = 20, y = 20, z = 20$ соответственно.

Как видно из рис. 1-3 при различных заданных начальных давлениях оно возрастает со временем в различных точках области. Далее можно вычислить скорость воздушной массы атмосферы с помощью соотношений (21), где учтен рельеф местности.

На основе вычисленных значений скорости движения атмосферы далее можно решать задачу переноса и диффузии загрязняющих веществ в атмосфере.

5 Заключение

Предложена математическая модель и консервативный численный алгоритм для решения задачи распространения концентрации загрязняющих веществ в приземном слое атмосферы. Модель учитывает скорости движения воздушных масс, осаждение частиц при деформации и обтекании рельефа местности, а также снижение концентрации загрязняющих веществ за счет вымывания, зависящего от интенсивности осадков.

Для вычисления концентрации загрязняющих веществ в атмосфере решаются полные уравнения гидромеханики с соответствующими краевыми условиями. Для учета орографии местности используется задача течения идеальной несжимаемой жидкости, где поля скоростей определяются решением уравнения для потенциала скорости с учетом его деформации при обтекании рельефа.

Литература

- [1] Воронов О.В. и др. К вопросу применения моделей пограничного слоя атмосферы для расчета загрязняющих примесей от разнообразных источников // Наука и техника транспорта. – 2021. – № 1. – С. 82-87.
- [2] Седяров О.И., Бородин Е.С. Моделирование распространения загрязняющих веществ в приземном слое атмосферы с учетом влияния застройки и рельефа местности // Промышленные процессы и технологии. – Т. 2, № 4. – 2022. – С. 9-21. – doi: [http://dx.doi.org/10.37816/2713-0789-2022-2-2\(4\)-8-25](http://dx.doi.org/10.37816/2713-0789-2022-2-2(4)-8-25).
- [3] Берлянд М.Е. Современные проблемы атмосферной диффузии и загрязнения атмосферы. – Л.: Гидрометеиздат, 1975. – 448 с.
- [4] Берлянд М.Е. Прогноз и регулирование загрязнения атмосферы. – Л.: Гидрометеиздат, 1985. – 272 с.
- [5] Лайхтман Д.Л. Физика пограничного слоя атмосферы. – Л.: Гидрометеиздат, 1970. – 342 с.
- [6] Periañez R. et al. Оценка вертикального коэффициента турбулентной диффузии выбросов промышленных предприятий // Известия РАН. Физика атмосферы и океана. – 2015. – Т. 51. – № 4. – С. 502-507.
- [7] Lateb M. et al. On the use of numerical modelling for near-field pollutant dispersion in urban environments: a review // Environmental Pollution. – 2016. – Vol. 208. – P. 271-283. – doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.envpol.2015.07.039>.
- [8] Martins V. et al. Origin of inorganic and organic components of PM2.5 in subway stations of Barcelona // Environmental Pollution. – 2016. – Vol. 208. – P. 125-136. – doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.envpol.2015.07.004>.
- [9] Yang T. et al. A mathematical model for soil solute transfer into surface runoff as influenced by rainfall detachment // Sci. Total Environ. – 2016. – Vol. 557-558. – P. 590-600. – doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.scitotenv.2016.03.087>.
- [10] Anderson P., Paulo X., Davidson M. Simulation of atmospheric pollutant dispersion considering a bi-flux process and fractional derivatives // Atmospheric Pollution Research. – 2020. – Vol. 11, Issue 1. – P. 57-66.
- [11] Sharan M., Gopalakrishnan S. Mathematical Modeling of Diffusion and Transport of Pollutants in the Atmospheric Boundary Layer // Pure appl. geophys. – 2003. – Vol. 160. – P. 357-394. – doi: <http://dx.doi.org/10.1007/s00024-003-8784-5>.

- [12] *Lorenzo G. et al.* Atmospheric Pollutant Dispersion over Complex Terrain: Challenges and Needs for Improving Air Quality Measurements and Modeling // *Atmosphere*. – 2020. – Vol. 11. – doi: <http://dx.doi.org/10.3390/atmos11060646>.
- [13] *Weichenthal S. et al.* Characterizing the spatial distribution of ambient ultrafine particles in Toronto: a land use regression model // *Environmental Pollution*. – 2016. – Vol. 208. – P. 241-248. – doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.envpol.2015.04.011>.
- [14] *Halonen J.I. et al.* Is long-term exposure to traffic pollution associated with mortality? A small-area study in London // *Environmental Pollution*. – 2016. – Vol. 208. – P. 25-32. – doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.envpol.2015.06.036>.
- [15] *Hong Y. et al.* Integrating atmospheric deposition, soil erosion and sewer transport models to assess the transfer of traffic-related pollutants in urban areas // *Environmental Modelling & Software*. – 2017. – Vol. 96. – P. 158-171. – doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.envsoft.2017.06.047>.
- [16] *Halonen J.I. et al.* Long-term exposure to traffic pollution and hospital admissions in London // *Environ. Pollut.* – 2016. – Vol. 208. – P. 48-57. – doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.envpol.2015.09.051>.
- [17] *Ravshanov N., Tashtemirova N.N., Ubaidullaev M.Sh.* Direct and connected problem of transport of harmful substances in the atmosphere, taken into account of the absorption and capture of particles by vegetation in the ground layer // *Bulletin of TUIT: Management and Communication Technologies*. – 2024. – № 2(14). – <https://shorturl.at/8mUvP>.
- [18] *Равшанов Н., Таштемирова Н., Каршиев Д.А.* Моделирование процесса распространения аэрозольных частиц в пограничном слое атмосферы с учетом их поглощения и захвата растительным покровом // *Проблемы вычислительной и прикладной математики*. – 2024. – №2(56). – С. 41-57.
- [19] *Shafiev T., Nazarov Sh.* Studies of the influence of vegetation cover on the process of transfer and diffusion of harmful substances in the atmosphere // *E3S Web of Conferences*. – 2023. – Vol. 431. – P. 1-11. – doi: <http://dx.doi.org/10.1051/e3sconf/202343101059>.
- [20] *Равшанов Н., Назаров Ш.Э., Расулмухаммедов А.* Исследование основных параметров процессе диффузии вредных веществ в атмосфере // *Проблемы вычислительной и прикладной математики*. – 2022. – №2/1(40). – С. 174-191.
- [21] *Ravshanov N., Nazarov Sh.E., Boborakhimov B.* Modeling the Process of Pollutant Spread in the Atmosphere with Account for the Capture of Particles by Vegetation Elements // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. – 2024. – Vol. 45, No. 3. – P. 1156-1169.
- [22] *Gutko E.* CFD modeling of the atmosphere pollution in the case of accidents for solving monitoring problems // *Вісник Дніпропетровського університету. Механіка*. – 2013. – Т. 1, Вип. 17. – С. 163-168.
- [23] *Самарский А.А.* Теория разностных схем.. – М.: Наука, 1983. – 616 с.
- [24] *Полянин А.Д.* Справочник по точным решениям уравнений тепло-массопереноса. – М.: Факториал, 1998. – 368 с.

Поступила в редакцию 16.12.2024

UDC 519.6:628.395

MATHEMATICAL MODELING OF POLLUTANT TRANSPORT AND DIFFUSION IN THE NEAR-SURFACE

ATMOSPHERIC LAYER WITH CONSIDERATION OF TERRAIN CHARACTERISTICS

^{1*}*Ravshanov N.*, ²*Nasrullaev P.*

*ravshanzade-09@mail.ru

¹Tashkent Pediatric Medical Institute, 223, Bogishamol str., Tashkent, 100140 Uzbekistan;

²Digital Technologies and Artificial Intelligence Development Research Institute,
17A, Buz-2, Tashkent, 100125 Uzbekistan.

This paper presents a mathematical model and a numerical algorithm designed for monitoring and forecasting the ecological conditions of the near-surface atmospheric layer. The model accounts for weather and climate factors, incorporating the velocities of air mass movement and particle deposition in the atmospheric boundary layer, as well as their influence on pollutant concentrations due to decomposition and photochemical transformations. Additionally, it includes the reduction of pollutant concentrations through rain-out and washout processes, which depend on precipitation intensity. Other perturbation factors affecting aerosol particle transport and diffusion are also considered. The particle deposition velocity is calculated based on particle diameter, density, gravitational acceleration, and the dynamic viscosity of the atmosphere. The process of pollutant transport and diffusion in the near-surface layer is divided into two subproblems. To determine pollutant concentrations, fluid mechanics equations are solved with appropriate boundary conditions. To incorporate terrain orography, the flow of an ideal incompressible fluid is considered, where the velocity field is determined by solving the velocity potential equation and taking into account the deformation of the flow as it interacts with the underlying terrain.

Keywords: mathematical model, finite-difference method, pollutant transport and diffusion, terrain characteristics, atmospheric dynamic viscosity.

Citation: Ravshanov N., Nasrullaev P. 2024. Mathematical modeling of pollutant transport and diffusion in the near-surface atmospheric layer with consideration of terrain characteristics. *Problems of Computational and Applied Mathematics*. 6(62): 5-22.

ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

№ 6(62) 2024

Журнал основан в 2015 году.

Издается 6 раз в год.

Учредитель:

Научно-исследовательский институт развития цифровых технологий и
искусственного интеллекта.

Главный редактор:

Равшанов Н.

Заместители главного редактора:

Азамов А.А., Арипов М.М., Шадиметов Х.М.

Ответственный секретарь:

Ахмедов Д.Д.

Редакционный совет:

Азамова Н.А., Алоев Р.Д., Амиргалиев Е.Н. (Казахстан), Бурнашев В.Ф.,
Загребина С.А. (Россия), Задорин А.И. (Россия), Игнатъев Н.А.,
Ильин В.П. (Россия), Исмагилов И.И. (Россия), Кабанихин С.И. (Россия),
Карачик В.В. (Россия), Курбонов Н.М., Маматов Н.С., Мирзаев Н.М.,
Мирзаева Г.Р., Мухамадиев А.Ш., Назирова Э.Ш., Нормуродов Ч.Б.,
Нуралиев Ф.М., Опанасенко В.Н. (Украина), Расулмухамедов М.М., Расулов А.С.,
Садуллаева Ш.А., Старовойтов В.В. (Беларусь), Хаётов А.Р., Халджигитов А.,
Хамдамов Р.Х., Хужаев И.К., Хужаеров Б.Х., Чье Ен Ун (Россия),
Шабозов М.Ш. (Таджикистан), Dimov I. (Болгария), Li Y. (США),
Mascagni M. (США), Min A. (Германия), Schaumburg H. (Германия),
Singh D. (Южная Корея), Singh M. (Южная Корея).

Журнал зарегистрирован в Агентстве информации и массовых коммуникаций при
Администрации Президента Республики Узбекистан.

Регистрационное свидетельство №0856 от 5 августа 2015 года.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

При перепечатке материалов ссылка на журнал обязательна.

За точность фактов и достоверность информации ответственность несут авторы.

Адрес редакции:

100125, г. Ташкент, м-в. Буз-2, 17А.

Тел.: +(998) 712-319-253, 712-319-249.

Э-почта: journals@airi.uz.

Веб-сайт: <https://journals.airi.uz>.

Дизайн и вёрстка:

Шарипов Х.Д.

Отпечатано в типографии НИИ РЦТИИ.

Подписано в печать 27.12.2024 г.

Формат 60x84 1/8. Заказ №8. Тираж 100 экз.

PROBLEMS OF COMPUTATIONAL AND APPLIED MATHEMATICS

No. 6(62) 2024

The journal was established in 2015.
6 issues are published per year.

Founder:

Digital Technologies and Artificial Intelligence Development Research Institute.

Editor-in-Chief:

Ravshanov N.

Deputy Editors:

Azamov A.A., Aripov M.M., Shadimetov Kh.M.

Executive Secretary:

Akhmedov D.D.

Editorial Council:

Azamova N.A., Alov R.D., Amirgaliev E.N. (Kazakhstan), Burnashev V.F.,
Zagrebina S.A. (Russia), Zadorin A.I. (Russia), Ignatiev N.A., Ilyin V.P. (Russia),
Ismagilov I.I. (Russia), Kabanikhin S.I. (Russia), Karachik V.V. (Russia), Kurbonov
N.M., Mamatov N.S., Mirzaev N.M., Mirzaeva G.R., Mukhamadiev A.Sh., Nazirova
E.Sh., Normurodov Ch.B., Nuraliev F.M., Opanasenko V.N. (Ukraine), Rasulov A.S.,
Sadullaeva Sh.A., Starovoitov V.V. (Belarus), Khayotov A.R., Khaldjigitov A.,
Khamdamov R.Kh., Khujaev I.K., Khujayorov B.Kh., Chye En Un (Russia),
Shabozov M.Sh. (Tajikistan), Dimov I. (Bulgaria), Li Y. (USA), Mascagni M. (USA),
Min A. (Germany), Schaumburg H. (Germany), Singh D. (South Korea),
Singh M. (South Korea).

The journal is registered by Agency of Information and Mass Communications under the
Administration of the President of the Republic of Uzbekistan.

The registration certificate No. 0856 of 5 August 2015.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

At a reprint of materials the reference to the journal is obligatory.
Authors are responsible for the accuracy of the facts and reliability of the information.

Address:

100125, Tashkent, Buz-2, 17A.

Tel.: +(998) 712-319-253, 712-319-249.

E-mail: journals@airi.uz.

Web-site: <https://journals.airi.uz>.

Layout design:

Sharipov Kh.D.

DTAIDRI printing office.

Signed for print 27.12.2024

Format 60x84 1/8. Order No. 8. Printed copies 100.

Содержание

Равшанов Н., Насруллаев П.

Математическое моделирование процесса переноса и диффузии загрязняющих веществ в приземном слое атмосферы с учетом рельефа местности . . . 5

Каримов М.М., Каршиев Д.А.

Моделирование процесса нелинейной фильтрации подземных вод в пористой среде 23

Равшанов Н., Махмудов Р.З.

Регрессионный анализ состава пыли в атмосферном воздухе города 34

Холмуродов А.Э., Матанов М.Ч.

Модель сейсмического возбуждения полупространственного распространения волн Рэлея 45

Равшанов Н., Шадманов И.У., Адизова З.М.

Разработка математической модели для контроля и прогнозирования процессов теплопередачи и потери влаги при хранении пористых тел 57

Палванов Б.Ю., Жафаров С., Исламов Ю.Н.

Моделирование процесса сепарирования сыпучих смесей центробежным сепаратором с учетом изменения коэффициента сопротивления частиц 73

Убайдуллаев М.Ш.

Моделирование процесса влажного осаждения радиоактивных примесей в атмосфере с использованием модели DERMA 91

Мурадов Ф.А.

Усовершенствованная математическая модель процесса распространения газовых смесей и аэрозольных частиц в атмосфере и численный алгоритм решения задачи методом физического расщепления 105

Сулуюкова Л.Ф., Ахмеджанова З.И.

Модели и алгоритмы обработки данных в транспортной логистике сельскохозяйственных регионов с использованием многокритериальных эволюционных алгоритмов 125

Мухамедиева Д.Т., Раупова М.Х.

Решение сложных задач смешанно-бинарной ограниченной оптимизации . . 137

Contents

Ravshanov N., Nasrullaev P.

Mathematical modeling of pollutant transport and diffusion in the near-surface atmospheric layer with consideration of terrain characteristics 5

Karimov M.M., Karshiev D.A.

Modeling of the nonlinear groundwater filtration process in a porous medium . . 23

Ravshanov N., Mahmudov R.Z.

Analysis of dust composition in the atmospheric air of the city 34

Kholmurodov A.E., Matanov M.Ch.

Seismic excitation model of half-space propagation of Rayleigh waves 45

Ravshanov N., Shadmanov I.U., Adizova Z.M.

Development of a mathematical model for monitoring and forecasting heat transfer processes and moisture loss during storage of porous bodies 57

Palvanov B.Y., Jafarov S.K., Islamov Y.N.

Modeling the separation process of bulk mixtures by a centrifugal separator taking into account the change in the particle resistance coefficient 73

Ubaydullaev M.Sh.

Modeling the process of wet deposition of radioactive impurities in the atmosphere using the model DERMA 91

Muradov F.A.

Advanced mathematical model of propagation of gas mixtures and aerosol particles in the atmosphere and numerical solution algorithm based on physical splitting method 105

Sulyukova L.F., Akhmedjanova Z.I.

Models and algorithms for data processing in transport logistics of agricultural regions using multi-criteria evolutionary algorithms 125

Mukhamediyeva D.T., Raupova M.H.

Solving complex mixed-binary constrained optimization problems 137