УДК 519.644

ОПТИМАЛЬНЫЕ КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ИНТЕГРАЛОВ ОТ БЫСТРООСЦИЛЛИРУЮЩИХ ФУНКЦИЙ

^{1,2*} Шадиметов Х.М., ^{2,3} Гуломов О.Х.

*kholmatshadimetov@mail.ru

¹Ташкентский государственный транспортный университет,
100167, Узбекистан, г. Ташкент, ул. Темирийулчилар, дом 1;

²Институт математики им. В.И. Романовского АН РУз,
100174, Узбекистан, г. Ташкент, ул. Университетская, д. 9;

³Национальный исследовательский университет "Ташкентский институт инженеров
ирригации и механизации сельского хозяйства
100000, Узбекистан, Ташкент, ул. Кори Ниязов, 39.

Настоящей работе методом периодизации функций будут построены оптимальные квадратурные формулы типа Эрмита в пространствах где вторые производные суммируемые с квадратами. Для этого используется оптимальные квадратурные формулы в пространствах периодических функций. Кроме того будут получены точные верхние оценки построенных оптимальных квадратурных формул для приближенного вычисления интегралов от быстроосциллирующих функций.

Ключевые слова: пространство Соболева, экстремальная функция, функционал погрешность.

Цитирование: Шадиметов Х.М., Гуломов О.Х. Оптимальные квадратурные формулы для вычисления интегралов от быстроосциллирующих функций // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2024. – № 4/2(60). – С. 56-65.

1 Введение

Рассматриваются методы вычисления интегралов от быстроосциллирующих функций вида

$$I(\omega) = \int_a^b f(x) e^{i\omega x} dx, \quad (1)$$

$$I[f, g] = \int_a^b f(x) e^{i\omega g(x)} dx, \quad (2)$$

$$I(t, \omega) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} J_\nu(\omega t) f(t^2) t^{\nu+1} dx, \quad (3)$$

где $J_\nu(\omega t)$ - функция Бесселя первого рода и порядка (индекса) ν .

$$I(f, k) = \int_a^b w(t) f(t) K(t; x) dt, \quad (4)$$

где (a, b) - интервал на прямой, который может быть конечным или бесконечным, $w(t)$ - заданная весовая функция, а ядро $K(t; x)$ есть функция, зависящие от параметра x и такая, что она сильно осциллирует или имеет особенности на интервале (a, b) или в его близость.

Здесь $f(x) \in F$ (F - некоторой пространство функций), ω - произвольной вещественное число и информация о $f(x)$ задается в N узловых точках из (a, b) .

Необходимость в вычислении таких интегралов возникает при решении многих классов задач вычислительной и прикладной математики, таких как краевые задачи для уравнения в частных производных, автоматическое регулирование цифровая обработка сигналов, моделирование оптических систем и синтезированных голограмм, распознавание образов, в задачах ядерной физики и других.

Для вычисления интеграла $I(\omega)$ могут быть применены многие известные классические правила интегрирования, однако, они дают хорошую точность в случае, если интегрируемая функция является достаточно гладкой и не быстроизменяющейся. Известные классические квадратурные формулы практически могут применяться для вычисления $I(\omega)$ при небольших значения ω . Чтобы построить квадратурные формулы, пригодные при изменении ω в широких пределах, необходимо заранее учесть наличие осциллирующего множителя. Это можно сделать, принимая например, такие множителя за весовые функции. Впервые Файлоном [1] был построен аналог квадратурной формулы Симпсона, который сохраняет равномерную точность, также и при больших ω . Еручиным Н.П. и Соболевым С.Л. [2] предложен метод, который также сохраняет равномерную точность относительно ω . Крыловым В.И. [3] развит метод работы [1]. В [4] при построении квадратурной формулы вычисления коэффициентов Фурье периодической функции была использована сплайн интерполяция для равноотстоящих точек. В работе [5] для вычисления интеграла $I(\omega)$ функция $f(x)$ заменяется интерполяционным многочленом Лагранжа. Численному вычислению интегралов (1.2) посвящено большое количество работ (см. [6, 7, 8], [9], [10], [11, 12, 13, 14], [15, 16, 17, 18] и др.).

В работах Gradimir V. Milovanovic рассматривается вычисления интегралов типа (1.4). В этих работах используя подходящие интегральные представления специальных функций или специальных разработанных квадратурных формул успешно применены для эффективного вычисления сильно осциллирующих интегралов (интегралы типа Фурье, осцилляционные бесселевские интегралы). (см. [19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26]).

Интегралы типа (1.3) появляются в некоторых задачах ядерной физики высоких энергий (см. [27]). Известно, что нередко при решении задач традиционными методами мы не получаем требуемого значения некоторого показателя качества решения, например, решения с заданной точностью или с максимально возможной точностью в таких случаях бывает полезно, а иногда и необходимо построить оптимальные квадратурные формулы в функциональных пространствах.

В работе [28] построены оптимальные квадратурные формулы для быстро осциллирующих интегралов в пространстве Соболева H^1 .

В работах (см. [29], [30], [31], [32], [33], [34], [35], [36], [38], [39], [40]) построены оптимальные квадратурные формулы для приближенного вычисления интегралов от быстроосциллирующих функций в гильбертовых пространствах и пространствах Соболева.

В настоящей работе методом периодизации функций будут построены оптимальные квадратурные формулы с производными для приближенного вычисления интегралов от быстроосциллирующих функций. Она состоит из введения и четырех параграфов. Во введении приводятся обзор работ по построенным квадратурным формулам и методов для вычисления интегралов от быстроосциллирующих функций.

Во втором параграфе приводятся оптимальные квадратурные формулы для вычисления интегралов от быстроосциллирующих функций в пространстве периодических комплекснозначных функций и их оценки погрешностей.

В третьем параграфе приводятся периодизации не периодических функций.

В четвертом параграфе даются основные результаты этой работы. Основные работы приведены в виде двух теорем. Здесь приведены теоремы об оптимальных квадратурных формулах с производными в непериодических пространствах и их оценки погрешностей.

В пятом параграфе приведены доказательства основных теорем.

2 Оптимальные квадратурные формулы для периодических функций

Пусть $\tilde{H}_2^{(m)}(0, 1)$, $m \geq 1$ - гильбертово пространство 1 периодических комплекснозначных функций $\varphi(x)$ ($-\infty \leq x \leq \infty$) отличающихся более чем на константу, m -е производным которых (обобщенном смысле) квадратично интегрируемы, со скалярным произведением и нормой

$$(f, g)_m = \int_0^1 \frac{d^m f(x)}{dx^m} \overline{\frac{d^m g(x)}{dx^m}} dx, \quad (5)$$

$$\|\varphi\|_{\tilde{H}_2^{(m)}} = \left(\int_0^1 \varphi^{(m)}(x) \overline{\varphi^{(m)}(x)} dx \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (6)$$

Здесь обозначение $\overline{g(x)}$ сопряженное к $g(x)$.

Для $\varphi(x) \in \tilde{H}_2^{(m)}(0, 1)$ рассмотрим квадратурную формула вида

$$\int_0^1 \exp(2\pi i \omega x) \varphi(x) dx \cong \sum_{k=1}^N C_k \varphi(x_k), \quad (7)$$

где C_k и x_k соответственно коэффициенты и узлы квадратурной формулы, $N = 2, 3, \dots$, $\omega \in \mathbb{Z}$ ($\mathbb{Z}$ множество целых чисел).

В периодическом случае погрешность квадратурной формулы (7) определяется формулой

$$\begin{aligned} (l, \varphi) &= \int_0^1 \exp(2\pi i \omega x) \varphi(x) dx - \sum_{k=1}^N C_k \varphi(x_k) = \\ &= \int_0^1 \left[\exp(2\pi i \omega x) - \sum_{k=1}^N C_k \delta(x - x_k) * \varphi_0(x) \right] \varphi(x) dx, \end{aligned} \quad (8)$$

здесь $\delta(x)$ - дельта функция Дирака,

$$l(x) = \varepsilon_{[0,1]}(x) \exp(2\pi i \omega x) - \sum_{k=1}^N C_k \delta(x - x_k) * \varphi_0(x). \quad (9)$$

Функционал погрешности, $\varphi_0(x) = \sum_{\beta=-\infty}^{\infty} \delta(x - \beta)$.

Наша задача о построении оптимальной квадратурной формулы для приближенного вычисления интеграла

$$I(\varphi) = \int_0^1 \exp(2\pi i \omega x) \varphi(x) dx,$$

при фиксированном узлов x_k квадратурной формулы (7) заключается в следующем. Требуется найти величину

$$\inf_{C_k} \sup_{\varphi \in \tilde{H}_2^{(m)}} \frac{|(l, \varphi)|}{\|\varphi|_{\tilde{H}_2^{(m)}}\|} = \left\| \overset{\circ}{l} |_{\tilde{H}_2^{(m)}} \right\| = \left\| \overset{\circ}{l} \right\|. \quad (10)$$

Это означает, что найти функцию $\psi_l(x)$ из $\tilde{H}_2^{(m)}(0, 1)$ для которой достигается точная верхняя грань, далее найти коэффициенты $\overset{\circ}{C}_k$ для которых достигается точная нижняя грань в (10). При этом функция $\psi_l(x)$ называется экстремальной функцией квадратурной формулы (2.3). Это означает, что выполняется следующее равенство

$$(l, \psi_l(x)) = \left\| l / \tilde{H}_2^{(m)*} \right\| \left\| \psi_l |_{\tilde{H}_2^{(m)}} \right\|,$$

коэффициенты $\overset{\circ}{C}_k$ называется оптимальными коэффициентами а $\left\| \overset{\circ}{l} \right\|$ нормой функционала погрешности оптимальной квадратурной формулы. Известно, что пространство $\tilde{H}_2^{(m)*}$ будет состоять из всех периодических функционалов, которые ортогональны единице

$$(l, 1) = 0. \quad (11)$$

Для построения оптимальных квадратурных формул с производными в пространстве непериодических функций нам понадобится результаты работы [35]. Там оптимальные коэффициенты $\overset{\circ}{C}_k$ и норма $\left\| \overset{\circ}{l} \right\|$ функционала погрешности оптимальной квадратурной формулы приводятся в пространстве $\tilde{H}_2^{(m)}(0, 2\pi)$. Здесь мы преобразуя эти результаты приводим в пространстве $\tilde{H}_2^{(m)}(0, 1)$.

Пусть $x_k = \frac{k}{N} = kh$, $h = \frac{1}{N}$, $N = 2, 3, \dots$. Справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. Если $\varphi(x) \in \tilde{H}_2^{(m)}(0, 1)$, тогда для оптимальных коэффициентов квадратурной формулы (7) с функционалом погрешности (9) справедливы формулы

$$\overset{\circ}{C}_k(m) = h \left(\frac{\sin \pi \omega h}{\pi \omega h} \right)^{2m} \cdot \frac{(2m-1)! \exp(2\pi i \omega kh)}{2 \sum_{n=0}^{m-2} a_n^{2m-2} \cos 2\pi(m-1-n)\omega h + a_{m-1}^{(2m-2)}}. \quad (12)$$

$$k = 1, 2, \dots, N.$$

В этой формулы $a_n^{(2m-2)}$ коэффициенты многочлена Эйлера $E_{2m-2}(x)$ степени $2m-2$, т.е.

$$a_n^{2m-2} = \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{2m}{j} (n+1-j)^{2m-1}, \quad \binom{2m}{j} = \frac{(2m)!}{(2m-j)!j!}.$$

Теорема 2. В пространстве $\tilde{H}_2^{(m)}$ для квадрата нормы функционала погрешности $l(x)$ оптимальной квадратурной формулы справедлива следующая формула

$$\begin{aligned} & \left\| \overset{\circ}{l} |_{\tilde{H}_2^{(m)*}} \right\|^2 = \\ & = \frac{1}{\omega^{2m}} \left[1 - \left(\frac{\sin \pi \omega h}{\pi \omega h} \right)^{2m} \frac{(2m-1)!}{2 \sum_{n=0}^{m-2} a_n^{2m-2} \cos 2\pi(m-1-n)\omega h + a_{m-1}^{(2m-2)}} \right]. \end{aligned} \quad (13)$$

Замечание 1. При $\omega = 0$ получаем известную оптимальную квадратур формулу

$$\int_0^1 \varphi(x) dx = h \sum_{k=1}^N \varphi(kh).$$

При этом

$$\left\| \overset{\circ}{l} / \tilde{H}_2^{(m)*} \right\|^2 = \frac{h^{2m} |B_{2m}|}{(2m)!},$$

B_{2m} - число Бернулли.

Замечание 2. Если $\omega = nN$, $n = 1, 2, \dots$, тогда $\overset{\circ}{C}_k(m) = 0$, $k = 1, 2, \dots, N$.

3 Периодизация функций из пространства $H_2^{(m)}(0, 1)$

В этом разделе мы будем заниматься периодизацией функции $f(x)$ из пространства $H_2^{(m)}(0, 1)$.

Пусть пространства $H_2^{(m)}(0, 1)$ - классов комплекснозначных функций, обладающих обобщенными производными порядком m с интегрируемым квадратом скалярным произведением и нормой

$$(\varphi, f) = \int_0^1 (\varphi^{(m)} + \varphi^{(m-1)}(0) - \varphi^{(m-1)}(1)) (\bar{f}^{(m)} + \bar{f}^{(m-1)}(0) - \bar{f}^{(m-1)}(1)) dx, \quad (14)$$

$$\begin{aligned} & \left\| f \Big|_{H_2^{(m)}} \right\| = \\ & = \left(\int_0^1 (f^{(m)} + f^{(m-1)}(0) - f^{(m-1)}(1)) (\bar{f}^{(m)} + \bar{f}^{(m-1)}(0) - \bar{f}^{(m-1)}(1)) dx \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (15)$$

Определения. Пусть $f(x) \in H_2^{(m)}(0, 1)$, при $m \geq 1$. Периодизацией функции $f(x)$ будем называть нахождение функции $\varphi(x) \in H_2^{(m)}(0, 1)$ удовлетворяющей условиям

$$\varphi^{(\alpha)}(1) = \varphi^{(\alpha)}(0) \quad \alpha = 0, 1, \dots, m-1, \quad (16)$$

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \varphi(x) dx. \quad (17)$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 3. Пусть $f(x) \in H_2^{(m)}(0, 1)$, тогда следующая функция

$$\varphi(x) = f(x) + \sum_{n=0}^{m-1} \frac{B_{n+1}(x)}{(n+1)!} (f^{(n)}(0) - f^{(n)}(1)). \quad (18)$$

является периодической функцией в пространстве $H_2^{(m)}(0, 1)$, т.е. элементом пространства $\tilde{H}_2^{(m)}(0, 1)$.

Доказательство этой теоремы сразу следует из работ [36].

В следующем пункте мы приводим основные результаты этой работе т.е. оптимальные квадратурные формулы с производными в пространствах $H_2^{(2)}(0, 1)$, $H_2^{(3)}(0, 1)$ и нормы функционал погрешностей построенных оптимальных квадратурных формул.

4 Основные результаты

В этом разделе мы приводим оптимальные квадратурные формулы и нормы функционала погрешностей построенных оптимальных квадратурных формул.

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 4. Пусть $f(x) \in H_2^{(2)}(0, 1)$, тогда следующая квадратурная формула

$$\int_0^1 e^{2\pi i \omega x} f(x) dx \cong \sum_{k=0}^N \overset{\circ}{C}_k(2) f(kh) + \mu (f'(1) - f'(0)), \quad (19)$$

функционалом погрешности

$$l_2(x) = \varepsilon_{[0,1]} e^{2\pi i \omega x} - \sum_{k=1}^N \overset{\circ}{C}_k(2) \delta(x - kh) - \mu (\delta'(x - 1) - \delta'(x)),$$

является оптимальной, где

$$\overset{\circ}{C}_k(2) = \begin{cases} -A & \text{?@8 } k = 0, \\ \overset{\circ}{C}_k(2) & \text{?@8 } 1 \leq k \leq N - 1, \\ \overset{\circ}{C}_N(2) + A & \text{?@8 } k = N, \end{cases} \quad (20)$$

$$A = \frac{1}{2\pi i \omega} - d(\omega, N, 2) \frac{e^{2\pi i \omega h}}{e^{2\pi i \omega h} - 1},$$

$$\mu = \frac{1}{(2\pi i \omega)^2} - hd(\omega, N, 2) \frac{e^{2\pi i \omega h}}{(1 - e^{2\pi i \omega h})^2}.$$

Здесь $\overset{\circ}{C}_k(2)$, $k = 1, 2, \dots, N$ определяется из формулы (2.8) при $m = 2$, т.е.

$$\overset{\circ}{C}_k(2) = d(\omega, N, 2) e^{2\pi i \omega kh}, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (21)$$

$$d(\omega, N, 2) = \left(\frac{\sin \pi \omega h}{\pi \omega h} \right)^4 \cdot \frac{3h}{\cos 2\pi \omega h + 2}, \quad h = \frac{1}{N}, \quad N = 2, 3, \dots \quad (22)$$

Теорема 5. Для квадрата нормы функционала погрешности $l_2(x)$ оптимальной квадратурной формулы справедлива следующая формула

$$\left\| \overset{\circ}{l}_2 |H_2^{(2)*} \right\|^2 = \frac{1}{\omega^4} \left[1 - \left(\frac{\sin \pi \omega h}{\pi \omega h} \right)^4 \frac{3}{\cos 2\pi \omega h + 2} \right]. \quad (23)$$

Известно, что для произвольной функции из $H_2^{(2)}(0, 1)$, т.е. если $f(x) \in H_2^{(2)}(0, 1)$, тогда погрешность формулы (4.1) оценивается сверху равенством

$$|(l_2, f)| \leq \left\| \overset{\circ}{l}_2 |H_2^{(2)*}(0, 1) \right\| \left\| f |H_2^{(2)} \right\|. \quad (24)$$

5. Доказательство теоремы. В этом пункте мы приводим доказательств теорем 4, 5.

Доказательство теоремы 4. Для этого мы будем пользоваться результатами теорем 1 и 3. В силу теоремы 3 следующая функция

$$\varphi(x) = f(x) + \left(x - \frac{1}{2}\right) [f(0) - f(1)] + \frac{1}{2} \left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right) [f'(0) - f'(1)], \quad (25)$$

является элементом $\tilde{H}_2^{(2)}(0, 1)$, т.е. $\varphi(x) \in \tilde{H}_2^{(2)}(0, 1)$, $f(x) \in H_2^{(2)}(0, 1)$, тогда по теореме 1 следующая квадратурная формула является оптимальной

$$\int_0^1 e^{2\pi i \omega x} \varphi(x) dx \cong \sum_{k=1}^N \overset{\circ}{C}_k(2) \varphi(kh) \quad (26)$$

Здесь $\varphi(x) \in \tilde{H}_2^{(2)}(0, 1)$ и оптимальные коэффициенты $\overset{\circ}{C}_k(2)$ квадратурной формулы (26) определяются формулами (21) и (22).

Пользуясь формулой (25) получим

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{2\pi i \omega x} \varphi(x) dx &= \int_0^1 e^{2\pi i \omega x} \left(f(x) + \left(x - \frac{1}{2}\right) (f(0) - f(1)) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right) \cdot (f'(0) - f'(1)) \right) dx = \\ &= \int_0^1 e^{2\pi i \omega x} f(x) dx + (f(0) - f(1)) \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right) e^{2\pi i \omega x} dx + \\ &\quad + \frac{1}{2} (f'(0) - f'(1)) \int_0^1 \left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right) e^{2\pi i \omega x} dx. \end{aligned} \quad (27)$$

Вычисляя второй и третий интегралы в правой части (27) имеем

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{2\pi i \omega x} \varphi(x) dx &= \int_0^1 e^{2\pi i \omega x} f(x) dx + \frac{1}{2\pi i \omega} (f(0) - f(1)) - \\ &\quad - \frac{1}{(2\pi i \omega)^2} (f'(0) - f'(1)). \end{aligned} \quad (28)$$

В силу (25) квадратурную сумму в (26) напомним в виде

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N \overset{\circ}{C}_k(2) \varphi(kh) &= \sum_{k=1}^N \overset{\circ}{C}_k(2) \left[f(kh) + \left(kh - \frac{1}{2}\right) (f(0) - f(1)) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \left((kh)^2 - kh + \frac{1}{6}\right) (f'(0) - f'(1)) \right] = \sum_{k=1}^N \overset{\circ}{C}_k(2) f(kh) + \\ &+ (f(0) - f(1) - f'(0) + f'(1)) \sum_{k=1}^N (kh) \overset{\circ}{C}_k(2) + \frac{1}{2} (f'(0) - f'(1)) \cdot \\ &\quad \cdot \sum_{k=1}^N (kh) \overset{\circ}{C}_k(2) + \frac{1}{2} (f'(0) - f'(1)) \sum_{k=1}^N (kh)^2 \overset{\circ}{C}_k(2) + \\ &\quad + \left(\frac{1}{12} f'(0) - \frac{1}{12} f'(1) - \frac{1}{2} f(0) + \frac{1}{2} f(1) \right) \sum_{k=1}^N \overset{\circ}{C}_k(2). \end{aligned} \quad (29)$$

Справедлива следующая формула [37]

$$\sum_{\gamma=0}^{n-1} q^\gamma \gamma^k = \frac{1}{1-q} \sum_{i=0}^k \left(\frac{q}{1-q} \right)^i \Delta^i o^k - \frac{q^n}{1-q} \sum_{i=0}^k \left(\frac{q}{1-q} \right)^i \Delta^i \gamma^k |_{\gamma=n}, \quad (30)$$

где $\Delta^i \gamma^k$ - конечная разность порядка i от γ^k , $\Delta^i o^k = \Delta^i \gamma^k|_{\gamma=0}$ и

$$\Delta^i o^k = \sum_{j=1}^i (-1)^{i-j} C_i^j j^k, \quad (31)$$

$$Delta^\alpha x^\nu = \sum_{p=0}^{\nu} \binom{\nu}{p} \Delta^\alpha o^p x^{\nu-p}. \quad (32)$$

Теперь обозначим через $S_0 = \sum_{k=1}^N \overset{o}{C}_k$, $S_1 = \sum_{k=1}^N (hk) \overset{o}{C}_k$, $S_2 = \sum_{k=1}^N (hk)^2 \overset{o}{C}_k$.
Учитывая формулы (21) имеем

$$S_0 = d(w, N, 2) \sum_{k=1}^N e^{2\pi i \omega k h},$$

$$S_1 = d(w, N, 2) \sum_{k=1}^N (kh) e^{2\pi i \omega k h},$$

$$S_2 = d(w, N, 2) \sum_{k=1}^N (kh)^2 e^{2\pi i \omega k h}.$$

Учитывая что $\omega \in \mathbb{Z}$, $h = \frac{1}{N}$ и обозначив через $q = e^{2\pi i \omega h}$ затем пользуясь формулой (30) при $k = 0, 1, 2$, после некоторых упрощений получаем

$$S_0 = 0, \quad (33)$$

$$S_1 = d(\omega, N, 2) \frac{e^{2\pi i \omega h}}{e^{2\pi i \omega h} - 1}, \quad (34)$$

$$S_2 = d(\omega, N, 2) \left[\frac{-2he^{2\pi i \omega h}}{(1 - e^{2\pi i \omega h})^2} - \frac{e^{2\pi i \omega h}}{1 - e^{2\pi i \omega h}} \right]. \quad (35)$$

Подставляя найденные выражения S_0, S_1, S_2 по формулы (33), (34), (35) в равенстве (29) получаем

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N \overset{o}{C}_k(2) \varphi(kh) &= \sum_{k=1}^N \overset{o}{C}_k(2) f(kh) + (f(0) - f(1)) d(w, N, 2) \frac{e^{2\pi i \omega h}}{e^{2\pi i \omega h} - 1} - \\ &- (f'(0) - f'(1)) \frac{hd(\omega, N, 2) e^{2\pi i \omega h}}{(1 - e^{2\pi i \omega h})^2}. \end{aligned} \quad (36)$$

Учитывая (28) и (36), после некоторых упрощений погрешность оптимальной квадратурной формулы (26) можно написать в виде

$$\begin{aligned} R &= \int_0^1 e^{2\pi i \omega x} \varphi(x) dx - \sum_{k=1}^N \overset{o}{C}_k(2) \varphi(kh) = \int_0^1 e^{2\pi i \omega x} f(x) dx - \sum_{k=1}^N \overset{o}{C}_k(2) f(kh) - \\ &- (f'(0) - f'(1)) \left(\frac{1}{(2\pi i \omega)^2} - \frac{hd(\omega, N, 2) e^{2\pi i \omega h}}{(1 - e^{2\pi i \omega h})^2} \right). \end{aligned} \quad (37)$$

Здесь

$$\overset{o}{C}_k(2) = \begin{cases} \overset{o}{C}_N(2) + A & k = N, \\ \overset{o}{C}_k(2) & 1 \leq k \leq N - 1, \\ -A & k = 0, \end{cases}$$

где $A = \frac{1}{2\pi i \omega} - d(\omega, N, 2) \frac{e^{2\pi i \omega h}}{e^{2\pi i \omega h} - 1}$, $\overset{o}{C}_k(2)$ - оптимальные коэффициенты квадратурной формулы в пространстве $\tilde{H}_2^{(2)}(0, 1)$.

Из равенство (37) следует, что следующая квадратурная формула является оптимальной квадратурной формулой в пространстве неперiodических функций $H_2^{(2)}(0, 1)$

$$\int_0^1 e^{2\pi i \omega x} f(x) dx \cong \sum_{k=0}^N \overset{o}{C}_k(2) f(kh) + \left(\frac{1}{(2\pi i \omega)^2} - \frac{hd(\omega, N, 2)e^{2\pi i \omega h}}{(1 - e^{2\pi i \omega h})^2} \right) (f'(0) - f'(1)).$$

Теорема 4 доказано.

Доказательство теоремы 5. Доказательство теоремы 5 следует из равенство (37). Действительно, так как левая часть равенство (37) есть погрешность оптимальной квадратурной формулы в $\tilde{H}_2^{(2)}(0, 1)$, тогда в силу теоремы 2 при $m = 2$ следует справедливость теоремы 5.

5 Заключение

В данной работе методом периодизации функций построены оптимальные квадратурные формулы с производными, т.е. квадратурные формулы типа Эрмита для приближенного вычисления быстроосциллирующих интегралов в пространстве дифференцируемых функций. Для построения этих формул мы использовали метод периодизации функций и оптимальные квадратурные формулы для быстроосциллирующих интегралов в пространстве периодических функций. Кроме того мы нашли точную верхнюю оценку построенных оптимальных квадратурных формул.

Литература

- [1] *Dahlquists G.* Convergence and stability in the numerical integration of ordinary differential equations. -Math. Scand., - 1956. - v.4. - P. 33-52.
- [2] *Dahlquists G.* Stability and error bounds in the numerical integration of ordinary differential equations. - Trans. Roy. Inst. Technol. Stockholm, - 1959.
- [3] *Бабушка И., Витасек Э., Прагер М.* Численные процессы решения дифференциальных уравнений. - Мир, Москва, - 1969. - 369 p.
- [4] *Соболев С.Л.* Введение а теорию кубатурных формул. : - Наука, Москва, - 1974. - 808 с
- [5] *Шадиметов Х.М., Мирзакабилов Р.Н.* Задача о построении разностных формул. Проблемы вычислительной и прикладной математики, - Ташкент, - 2018. - № 5 (17). - С. 95-101.
- [6] *Shadimetov Kh.M., Mirzakabilov R.N.* On a construction method of optimal difference formulas. AIP Conference Proceedings, 2365, 020032, - 2021.
- [7] *Шадиметов Х.М., Мирзакабилов Р.Н.* Оптимизация разностных методов в фактор пространстве Соболева. Проблемы вычислительной и прикладной математики, - Ташкент, - 2021. - № 5. - С. 137-152.

- [8] *Шадиметов Х.М., Мурзакабиров Р.Н.* Оптимальные разностные формулы в пространстве Соболева. Современная математика. Фундаментальные направления, – том.8, – №1. – 2022. – С. 167–177.
- [9] *Hayotov A.R., Karimov R.S.* Optimal difference formula in the Hilbert space $W_2^{(2,1)}(0,1)$. Problems of Computational and Applied Mathematics, - Tashkent, – 5(35). – 2021. – P. 129–136.
- [10] *Hayotov A.R., Bozarov B.I.* Optimal quadrature formula with cosine weight function. Problems of Computational and Applied Mathematics, Tashkent, – 4(34)., – 2021. – P. 106–118.
- [11] *Akhmedov D.M., Atamuradova B.M.* Construction of optimal quadrature formulas for Cauchy type singular integrals in the $W_2^{(1,0)}(0,1)$ space, Uzbek mathematical Journal, – 2022. – Vol.66. – Issue 2. – P. 5–9. DOI: 10.29229/uzmj.2022-2-1

Поступила в редакцию 22.08.2024

UDC 519.644

OPTIMAL QUADRATURE FORMULAS FOR CALCULATING INTEGRALS OF RAPIDLY OSCILLATING FUNCTIONS

^{1,2*} *Shadimetov Kh.M.*, ^{2,3} *Gulomov O.Kh.*

*kholmatshadimetov@mail.ru

¹Tashkent State Transport University,

Temiryolchilar street, 1, Tashkent, 100167 Uzbekistan;

²V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics,

9, University str., Tashkent, 100174 Uzbekistan;

³National Research University "Tashkent Institute of Irrigation and Agricultural Mechanization Engineers"

39, Kari Niaziy str., Tashkent, 100000 Uzbekistan.

In this work, using the method of periodization of functions, optimal quadrature formulas of Hermite type will be constructed in spaces where the second derivatives are summable with squares. For this purpose, optimal quadrature formulas are used in spaces of periodic functions. In addition, exact upper bounds will be obtained for the constructed optimal quadrature formulas for the approximate calculation of integrals of rapidly oscillating functions.

Keywords: Sobolev space, extremal function, error functional.

Citation: Shadimetov Kh.M., Gulomov O.Kh. 2024. Optimal quadrature formulas for calculating integrals of rapidly oscillating functions. *Problems of Computational and Applied Mathematics*.4/2(60): 56-65.

ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

№ 4/2(60) 2024

Журнал основан в 2015 году.

Издается 6 раз в год.

Учредитель:

Научно-исследовательский институт развития цифровых технологий и
искусственного интеллекта.

Главный редактор:

Равшанов Н.

Заместители главного редактора:

Азамов А.А., Арипов М.М., Шадиметов Х.М.

Ответственный секретарь:

Ахмедов Д.Д.

Редакционный совет:

Азамова Н.А., Алоев Р.Д., Амиргалиев Е.Н. (Казахстан), Бурнашев В.Ф.,
Загребина С.А. (Россия), Задорин А.И. (Россия), Игнатъев Н.А.,
Ильин В.П. (Россия), Исмагилов И.И. (Россия), Кабанихин С.И. (Россия),
Карачик В.В. (Россия), Курбонов Н.М., Маматов Н.С., Мирзаев Н.М.,
Мирзаева Г.Р., Мухамадиев А.Ш., Назирова Э.Ш., Нормуродов Ч.Б.,
Нуралиев Ф.М., Опанасенко В.Н. (Украина), Расулмухамедов М.М., Расулов А.С.,
Садуллаева Ш.А., Старовойтов В.В. (Беларусь), Хаётов А.Р., Халджигитов А.,
Хамдамов Р.Х., Хужаев И.К., Хужаеров Б.Х., Чье Ен Ун (Россия),
Шабозов М.Ш. (Таджикистан), Dimov I. (Болгария), Li Y. (США),
Mascagni M. (США), Min A. (Германия), Schaumburg H. (Германия),
Singh D. (Южная Корея), Singh M. (Южная Корея).

Журнал зарегистрирован в Агентстве информации и массовых коммуникаций при
Администрации Президента Республики Узбекистан.

Регистрационное свидетельство №0856 от 5 августа 2015 года.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

При перепечатке материалов ссылка на журнал обязательна.

За точность фактов и достоверность информации ответственность несут авторы.

Адрес редакции:

100125, г. Ташкент, м-в. Буз-2, 17А.

Тел.: +(998) 712-319-253, 712-319-249.

Э-почта: journals@airi.uz.

Веб-сайт: <https://journals.airi.uz>.

Дизайн и вёрстка:

Шарипов Х.Д.

Отпечатано в типографии НИИ РЦТТИИ.

Подписано в печать 09.09.2024 г.

Формат 60x84 1/8. Заказ №6. Тираж 100 экз.

PROBLEMS OF COMPUTATIONAL AND APPLIED MATHEMATICS

No. 4/2(60) 2024

The journal was established in 2015.
6 issues are published per year.

Founder:

Digital Technologies and Artificial Intelligence Development Research Institute.

Editor-in-Chief:

Ravshanov N.

Deputy Editors:

Azamov A.A., Aripov M.M., Shadimetov Kh.M.

Executive Secretary:

Akhmedov D.D.

Editorial Council:

Azamova N.A., Alov R.D., Amirgaliev E.N. (Kazakhstan), Burnashev V.F.,
Zagrebina S.A. (Russia), Zadorin A.I. (Russia), Ignatiev N.A., Ilyin V.P. (Russia),
Ismagilov I.I. (Russia), Kabanikhin S.I. (Russia), Karachik V.V. (Russia), Kurbonov
N.M., Mamatov N.S., Mirzaev N.M., Mirzaeva G.R., Mukhamadiev A.Sh., Nazirova
E.Sh., Normurodov Ch.B., Nuraliev F.M., Opanasenko V.N. (Ukraine), Rasulov A.S.,
Sadullaeva Sh.A., Starovoitov V.V. (Belarus), Khayotov A.R., Khaldjigitov A.,
Khamdamov R.Kh., Khujaev I.K., Khujayorov B.Kh., Chye En Un (Russia),
Shabozov M.Sh. (Tajikistan), Dimov I. (Bulgaria), Li Y. (USA), Mascagni M. (USA),
Min A. (Germany), Schaumburg H. (Germany), Singh D. (South Korea),
Singh M. (South Korea).

The journal is registered by Agency of Information and Mass Communications under the
Administration of the President of the Republic of Uzbekistan.

The registration certificate No. 0856 of 5 August 2015.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

At a reprint of materials the reference to the journal is obligatory.

Authors are responsible for the accuracy of the facts and reliability of the information.

Address:

100125, Tashkent, Buz-2, 17A.

Tel.: +(998) 712-319-253, 712-319-249.

E-mail: journals@airi.uz.

Web-site: <https://journals.airi.uz>.

Layout design:

Sharipov Kh.D.

DTAIDRI printing office.

Signed for print 09.09.2024

Format 60x84 1/8. Order No. 6. Printed copies 100.

Содержание

<i>Шадиметов Х.М., Жабборов Х.Х.</i> Оптимальная квадратурная формула для приближенного вычисления сингулярных интегралов с ядром Гильберта	5
<i>Исматуллаев Г.П., Бахромов С.А., Мирзакабилов Р.Н.</i> Построение кубатурной формулы пятой степени точности, содержащей значения частных производных	15
<i>Ахмедов Д.М., Авезов А.Х., Хажимова И.К.</i> Оптимальные квадратурные формулы для гиперсингулярных интегралов в пространстве Соболева	24
<i>Болтаев А.К.</i> Об одной модификации метода Соболева для приближения функции	33
<i>Ахмадалиев Г.Н.</i> Точная верхняя оценка погрешности квадратурных формул в гильбертовом пространстве $K_{2,\omega}^{(m)}$	45
<i>Шадиметов Х.М., Гуломов О.Х.</i> Оптимальные квадратурные формулы для вычисления интегралов от быстроосциллирующих функций	56
<i>Нуралиев Ф.А., Кузиев Ш.С., Джураева К.А.</i> Приближенное решение интегрального уравнения Фредгольма второго рода методом оптимальных квадратур	66
<i>Шадиметов Х.М., Усманов Х.И.</i> Оптимальная аппроксимация операторов со степенно-логарифмическими ядрами	74
<i>Хаётов А.Р., Нафасова А.Ю., Бердимуратова У.А.</i> Оптимальные интерполяционные формулы с производной в пространстве $W_2^{(2,1)}(0,1)$	90
<i>Бабаев С.С.</i> Весовая оптимальная квадратурная формула с производными в гильбертовом пространстве	99
<i>Абдураходов А.А.</i> Оптимальная аппроксимация интегралов Фурье методом фи-функций	108
<i>Шадиметов Х.М., Усманов Х.И.</i> Сравнение результатов приближенного решения линейных интегральных уравнений Фредгольма второго рода различными методами	118
<i>Юсупов М.</i> Исследование нелинейной вязкоупругой виброзащитной системы	134

Contents

<i>Shadimetov Kh.M., Jabborov Kh.Kh.</i>	
Optimal quadrature formula for approximate calculation of singular integrals with Hilbert kernel	5
<i>Ismatullaev G.P., Bakhromov S.A., Mirzakabilov R.N.</i>	
Construction of a cubature formula of the fifth degree of accuracy containing the values of partial derivatives	15
<i>Akhmedov D.M., Avezov A.Kh., Hakimova I.K.</i>	
Optimal quadrature formulas for hypersingular integrals in the Sobolev space . .	24
<i>Boltaev A.K.</i>	
On one modification of the Sobolev method for approximating a function	33
<i>Akhmadaliev G.N.</i>	
A sharp upper bound for the error of quadrature formulas in Hilbert space $K_{2,\omega}^{(m)}$	45
<i>Shadimetov Kh.M., Gulomov O.Kh.</i>	
Optimal quadrature formulas for calculating integrals of rapidly oscillating functions	56
<i>Nuraliev F.A., Kuziev Sh.S., Djuraeva K.A.</i>	
Approximate solution Fredholm integral equation of the second kind by the optimal quadrature method	66
<i>Shadimetov Kh.M., Usmanov Kh.I.</i>	
Optimal approximation of operators with power-logarithmic kernels	74
<i>Hayotov A.R., Nafasov A.Y., Berdimuradova U.A.</i>	
An optimal interpolation formulas with derivative in the space $W_2^{(2,1)}$	90
<i>Babaev S.S.</i>	
The weighted optimal quadrature formula with derivatives in the Hilbert space .	99
<i>Abduakhadov A.A.</i>	
Optimal approximation of Fourier integrals by the phi-function method	108
<i>Shadimetov Kh.M., Usmanov Kh.I.</i>	
Comparison of the results of the approximate solution of linear Fredholm integral equations of the second kind by various methods	118
<i>Yusupov M.</i>	
Study of nonlinear viscoelastic vibration protection system	134