УДК 539.2

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ ВИБРОЗАЩИТНОЙ СИСТЕМЫ

Юсупов М.

ysupovmajid1956@mail.ru

Ташкентский государственный аграрный университет,

Узбекистан, Ташкентская область, Кибрайский р-н, ул. Университетская, 2 А.

Рассматривается нелинейная вязкоупругая виброзащитная система которая состоит из объекта виброзащиты, установленного на платформе, которая, в свою очередь, установлена на другую платформу, нижняя платформа поставлена на вибрирующее основание. Предполагается, что характеристики вязкоупругих элементов системы имеют нелинейные кубическую характеристику. Построена математическая модель в виде систем нелинейных интегро-дифференциальных уравнений. Реологические свойства подвески учитывается с интегральным моделем Больцмана-Вольтерра с ядром релаксации Колтунова-Ржаницына. Для решения задач, предложен численный метод, основанный на использовании квадратурных формул, устраняющий особенности в ядре релаксации. Исследовано влияние реологические свойство подвески и вибрирующее основание на формы колебания по отношению к положению равновесия системы.

Ключевые слова: вязкоупругость, интегральный оператор, ядро релаксации, интегро-дифференциальные уравнения, формула трапеции, квадратурная формула, принцип Больцмана-Вольтерры, виброзащитная система.

Цитирование: *Юсупов М.* Исследование нелинейной вязкоупругой виброзащитной системы // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2024. – № 4/2(60). – С. 134-141.

1 Введение

Создание эффективных средств защиты от вибраций и ударов является одной из важнейших проблем современной техники. Применение упругих амортизаторов является одним из наиболее распространенных способов виброзащиты. В настоящее время существует большое число конструктивных разновидностей виброзащитных устройств, предназначенных как для защиты приборов и оборудования, устанавливаемых на вибрирующих основаниях, так и для защиты оснований и фундаментов от динамических воздействий. Создание амортизирующих устройств, способных защитить объекты от вибраций и ударов и, вместе с тем, обладающих ограниченными размерами, является сложной технической проблемой. В связи с этим первостепенное значение приобретают вопросы теории и расчета адаптивных виброзащитных систем [1].

Математической моделью многих механических систем является система динамических уравнений полиномиальной структуры с периодическими или постоянными параметрами. Такие механические системы широко применяют в динамике виброзащиты приборов и устройств [2].

В [3] рассматриваются вопросы построения математических моделей для механических систем, в которых могут быть сформированы сочленения. Предлагается метод, основанный на выборе систем обобщенных координат относительного движения, соответствующих возможностям появления сочленения звеньев. При этом число степеней свободы системы уменьшается.

В [4] рассмотрены методы и средства виброзащиты технологических и транспортных машин. Особое внимание уделяется уравновешиванию и балансировке валов и роторов, виброизоляции, вибродемпфированию, динамическому виброгашению и другим методам, приводятся основы акустической динамики.

При решении задач виброзащиты широко применяются линейные системы, хотя линейность функций не достаточно точно аппроксимирует характеристики системы, внося погрешности при анализе [5].

Рассматривается расчетная схема технических объектов, имеющих так называемую подвеску для защиты от внешних воздействий. Такого рода задачи характерны для транспортных средств различного назначения, в частности для защиты тяговых двигателей локомотивов различного назначения. [6].

Применим представленный метод к нелинейной динамической системе с тремя степенями свободы. Рассмотрим виброзащитную систему (рис. 1), состоящую из объекта виброзащиты массой m_1, установленного на платформы массой m_2 и m_3 нижняя из которых закреплена на вибрирующем основании [7].

Предполагается, что вязкоупругие элементы имеют нелинейную кубическую характеристику $c\,(1-R^*)\,(z+\gamma z^3)$. Где c – жесткость подвески; γ – коэффициент нелинейности, зависящий от физических свойств материала подвески; $R^*y\,(t) = \int_0^t R\,(t-\tau)\,y\,(\tau)\,d\tau$ – интегральные операторы с ядрами релаксациями $R\,(t) = \varepsilon t^{\alpha-1}\varepsilon^{\beta t}$.

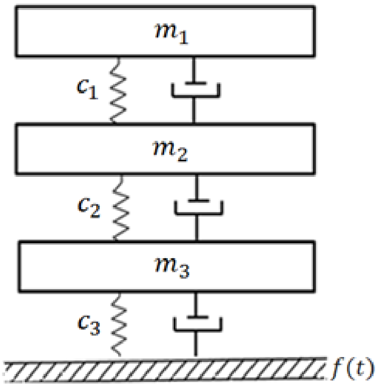

Рис. 1 Схема нелинейной виброзащитной системы

Математическая модель рассматриваемой системы представима в виде системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + c_1\,(1-R_1^*)\left[(x_1-x_2)+d_1(x_1-x_2)^3\right]=0, \\ m_2\ddot{x}_2 + c_1\,(1-R_1^*)\left[(x_2-x_1)+d_1(x_2-x_1)^3\right]+ \\ c_2\,(1-R_2^*)\left[(x_2-x_3)+d_2(x_2-x_3)^3\right]=0, \\ m_3\ddot{x}_3 + c_2\,(1-R_2^*)\left[(x_3-x_2)+d_2(x_3-x_2)^3\right]+ \\ c_3\,(1-R_3^*)\left[(x_3-f)+d_3(x_3-f)^3\right]=0, \end{cases}$$

где x_1, x_2, x_3 – абсолютные перемещения по отношению к положению равновесия системы.

На основание действуют выбрации $f\left(t\right)=a\sin\omega t$.

2 Методы решения

Введя безразмерные параметры $\frac{t}{\tau};\frac{R_i}{\tau};\frac{\omega}{\tau};\frac{x_1}{l};\frac{x_2}{l};\frac{x_3}{l};\frac{f}{l}$ и сохраняя при этом прежние обозначения, имеем:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1+k_{11}\left(1-R_1^*\right)\left[(x_1-x_2)+\gamma_{11}(x_1-x_2)^3\right]=0, \\ \ddot{x}_2+k_{12}\left(1-R_1^*\right)\left[(x_2-x_1)+\gamma_{12}(x_2-x_1)^3\right]+ \\ +k_{21}\left(1-R_2^*\right)\left[(x_2-x_3)+\gamma_{21}(x_2-x_3)^3\right]=0, \\ \ddot{x}_3+k_{22}\left(1-R_2^*\right)\left[(x_3-x_2)+\gamma_{22}(x_3-x_2)^3\right]+ \\ +k_3\left(1-R_3^*\right)\left[(x_3-f)+\gamma_3(x_3-f)^3\right]=0, \end{cases} \tag{1}$$

где

$$k_{11}=\frac{c_1\tau^2}{m_1};\quad k_{12}=\frac{c_1\tau^2}{m_2};\quad k_{21}=\frac{c_2\tau^2}{m_2};\quad k_{22}=\frac{c_2\tau^2}{m_3};\quad k_3=\frac{c_3\tau^2}{m_3};$$
$$\gamma_{11}=\frac{d_1\tau^2l^2}{m_1};\quad \gamma_{12}=\frac{d_1\tau^2l^2}{m_2};\quad \gamma_{21}=\frac{d_2\tau^2l^2}{m_2};\quad \gamma_{22}=\frac{d_2\tau^2l^2}{m_3};\quad \gamma_3=\frac{d_3\tau^2l^2}{m_3}.$$

Принимаем, что

$$x_1\left(0\right)=\dot{x}_1\left(0\right)=x_2\left(0\right)=\dot{x}_2\left(0\right)=x_3\left(0\right)=\dot{x}_3\left(0\right)=0. \tag{2}$$

На систему действует внешнее возмущение: $f\left(t\right)=2,5\sin 6\pi t$.

Система интегро-дифференциальных уравнений (1) с начальными условиями (2) решается методом основанной на использовании квадратурной формулы [8–17]. Два раза интегрируя по t системе (1) в интервале $0;t$ и полагая $t=t_n=n\cdot$ $\cdot\Delta t$, $\mathrm{n}=0,1,2,3,...$ (Δt – шаг по времени) имеем:

$$\begin{cases} x_{1n}+k_{11}\int\limits_0^{t_n}G_1\left(t_n-s\right)\left\{x_1\left(s\right)-x_2\left(s\right)+\gamma_{11}[x_1\left(s\right)-x_2\left(s\right)]^3\right\}ds=0, \\ x_{2n}+k_{12}\int\limits_0^{t_n}G_1\left(t_n-s\right)\left\{x_2\left(s\right)-x_1\left(s\right)+\gamma_{12}[x_2\left(s\right)-x_1\left(s\right)]^3\right\}ds+ \\ +k_{21}\int\limits_0^{t_n}G_2\left(t_n-s\right)\left\{x_2\left(s\right)-x_3\left(s\right)+\gamma_{21}[x_2\left(s\right)-x_3\left(s\right)]^3\right\}ds=0, \\ x_{3n}+k_{22}\int\limits_0^{t_n}G_2\left(t_n-s\right)\left\{x_3\left(s\right)-x_2\left(s\right)+\gamma_{22}[x_3\left(s\right)-x_2\left(s\right)]^3\right\}ds+ \\ +k_3\int\limits_0^{t_n}G_3\left(t_n-s\right)\left\{x_3\left(s\right)-f\left(s\right)+\gamma_3[x_3\left(s\right)-f\left(s\right)]^3\right\}ds=0. \end{cases} \tag{3}$$

где

$$G_j\left(t_n-s\right)=t_n-s-\int\limits_0^{t_n-s}\left(t_n-s-\tau\right)R_j\left(\tau\right);\ \mathrm{j}=\overline{1,3}.$$

Заменяя интегралы квадратурными формулами трапеции в системе (3), имеем следующие реккурентные соотношения для определения абсолютные перемещения по отношению к положению равновесия системы:

$$x_{1n}=x_1\left(t_n\right);\ x_{2n}=x_2\left(t_n\right);\ x_{3n}=x_3\left(t_n\right).$$

$$\begin{cases} x_{1n} = k_{11} \sum\limits_{i=0}^{n-1} A_i G_1 \left(t_n - t_i\right) \left[x_{2i} - x_{1i} + \gamma_{11}(x_{2i} - x_{1i})^3\right]; \\ x_{2n} = k_{12} \sum\limits_{i=0}^{n-1} A_i G_1 \left(t_n - t_i\right) \left[x_{1i} - x_{2i} + \gamma_{12}(x_{1i} - x_{2i})^3\right] + \\ k_{21} \sum\limits_{i=0}^{n-1} A_i G_2 \left(t_n - t_i\right) \left[x_{3i} - x_{2i} + \gamma_{21}(x_{3i} - x_{2i})^3\right]; \\ x_{3n} = k_{22} \sum\limits_{i=0}^{n-1} A_i G_2 \left(t_n - t_i\right) \left[x_{2i} - x_{3i} + \gamma_{22}(x_{2i} - x_{3i})^3\right] + \\ +k_3 \sum\limits_{i=0}^{n-1} A_i G_3 \left(t_n - t_i\right) \left[f_i - x_{3i} + \gamma_3(f_i - x_{3i})^3\right]. \end{cases} \tag{4}$$

где $A_0 = \frac{\Delta t}{2}; \mathrm{A}_j = \Delta t; \mathrm{j} = \overline{1, \mathrm{n}-1}$.

3 Результаты и выводы

Для проведения вычислительного эксперимента составлена компьютерная программа, численные результаты которой представлены в виде графиков. Проведены численные расчеты. При этом использованы следующие исходные данные: $k_{11} = 0,6106$; $k_{12} = 0,5897$; $k_{21} = 1,5641$; $k_{22} = 1,0702$; $k_3 = 3,0351$; $\gamma_{11} = 0,8850$; $\gamma_{12} = 0,5848$; $\gamma_{21} = 2,5641$; $\gamma_{22} = 1,7544$; $\gamma_3 = 0,0409$; $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0,25$; $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0,05; \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0,02$.

На рис. 2,3,4 соответственно показано абсолютное перемещение платформы с массой m_1,m_2 и m_3. Здесь сплошной линией обозначен для упругой ($\varepsilon_i = 0$) и пунктирной линией для вязкоупругой ($\varepsilon_i = 0,02$) подвески. Колебания системы происходят с частотами, кратными частоте внешней силы, воздействующей на основание. Представленный график показывает, что вынужденные колебания в начале установления являются квазипериодическими с частотами, кратными внешней силе. Форма колебаний платформы массой m_2 и m_1 расположенной верхной части платформе m_3 имеет периодического характера. Учет реологических свойств материала подвески приводит к уменьшению амплитуды вертикальных колебаний платформы. Уменьшение частоты колебаний приводит к сдвигу фаз на право. С течением времени вязкоупругие свойства подвески существенно снизить амплитуды вертикальных колебаний платформы.

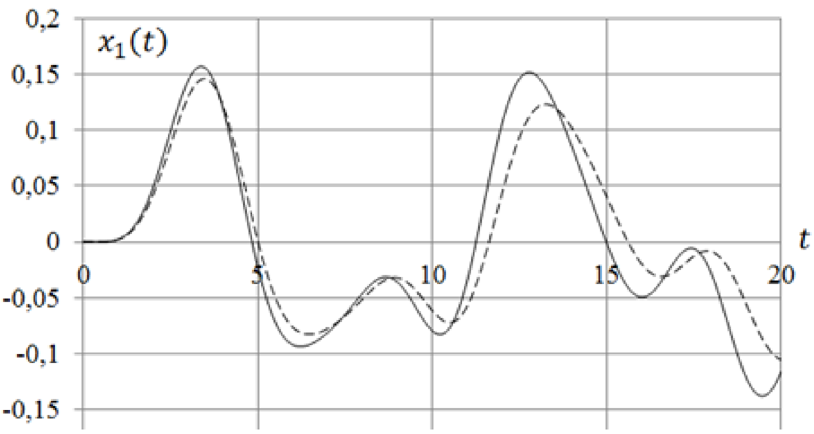

Рис. 2 Абсолютное перемещение платформы с массой m_1.

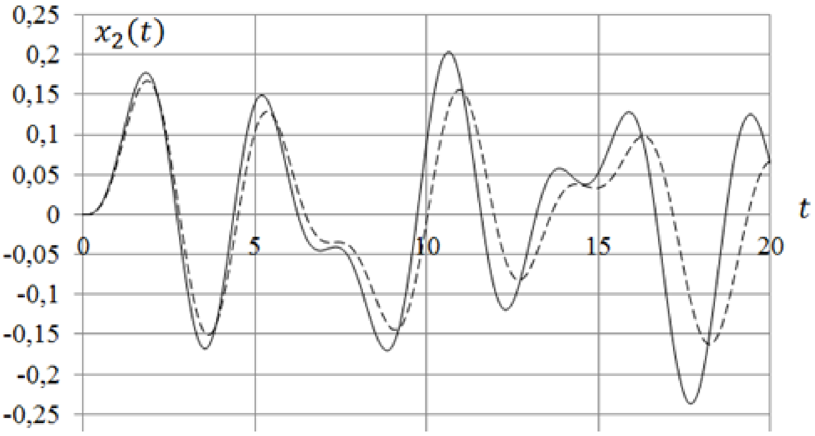

Рис. 3 Абсолютное перемещение платформы с массой m_2.

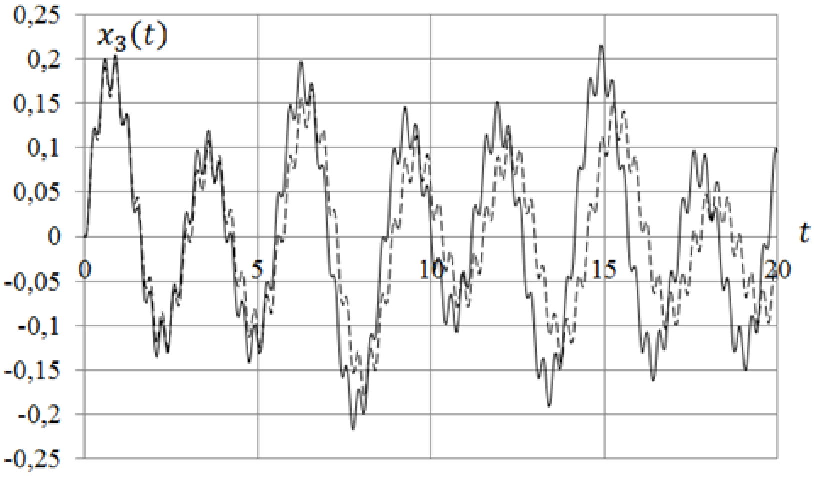

Рис. 4 Абсолютное перемещение платформы с массой m_3.

Исследован влияние тип выбрации основание на форму колебаний платформы с массой m_1,m_2 и m_3. На основание действуют выбрации по законам:

$$f(t) = \begin{cases} 2,5\sin 6\pi t & \text{при } t < 5 \\ 0 & \text{при } t \geqslant 5. \end{cases}$$

На рис. 5,6,7 соответственно показано абсолютное перемещение платформы с массой m_1,m_2 и m_3. Здесь сплошной линией обозначен для упругой ($\varepsilon_i = 0$) и пунктирной линией для вязкоупругой ($\varepsilon_i = 0,02$) подвески.

Из графика видно, что после прекращения выбрации ($t \geqslant 5$)формы колебаний становится периодическими.

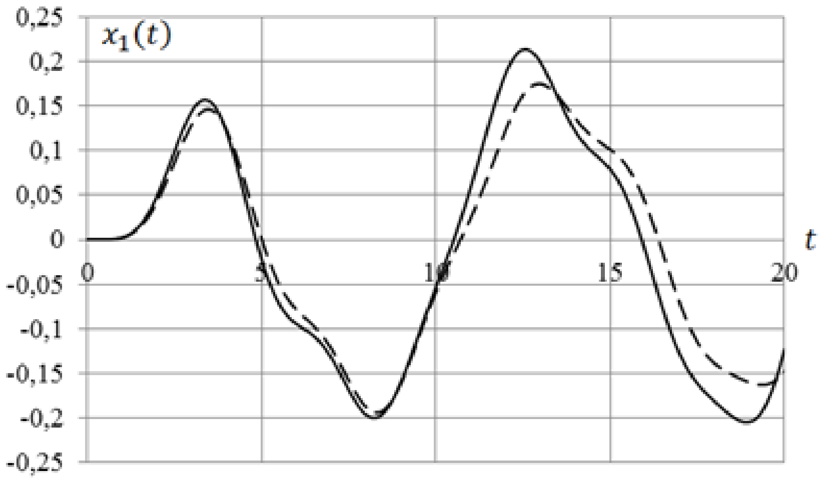

Рис. 5 Абсолютное перемещение платформы с массой m_1.

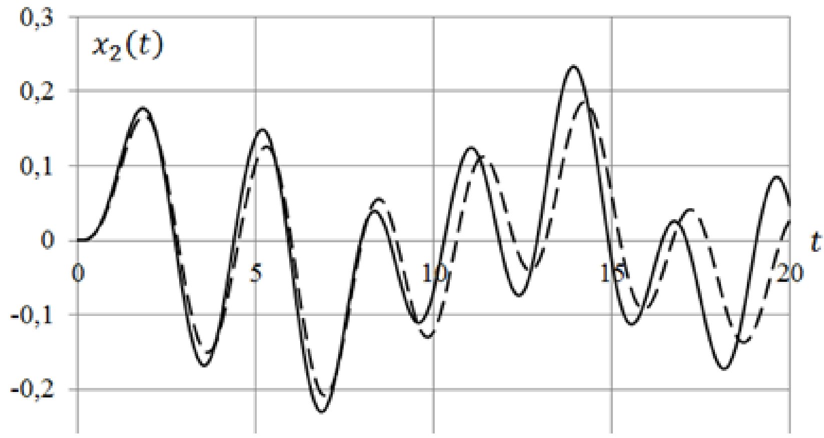

Рис. 6 Абсолютное перемещение платформы с массой m_2.

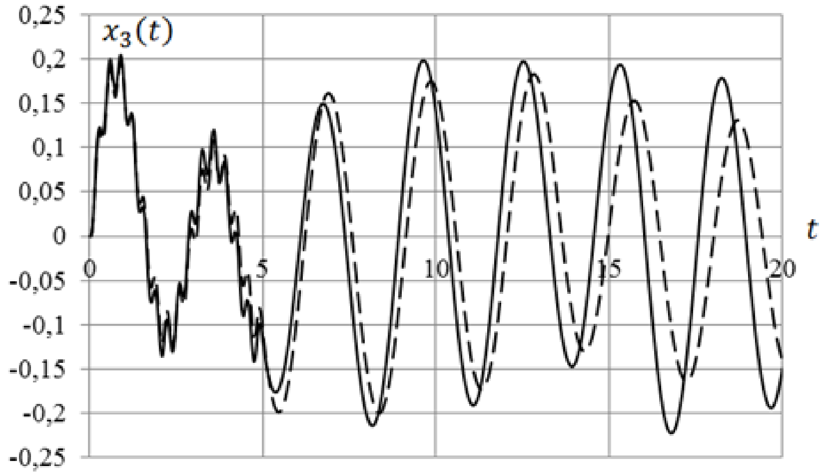

Рис. 7 Абсолютное перемещение платформы с массой m_3.

4 Заключение

Виброзащита, под которой понимается комплекс мероприятий при проектировании, изготовлении, монтаже и эксплуатации оборудования, направленных на уменьшение его вибрации, является одной из актуальных проблем различных отраслей машиностроения. Решение этой проблемы повысит эффективность работы оборудования.

Построенные адекватное математическое модели и разработка эффективное методы их решения позволяет получить достаточно подробные качественные и количественные характеристики изучаемых движений, исследовать установившиеся режимы колебаний для нелинейное вязкоупругих систем, находящихся в условиях периодического внешнего воздействия, а также изучать переходные процессы.

Использование схем, допускающих получение решения в замкнутом виде или с помощью алгоритмов типа (4), представляет собой весьма большой интерес.

Полученные результаты позволяют сделать вывод о целесообразности учёта нелинейности и наследственно-деформируемых свойств подвески для уменьшения амплитуда колебаний систем с несколькими степенями свободы при переходных процессах.

Литература

[1] *Гордиев Б.А., Филатов Л.В., Айнбиндер Р.М.* Математические модели виброзащитных систем. – Н.Новгород: ННГАСУ, 2018. – 168 с.

[2] *Бабаков И.М.* Теория колебаний. М.: Дрофа, 2004. – 591 с.

[3] *Хоменко А.П., Елисеев С.В.* Виброзащитные системы с сочленениями звеньев // Метод построения математических моделей. – №2(10), – 2012. – С. 36–44 с.

[4] *Куцубина Н.В., Санников А.А.* Теория виброзащиты и акустической динамики машин : учебное пособие. – Екатеринбург: Изд-во УГЛТУ, 2014. – 167 с.

[5] *Матросов В.М., Румянцев В.В., Карапетян А.В.* Нелинейная механика. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 432 с.

[6] *Елисеев С.В., Большаков Р.С., Николаев А.В.* Развитие подходов в задачах динамики технологических машин и транспортных средств при вибрационных нагружениях // Вестник Брянского государственного технического университета. – 2018. – С. 44-53.

[7] *Мельников Г.И.* Динамика нелинейных механических и электромеханических систем. – Л.: Машиностроение, 1975. – 198 с.

[8] *Abdullaev Z. et al.* Dynamic dampers of vibrations of inherited-deformable systems with finite number of degrees of freedom // Proc. of MPCPE 2020. – 2020.

[9] *Yusupov M. et al.* Vehicle oscillation taking into account the rheological properties of the suspension // Proc. of MPCPE 2020. – 2020.

[10] *Rakhmankulova B., Mirzaev S., Yusupov M.* Numerical simulation of tasks of vertical viscoelastic oscillation of suspension systems of frame, engine, cabin and seat. // E3S Web of Conferences. – 2023.

[11] *Rakhmankulova B., Mirzaev, S. Yusupov M.* Numerical modeling of nonlinear viscoelastic vibrations of vehicles // E3S Web of Conferences. – 2023.

[12] *Mirzaev S. et al.* Vibrations of high-rise buildings under seismic impact taking into account physical nonlinearity // Journal of Physics: Conference Seriesthis. – 2022. – Vol. 2176. – 012052.

[13] *Юсупов М., Каршиев Д.К., Шарипова У.Б.* Численное моделирование нелинейных задач динамики вязкоупругих систем с конечными числами степеней свободы. // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – № 1(53). – 2024. – С. 107-113.

[14] *Равшанов Н., Юсупов М., Каршиев Д.К., Аминов С.* Об одном подходе численного решения нелинейных интегро-дифференциальных уравнений описивающий вынужденного колебания вязкоупругих тел // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2021. – № S6/1(37). – С. 103-112.

[15] *Юсупов М.* Численное моделирование задач вертикальных вязкоупругих колебаний систем подвески остова, двигателя, кабины и сидения // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2022. – №5(43). – С. 113-122.

[16] *Юсупов М., Каршиев Д.К., Шарипов Х.Д.* Вертикальные нелинейные колебания вязкоупругих систем с тремя степенями свободы // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2023. – № 5(52). – С. 115-123.

[17] *Юсупов М., Аминов С.* Численное моделирование задачи солепереноса в почвогрунтах // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2020. – №1 (25). – С. 85-93.

Поступила в редакцию 22.08.2024

UDC 539.2

STUDY OF NONLINEAR VISCOELASTIC VIBRATION PROTECTION SYSTEM

Yusupov M.
ysupovmajid1956@mail.ru
Tashkent State Agrarian University,
Uzbekistan, Tashkent region, Kibray district, st. Universitetskaya, 2A.

The nonlinear viscoelastic vibration protection system is considered, which consists of a vibration protection object installed on a platform, which, in turn, is installed on another platform, the lower platform is placed on a vibrating base. It is assumed that the characteristics of the viscoelastic elements of the system have a nonlinear cubic characteristic. A mathematical model is constructed in the form of systems of nonlinear integro-differential equations. The rheological properties of the suspension are taken into account with the Boltzmann-Volterra integral model with the Koltunov-Rzhanitsyn relaxation kernel. To solve the problems, a numerical method is proposed based on the use of quadrature formulas that eliminates the singularities in the relaxation kernel. The influence of the rheological properties of the suspension and the vibrating base on the oscillation modes with respect to the equilibrium position of the system is investigated.

Keywords: viscoelasticity, integral operator, relaxation kernel, integro-differential equations, trapezoid formula, quadrature formula, Boltzmann-Volterra principle, vibration protection system.

Citation: Yusupov M. 2024. Study of nonlinear viscoelastic vibration protection system. *Problems of Computational and Applied Mathematics*.4/2(60): 134-141.

ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

№ 4/2(60) 2024

Журнал основан в 2015 году.
Издается 6 раз в год.

Учредитель:
Научно-исследовательский институт развития цифровых технологий и искусственного интеллекта.

Журнал зарегистрирован в Агентстве информации и массовых коммуникаций при Администрации Президента Республики Узбекистан.
Регистрационное свидетельство №0856 от 5 августа 2015 года.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

Адрес редакции:
100125, г. Ташкент, м-в. Буз-2, 17А.
Тел.: +(998) 712-319-253, 712-319-249.
Э-почта: journals@airi.uz.
Веб-сайт: https://journals.airi.uz.

Дизайн и вёрстка:
Шарипов Х.Д.

Отпечатано в типографии НИИ РЦТИИ.
Подписано в печать 09.09.2024 г.
Формат 60x84 1/8. Заказ №6. Тираж 100 экз.

PROBLEMS OF COMPUTATIONAL AND APPLIED MATHEMATICS

No. 4/2(60) 2024

The journal was established in 2015.
6 issues are published per year.

Founder:
Digital Technologies and Artificial Intelligence Development Research Institute.

The journal is registered by Agency of Information and Mass Communications under the Administration of the President of the Republic of Uzbekistan.
The registration certificate No. 0856 of 5 August 2015.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

Address:
100125, Tashkent, Buz-2, 17A.
Tel.: +(998) 712-319-253, 712-319-249.
E-mail: journals@airi.uz.
Web-site: https://journals.airi.uz.

Layout design:
Sharipov Kh.D.

DTAIDRI printing office.
Signed for print 09.09.2024
Format 60x84 1/8. Order No. 6. Printed copies 100.

Содержание

Contents