

УДК 51

СРАВНЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ФРЕДГОЛЬМА ВТОРОГО РОДА РАЗЛИЧНЫМИ МЕТОДАМИ

^{1,2*} *Шадиметов Х.М., ² Усманов Х.И.***kholmatshadimetov@mail.ru*¹Ташкентский Государственный Транспортный Университет,
100167, Узбекистан, г. Ташкент, ул. Темирийулчилар, дом 1;²Институт математики им. В.И. Романовского АН РУз,
100174, Узбекистан, г. Ташкент, ул. Университетская, д. 9.

Приближенное решение линейных интегральных уравнений Фредгольма второго рода на сегодняшний день является одним из актуальных проблем в области вычислительной математики. Большинство исследователей предлагают различные приближенные методы решения интегральных уравнений. Настоящая работа посвящается на сравнения различных приближенных методов решения линейных уравнений Фредгольма второго рода. Основная цель работы определения самого эффективного метода. Наш метод это применения оптимальных квадратурных формул с производными для решения линейных интегральных уравнений Фредгольма второго рода. Эффективность метода определяется с точностью результатов. При этом для сравнения результатов использованы точное решение. Доказывается эффективность настоящего метода.

Ключевые слова: линейное интегральное уравнение, оптимальная квадратурная формула, квадратурная формула с производными, система алгебраических уравнений, максимальная абсолютная погрешность.

Цитирование: *Шадиметов Х.М., Усманов Х.И.* Сравнение результатов приближенного решения линейных интегральных уравнений Фредгольма второго рода различными методами // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2024. – № 4/2(60). – С. 118-133.

1 Введение

Для решения линейных интегральных уравнений Фредгольма второго рода имеются большое количество приближенных методов. Научными исследователями было предложено множество различных методов получения приближенных решений интегральных уравнений.

В настоящей работе представляется сравнения результатов различных приближенных методов решения интегральных уравнений, приведенных в работах [1]– [5]. Для сравнения результатов используется максимальная абсолютная погрешность, т.е. максимальное абсолютное значение разности между точным решением и приближенным.

Наш метод — это оптимальный квадратурный метод с производными. Сама оптимальная квадратурная формула с производными приведена в работе [6]. Применения этой формулы для решения линейных интегральных уравнений Фредгольма второго рода приведены для частных случаев в работах [7] – [10], а общая формула и применения метода описаны в работе [11].

2 Коротко о методах

Рассмотрим линейное интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$y(x) - \lambda \int_a^b K(x, s)y(s)ds = f(x), x \in [a, b]. \quad (1)$$

Здесь $K(x, s)$ -ядро интегрального уравнения, $f(x)$ -правая часть уравнения, ab -границы интегрирования, λ -параметр интеграла, $y(x)$ -искомая функция. Основная цель каждого исследователя получить хорошие результаты при решениях интегральных уравнений вида (1). Точность решения очень важную роль играет при решениях определенных задач в области механики. Некоторые исследователи на это не обращают внимания и пользуются устаревшими методами: метод трапеции, метод Симпсона и т.п. Фактический для достижения определенной цели точность решения является особым фактором.

При решении интегрального уравнения вида (1) авторы работы [1] использовали обратных нечетких преобразований, основанной на нечеткого разбиения с комбинацией в технологии коллокации. В итоге задача сведена к решению линейного алгебраического уравнения. Для апробации метода рассмотрен два примера и получен результат с максимальной абсолютной погрешности в пределах $7.3 \cdot 10^{-6} \div 1.9 \cdot 10^{-4}$ при количестве точек коллокации $n = 20$.

Авторы работы [2] для решения интегрального уравнения (1) использовали сплайн технологию. Для этого подынтегральную неизвестную функцию аппроксимировали с помощью кубическим сплайном. При этом получили систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов сплайн функции и значений неизвестной функции в узловых точках. Для тестирования метода решены три примера и результаты этих примеров сравнивали с результатами проделанных другими методами (метод наименьших квадратов, квадратурный метод, метод рядов Лагерра). И доказали эффективность своего метода с помощью, которого было получено результаты с максимальной абсолютной погрешности в пределах $2.0 \cdot 10^{-5} \div 1.858 \cdot 10^{-4}$.

Индийские исследователи авторы работы [3] предлагают новый метод основанной на разработку полинома теории графов с использованием полиномов Хосоя для решения интегрального уравнения вида (1). Эффективность данного метода доказали, сравнивая результаты с выполненными расчетов другим методом, точнее методом кубических сплайнов. При этом результаты этого эффективного метода было получено с максимальной абсолютной погрешности в пределах $8.88 \cdot 10^{-16} \div 1.44 \cdot 10^{-10}$.

Авторы работы [4] для решения интегрального уравнения (1) предлагают новый подход реализующую операционную матрицу Бернштейна. При этом используют комбинацию ортонормированных функции Бернштейна. Данный метод апробирован тремя примерами. Для определения достоверности результатов было взята точное решения интегральных уравнений. При этом значения максимальной абсолютной погрешности данного метода определено в пределах $6.7 \cdot 10^{-5} \div 3.5 \cdot 10^{-3}$.

Исследователи работы [5] предлагают алгоритм численного решения интегрального уравнения (1) с непрерывным ядром методом замены интеграла с квадратурной формулой двенадцатого порядка погрешности. Для апробации данного метода решены шесть примеров. При этом получены результаты с максимальной абсолютной погрешности в пределах $8.88 \cdot 10^{-16} \div 2.44 \cdot 10^{-3}$.

Необходимо отметить, полученные результаты зависит непосредственно от класса функции применимого данного метода.

3 Численные результаты

Нижеследующих примерах необходимо решить интегральных уравнений методом квадратур с применением оптимальных квадратурной формулы с производными при $m = 1, 2, \dots, 8$. Сравнить результаты с точным решением и анализировать погрешности:

$$R = \max |y(x) - y_t(x)|.$$

Здесь R —максимальная абсолютная погрешность, $y(x)$ —приближенное решение, $y_t(x)$ —точное решение.

Пример 1. В (1) $K(x, s) = x^2 \cdot s$, $f(x) = \sin(\pi \cdot x^2) - x^2/\pi$, $\lambda = 1$, $a = 0$, $b = 1$. Тогда интегральное уравнение (1) примет следующий вид:

$$y(x) - \int_0^1 x^2 * s * y(s) ds = \sin(\pi x^2) - x^2/\pi, \quad x \in [0; 1]. \quad (2)$$

Точное решение интегрального уравнения (2):

$$y_t(x) = \sin(\pi x^2).$$

Результаты по данному примеру приведены таблицах 1а, 1б и рисунках 1а, 1б.

Авторы работы [1] решили этот пример используя обратных нечетких преобразований и получили результат с максимальной абсолютной погрешности $R = 1.9 \cdot 10^{-4}$ при $n = 20$.

Наш метод дал результат с значением максимальной абсолютной погрешностью $R = 3.06 \cdot 10^{-10}$ при $m = 8$.

Пример 2. В (1) $K(x, s) = e^{\ell - x \cdot s}$, $f(x) = e^{\ell - x} + (e^{\ell - (x+1)} - 1)/(x+1)$, $\lambda = 1$, $a = 0$, $b = 1$. Тогда интегральное уравнение (1) примет следующий вид:

$$y(x) - \int_0^1 e^{-x \cdot s} y(s) ds = e^{-x} + (e^{-(x+1)} - 1)/(x+1), \quad x \in [0; 1] \quad (3)$$

Точное решение интегрального уравнения (3):

$$y_t(x) = e^{-x}.$$

Результаты по данному примеру приведены таблицах 2а, 2б и рисунках 2а, 2б.

Для решения интегрального уравнения Фредгольма второго рода авторы работы [2] разработали метод с использованием сплайн технологий. С помощью этого метода получили результат с максимальной абсолютной погрешности $R = 1.858 \cdot 10^{-4}$ при $n = 10$.

Наш метод дал результат с значением максимальной абсолютной погрешностью $R = 4.52 \cdot 10^{-18}$ при $m = 8$.

Пример 3. В (1) $K(x, s) = \cos(x)$, $f(x) = \sin 2\pi x$, $\lambda = 1$, $a = 0$, $b = 1$. Тогда интегральное уравнение (1) примет следующий вид:

$$y(x) - \int_0^1 \cos(x) y(s) ds = \sin(2\pi x), \quad x \in [0; 1] \quad (4)$$

Точное решение интегрального уравнения (4):

$$y_t(x) = \sin 2\pi x.$$

Результаты по данному примеру приведены таблицах 3а, 3б и рисунках 3а, 3б.

x_i	Точное решение	Оптимальные квадратурные формулы				Абсолютная погрешность			
		m = 1	m = 2	m = 3	m = 4	m = 1	m = 2	m = 3	m = 4
0,00	0,00000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00
0,10	0,03141	0,0313	0,0314	0,0314	0,0314	7,03E-05	5,07E-07	4,84E-07	3,89E-09
0,20	0,12533	0,1251	0,1253	0,1253	0,1253	2,81E-04	2,03E-06	1,94E-06	1,56E-08
0,30	0,27899	0,2784	0,2790	0,2790	0,2790	6,33E-04	4,57E-06	4,36E-06	3,50E-08
0,40	0,48175	0,4806	0,4817	0,4817	0,4818	1,12E-03	8,12E-06	7,75E-06	6,23E-08
0,50	0,70711	0,7053	0,7071	0,7071	0,7071	1,76E-03	1,27E-05	1,21E-05	9,74E-08
0,60	0,90483	0,9023	0,9048	0,9048	0,9048	2,53E-03	1,83E-05	1,74E-05	1,40E-07
0,70	0,99951	0,9961	0,9995	0,9995	0,9995	3,44E-03	2,49E-05	2,37E-05	1,91E-07
0,80	0,90483	0,9003	0,9048	0,9048	0,9048	4,50E-03	3,25E-05	3,10E-05	2,49E-07
0,90	0,56208	0,5564	0,5620	0,5620	0,5621	5,69E-03	4,11E-05	3,92E-05	3,15E-07
1,00	0,00000	-0,0070	-0,0001	0,0000	0,0000	7,03E-03	5,07E-05	4,84E-05	3,89E-07
Максимальная абсолютная погрешность						7,03E-03	5,07E-05	4,84E-05	3,89E-07

Таблица 1а. Результаты решения интегрального уравнения (Пример 1. $K(x, s) = x^2 * s$, $f(x) = \sin(\pi * x^2) - x^2/\pi$, $y(x) = \sin(\pi * x^2)$, $h = 0.1$)

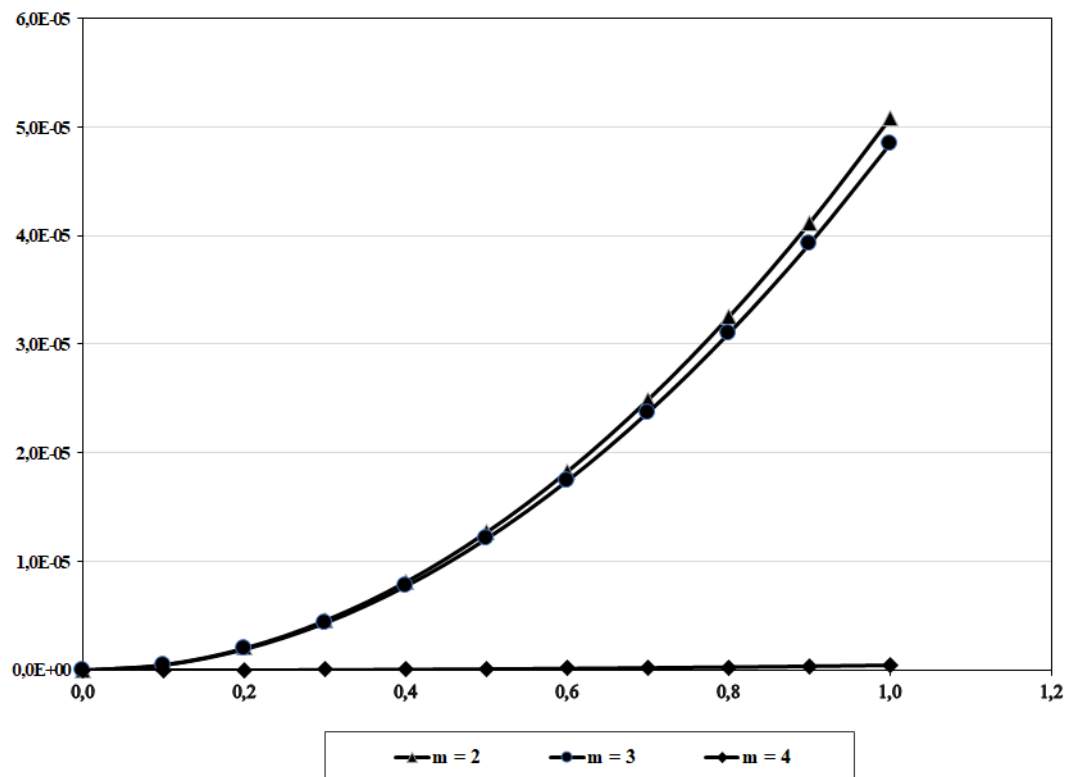


Рис 1а. Графическая иллюстрация абсолютной погрешности (Пример 1. $K(x, s) = x^2 * s$, $f(x) = \sin(\pi * x^2) - x^2/\pi$, $y(x) = \sin(\pi * x^2)$, $h = 0.1$)

x_i	Точное решение	Оптимальные квадратурные формулы				Абсолютная погрешность			
		m = 5	m = 6	m = 7	m = 8	m = 5	m = 6	m = 7	m = 8
0,000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00
0,100	0,031411	0,031411	0,031411	0,031411	0,031411	3,24E-09	4,37E-11	5,90E-11	3,06E-12
0,200	0,125333	0,125333	0,125333	0,125333	0,125333	1,30E-08	1,75E-10	2,36E-10	1,22E-11
0,300	0,278991	0,278991	0,278991	0,278991	0,278991	2,91E-08	3,93E-10	5,31E-10	2,75E-11
0,400	0,481754	0,481754	0,481754	0,481754	0,481754	5,18E-08	6,98E-10	9,44E-10	4,90E-11
0,500	0,707107	0,707107	0,707107	0,707107	0,707107	8,10E-08	1,09E-09	1,48E-09	7,65E-11
0,600	0,904827	0,904827	0,904827	0,904827	0,904827	1,17E-07	1,57E-09	2,12E-09	1,10E-10
0,700	0,999507	0,999506	0,999507	0,999507	0,999507	1,59E-07	2,14E-09	2,89E-09	1,50E-10
0,800	0,904827	0,904827	0,904827	0,904827	0,904827	2,07E-07	2,79E-09	3,78E-09	1,96E-10
0,900	0,562083	0,562083	0,562083	0,562083	0,562083	2,62E-07	3,54E-09	4,78E-09	2,48E-10
1,000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	3,24E-07	4,37E-09	5,90E-09	3,06E-10
Максимальная абсолютная погрешность						3,24E-07	4,37E-09	5,90E-09	3,06E-10

Таблица 16. Результаты решения интегрального уравнения (Пример 1. $K(x, s) = x^2 * s$, $f(x) = \sin(\pi * x^2) - x^2/\pi$, $y(x) = \sin(\pi * x^2)$, $h = 0.1$)

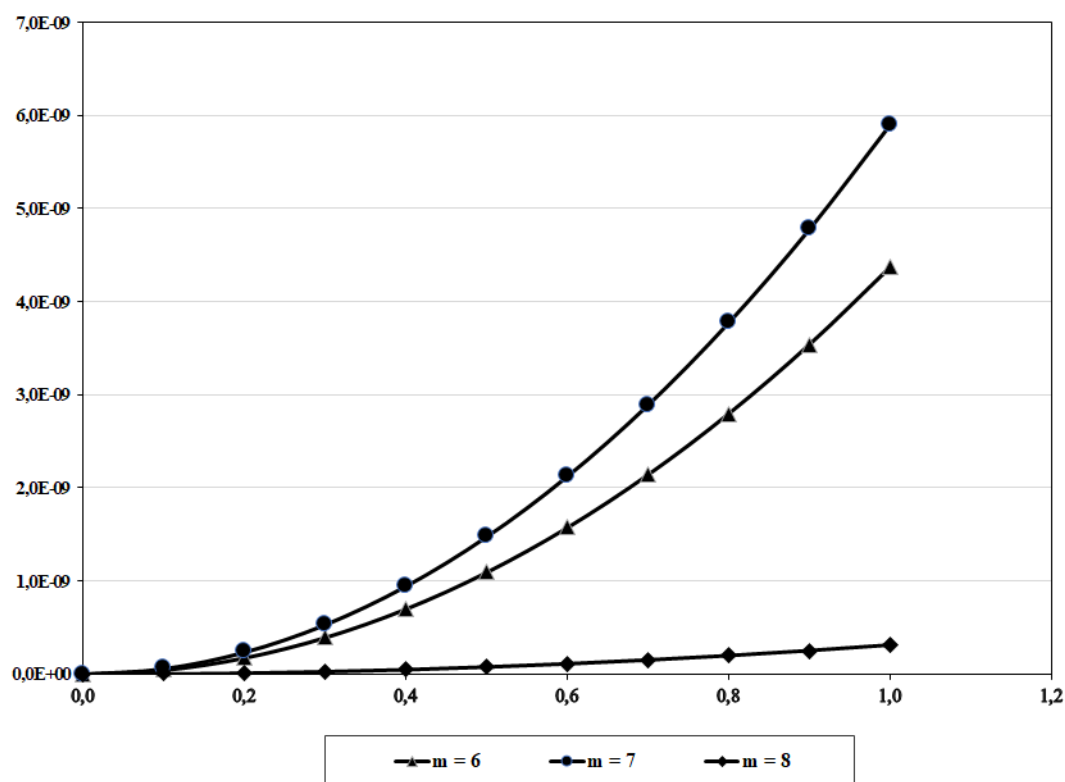


Рис 16. Графическая иллюстрация абсолютной погрешности (Пример 1. $K(x, s) = x^2 * s$, $f(x) = \sin(\pi * x^2) - x^2/\pi$, $y(x) = \sin(\pi * x^2)$, $h = 0.1$)

x_i	Точное решение	Оптимальные квадратурные формулы				Абсолютная погрешность			
		m = 1	m = 2	m = 3	m = 4	m = 1	m = 2	m = 3	m = 4
0,00	1,00000	1,0028	1,0000	1,0000	1,0000	2,81E-03	3,01E-07	4,68E-07	7,17E-11
0,10	0,90484	0,9075	0,9048	0,9048	0,9048	2,69E-03	2,80E-07	4,48E-07	6,67E-11
0,20	0,81873	0,8213	0,8187	0,8187	0,8187	2,57E-03	2,60E-07	4,28E-07	6,20E-11
0,30	0,74082	0,7433	0,7408	0,7408	0,7408	2,46E-03	2,42E-07	4,10E-07	5,76E-11
0,40	0,67032	0,6727	0,6703	0,6703	0,6703	2,36E-03	2,25E-07	3,93E-07	5,35E-11
0,50	0,60653	0,6088	0,6065	0,6065	0,6065	2,26E-03	2,09E-07	3,77E-07	4,97E-11
0,60	0,54881	0,5510	0,5488	0,5488	0,5488	2,17E-03	1,94E-07	3,61E-07	4,62E-11
0,70	0,49659	0,4987	0,4966	0,4966	0,4966	2,08E-03	1,80E-07	3,47E-07	4,28E-11
0,80	0,44933	0,4513	0,4493	0,4493	0,4493	2,00E-03	1,67E-07	3,34E-07	3,97E-11
0,90	0,40657	0,4085	0,4066	0,4066	0,4066	1,93E-03	1,55E-07	3,21E-07	3,68E-11
1,00	0,36788	0,3697	0,3679	0,3679	0,3679	1,85E-03	1,43E-07	3,09E-07	3,40E-11
Максимальная абсолютная погрешность						2,81E-03	3,01E-07	4,68E-07	7,17E-11

Таблица 2а. Результаты решения интегрального уравнения (Пример 2. $K(x, s) = e^{-x*s}$, $f(x) = e^{-x} + (e^{-(x+1)})^{-1}/(x+1)$, $y(x) = e^{-x}$, $h = 0.1$)

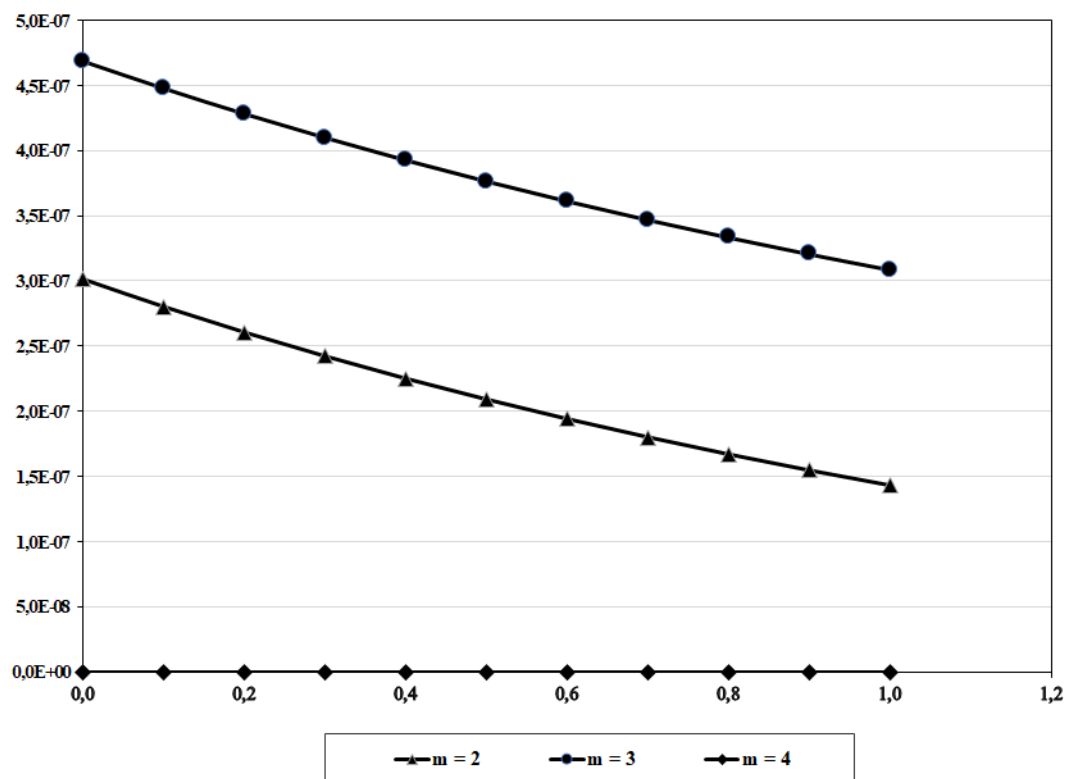


Рис 2а. Графическая иллюстрация абсолютной погрешности (Пример 2. $K(x, s) = e^{-x*s}$, $f(x) = e^{-x} + (e^{-(x+1)} - 1)/(x+1)$, $y(x) = e^{-x}$, $h = 0.1$)

x_i	Точное решение	Оптимальные квадратурные формулы				Абсолютная погрешность			
		m = 5	m = 6	m = 7	m = 8	m = 5	m = 6	m = 7	m = 8
0,000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,11E-10	1,79E-14	2,79E-14	4,52E-18
0,100	0,904837	0,904837	0,904837	0,904837	0,904837	1,07E-10	1,67E-14	2,66E-14	4,21E-18
0,200	0,818731	0,818731	0,818731	0,818731	0,818731	1,02E-10	1,55E-14	2,55E-14	3,91E-18
0,300	0,740818	0,740818	0,740818	0,740818	0,740818	9,76E-11	1,44E-14	2,44E-14	3,64E-18
0,400	0,670320	0,670320	0,670320	0,670320	0,670320	9,35E-11	1,34E-14	2,34E-14	3,38E-18
0,500	0,606531	0,606531	0,606531	0,606531	0,606531	8,96E-11	1,24E-14	2,24E-14	3,14E-18
0,600	0,548812	0,548812	0,548812	0,548812	0,548812	8,60E-11	1,15E-14	2,15E-14	2,91E-18
0,700	0,496585	0,496585	0,496585	0,496585	0,496585	8,26E-11	1,07E-14	2,07E-14	2,70E-18
0,800	0,449329	0,449329	0,449329	0,449329	0,449329	7,94E-11	9,93E-15	1,99E-14	2,51E-18
0,900	0,406570	0,406570	0,406570	0,406570	0,406570	7,64E-11	9,20E-15	1,91E-14	2,32E-18
1,000	0,367879	0,367879	0,367879	0,367879	0,367879	7,35E-11	8,51E-15	1,84E-14	2,15E-18
Максимальная абсолютная погрешность						1,11E-10	1,79E-14	2,79E-14	4,52E-18

Таблица 26. Результаты решения интегрального уравнения (Пример 2. $K(x, s) = e^{-x*s}$, $f(x) = e^{-x} + (e^{-(x+1)} - 1)/(x + 1)$, $y(x) = e^{-x}$, $h = 0.1$)

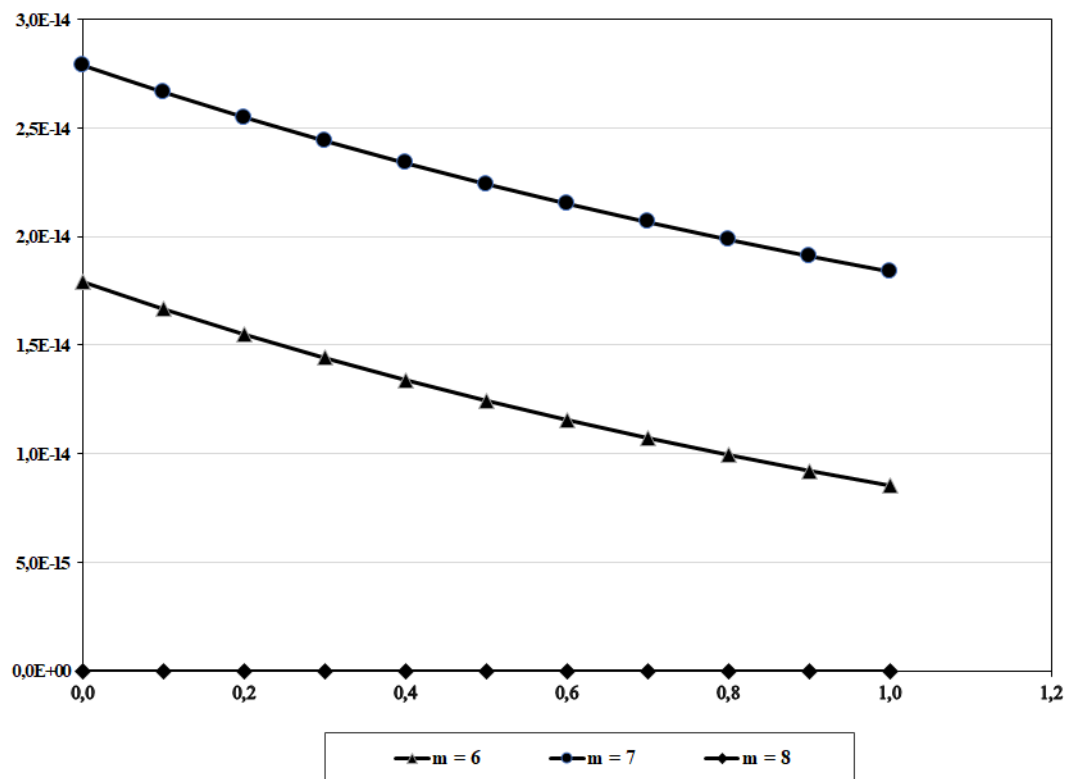


Рис 26. Графическая иллюстрация абсолютной погрешности (Пример 2. $K(x, s) = e^{-x*s}$, $f(x) = e^{-x} + (e^{-(x+1)} - 1)/(x + 1)$, $y(x) = e^{-x}$, $h = 0.1$)

x_i	Точное решение	Оптимальные квадратурные формулы				Абсолютная погрешность			
		m = 1	m = 2	m = 3	m = 4	m = 1	m = 2	m = 3	m = 4
0,00	0,00000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	1,18E-32	2,11E-31	1,36E-30	2,76E-30
0,10	0,58779	0,5878	0,5878	0,5878	0,5878	4,00E-32	2,10E-31	1,53E-30	7,20E-31
0,20	0,95106	0,9511	0,9511	0,9511	0,9511	2,00E-32	5,00E-32	1,64E-30	8,20E-31
0,30	0,95106	0,9511	0,9511	0,9511	0,9511	1,00E-32	1,00E-32	2,04E-30	1,03E-30
0,40	0,58779	0,5878	0,5878	0,5878	0,5878	5,00E-32	2,10E-31	1,44E-30	1,14E-30
0,50	0,00000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	2,45E-32	1,39E-31	2,01E-30	6,72E-31
0,60	-0,58779	-0,5878	-0,5878	-0,5878	-0,5878	3,00E-32	1,80E-31	1,47E-30	2,33E-30
0,70	-0,95106	-0,9511	-0,9511	-0,9511	-0,9511	1,00E-32	5,80E-31	1,87E-30	2,91E-30
0,80	-0,95106	-0,9511	-0,9511	-0,9511	-0,9511	2,20E-31	1,60E-31	8,90E-31	1,50E-30
0,90	-0,58779	-0,5878	-0,5878	-0,5878	-0,5878	8,00E-32	5,00E-31	5,70E-31	1,09E-30
1,00	0,00000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	1,69E-31	7,28E-32	7,82E-31	2,39E-31
Максимальная абсолютная погрешность						2,20E-31	5,80E-31	2,04E-30	2,91E-30

Таблица 3а. Результаты решения интегрального уравнения (Пример 3. $K(x, s) = \cos(x)$, $f(x) = \sin(2 * \pi * x)$, $y(x) = \sin(2 * \pi * x)$, $h = 0.1$)

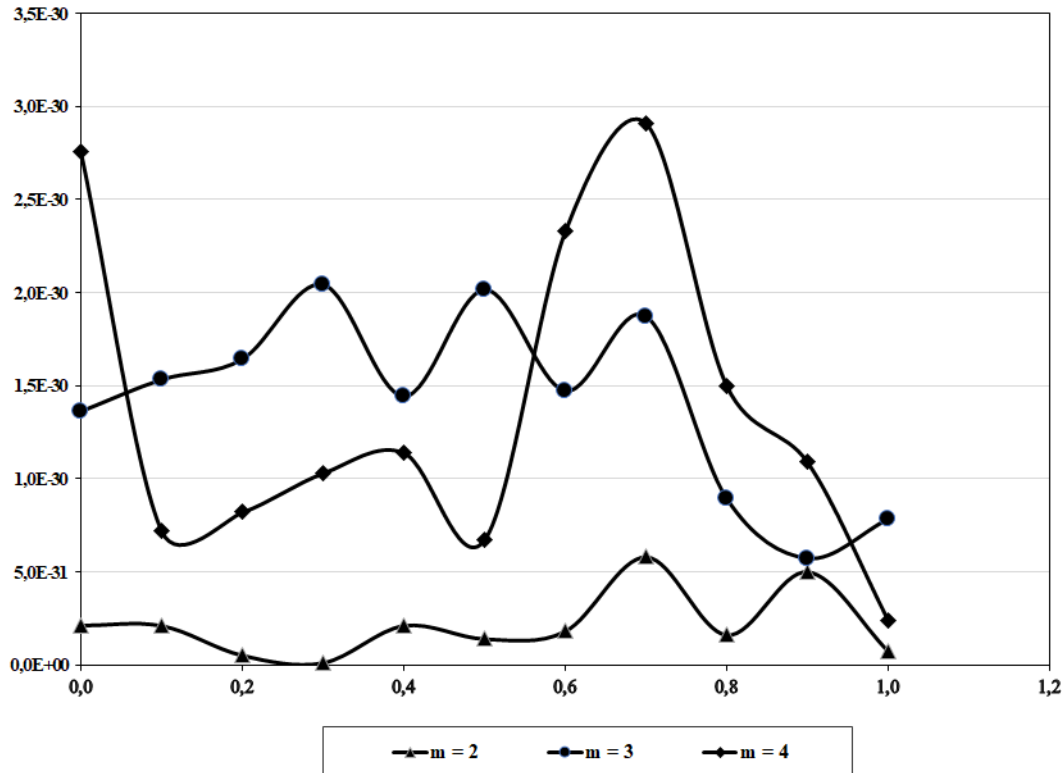


Рис 3а. Графическая иллюстрация абсолютной погрешности (Пример 3. $K(x, s) = \cos(x)$, $f(x) = \sin(2 * \pi * x)$, $y(x) = \sin(2 * \pi * x)$, $h = 0.1$)

x_i	Точное решение	Оптимальные квадратурные формулы				Абсолютная погрешность			
		m = 5	m = 6	m = 7	m = 8	m = 5	m = 6	m = 7	m = 8
0,000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	2,90E-30	2,14E-29	2,10E-29	7,46E-29
0,100	0,587785	0,587785	0,587785	0,587785	0,587785	5,70E-31	6,76E-30	6,02E-30	2,93E-29
0,200	0,951057	0,951057	0,951057	0,951057	0,951057	8,60E-31	1,54E-30	2,72E-30	1,59E-29
0,300	0,951057	0,951057	0,951057	0,951057	0,951057	7,10E-31	6,53E-30	7,17E-30	2,09E-29
0,400	0,587785	0,587785	0,587785	0,587785	0,587785	1,26E-30	1,06E-29	1,07E-29	6,77E-29
0,500	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	7,47E-31	2,76E-30	2,15E-30	6,12E-31
0,600	-0,587785	-0,587785	-0,587785	-0,587785	-0,587785	3,22E-30	1,47E-29	1,50E-29	3,36E-29
0,700	-0,951057	-0,951057	-0,951057	-0,951057	-0,951057	2,62E-30	3,00E-32	7,00E-32	7,47E-30
0,800	-0,951057	-0,951057	-0,951057	-0,951057	-0,951057	1,15E-30	1,63E-29	1,61E-29	4,16E-29
0,900	-0,587785	-0,587785	-0,587785	-0,587785	-0,587785	1,38E-30	3,51E-30	3,26E-30	1,02E-29
1,000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	2,35E-31	1,54E-30	1,83E-30	4,87E-30
Максимальная абсолютная погрешность						3,22E-30	2,14E-29	2,10E-29	7,46E-29

Таблица 36. Результаты решения интегрального уравнения (Пример 3. $K(x, s) = \cos(x)$, $f(x) = \sin(2 * \pi * x)$, $y(x) = \sin(2 * \pi * x)$, $h = 0.1$)

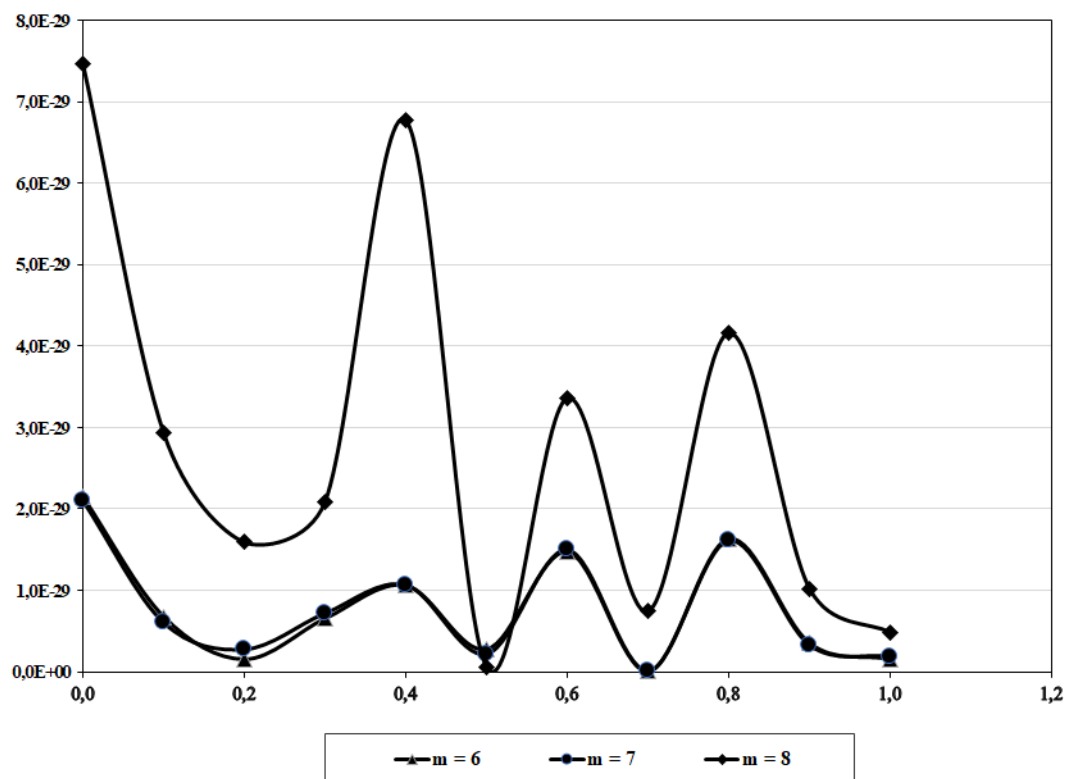


Рис 36. Графическая иллюстрация абсолютной погрешности (Пример 3. $K(x, s) = \cos(x)$, $f(x) = \sin(2 * \pi * x)$, $y(x) = \sin(2 * \pi * x)$, $h = 0.1$)

Авторы работы [3] разработали графо – теоретический многочлен с использованием полиномов Хосоя и решили интегральное уравнение (4). При этом получили результат с максимальной абсолютной погрешностью $R = 1.55 \cdot 10^{-15}$ при $n = 3$ и $R = 9.18 \cdot 10^{-11}$ при $n = 8$. Наш метод дал результат с значением максимальной абсолютной погрешностью $R = 2.2 \cdot 10^{-31}$ при $m = 1$.

Пример 4. В (1) $K(x, s) = 1 - x \cdot \cos(x \cdot s)$, $f(x) = \sin(x)$, $\lambda = 1$, $a = 0$, $b = 1$. Тогда интегральное уравнение (1) примет следующий вид:

$$y(x) - \int_0^1 (1 - x \cdot \cos(x \cdot s))y(s)ds = \sin(x), \quad x \in [0; 1] \quad (5)$$

Точное решение интегрального уравнения (5):

$$y_t(x) \equiv 1.$$

Результаты по данному примеру приведены таблицах 4а, 4б и рисунках 4а, 4б.

Авторы работы [4] для решения интегрального уравнения (5) применили полиномиальный метод с использованием полиномов Бернштейна и получили результат с максимальной абсолютной погрешностью $R = 6.7 \cdot 10^{-5}$ при $n = 6$.

Наш метод дал результат с значением максимальной абсолютной погрешностью $R = 2.0 \cdot 10^{-31}$ при $m = 1$.

Пример 5. В (1) $K(x, s) = x \cdot e^s$, $f(x) = e^{-x}$, $\lambda = 0.5$, $a = 0$, $b = 1$. Тогда интегральное уравнение (1) примет следующий вид:

$$y(x) - 0.5 \int_0^1 x \cdot e^s y(s)ds = e^{-x}, \quad x \in [0; 1] \quad (6)$$

Точное решение интегрального уравнения (6):

$$y_t(x) = x + e^{-x}.$$

Результаты по данному примеру приведены таблицах 5а, 5б и рисунках 5а, 5б.

Авторы работы [5] решили интегральное уравнение (6) с помощью метода квадратур с двенадцатого порядка погрешности и получили результат с максимальной абсолютной погрешностью $R = 8.88 \cdot 10^{-16}$ при $n = 20$.

Наш метод дал результат с значением максимальной абсолютной погрешностью $R = 4.18 \cdot 10^{-18}$ при $m = 8$.

x_i	Точное решение	Оптимальные квадратурные формулы				Абсолютная погрешность			
		m = 1	m = 2	m = 3	m = 4	m = 1	m = 2	m = 3	m = 4
0,00	1,00000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,00E+00	1,00E-31	1,00E-32	2,00E-31
0,10	1,00000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,00E+00	2,00E-31	1,00E-31	1,00E-31
0,20	1,00000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,00E+00	1,00E-31	2,00E-31	1,00E-31
0,30	1,00000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,00E-31	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00
0,40	1,00000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	4,00E-32	1,00E-31	0,00E+00	2,80E-31
0,50	1,00000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	2,00E-31	3,00E-31	4,00E-31	0,00E+00
0,60	1,00000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,00E-31	1,00E-32	0,00E+00	4,00E-31
0,70	1,00000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,00E+00	1,10E-31	0,00E+00	2,30E-31
0,80	1,00000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,10E-31	1,30E-31	4,80E-31	3,70E-31
0,90	1,00000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,00E+00	2,00E-31	2,40E-31	7,00E-32
1,00	1,00000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,00E-31	1,00E-31	1,00E-31	2,00E-31
Максимальная абсолютная погрешность						2,00E-31	3,00E-31	4,80E-31	4,00E-31

Таблица 4а. Результаты решения интегрального уравнения (Пример 4. $K(x, s) = 1 - x * \cos(x * s)$, $f(x) = \sin(x)$, $y(x) = 1$, $h = 0.1$)

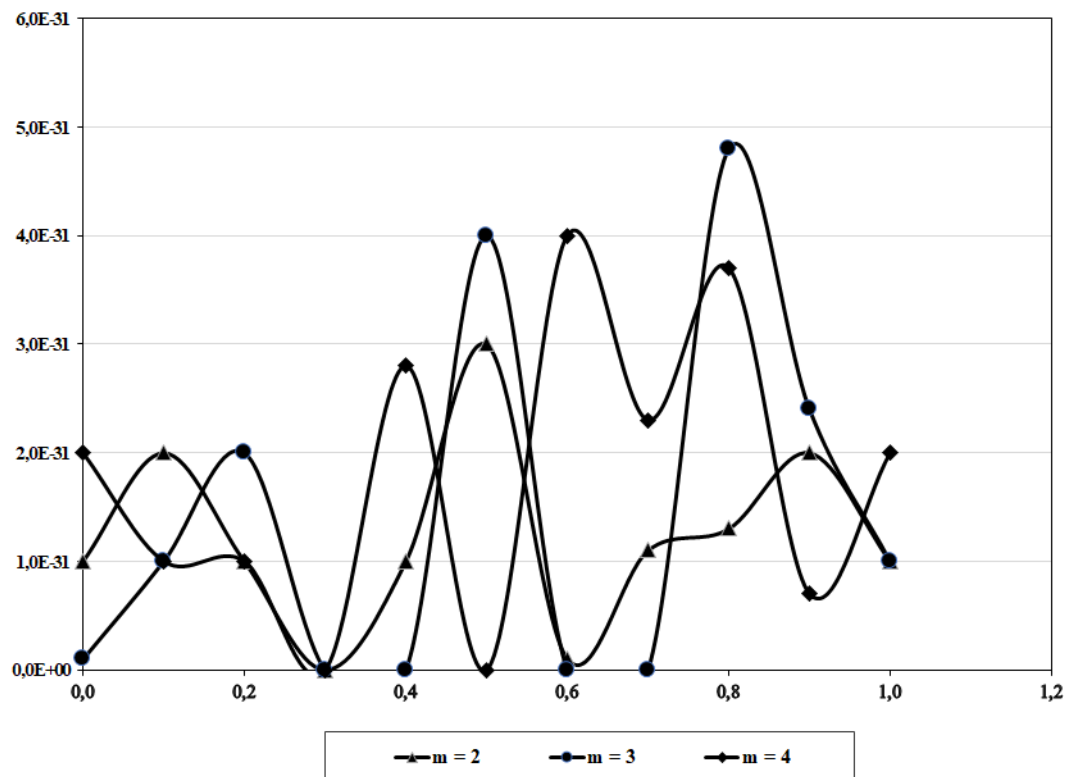


Рис 4а. Графическая иллюстрация абсолютной погрешности (Пример 4. $K(x, s) = 1 - x * \cos(x * s)$, $f(x) = \sin(x)$, $y(x) = 1$, $h = 0.1$)

x_i	Точное решение	Оптимальные квадратурные формулы				Абсолютная погрешность			
		m = 5	m = 6	m = 7	m = 8	m = 5	m = 6	m = 7	m = 8
0,000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	0,00E+00	0,00E+00	2,00E-32	2,00E-31
0,100	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,80E-31	7,00E-32	7,00E-32	1,00E-31
0,200	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	0,00E+00	1,00E-31	0,00E+00	3,00E-31
0,300	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,00E-31	1,00E-31	2,00E-31	1,00E-31
0,400	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	2,00E-32	1,00E-31	2,40E-31	1,50E-31
0,500	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,00E-31	3,00E-31	2,70E-31	0,00E+00
0,600	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	2,00E-31	2,00E-31	0,00E+00	4,00E-31
0,700	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	0,00E+00	1,00E-31	3,00E-31	1,00E-31
0,800	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	2,00E-31	9,00E-32	5,00E-32	1,70E-31
0,900	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	2,20E-31	1,10E-31	1,90E-31	7,80E-31
1,000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	8,00E-32	4,00E-32	8,00E-32	3,00E-31
Максимальная абсолютная погрешность						2,20E-31	3,00E-31	3,00E-31	7,80E-31

Таблица 46. Результаты решения интегрального уравнения (Пример 4. $K(x, s) = 1 - x * \cos(x * s)$, $f(x) = \sin(x)$, $y(x) = 1$, $h = 0.1$)

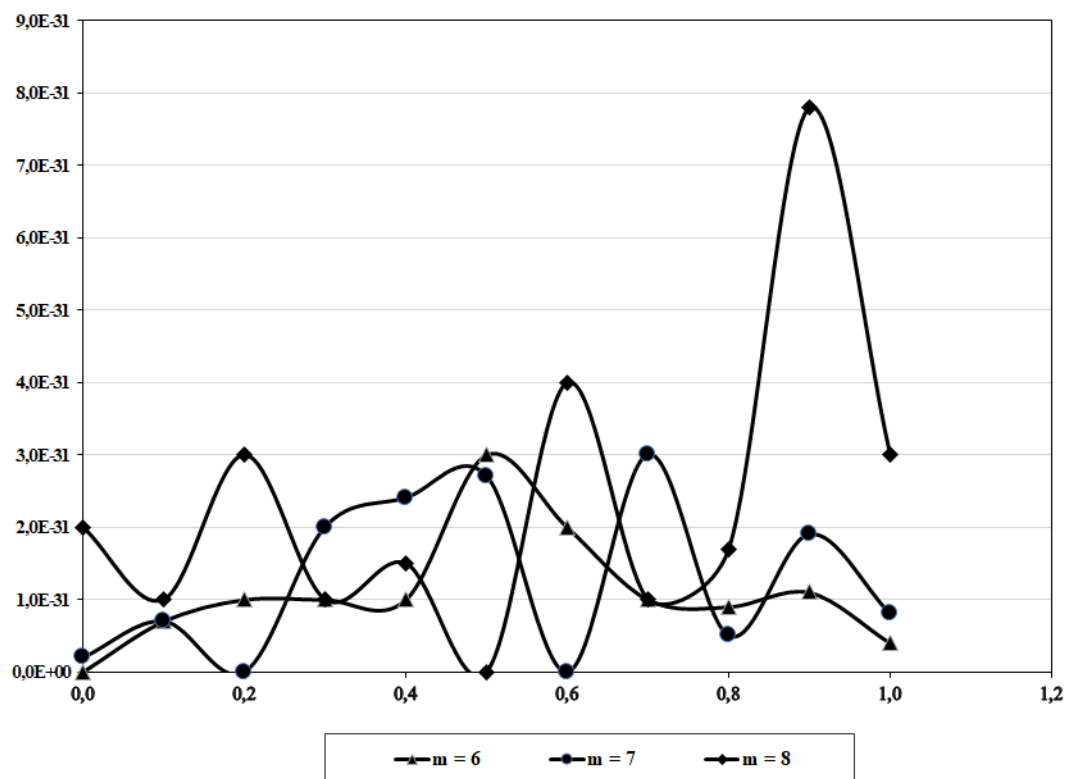


Рис 46. Графическая иллюстрация абсолютной погрешности (Пример 4. $K(x, s) = 1 - x * \cos(x * s)$, $f(x) = \sin(x)$, $y(x) = 1$, $h = 0.1$)

x_i	Точное решение	Оптимальные квадратурные формулы				Абсолютная погрешность			
		m = 1	m = 2	m = 3	m = 4	m = 1	m = 2	m = 3	m = 4
0,00	1,00000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00
0,10	1,00484	1,0049	1,0048	1,0048	1,0048	8,34E-05	2,78E-08	1,39E-08	6,62E-12
0,20	1,01873	1,0189	1,0187	1,0187	1,0187	1,67E-04	5,56E-08	2,78E-08	1,32E-11
0,30	1,04082	1,0411	1,0408	1,0408	1,0408	2,50E-04	8,34E-08	4,17E-08	1,98E-11
0,40	1,07032	1,0707	1,0703	1,0703	1,0703	3,33E-04	1,11E-07	5,56E-08	2,65E-11
0,50	1,10653	1,1069	1,1065	1,1065	1,1065	4,17E-04	1,39E-07	6,95E-08	3,31E-11
0,60	1,14881	1,1493	1,1488	1,1488	1,1488	5,00E-04	1,67E-07	8,33E-08	3,97E-11
0,70	1,19659	1,1972	1,1966	1,1966	1,1966	5,84E-04	1,95E-07	9,72E-08	4,63E-11
0,80	1,24933	1,2500	1,2493	1,2493	1,2493	6,67E-04	2,22E-07	1,11E-07	5,29E-11
0,90	1,30657	1,3073	1,3066	1,3066	1,3066	7,50E-04	2,50E-07	1,25E-07	5,95E-11
1,00	1,36788	1,3687	1,3679	1,3679	1,3679	8,34E-04	2,78E-07	1,39E-07	6,62E-11
Максимальная абсолютная погрешность						8,34E-04	2,78E-07	1,39E-07	6,62E-11

Таблица 5а. Результаты решения интегрального уравнения (Пример 5. $K(x, s) = x * e^s$, $f(x) = e^x - x$, $y(x) = x + e^x - x$, $h = 0.1$)

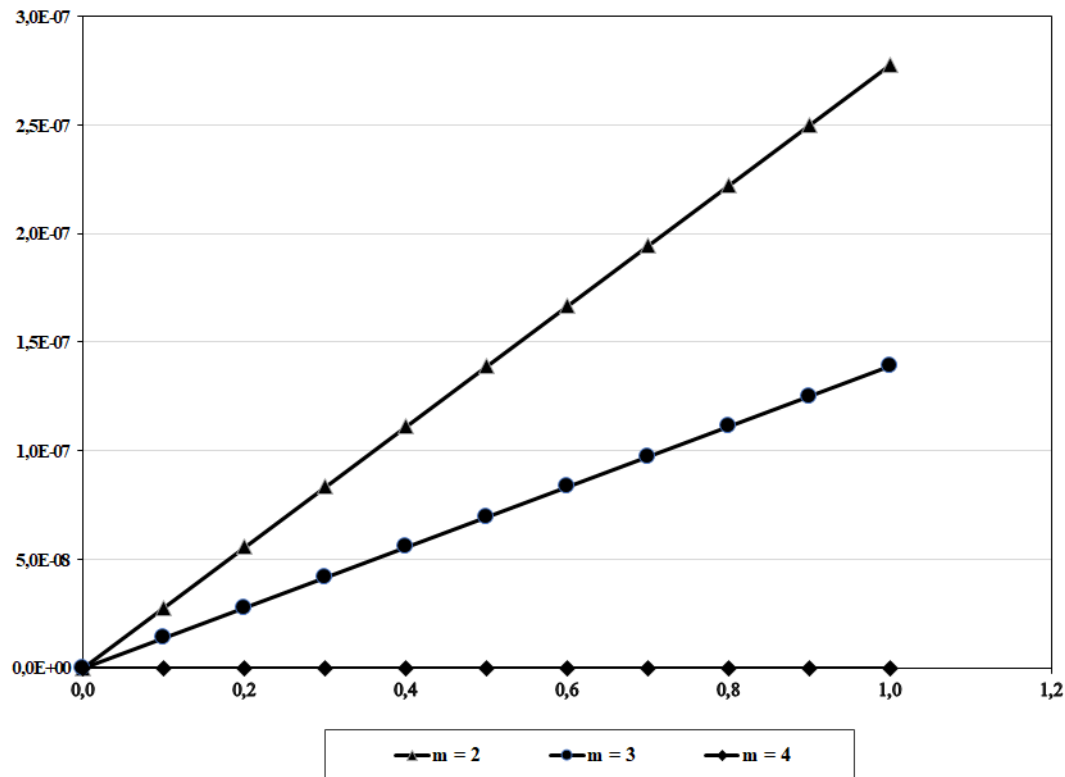


Рис 5а. Графическая иллюстрация абсолютной погрешности (Пример 5. $K(x, s) = x * e^s$, $f(x) = e^x - x$, $y(x) = x + e^x - x$, $h = 0.1$)

x_i	Точное решение	Оптимальные квадратурные формулы				Абсолютная погрешность			
		m = 5	m = 6	m = 7	m = 8	m = 5	m = 6	m = 7	m = 8
0,000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00
0,100	1,004837	1,004837	1,004837	1,004837	1,004837	3,31E-12	1,65E-15	8,27E-16	4,18E-19
0,200	1,018731	1,018731	1,018731	1,018731	1,018731	6,61E-12	3,31E-15	1,65E-15	8,35E-19
0,300	1,040818	1,040818	1,040818	1,040818	1,040818	9,92E-12	4,96E-15	2,48E-15	1,25E-18
0,400	1,070320	1,070320	1,070320	1,070320	1,070320	1,32E-11	6,62E-15	3,31E-15	1,67E-18
0,500	1,106531	1,106531	1,106531	1,106531	1,106531	1,65E-11	8,27E-15	4,13E-15	2,09E-18
0,600	1,148812	1,148812	1,148812	1,148812	1,148812	1,98E-11	9,92E-15	4,96E-15	2,51E-18
0,700	1,196585	1,196585	1,196585	1,196585	1,196585	2,32E-11	1,16E-14	5,79E-15	2,92E-18
0,800	1,249329	1,249329	1,249329	1,249329	1,249329	2,65E-11	1,32E-14	6,61E-15	3,34E-18
0,900	1,306570	1,306570	1,306570	1,306570	1,306570	2,98E-11	1,49E-14	7,44E-15	3,76E-18
1,000	1,367879	1,367879	1,367879	1,367879	1,367879	3,31E-11	1,65E-14	8,27E-15	4,18E-18
Максимальная абсолютная погрешность						3,31E-11	1,65E-14	8,27E-15	4,18E-18

Таблица 56. Результаты решения интегрального уравнения (Пример 5. $K(x, s) = x * e^s$, $f(x) = e^{-x}$, $y(x) = x + e^{-x}$, $h = 0.1$)

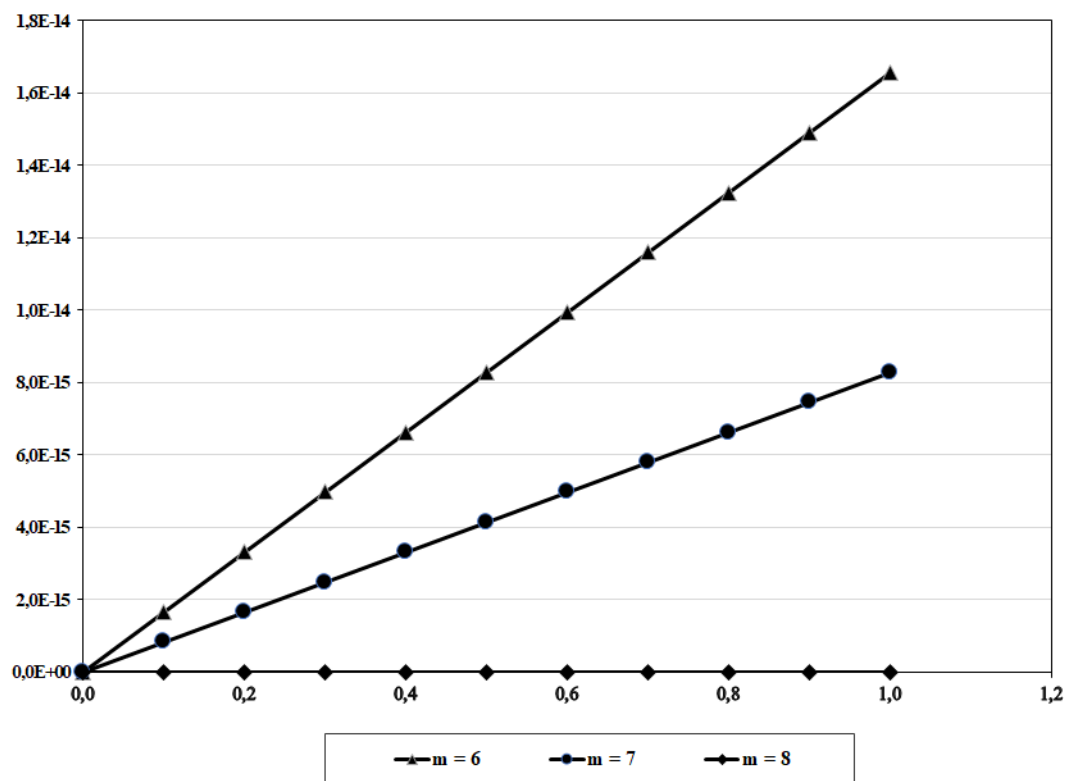


Рис 56. Графическая иллюстрация абсолютной погрешности (Пример 5. $K(x, s) = x * e^s$, $f(x) = e^{-x}$, $y(x) = x + e^{-x}$, $h = 0.1$)

4 Заключение

Судя по результатам проделанных расчетов с помощью метода оптимальных квадратурных формул с производными и по результатам расчетов иностранных исследователей доказывается эффективность нашего метода. Необходимо отметить, данный метод квадратур легко применяется остальным линейным уравнениям: Фредгольм первого рода, Вольтерра первого и второго рода и смещенным уравнениям Вольтерра – Фредгольма. А также можно применить к линейным интегро-дифференциальным уравнениям.

Литература

- [1] *Ezzati R., Mokhtari F.* Numerical solution of Fredholm integral equations of the second kind by using fuzzy transforms, *International Journal of Physical Sciences*, – Vol. 7(10). – 2012. – P. 1578–1583.
- [2] *Ahmed Flayih Jaber, Adil Alrammahi.* Spline technique for second type Fredholm integral equation. *Journal of Kufa for Mathematics and Computer*, – Vol. 7. – No. 1. – 2020. – P. 31–40.
- [3] *H.S. Ramane, S.C. Shiralashetti, R.A. Mundewadi, R.B. Jummanner.* Numerical Solution of Fredholm Integral Equations Using Hosoya Polynomial of Path Graphs, *JAmerican Journal of Numerical Analysis*, – 2017. – Vol. 5. – No. 1. – P. 11–15.
- [4] *Shihab S.N., Asmaa A.A., Mohammed Ali M.N.* Collocation Orthonormal Bernstein Polynomials method for Solving Integral Equations. *Mathematical Theory and Modeling*, – Vol. 5. – No. 12. – 2015. – 9 p.
- [5] *N.K. Volosova, K.A. Volosov, A.K. Volosova, M.I. Karlov, D.F. Pastuhov, Yu.F. Pastuhov* Solution of the Fredholm Integral Equations Method of Replacing the Integral by a Quadrature with the Twelveth Order of Error in Matrix Form, *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, – 2022. – 4(59). – P. 9–17.
- [6] *Shadimetov, K.M.* A method of construction of weight optimal quadrature formulas with derivatives in the Sobolev space. *Uzbek Mathematical Journal*, – 2018. – №3. – P. 140–146.
- [7] *Kh. Shadimetov, Kh. Usmanov.* Quadrature Method for Linear Integral Equations in $L_2^{(1)}(0, 1)$. *AIP Conference Proceedings*, 3004, 060050 – 2024.
- [8] *Shadimetov Kh.M., Usmanov H.I.* Application of the quadrature method for solving the second kind Fredholm integral equation. *International Scientific Conference: Al-Khwarizmi*, – 2023. – 146 p.
- [9] *Shadimetov Kh.M., Usmanov H.I.* On the quadrature method for the numerical solution of the second kind Fredholm integral equation. *International Scientific Conference: Al-Khwarizmi*, – 2023. – 147 p.
- [10] *Shadimetov Kh.M., Usmanov H.I.* Numerical solution of the Fredholm integral equation of the second kind by the method of quadrature with derivatives, *Modern problems of differential equations and their applications: Abstracts of reports of the international scientific conference (November 23-25, 2023, Tashkent, Uzbekistan), Part II*, – Fergana, – 2023. – 210 p.
- [11] *Shadimetov Kh.M., Usmanov H.I.* Approximate solution of linear Fredholm integral equations of the second kind by the method optimal quadrature. *Problems of Computational and Applied Mathematics*, – № 1(55), – 2024. – P. 140–161.

Поступила в редакцию 22.08.2024

UDC 51

COMPARISON OF THE RESULTS OF THE APPROXIMATE SOLUTION OF LINEAR FREDHOLM INTEGRAL EQUATIONS OF THE SECOND KIND BY VARIOUS METHODS

^{1,2*}*Shadimetov Kh.M.*, ²*Usmanov Kh.I.*

*kholmatshadimetov@mail.ru

¹Tashkent State Transport University,
Temiryolchilar street, 1, Tashkent, 100167 Uzbekistan;

²V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics AS RUz,
University street, 9, Tashkent, 100174 Uzbekistan.

The approximate solution of linear Fredholm integral equations of the second kind is one of the pressing problems in the field of computational mathematics today. Most researchers offer various approximate methods for solving integral equations. This work is devoted to comparing various approximate methods for solving linear Fredholm equations of the second kind. The main goal of the work is to determine the most effective method. Our method is the use of optimal quadrature formulas with derivatives to solve linear Fredholm integral equations of the second kind. The effectiveness of the method depends on the accuracy of the results. In this case, the exact solution was used to compare the results. The effectiveness of this method is proven.

Keywords: linear integral equation, optimal quadrature formula, quadrature formula with derivatives, system of algebraic equations, maximum absolute error.

Citation: Shadimetov Kh.M., Usmanov Kh.I. 2024. Comparison of the results of the approximate solution of linear Fredholm integral equations of the second kind by various methods. *Problems of Computational and Applied Mathematics*.4/2(60):118-133.

ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

№ 4/2(60) 2024

Журнал основан в 2015 году.

Издается 6 раз в год.

Учредитель:

Научно-исследовательский институт развития цифровых технологий и
искусственного интеллекта.

Главный редактор:

Равшанов Н.

Заместители главного редактора:

Азамов А.А., Арипов М.М., Шадиметов Х.М.

Ответственный секретарь:

Ахмедов Д.Д.

Редакционный совет:

Азамова Н.А., Алоев Р.Д., Амиргалиев Е.Н. (Казахстан), Бурнашев В.Ф.,
Загребина С.А. (Россия), Задорин А.И. (Россия), Игнатьев Н.А.,
Ильин В.П. (Россия), Исмагилов И.И. (Россия), Кабанихин С.И. (Россия),
Карачик В.В. (Россия), Курбонов Н.М., Маматов Н.С., Мирзаев Н.М.,
Мирзаева Г.Р., Мухамадиев А.Ш., Назирова Э.Ш., Нормуродов Ч.Б.,
Нуралиев Ф.М., Опанасенко В.Н. (Украина), Расулмухамедов М.М., Расулов А.С.,
Садуллаева Ш.А., Старовойтов В.В. (Беларусь), Хаётов А.Р., Халджигитов А.,
Хамдамов Р.Х., Хужаев И.К., Хужаеров Б.Х., Чье Ен Ун (Россия),
Шабозов М.Ш. (Таджикистан), Dimov I. (Болгария), Li Y. (США),
Mascagni M. (США), Min A. (Германия), Schaumburg H. (Германия),
Singh D. (Южная Корея), Singh M. (Южная Корея).

Журнал зарегистрирован в Агентстве информации и массовых коммуникаций при
Администрации Президента Республики Узбекистан.

Регистрационное свидетельство №0856 от 5 августа 2015 года.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

При перепечатке материалов ссылка на журнал обязательна.

За точность фактов и достоверность информации ответственность несут авторы.

Адрес редакции:

100125, г. Ташкент, м-в. Буз-2, 17А.

Тел.: +(998) 712-319-253, 712-319-249.

Э-почта: journals@airi.uz.

Веб-сайт: <https://journals.airi.uz>.

Дизайн и вёрстка:

Шарипов Х.Д.

Отпечатано в типографии НИИ РЦТИИ.

Подписано в печать 09.09.2024 г.

Формат 60x84 1/8. Заказ №6. Тираж 100 экз.

PROBLEMS OF COMPUTATIONAL AND APPLIED MATHEMATICS

No. 4/2(60) 2024

The journal was established in 2015.
6 issues are published per year.

Founder:

Digital Technologies and Artificial Intelligence Development Research Institute.

Editor-in-Chief:

Ravshanov N.

Deputy Editors:

Azamov A.A., Aripov M.M., Shadimetov Kh.M.

Executive Secretary:

Akhmedov D.D.

Editorial Council:

Azamova N.A., Alov R.D., Amirgaliev E.N. (Kazakhstan), Burnashev V.F.,
Zagrebina S.A. (Russia), Zadorin A.I. (Russia), Ignatiev N.A., Ilyin V.P. (Russia),
Ismagilov I.I. (Russia), Kabanikhin S.I. (Russia), Karachik V.V. (Russia), Kurbonov
N.M., Mamatov N.S., Mirzaev N.M., Mirzaeva G.R., Mukhamadiev A.Sh., Nazirova
E.Sh., Normurodov Ch.B., Nuraliev F.M., Opanasenko V.N. (Ukraine), Rasulov A.S.,
Sadullaeva Sh.A., Starovoitov V.V. (Belarus), Khayotov A.R., Khaldjigitov A.,
Khamdamov R.Kh., Khujaev I.K., Khujayorov B.Kh., Chye En Un (Russia),
Shabozov M.Sh. (Tajikistan), Dimov I. (Bulgaria), Li Y. (USA), Mascagni M. (USA),
Min A. (Germany), Schaumburg H. (Germany), Singh D. (South Korea),
Singh M. (South Korea).

The journal is registered by Agency of Information and Mass Communications under the
Administration of the President of the Republic of Uzbekistan.

The registration certificate No. 0856 of 5 August 2015.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

At a reprint of materials the reference to the journal is obligatory.
Authors are responsible for the accuracy of the facts and reliability of the information.

Address:

100125, Tashkent, Buz-2, 17A.

Tel.: +(998) 712-319-253, 712-319-249.

E-mail: journals@airi.uz.

Web-site: <https://journals.airi.uz>.

Layout design:

Sharipov Kh.D.

DTAIDRI printing office.

Signed for print 09.09.2024

Format 60x84 1/8. Order No. 6. Printed copies 100.

Содержание

Шадиметов Х.М., Жабборов Х.Х.

Оптимальная квадратурная формула для приближенного вычисления сингулярных интегралов с ядром Гильберта 5

Исматуллаев Г.П., Бахромов С.А., Мирзакабилов Р.Н.

Построение кубатурной формулы пятой степени точности, содержащей значения частных производных 15

Ахмедов Д.М., Авезов А.Х., Хакимова И.К.

Оптимальные квадратурные формулы для гиперсингулярных интегралов в пространстве Соболева 24

Болтаев А.К.

Об одной модификации метода Соболева для приближения функции 33

Ахмадалиев Г.Н.

Точная верхняя оценка погрешности квадратурных формул в гильбертовом пространстве $K_{2,\omega}^{(m)}$ 45

Шадиметов Х.М., Гуломов О.Х.

Оптимальные квадратурные формулы для вычисления интегралов от быстроосциллирующих функций 56

Нуралиев Ф.А., Кузиев Ш.С., Джураева К.А.

Приближенное решение интегрального уравнения Фредгольма второго рода методом оптимальных квадратур 66

Шадиметов Х.М., Усманов Х.И.

Оптимальная аппроксимация операторов со степенно-логарифмическими ядрами 74

Хаётов А.Р., Нафасов А.Ю., Бердимуратова У.А.

Оптимальные интерполяционные формулы с производной в пространстве $W_2^{(2,1)}(0,1)$ 90

Бабаев С.С.

Весовая оптимальная квадратурная формула с производными в гильбертовом пространстве 99

Абдураходов А.А.

Оптимальная аппроксимация интегралов Фурье методом фи-функций 108

Шадиметов Х.М., Усманов Х.И.

Сравнение результатов приближенного решения линейных интегральных уравнений Фредгольма второго рода различными методами 118

Юсупов М.

Исследование нелинейной вязкоупругой виброзащитной системы 134

Contents

Shadimetov Kh.M., Jabborov Kh.Kh.

Optimal quadrature formula for approximate calculation of singular integrals with Hilbert kernel 5

Ismatullaev G.P., Bakhromov S.A., Mirzakabilov R.N.

Construction of a cubature formula of the fifth degree of accuracy containing the values of partial derivatives 15

Akhmedov D.M., Avezov A.Kh., Hakimova I.K.

Optimal quadrature formulas for hypersingular integrals in the Sobolev space . . 24

Boltaev A.K.

On one modification of the Sobolev method for approximating a function 33

Akhmadaliev G.N.

A sharp upper bound for the error of quadrature formulas in Hilbert space $K_{2,\omega}^{(m)}$ 45

Shadimetov Kh.M., Gulomov O.Kh.

Optimal quadrature formulas for calculating integrals of rapidly oscillating functions 56

Nuraliev F.A., Kuziev Sh.S., Djuraeva K.A.

Approximate solution Fredholm integral equation of the second kind by the optimal quadrature method 66

Shadimetov Kh.M., Usmanov Kh.I.

Optimal approximation of operators with power-logarithmic kernels 74

Hayotov A.R., Nafasov A.Y., Berdimuradova U.A.

An optimal interpolation formulas with derivative in the space $W_2^{(2,1)}$ 90

Babaev S.S.

The weighted optimal quadrature formula with derivatives in the Hilbert space . 99

Abduakhadov A.A.

Optimal approximation of Fourier integrals by the phi-function method 108

Shadimetov Kh.M., Usmanov Kh.I.

Comparison of the results of the approximate solution of linear Fredholm integral equations of the second kind by various methods 118

Yusupov M.

Study of nonlinear viscoelastic vibration protection system 134