УДК 51

ОПТИМАЛЬНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ОПЕРАТОРОВ СО СТЕПЕННО-ЛОГАРИФМИЧЕСКИМИ ЯДРАМИ

[1,2*] ***Шадиметов Х.М.***, [2] ***Усманов Х.И.***
*kholmatshadimetov@mail.ru
[1]Ташкентский Государственный Транспортный Университет,
100167, Узбекистан, г. Ташкент, ул.Темирйулчилар, дом 1;
[2]Институт математики им. В.И. Романовского АН РУз,
100174, Узбекистан, г. Ташкент, ул. Университетская, д. 9.

В настоящей работе приводится построения оптимальной квадратурной формулы в пространстве Соболева для интегралов со степенно – логарифмическими ядрами. Выводится формулы для расчета коэффициентов оптимальной квадратурной формулы для случая. Кроме этого, приводится верхняя оценка погрешности оптимальной квадратурной формулы. Дано заключение о применимости данной оптимальной квадратурной формулы.

Ключевые слова: оптимальная квадратурная формула, коэффициенты квадратурной формулы, погрешности квадратурной формулы, со степенно – логарифмическими ядрами, абсолютная погрешность.

Цитирование: *Шадиметов Х.М., Усманов Х.И.* Оптимальная аппроксимация операторов со степенно-логарифмическими ядрами // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2024. – № 4/2(60). – С. 74-89.

1 Введение

Теоретическую основу разрешимости интегральных уравнений со степенно – логарифмическими ядрами впервые занимался итальянский ученый Вито Вольтерра. Одним из обобщений дробных интегралов Римана-Луивилля

$$I_{a^+}^{\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{\varphi(s)}{(x-s)^{1-\alpha}} ds, x > a, \tag{1}$$

$$I_{b^-}^{\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{\varphi(s)}{(s-x)^{1-\alpha}} ds, x < b. \tag{2}$$

На конечном отрезке [a, b] вещественной оси являются интегралы вида

$$I_{a^+}^{\alpha,\beta} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{\ln^{\beta} \frac{\nu}{x-s}}{(x-s)^{1-\alpha}} \varphi(s) ds, \alpha > 0, \beta \leqslant 0, \nu > b-a \tag{3}$$

$$I_{b^-}^{\alpha,\beta} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{\ln^{\beta} \frac{\nu}{s-x}}{(s-x)^{1-\alpha}} \varphi(s) ds, \tag{4}$$

содержащие наряду со степенной и логарифмической особенности. Интегралы (3) и (4) называют операторами со степенно-логарифмическими ядрами. Такие интегралы встречаются при исследовании интегральных уравнений первого рода со степенно-логарифмическими ядрами [1] – [8].

Очень большой вклад внесли авторы книги [1] в области интегралов и производные дробного порядка, в том числе и интегралами со степенно – логарифмическими ядрами. Они нашли аналитическое решение интегральных уравнений со степенно – логарифмическими ядрами с помощью специальными функциями В. Вольтерра для различных случаев значений параметров. Применения этих решений на практике очень затруднительно. В связи с этим предлагаем для интегралов со степенно – логарифмическими особенностями оптимальную квадратурную формулу. Авторы работы [3] в свою очередь предлагают сплайн - коллокационные технологию.

2 Оценка погрешности аппроксимации интегралов со степенно-логарифмическими ядрами

В настоящей работе мы будем заниматься приближением оператора (3) при $\beta = 1$ в пространстве Соболева $L_2^{(1)}(0,1)$. Весовую функцию $p(s)$ квадратурной формуле, приведенной в работе [9], представим в следующем виде

$$p(s) = (x-s)^{\alpha-1} \ln \frac{\nu}{x-s}.$$

Предметом настоящего раздела является оценка нормы погрешности квадратурных формул на отрезке [0, x]. Будем рассматривать погрешности следующей квадратурной формулы

$$\int_0^x (x-s)^{\alpha-1} \ln \frac{\nu}{x-s} \varphi(s) ds \cong \sum_{\beta=0}^{N} C[\beta]\varphi[\beta], \tag{5}$$

как линейный функционал вида

$$l(s) = \chi_{[0,x]}(s)(x-s)^{\alpha-1} \ln \frac{\nu}{x-s} - \sum_{\beta=0}^{N} C[\beta]\delta(s-h\beta), \tag{6}$$

в пространстве $L_2^{(m)}(0,x)$ классов функции, обладающих непрерывными производными порядка m, интегрируемим квадратом и нормой

$$\|\varphi/L_2^{(m)}\| = \{\int_0^x \left[\varphi^{(m)}(s)\right]^2 ds\}^{\frac{1}{2}}. \tag{7}$$

$L_2^{(m)}(0,x)$ есть фактор – пространство $W_2^{(m)}$ по пространству полиномов степени $m-1$. $W_2^{(m)}$ - пространство Соболева [10], через $\chi_{[0,x]}(s)$ - в (6) обозначена характеристическая функция отрезка $[0,x]$, $C[\beta]$ - коэффициенты квадратурной формулы вида (5), $h = 1/N, N = 2, 3, \ldots, \delta(x)$ - дельта функция Дирака, $0 < \alpha < 1, \nu > x$.

Необходимо считать, что

$$(l(s), s^k) = 0, k = 0, 1, \ldots, m-1. \tag{8}$$

Квадратурную формулу (5) с функционалом погрешности (6), рассматриваемую в пространстве $L_2^{(m)}(0,x)$, характеризуется кроме условий (8) и экстремальной функцией квадратурной формулы, которая получается, как решение уравнения [11]

$$\frac{d^{2m}u(x)}{dx^{2m}} = (-1)^m l(x), \tag{9}$$

решения уравнения (2.5) и может быть записана в виде

$$u(x) = G_m(x) * l(x) + P_{m-1}(x), \tag{10}$$

где

$$G_m(x) = \frac{|x|^{2m-1}}{2(2m-1)!} \tag{11}$$

$P_{m-1}(x)$ - некоторый многочлен $m-1$ степени.

Норма функционала $l(s)$ выражается в виде

$$\|l/L_2^{(m)*}\| = \frac{|(l,u)|}{\|u/L_2^{(m)}\|} = \|u/L_2^{(m)}\|. \tag{12}$$

При этом удобно воспользоваться известным представлением скалярного произведения

$$(\psi, \varphi) = (\psi(x) * \varphi(x))|_{x=0}. \tag{13}$$

Из формулы (2.8) получаем

$$\|l/L_2^{(m)*}\|^2 = (l,u) = l(x) * G_m(x) * l(-x)|_{x=0}. \tag{14}$$

В силу того, что функции $l(x)$ и $l(-x)$ финитная тройная свертка в правой части (14) ассоциативна и коммутативна. Подставляя в (14) выражения для $l(x)$ и $l(-x)$ из (6), получим после несложных выкладок

$$\|l/L_2^{(m)*}\|^2 = (-1)^m \sum_{\beta=0}^{N} \sum_{\beta'=0}^{N} C[\beta]C[\beta']G_m(h\beta - h\beta') -$$

$$-\sum_{\beta=0}^{N} C[\beta] \int_0^x (x-s)^{\alpha-1} \ln \frac{\nu}{x-s} G_m(s-h\beta)ds +$$

$$+\int_0^x \int_0^x (x-s)^{\alpha-1} \ln \frac{\nu}{x-s} (x-y)^{\alpha-1} \ln \frac{\nu}{x-y} G_m(y-s)dyds. \tag{15}$$

Теперь для нахождения минимума квадрата нормы функционала погрешности (151), применим метод неопределенных множителей Лагранжа. Для этого рассмотрим вспомогательную функцию

$$\psi(C,\lambda) = \| l/L_2^{(m)*} \|^2 + 2(-1)^m \sum_{k=0}^{m-1} \lambda_k (l, x^k). \tag{16}$$

Приравняем нулю все частные производные по $C[\beta]$ от функции $\psi(C,\lambda)$

$$\frac{\partial \psi}{\partial C[\beta]} = 0. \tag{17}$$

Это дает вместо (8) систему уравнений

$$\sum_{\gamma=0}^{N} C[\gamma]G_m(h\beta - h\gamma) + P_{m-1}[\beta] = \int_0^x (x-s)^{\alpha-1} \ln \frac{\nu}{x-s} G_m(s-h\beta)ds, \tag{18}$$

$$\beta = 0, 1, ..., N,$$

$$\sum_{\beta=0}^{N} C[\beta](h\beta)^k = \int_0^x s^k (x-s)^{\alpha-1} \ln \frac{\nu}{x-s} ds, k = 0, 1, ..., m-1. \tag{19}$$

Напомним, что система уравнений (8) выражает равенство нулю частных производных от $\psi(C,\lambda)$ по λ_k.

Известно, что решение системы (18) - (19) представляет собой стационарную точку для функции $\psi(C,\lambda)$. Эту стационарную точку мы будем обозначать через $\overset{\circ}{C}[\beta]$ и $\overset{\circ}{\lambda}_k$

Из теории метода Лагранжа следует, что $\overset{\circ}{C}[\beta]$ будут искомыми значениями коэффициентов квадратурной формулы, а $\overset{\circ}{\lambda}_k$ -значения множителей Лагранжа. Они дают условный минимум $\|l/L_2^{(m)*}\|^2$ при соблюдении условий (8).

Коэффициенты $\overset{\circ}{C}[\beta]$ оптимальными коэффициентами квадратурной формулы вида (5), а соответствующая формула оптимальной квадратурной формулой.

В следующем параграфе мы будем построить оптимальную квадратурную формулу в пространстве $L_2^{(1)}(0,x)$.

3 Коэффициенты оптимальных квадратурных формул

Из вида нормы функционала погрешности квадратурных формул с равноотстоящими узлами следует, что при фиксированном шага h нормы функционала погрешности являясь квадратичной функцией от коэффициентов, т.е. от функции $C[\beta]$ имеет минимум и притом единственный, при конкретном значений $C[\beta]=\overset{\circ}{C}[\beta]$. Формула с коэффициентами $\overset{\circ}{C}[\beta]$, соответствующая этому минимуму будет оптимальной.

Далее проведем исследование оптимальных квадратурных формул с заданными узлами в пространстве $L_2^{(1)}(0,x)$.

В предыдущем разделе получили (18) – (19) - систему уравнения для коэффициентов оптимальной квадратурной формулы. В случае $m=1$ эта система уравнения имеют вид

$$\sum_{\gamma=0}^{N}\overset{\circ}{C}[\gamma]\frac{|h\beta-h\gamma|}{2}+P_0=f(h\beta),\beta=0,1,...,N, \tag{20}$$

$$\sum_{\beta=0}^{N}\overset{\circ}{C}[\beta]=g(\alpha,x,\nu). \tag{21}$$

(3.2)

Здесь

$$f[h\beta]=\int_0^x (x-s)^{\alpha-1}\ln\frac{\nu}{x-s}\frac{|s-h\beta|}{2}ds, \tag{22}$$

$$g(\alpha,x,\nu)=\int_0^x (x-s)^{\alpha-1}\ln\frac{\nu}{x-s}ds, \tag{23}$$

P_0 - неизвестная постоянная.

Теперь вычислим интегралы (22) и (23):

$$f[h\beta]=\int_0^x (x-s)^{\alpha-1}\ln\frac{\nu}{x-s}\frac{|s-h\beta|}{2}ds=$$

$$=-\int_0^{h\beta} (x-s)^{\alpha-1}\ln\frac{\nu}{x-s}\frac{s-h\beta}{2}ds+\int_{h\beta}^{x} (x-s)^{\alpha-1}\ln\frac{\nu}{x-s}\frac{s-h\beta}{2}ds=$$

$$=\int_0^x (x-s)^{\alpha-1}\ln\frac{\nu}{x-s}\frac{s-h\beta}{2}ds-\int_0^{h\beta}(x-s)^{\alpha-1}(s-h\beta)\ln\frac{\nu}{x-s}ds=$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^x s(x-s)^{\alpha-1}\ln\frac{\nu}{x-s}ds-\frac{h\beta}{2}\int_0^x (x-s)^{\alpha-1}\ln\frac{\nu}{x-s}ds-$$
$$-\int_0^x s(x-s)^{\alpha-1}\ln\frac{\nu}{x-s}ds+h\beta\int_0^x (x-s)^{\alpha-1}\ln\frac{\nu}{x-s}ds. \qquad (24)$$

Обозначим через I_1 и I_2 следующие интегралы

$$I_1=\int s(x-s)^{\alpha-1}\ln\frac{\nu}{x-s}ds, I_2=\int (x-s)^{\alpha-1}\ln\frac{\nu}{x-s}ds.$$

Вычислим интеграл I_2 ($\alpha>0$ обеспечить существование интеграла, ν-const).

$$u=\ln\frac{\nu}{x-s}, du=\frac{ds}{x-s}, dv=(x-s)^{\alpha-1}ds, v=-\frac{(x-s)^{\alpha}}{\alpha},$$

$$I_2=\int (x-s)^{\alpha-1}\ln\frac{\nu}{x-s}ds=-\frac{(x-s)^{\alpha}}{\alpha}\ln\frac{\nu}{x-s}+\int\frac{(x-s)^{\alpha-1}}{\alpha}ds=$$
$$-\frac{(x-s)^{\alpha}}{\alpha}\ln\frac{\nu}{x-s}-\frac{1}{\alpha}\frac{(x-s)^{\alpha}}{\alpha}=-\frac{(x-s)^{\alpha}}{\alpha}\left[\frac{1}{\alpha}+\ln\frac{\nu}{x-s}\right]. \qquad (25)$$

Переходим к вычислению интеграла I_1:

$$u=\ln\frac{\nu}{x-s}, du=\frac{ds}{x-s}, dv=s(x-s)^{\alpha-1}ds, v=-\frac{s(x-s)^{\alpha}}{\alpha}-\frac{(x-s)^{\alpha+1}}{\alpha(\alpha+1)},$$

$$I_1=\int s(x-s)^{\alpha-1}\ln\frac{\nu}{x-s}ds=-\left[\frac{s(x-s)^{\alpha}}{\alpha}-\frac{(x-s)^{\alpha+1}}{\alpha(\alpha+1)}\right]\ln\frac{\nu}{x-s}+$$
$$+\int\left(\frac{s(x-s)^{\alpha-1}}{\alpha}-\frac{(x-s)^{\alpha}}{\alpha(\alpha+1)}\right)ds=-\left[\frac{s(x-s)^{\alpha}}{\alpha}-\frac{(x-s)^{\alpha+1}}{\alpha(\alpha+1)}\right]\ln\frac{\nu}{x-s}-$$
$$-\frac{(x-s)^{\alpha+1}}{\alpha(\alpha+1)^2}+\int\frac{s(x-s)^{\alpha-1}}{\alpha}ds.$$

Обозначим через

$$S_1=\int\frac{s(x-s)^{\alpha-1}}{\alpha}ds, u=s, du=ds, dv=\frac{(x-s)^{\alpha-1}}{\alpha}ds, v=-\frac{(x-s)^{\alpha}}{\alpha^2},$$

$$S_1=-\frac{s(x-s)^{\alpha}}{\alpha^2}+\int\frac{(x-s)^{\alpha}}{\alpha^2}ds=-\frac{s(x-s)^{\alpha}}{\alpha^2}-\frac{(x-s)^{\alpha+1}}{\alpha^2(\alpha+1)}.$$

Тогда

$$I_1=-\left[\frac{s(x-s)^{\alpha}}{\alpha}+\frac{(x-s)^{\alpha+1}}{\alpha(\alpha+1)}\right]\ln\frac{\nu}{x-s}-\frac{(x-s)^{\alpha+1}}{\alpha(\alpha+1)^2}-\frac{s(x-s)^{\alpha}}{\alpha^2}-$$
$$-\frac{(x-s)^{\alpha+1}}{\alpha^2(\alpha+1)}=-\frac{s(x-s)^{\alpha}}{\alpha}\left[\frac{1}{\alpha}+\ln\frac{\nu}{x-s}\right]-$$
$$-\frac{(x-s)^{\alpha+1}}{\alpha(\alpha+1)}\left[\ln\frac{\nu}{x-s}+\frac{1}{\alpha+1}+\frac{1}{\alpha}\right],$$

$$I_1=-\frac{s(x-s)^{\alpha}}{\alpha}\left[\frac{1}{\alpha}+\ln\frac{\nu}{x-s}\right]-\frac{(x-s)^{\alpha+1}}{\alpha(\alpha+1)}\left[\ln\frac{\nu}{x-s}+\frac{1}{\alpha+1}+\frac{1}{\alpha}\right]. \qquad (26)$$

В силу (25) и (26) равенство (24) приведем к виду

$$f[h\beta]=\frac{1}{2}\{-\frac{s(x-s)^{\alpha}}{\alpha}\left[\ln\frac{\nu}{x-s}+\frac{1}{\alpha}\right]-\frac{(x-s)^{\alpha+1}}{\alpha(\alpha+1)}\left[\ln\frac{\nu}{x-s}+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha+1}\right]\}\Big|_0^x+$$

$$+\frac{h\beta}{2}\frac{(x-s)^{\alpha}}{\alpha}\left[\frac{1}{\alpha}+\ln\frac{\nu}{x-s}\right]\Big|_0^x-\{-\frac{s(x-s)^{\alpha}}{\alpha}\left[\frac{1}{\alpha}+\ln\frac{\nu}{x-s}\right]-\frac{(x-s)^{\alpha+1}}{\alpha(\alpha+1)}\cdot$$

$$\cdot\left[\ln\frac{\nu}{x-s}+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha+1}\right]\}\Big|_0^{h\beta}+h\beta\{-\frac{(x-s)^{\alpha}}{\alpha}\left[\frac{1}{\alpha}+\ln\frac{\nu}{x-s}\right]\}\Big|_0^{h\beta}=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha(\alpha+1)}\left[\ln\frac{\nu}{x}+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha+1}\right]-\frac{h\beta}{2}\frac{x^{\alpha}}{\alpha}\left[\ln\frac{\nu}{x}+\frac{1}{\alpha}\right]+$$

$$+h\beta\frac{(x-h\beta)^{\alpha}}{\alpha}\left[\frac{1}{\alpha}+\ln\frac{\nu}{x-h\beta}\right]+\frac{(x-h\beta)^{\alpha+1}}{\alpha(\alpha+1)}\left[\ln\frac{\nu}{x-h\beta}+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha+1}\right]-$$

$$-\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha(\alpha+1)}\left[\ln\frac{\nu}{x}+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha+1}\right]-h\beta\frac{(x-h\beta)^{\alpha}}{\alpha}\left[\frac{1}{\alpha}+\ln\frac{\nu}{x-h\beta}\right]+$$

$$+\frac{h\beta x^{\alpha}}{\alpha}\left[\ln\frac{\nu}{x}+\frac{1}{\alpha}\right]=-\frac{1}{2}\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha(\alpha+1)}\left[\ln\frac{\nu}{x}+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha+1}\right]+$$

$$+\frac{(x-h\beta)^{\alpha+1)}}{\alpha(\alpha+1)}\left[\ln\frac{\nu}{x-h\beta}+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha+1}\right]+\frac{h\beta x^{\alpha}}{2\alpha}\left[\ln\frac{\nu}{x}+\frac{1}{\alpha}\right].$$

Отсюда, имеем

$$f[h\beta]=\frac{(x-h\beta)^{\alpha+1)}}{\alpha(\alpha+1)}\left[\ln\frac{\nu}{x-h\beta}+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha+1}\right]+\frac{h\beta x^{\alpha}}{2\alpha}\left[\ln\frac{\nu}{x}+\frac{1}{\alpha}\right]-$$

$$-\frac{1}{2}\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha(\alpha+1)}\left[\ln\frac{\nu}{x}+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha+1}\right]. \qquad (27)$$

А $g(\alpha,x,\nu)$ принимает вид

$$g(\alpha,x,\nu)=\int(x-s)^{\alpha-1}\ln\frac{\nu}{x-s}ds=-\frac{(x-s)^{\alpha}}{\alpha}\left[\ln\frac{\nu}{x}+\frac{1}{\alpha}\right]\Big|_0^x=\frac{x^{\alpha}}{\alpha}\left[\ln\frac{\nu}{x}+\frac{1}{\alpha}\right],$$

$$g(\alpha,x,\nu)=\frac{x^{\alpha}}{\alpha}\left[\ln\frac{\nu}{x}+\frac{1}{\alpha}\right]. \qquad (28)$$

Теперь переходим к решению системы (20) - (21). Считая, что $\overset{\circ}{C}[\beta]=0$ при $\beta\notin[0,N]$ и пользуясь определением свертки двух функций дискретного аргумента (4.1) перепишем в виде

$$\frac{|h\beta|}{2}*\overset{\circ}{C}[\beta]+P_0=f[\beta]. \qquad (29)$$

Если учитывать (27), (28) и (29), тогда систему (20) - (21) можно написать следующем виде

$$\frac{|h\beta|}{2}*\overset{\circ}{C}[\beta]+P_0=f[\beta]. \qquad (30)$$

$$\sum_{\beta=0}^{N} \overset{\circ}{C}[\beta] = g(\alpha, x, \nu). \tag{31}$$

Для решения этой систему свертками будем пользоваться методом Соболева [12]. Для этого обозначим через $u[\beta]$ левую часть равенство (30)

$$u[\beta] = \frac{|h\beta|}{2} * \overset{\circ}{C}[\beta] + P_0. \tag{32}$$

Применяя к обоим частям равенство (32) аналог дифференциального оператора $\frac{d^2}{dx^2}$, т.е.

$$D_2[\beta] = \begin{cases} h^{-2}, & \text{при } [\beta] = 1, \\ -2h^{-2}, & \text{при } [\beta] = 0, \\ 0, & \text{при } \beta < -1 \text{ и } \beta > 1 \end{cases} \tag{33}$$

и учитывая, что

$$hD_2[\beta] * \frac{|h\beta|}{2} = \delta[\beta], hD_2[\beta] * P_0 = 0,$$

получаем

$$\overset{\circ}{C}[\beta] = hD_2[\beta] * u[\beta], \beta = 0, 1, ..., N. \tag{34}$$

Несложно заметить, что функция $u[\beta]$ известно только при $\beta = 0, 1, ..., N$, т.е.

$$u[\beta] = f[\beta], \beta = 0, 1, ..., N.$$

Нам необходимо найти $u[\beta]$ при $\beta < 0$ и $\beta > N$. Для этого рассмотрим равенству (32) при $\beta < 0$ и $\beta > N$.

Пусть $\beta < 0$, тогда учитывая $\overset{\circ}{C}[\beta] = 0$ при $\beta < 0$ имеем

$$u[\beta] = \sum_{\gamma=-\infty}^{+\infty} \frac{|h\gamma - h\beta|}{2} \overset{\circ}{C}[\gamma] + P_0 = \sum_{\gamma=0}^{N} \frac{|h\gamma - h\beta|}{2} \overset{\circ}{C}[\gamma] + P_0 =$$

$$= \sum_{\gamma=0}^{N} \frac{(h\gamma - h\beta)}{2} \overset{\circ}{C}[\gamma] + P_0 = \sum_{\gamma=0}^{N} \frac{h\gamma}{2} \overset{\circ}{C}[\gamma] - \frac{h\beta}{2} \sum_{\gamma=0}^{N} C[\gamma] + P_0.$$

Отсюда в силу (31) получим

$$u[\beta] = -\frac{h\beta}{2} g(\alpha, x, \nu) + P_0^-, \text{при } \beta < 0$$

где

$$P_0^- = P_0 + \sum_{\gamma=0}^{N} \frac{h\gamma}{2} \overset{\circ}{C}[\gamma].$$

Точно также получим

$$u[\beta] = \frac{h\beta}{2} g(\alpha, x, \nu) + P_0^+, \text{при } \beta > N,$$

где

$$P_0^+ = P_0 - \sum_{\gamma=0}^{N} \frac{h\gamma}{2} C[\gamma].$$

Итак

$$u[\beta]=\begin{cases}-\frac{h\beta}{2}g(\alpha,x,\nu)+P_0^-, & \text{при } \beta<0,\\ f[\beta], & \text{при } \beta=0,1,...,N,\\ \frac{h\beta}{2}g(\alpha,x,\nu)-P_0^+, & \text{при } \beta>N,\end{cases} \tag{35}$$

Известно, что при $\beta=0$ и $\beta=N$ функции $f[\beta], -\frac{h\beta}{2}g(\alpha,x,\nu)+P_0^-$ и $\frac{h\beta}{2}g(\alpha,x,\nu)-$ $-\,P_0^+$ совпадают. Отсюда имеем

$$P_0^-=f[0], P_0^+=f[N]-\frac{x}{2}g(\alpha,x,\nu). \tag{36}$$

С помощью формул (33) - (36) функция $u[\beta]$ полностью определяется:

$$u[\beta]=\begin{cases}-\frac{h\beta}{2}g(\alpha,x,\nu)+f[0], & \text{при } \beta\leqslant 0,\\ f[\beta], & \text{при } \beta=0,1,...,N,\\ \frac{(h\beta-x)}{2}g(\alpha,x,\nu)+f[N], & \text{при } \beta\geqslant N,\end{cases} \tag{37}$$

Теперь переходим к определению оптимальных коэффициентов $C[\beta],\beta=0,...,N$. Пользуясь формулами (33), (34) и (37) определим $\overset{\circ}{C}[\beta](\beta=1,...,N-1)$

$$\overset{\circ}{C}[\beta]=hD_2[\beta]*u[\beta]=h\sum_{\gamma=-\infty}^{+\infty}D_2[\beta-\gamma]u[\gamma]=$$

$$\begin{aligned}&=h(D_2[0]u[\beta]+D_2[-1]u[\beta+1]+D_2[1]u[\beta-1])=\\&=h(-2h0^2f[\beta]+h^2f[\beta+1]+h^2f[\beta-1])=\\&=h^{-1}(f\beta-1]-2f[\beta]+f[\beta+1]).\end{aligned}$$

Отсюда в силу (27) имеем

$$\overset{\circ}{C}[\beta]=\frac{h^{-1}(2\alpha+1)}{\alpha^2(\alpha+1)^2}\{[x-h(\beta+1)]^{\alpha+1}-2(x-h\beta)^{\alpha+1}+$$

$$+[x-h(\beta-1)]^{\alpha+1}\}+\frac{h^{-1}}{\alpha(\alpha+1)}\{[x-h(\beta+1)]^{\alpha+1}\ln\frac{\nu}{x-h(\beta+1)}-$$

$$-2(x-h\beta)^{\alpha+1}\ln\frac{\nu}{x-h\beta}+[x-h(\beta-1)]^{\alpha+1}\ln\frac{\nu}{x-h(\beta-1)}+$$

$$+\frac{x^\alpha}{2\alpha}\left(\frac{1}{\alpha}+\ln\frac{\nu}{x}\right)(\beta+1-2\beta+\beta-1)=$$

$$=\frac{h^{-1}}{\alpha(\alpha+1)}\{\frac{2\alpha+1}{\alpha(\alpha+1)}\left[(x-h(\beta+1))^{\alpha+1}-2(x-h\beta)^{\alpha+1}+(x-h(\beta-1))^{\alpha+1}\right]+$$

$$+(x-h(\beta+1))^{\alpha+1}\ln\frac{\nu}{x-h(\beta+1)}-2(x-h\beta)^{\alpha+1}\ln\frac{\nu}{x-h\beta}+$$

$$+(x-h(\beta-1))^{\alpha+1}\ln\frac{\nu}{x-h(\beta+1)}\}.$$

Известно, что

$$\Delta_2[\beta]=\delta[\beta+1]-2\delta[\beta]+\delta[\beta-1],$$

$$\Delta_2[\beta]*K[\beta]=K[\beta+1]-2K[\beta]+K[\beta-1],$$

тогда $\overset{\circ}{C}[\beta]$ можно написать в виде

$$\overset{\circ}{C}[\beta]=\frac{h^{-1}}{\alpha(\alpha+1)}\Delta_2[\beta]*\left[(x-h\beta)^{\alpha+1}\frac{2\alpha+1}{\alpha(\alpha+1)}+(x-h\beta)^{\alpha+1}\ln\frac{\nu}{x-h\beta}\right]=$$

$$=\frac{h^{-1}}{\alpha(\alpha+1)}\Delta_2[\beta]*\left[(x-h\beta)^{\alpha+1}\left(\frac{2\alpha+1}{\alpha(\alpha+1)}+\ln\frac{\nu}{x-h\beta}\right)\right],\beta=1,2,...,N-1.$$

Введем обозначение

$$\Psi[\beta]=(x-h\beta)^{\alpha+1}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha+1}+\ln\frac{\nu}{x-h\beta}\right). \tag{38}$$

Тогда оптимальные коэффициенты

$$\overset{\circ}{C}[\beta]=\frac{h^{-1}}{\alpha(\alpha+1)}(\Psi[\beta+1]-2\Psi[\beta]+\Psi[\beta-1]),\beta=1,2,...,N-1. \tag{39}$$

Переходим к нахождению $\overset{\circ}{C}[0]$ и $\overset{\circ}{C}[N]$. Точно также в силу формул (33), (34) и (37) имеем

$$\overset{\circ}{C}[0]=h\sum_{\gamma=-\infty}^{+\infty}D_2[\beta-\gamma]u[\gamma]\mid_{\beta=0}=h\sum_{\gamma=-\infty}^{+\infty}D_2[\gamma]u[\gamma]\mid_{\beta=0}=$$

$$=h(D_2[0]u[0]+D_2[-1]u[-1]+D_2[1]u[1])=$$

$$=h\left[-2h^{-2}f[0]+h^{-2}(\frac{h}{2}g(\alpha,x,\nu)+f[0]+h^{-2}f[1]\right]=$$

$$=h^{-1}[f[1]-f[0]+\frac{h}{2}g(\alpha,x,\nu)]=\frac{g(\alpha,x,\nu)}{2}+h^{-1}(f[1]-f[0]).$$

Отсюда учитывая (27) и (28), получим

$$\overset{\circ}{C}[0]=\frac{g(\alpha,x,\nu)}{2}+h^{-1}\frac{(x-h)^{\alpha+1}}{\alpha(\alpha+1)}\{\left[\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha+1}+\ln\frac{\nu}{x-h}\right]-$$

$$-\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha(\alpha+1)}\left[\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha+1}+\ln\frac{\nu}{x}\right]+\frac{hx^{\alpha}}{2\alpha}\left[\frac{1}{\alpha}+\ln\frac{\nu}{x}\right]\}=$$

$$=\frac{x^{\alpha}}{2\alpha}\left[\frac{1}{\alpha}+\ln\frac{\nu}{x}\right]+h^{-1}\{\frac{(2\alpha+1)[(x-h)^{\alpha+1}-x^{\alpha+1}]}{\alpha^2(\alpha+1)^2}+$$

$$+\frac{1}{\alpha(\alpha+1)}\left[(x-h)^{\alpha+1}\ln\frac{\nu}{x-h}-x^{\alpha+1}\ln\frac{\nu}{x}\right]\}+\frac{x^{\alpha}}{2\alpha}\left[\frac{1}{\alpha}+\ln\frac{\nu}{x}\right]=$$

$$=\frac{x^{\alpha}}{\alpha}\left[\frac{1}{\alpha}+\ln\frac{\nu}{x}\right]+h^{-1}\{\frac{(2\alpha+1)[(x-h)^{\alpha+1}-x^{\alpha+1}]}{\alpha^2(\alpha+1)^2}+$$

$$+\frac{1}{\alpha(\alpha+1)}\left[(x-h)^{\alpha+1}\ln\frac{\nu}{x-h}-x^{\alpha+1}\ln\frac{\nu}{x}\right]\}.$$

$$\overset{\circ}{C}[0]=\frac{x^{\alpha}}{\alpha}\left[\frac{1}{\alpha}+\ln\frac{\nu}{x}\right]+h^{-1}\{\frac{(2\alpha+1)[(x-h)^{\alpha+1}-x^{\alpha+1}]}{\alpha^2(\alpha+1)^2}+$$

$$+\frac{1}{\alpha(\alpha+1)}\left[(x-h)^{\alpha+1}\ln\frac{\nu}{x-h}-x^{\alpha+1}\ln\frac{\nu}{x}\right]\}. \tag{40}$$

Вычислим предел

$$\lim_{h\to 0}\overset{\circ}{C}[0]=\frac{x^\alpha}{\alpha}\left[\frac{1}{\alpha}+\ln\frac{\nu}{x}\right]+\frac{2\alpha+1)}{\alpha^2(\alpha+1)^2}\{\lim_{h\to 0}\frac{(x-h)^{\alpha+1}-x^{\alpha+1}}{h}+$$

$$+\frac{1}{\alpha(\alpha+1)}\lim_{h\to 0}\frac{(x-h)^{\alpha+1}\ln\frac{\nu}{x-h}-x^{\alpha+1}\ln\frac{\nu}{x}}{h}\},$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x-h)^{\alpha+1}-x^{\alpha+1}}{h}=-(\alpha+1)\lim_{h\to 0}(x-h)^\alpha=-(\alpha+1)x^\alpha,$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x-h)^{\alpha+1}\ln\frac{\nu}{x-h}-x^{\alpha+1}\ln\frac{\nu}{x}}{h}=\lim_{h\to 0}[-(\alpha+1)(x-h)^\alpha\ln\frac{\nu}{x-h}+(x-h)^\alpha]=$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[(x-h)^\alpha\left(-(\alpha+1)\ln\frac{\nu}{x-h}+1\right)\right]=x^\alpha\left[-(\alpha+1)\ln\frac{\nu}{x}\right],$$

$$\lim_{h\to 0}\overset{\circ}{C}[0]=\frac{x^\alpha}{\alpha}\left[\frac{1}{\alpha}+\ln\frac{\nu}{x}\right]-\frac{x^\alpha(2\alpha+1)}{\alpha^2(\alpha+1)}-\frac{x^\alpha\left(-1+(\alpha+1)\ln\frac{\nu}{x}\right)}{\alpha(\alpha+1)}=$$

$$=x^\alpha\left[\frac{1}{\alpha^2}-\frac{2\alpha+1}{\alpha^2(\alpha+1)}+\frac{1}{\alpha(\alpha+1)}\right]+\frac{x^\alpha}{\alpha}\ln\frac{\nu}{x}-\frac{x^\alpha}{\alpha}\ln\frac{\nu}{x}=$$

$$=\frac{x^\alpha}{\alpha^2(\alpha+1)}(\alpha+1-2\alpha-1+\alpha)=0.$$

Вычислим коэффициент $\overset{\circ}{C}[N]$:

$$\lim_{h\to 0}\overset{\circ}{C}[N]=\lim_{h\to 0}\left[\frac{h^\alpha}{\alpha(\alpha+1)}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha+1}+\ln\frac{\nu}{h}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{\alpha(\alpha+1)}\lim_{h\to 0}h^\alpha\ln\frac{\nu}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^\alpha(\ln\nu-\ln h)}{\alpha(\alpha+1)}=0.$$

Так как, $h^\alpha\ln h$ при $h\to 0$ стремится к нулю. Действительно, используя правило Лопиталя, имеем

$$\lim_{h\to 0}h^\alpha\ln h=\lim_{h\to 0}\frac{\ln h}{h^{-\alpha}}=-\frac{1}{\alpha}\lim_{h\to 0}\frac{h^{-1}}{h^{-\alpha-1}}=-\frac{1}{\alpha}\lim_{h\to 0}h^\alpha=0.$$

Значит $\lim\limits_{h\to 0}\overset{\circ}{C}[N]=0$.

Таким образом, с помощью формул (5) и (38) – (41) можно вычислить интеграл со степенно-логарифмическим ядром для любой функции $\varphi(s)$.

Для построения оптимальной квадратурной формулы для интегралов со степенно – логарифмическими ядрами в пространстве $L_2^{(2)}(0,x)$ в формулах приведенной работы [13] заменим $m=2$, верхний предел интегрирования на и весовой функции следующим образом:

$$p(x)=(x-s)^{\alpha-1}\ln\frac{\nu}{x-s},$$

где $0 < \alpha < 1, 0 \leqslant s < x \leqslant 1, \nu > x$. Тогда оптимальная квадратурная формула имеет следующий вид

$$\int_0^x (x-s)^{\alpha-1} \ln \frac{\nu}{x-s} \varphi(s) ds \cong \sum_{\beta=0}^{N} (\overset{\circ}{C}_\beta \varphi_\beta + \overset{\circ}{C'}_\beta \varphi'_\beta), 0 < x \leqslant 1. \tag{41}$$

Здесь $\varphi_\beta = \varphi(s_\beta)$,$\varphi'_\beta = \varphi'(s_\beta)$,$s_\beta$ - узлы сетки, $\overset{\circ}{C}_\beta$, $\overset{\circ}{C'}_\beta$ - оптимальные коэффициенты квадратурной формулы (42), которых необходимо определить. Далее в остальных формулах проводим такие же изменения:

$$g_k = \int_0^x p(s) s^k ds = \int_0^x (x-s)^{\alpha-1} \ln \frac{\nu}{x-s} s^k ds, k = 0, 1.$$

После не сложных операции интегрирования получим

$$g_0 = \frac{x^\alpha}{\alpha} \left(\frac{1}{\alpha} + \ln \frac{\nu}{x} \right), g_1 = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha(\alpha+1)} \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha+1} + \ln \frac{\nu}{x} \right). \tag{42}$$

В следующей формуле также выполним интегрирования и упрощения

$$f_k\beta = \frac{(-1)^k}{2(k+1)!} \int_0^x p(s)(s-h\beta)^{k+1} sign(s-h\beta) ds =$$

$$= \frac{(-1)^k}{2(k+1)!} \int_0^x (x-s)^{\alpha-1} \ln \frac{\nu}{x-s} (s-h\beta)^{k+1} sign(s-h\beta) ds,$$

$$\beta = 0, 1, ..., N, k = 0, 1. \tag{43}$$

Начнем с $k = 0$:

$$f_{0\beta} = \frac{1}{2} int_0^x (x-s)^{\alpha-1} \ln \frac{\nu}{x-s} (s-h\beta) sign(s-h\beta) ds =$$

$$= \frac{1}{2} \left[-\int_0^{h\beta} (s-h\beta)(x-s)^{\alpha-1} \ln \frac{\nu}{x-s} ds + \int_{h\beta}^x (s-h\beta)(x-s)^{\alpha-1} \ln \frac{\nu}{x-s} ds \right].$$

Введем следующую обозначение:

$$I_0 = \int (s-h\beta)(x-s)^{\alpha-1} \ln \frac{\nu}{x-s} ds. \tag{44}$$

Используя формулу интегрирования по частям:

$$u = \ln \frac{\nu}{x-s} = \ln \nu - \ln (x-s), du = \frac{ds}{x-s},$$

$$dv = (s-h\beta)(x-s)^{\alpha-1} ds, v = -\frac{(s-h\beta)(x-s)^\alpha}{\alpha} - \frac{(x-s)^{\alpha+1}}{\alpha(\alpha+1)}.$$

Подставляя эти выражения в формулу

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Интегрируя по частям, имеем

$$I_0 = -\left(\frac{(s-h\beta)(x-s)^{\alpha}}{\alpha} + \frac{(x-s)^{\alpha+1}}{\alpha(\alpha+1)}\right)\ln\frac{\nu}{x-s} +$$

$$+\int\left(\frac{(s-h\beta)(x-s)^{\alpha-1}}{\alpha} + \frac{(x-s)^{\alpha}}{\alpha(\alpha+1)}\right)ds =$$

$$= -\left(\frac{(s-h\beta)(x-s)^{\alpha}}{\alpha} + \frac{(x-s)^{\alpha+1}}{\alpha(\alpha+1)}\right)\ln\frac{\nu}{x-s} - \frac{(x-s)^{\alpha+1}}{\alpha(\alpha+1)^2} +$$

$$+\int\frac{(s-h\beta)(x-s)^{\alpha-1}}{\alpha}ds = -\frac{(x-s)^{\alpha+1}}{\alpha(\alpha+1)}\ln\frac{\nu}{x-s} -$$

$$-\frac{(s-h\beta)(x-s)^{\alpha}}{\alpha}\ln\frac{\nu}{x-s} - \frac{(x-s)^{\alpha+1}}{\alpha(\alpha+1)^2} - \frac{(s-h\beta)(x-s)^{\alpha}}{\alpha^2} - \frac{(x-s)^{\alpha+1}}{\alpha^2(\alpha+1)} =$$

$$= -\frac{(x-s)^{\alpha+1}}{\alpha(\alpha+1)}\left[\ln\frac{\nu}{x-s} + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha+1}\right] - \frac{(s-h\beta)(x-s)^{\alpha}}{\alpha}\left[\ln\frac{\nu}{x-s} + \frac{1}{\alpha}\right].$$

Таким образом

$$I_0 = -\frac{(x-s)^{\alpha+1}}{P_1}\left[\ln\frac{\nu}{x-s} + S_1\right] - \frac{(s-h\beta)(x-s)^{\alpha}}{P_0}\left[\ln\frac{\nu}{x-s} + S_0\right]. \tag{45}$$

Здесь

$$P_0 = \alpha, P_1 = \alpha(\alpha+1), S_0 = \frac{1}{\alpha}, S_1 = \frac{1}{\alpha+1}.$$

Из (3) и (5), имеем

$$f_{0\beta} = \frac{1}{2}\left(-I_0|_{s=h\beta} + I_0|_{s=0} + I_0|_{s=x} - I_0|_{s=h\beta}\right). \tag{46}$$

В (6) не трудно доказать, что $I_0|_{s=x} = 0$. Тогда (5) примет следующий вид

$$f_{0\beta} = \frac{1}{2}\left(-2I_0|_{s=h\beta} + I_0|_{s=0}\right) = \frac{(x-h\beta)^{\alpha+1}}{\alpha(\alpha+1)}\left[\ln\frac{\nu}{x-s)} + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha+1}\right] -$$

$$-\frac{x^{\alpha+1}}{2\alpha(\alpha+1)}\left[\ln\frac{\nu}{x} + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha+1}\right] + \frac{h\beta x^{\alpha}}{2\alpha}\left[\ln\frac{\nu}{x} + \frac{1}{\alpha}\right]. \tag{47}$$

Переходим к вычислению $f_{1\beta}$:

$$f_{1\beta} = -\frac{1}{4}\int_0^x (x-s)^{\alpha-1}\ln\frac{\nu}{x-s}(s-h\beta)^2 sign(s-h\beta)ds =$$

$$= \frac{1}{4}\left(-\int_0^{h\beta} I_1 ds + \int_{h\beta}^x I_1 ds\right). \tag{48}$$

Здесь

$$I_1 = \int (s-h\beta)^2(x-s)^{\alpha-1}\ln\frac{\nu}{x-s}ds. \tag{49}$$

Используя формулу интегрирования по частям:

$$u = \ln\frac{\nu}{x-s}, du = \frac{ds}{x-s}, dv = (s-h\beta)^2(x-s)^{\alpha-1}ds,$$

$$v=\int(s-h\beta)^2(x-s)^{\alpha-1}ds.$$

Для определения v также применим формулу интегрирование по частям:

$$w=(s-h\beta)^2, dw=2(s-h\beta)ds, dq=(x-s)^{\alpha-1}ds, q=-\frac{(x-s)^\alpha}{\alpha}.$$

Тогда

$$v=wq-\int qdw=-\frac{(s-h\beta)^2(x-s)^\alpha}{\alpha}+\int\frac{2(s-h\beta)(x-s)^\alpha}{\alpha}ds=$$

$$=-\frac{(s-h\beta)^2(x-s)^\alpha}{\alpha}-\frac{2(s-h\beta)(x-s)^{\alpha+1}}{\alpha(\alpha+1)}-\frac{2(x-s)^{\alpha+2}}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}.$$

Следовательно, с помощью последнего и (9) для (8) имеем:

$$I_1=-\left[\frac{(s-h\beta)(x-s)^\alpha}{\alpha}+\frac{2(s-h\beta)(x-s)^{\alpha+1}}{\alpha(\alpha+1)}+\frac{2(x-s)^{\alpha+2}}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}\right]\ln\frac{\nu}{x-s}+$$

$$+\int\left[\frac{(s-h\beta)^2(x-s)^{\alpha-1}}{\alpha}+\frac{2(s-h\beta)(x-s)^\alpha}{\alpha(\alpha+1)}+\frac{2(x-s)^{\alpha+1}}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}\right]ds=$$

$$=-\left[\frac{(s-h\beta)^2(x-s)^\alpha}{\alpha}+\frac{2(s-h\beta)(x-s)^{\alpha+1}}{\alpha(\alpha+1)}+\frac{2(x-s)^{\alpha+2}}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}\right]\ln\frac{\nu}{x-s}-$$

$$-\left[\frac{(s-h\beta)^2(x-s)^\alpha}{\alpha^2}+\frac{2(s-h\beta)(x-s)^{\alpha+1}}{\alpha^2(\alpha+1)}+\frac{2(x-s)^{\alpha+2}}{\alpha^2(\alpha+1)(\alpha+2)}\right]-$$

$$-\left[\frac{2(s-h\beta)(x-s)^{\alpha+1}}{\alpha(\alpha+1)^2}+\frac{2(x-s)^{\alpha+2}}{\alpha(\alpha+1)^2(\alpha+2)}\right]-\frac{2(x-s)^{\alpha+2}}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)^2}=$$

$$=-\frac{2(x-s)^{\alpha+2}}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}\left[\ln\frac{\nu}{x-s}+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha+1}+\frac{1}{\alpha+2}\right]-$$

$$-\frac{2(s-h\beta)(x-s)^{\alpha+1}}{\alpha(\alpha+1)}\left[\ln\frac{\nu}{x-s}+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha+1}\right]-$$

$$-\frac{(s-h\beta)^2(x-s)^\alpha}{\alpha}\left[\ln\frac{\nu}{x-s}+\frac{1}{\alpha}\right].$$

Таким образом, для расчета I_1 получили формулу:

$$I_1=-\frac{2(x-s)^{\alpha+2}}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}\left[\ln\frac{\nu}{x-s}+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha+1}+\frac{1}{\alpha+2}\right]-$$

$$-\frac{2(s-h\beta)(x-s)^{\alpha+1}}{\alpha(\alpha+1)}\left[\ln\frac{\nu}{x-s}+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha+1}\right]-$$

$$-\frac{(s-h\beta)^2(x-s)^\alpha}{\alpha}\left[\ln\frac{\nu}{x-s}+\frac{1}{\alpha}\right]. \tag{50}$$

Теперь с помощью (8) и (11) формулами будем вычислять $f_{1\beta}$:

$$f_{1\beta}=-\frac{1}{4}(-I_1|_{s=h\beta}+I_1|_{s=0}+I_1|_{s=x}-I_1|_{s=h\beta}). \tag{51}$$

В (3.33) не трудно доказать, что $I_0|_{s=x} = 0$. Тогда (52) примет следующий вид

$$f_{1\beta} = -\frac{1}{4}(-2I_1|_{s=h\beta} + I_1|_{s=0}) =$$

$$= -\frac{(x-h\beta)^{\alpha+2}}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}\left[\ln\frac{\nu}{x-h\beta} + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\alpha+2}\right] +$$

$$+\frac{x^{\alpha+2}}{2\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}\left[\ln\frac{\nu}{x} + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\alpha+2}\right] -$$

$$-\frac{(h\beta)x^{\alpha+1}}{2\alpha(\alpha+1)}\left[\ln\frac{\nu}{x} + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha+1}\right] + \frac{(h\beta)^2 x^{\alpha}}{4\alpha}\left[\ln\frac{\nu}{x} + \frac{1}{\alpha}\right]. \tag{52}$$

Все проделанные расчеты доказывают правильности утверждений последующей теоремы.

Теорема 1. Оптимальные коэффициенты квадратурной формулы вида (42) в пространстве $L_2^{(2)}(0,x)$ определяются следующими формулами

$$\overset{\circ}{C}[0] = \frac{p_0}{2} + [F_{01} - F_{00}]/h, \overset{\circ}{C}'[0] = \frac{p_1}{2} + [F_{11} - F_{10}]/h,$$

$$\overset{\circ}{C}[\beta] = [F_{0\beta-1} - 2F_{0\beta} + F_{0\beta+1}]/h, \overset{\circ}{C}'[\beta] = [F_{1\beta-1} - 2F_{1\beta} + F_{1\beta+1}]/h,$$
$$\beta = 1, 2, ..., N-1,$$

$$\overset{\circ}{C}[N] = \frac{p_0}{2} + [F_{0N-1} - F_{0N}]/h, \overset{\circ}{C}'[N] = \frac{p_1}{2} + [F_{1N-1} - F_{1N}]/h,$$

Здесь

$$F_{0\beta} = f_{0\beta}, F_{1\beta} = f_{1\beta} - \sum_{\gamma=0}^{N} C_{0\gamma}\frac{(h\beta-h\gamma)^2 sign(h\beta-h\gamma)}{2\cdot 2!}$$

$$f_{0\beta} = \frac{(x-h\beta)^{\alpha+1}}{\alpha(\alpha+1)}\left[\ln\frac{\nu}{x-h\beta} + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha+1}\right] -$$

$$-\frac{x^{\alpha+1}}{2\alpha(\alpha+1)}\left[\ln\frac{\nu}{x} + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha+1}\right] + \frac{h\beta x^{\alpha}}{2\alpha}\left[\ln\frac{\nu}{x} + \frac{1}{\alpha}\right].$$

$$f_{1\beta} = -\frac{(x-h\beta)^{\alpha+2}}{P_2}\left[\ln\frac{\nu}{x-h\beta} + S_2\right] + \sum_{i=0}^{2}\frac{(-h\beta)^i x^{\alpha+2-i}}{2i!P_2 - i}\left[\ln\frac{\nu}{x} + S_2 - i\right],$$

$$\beta = 0, 1, ..., N,$$

$$p_0 = g_0, p_1 = g_1 - \sum_{\gamma=0}^{N} C_{0\gamma},$$

$$P_j = \prod_{i=0}^{j}(\alpha+i), S_j = \sum_{i=0}^{j}\frac{1}{\alpha+i}, j = 0, 1, 2, ...$$

4 Заключение

Таким образом, с помощью формул (54) – (56) определяются оптимальные коэффициенты квадратурной формулы (20). Это квадратурная формула не только для вычисления интегралов ещё применяя её можно решить интегральные уравнения и интегро – дифференциальные уравнения со степенно – логарифмическими ядрами.

Для решения интегральных уравнений необходимо заменит интеграл с помощью оптимальной квадратурной формулой. При этом данная задача сводится к решению линейную систему алгебраических уравнений.

Литература

[1] *Самко С.Г., Килбас О.И., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск, Наука и техника, – 1987. – 688 с.

[2] *Джрбашян М.М.* Обобщенный оператор Римана–Лиувилля и некоторые его применения, Изв. АН СССР. Сер. матем., – 1968. – том 32. – выпуск 5. – С. 1075–1111.

[3] *Тында А.Н., Мойко В.Н.* Аппроксимация решений интегральных уравнений со степенно-логарифмическими особенностями. Информационные технологии в науке и образовании. Сб. статьей. Пенза : Изд-во ПГУ, – 2020. – С. 103–105.

[4] *С.В. Пономарева, О.Н. Пыжкова.* Достаточные условия разрешимости уравнений со степенно – логарифмическими ядрами с действительной степенью логарифма. Труды БГТУ, – 2017. – серия 3. – № 2. – С. 11–14.

[5] *С.В. Пономарева, О.Н. Пыжкова, Л.Д. Яроцкая.* К вопросу о разрешимости уравнений со степенно – логарифмическим ядром на многомерной пирамидальной области. Труды БГТУ, – 2018. – серия 3. – № 2. – С. 10–14.

[6] *А.А. Килбас, С.В. Демьянко.* Достаточные условия разрешимости интегральных уравнений со степенно – логарифмическими ядрами в пространстве интегрируемых функций. Математика и информатика. Изв. НАН Белорусии. Сер. Физ. – мат. Наук, – 2000. – № 3. – С. 64–71.

[7] *Brunner H.* Volterra Integral Equations: An Introduction to Theory and Applications. Cambridge University Press; – 2017. – 383 p.

[8] *S.V. Demyanko* Solution of integral equations with power-logarithmic kernels in the space of continuous functions. Doklady Natsionalnoi Akademii Nauk Balarusi, – 2001.

[9] *Шадиметов Х.М.* Оптимальные решетчатые квадратурные и кубатурные формулы в пространствах Соболева. Ташкент, “Фан ва технологиялар”, – 2019. – 229 с.

[10] *Соболева С.Л.* Введение в теорию кубатурных формул. Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», М., – 1974. – 808 с.

[11] *Соболева С.Л. Васкевич В.Л.* Кубатурные формулы. Новосибирск: Изд- во ИМ СО РАН, – 1996. – 484 с.

[12] *Соболева С.Л.* Коэффициенты оптимальных квадратурных формул. ДАН СССР. – 1977. – Том 235. №1. – С. 34–37.

[13] *Shadimetov Kh.M.* A method of construction of weight optimal quadrature formulas with derivatives in the Sobolev space. Uzbek Mathematical Journal, – 2018. – № 3. – P. 140–146.

Поступила в редакцию 22.08.2024

UDC 51

OPTIMAL APPROXIMATION OF OPERATORS WITH POWER-LOGARITHMIC KERNELS

[1,2*] ***Shadimetov Kh.M.***, [2] ***Usmanov Kh.I.***

[*] kholmatshadimetov@mail.ru

[1] Tashkent State Transport University,

Temiryolchilar street, 1, Tashkent, 100167 Uzbekistan;
[2]V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics AS RUz,
University street, 9, Tashkent, 100174 Uzbekistan.

This paper presents the construction of an optimal quadrature formula in Sobolev space for integrals with power-logarithmic kernels. Formulas are derived for calculating the coefficients of the optimal quadrature formula for the case. In addition, an upper bound for the error of the optimal quadrature formula is given. A conclusion is given on the applicability of this optimal quadrature formula.

Keywords: optimal quadrature formula, coefficients of the quadrature formula, errors of the quadrature formula, with power-logarithmic kernels, absolute error.

Citation: Shadimetov Kh.M., Usmanov Kh.I. 2024. Optimal approximation of operators with power-logarithmic kernels. *Problems of Computational and Applied Mathematics.*4/2(60): 74-89.

ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

№ 4/2(60) 2024

Журнал основан в 2015 году.
Издается 6 раз в год.

Учредитель:
Научно-исследовательский институт развития цифровых технологий и искусственного интеллекта.

Журнал зарегистрирован в Агентстве информации и массовых коммуникаций при Администрации Президента Республики Узбекистан.
Регистрационное свидетельство №0856 от 5 августа 2015 года.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

Адрес редакции:
100125, г. Ташкент, м-в. Буз-2, 17А.
Тел.: +(998) 712-319-253, 712-319-249.
Э-почта: journals@airi.uz.
Веб-сайт: https://journals.airi.uz.

Дизайн и вёрстка:
Шарипов Х.Д.

Отпечатано в типографии НИИ РЦТИИ.
Подписано в печать 09.09.2024 г.
Формат 60x84 1/8. Заказ №6. Тираж 100 экз.

PROBLEMS OF COMPUTATIONAL AND APPLIED MATHEMATICS

No. 4/2(60) 2024

The journal was established in 2015.
6 issues are published per year.

Founder:
Digital Technologies and Artificial Intelligence Development Research Institute.

The journal is registered by Agency of Information and Mass Communications under the Administration of the President of the Republic of Uzbekistan.
The registration certificate No. 0856 of 5 August 2015.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

Address:
100125, Tashkent, Buz-2, 17A.
Tel.: +(998) 712-319-253, 712-319-249.
E-mail: journals@airi.uz.
Web-site: https://journals.airi.uz.

Layout design:
Sharipov Kh.D.

DTAIDRI printing office.
Signed for print 09.09.2024
Format 60x84 1/8. Order No. 6. Printed copies 100.

Содержание

Contents