

УДК 519.644

ТОЧНАЯ ВЕРХНЯЯ ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ $K_{2,\omega}^{(M)}$

Ахмадалиев Г.Н.

ahmadaliyev78@mail.ru

Ташкентский государственный транспортный университет,
100167, Узбекистан, г. Ташкент, ул.Темирийулчилар, дом 1.

Одной из основных проблем вычислительной математики является оптимизация вычислительных методов в функциональных пространствах. Оптимизация вычислительных методов хорошо проявила себя в задачах теории квадратурных формул. В этой статье изучается задача построения оптимальной квадратурной формулы в гильбертовом пространстве. В статье рассмотрена задача нахождения точной верхней оценки погрешности квадратурных формул в гильбертовом пространстве $K_{2,\omega}^{(m)}$ найден.

Ключевые слова: квадратурные формулы, функционал погрешности, точная верхняя оценка погрешности, Гильбертово пространство, оптимальные коэффициенты.

Цитирование: Ахмадалиев Г.Н. Точная верхняя оценка погрешности квадратурных формул в гильбертовом пространстве $K_{2,\omega}^{(m)}$ // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2024. – № 4/2(60). – С. 45-55.

1 Введение

Известно, что формулы численного интегрирования или квадратурные и кубатурные формулы являются методами приближенного вычисления определенных интегралов. Они нужны для вычисления тех интегралов, для которых либо первообразная подынтегральной функции не может быть выражена через элементарные функции, либо для которых подынтегральная функция имеется только в дискретных точках, например из экспериментальных данных. Кроме того, что ещё более важно, квадратурные формулы обеспечивают важный инструмент для численного решения дифференциальных и интегральных уравнений.

В теории квадратур существуют различные методы, позволяющие приближенно вычислять интегралы с помощью конечного числа значений подынтегральной функции. В настоящей работе также обсуждается один из методов численного интегрирования и вычисляется оценка погрешности одной оптимальной квадратурной формулы для приближенного вычисления определенных интегралов. В связи с этим рассмотрим следующую квадратурную формулу

$$\int_0^1 \varphi(x) dx \cong \sum_{\beta=0}^N C_{\beta} \varphi(h\beta) \quad (1)$$

с функционалом погрешности

$$\ell(x) = \chi_{[0,1]}(x) - \sum_{\beta=0}^N C_{\beta} \delta(x - h\beta), \quad (2)$$

где C_β и $x_\beta = h\beta \in [0, 1]$ коэффициенты и узлы формулы (1) соответственно, $h = \frac{1}{N}$, N — натуральное, $\chi_{[0,1]}(x)$ — характеристическая функция отрезка $[0, 1]$ и $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака.

Пусть функция φ принадлежит классу функций $K_{2,\omega}^{(m)}$. Здесь $K_{2,\omega}^{(m)}$ это гильбертово пространство, которое определено аналогично как в [1]

$$K_{2,\omega}^{(m)} = \{\varphi : [0, 1] \rightarrow R \mid \varphi^{(m-1)} \text{ — абс. непр. и } \varphi^{(m)} \in L_2(0, 1)\},$$

и норма функций в этом пространстве задается формулой

$$\|\varphi\|_{K_{2,\omega}^{(m)}} = \left\{ \int_0^1 (\varphi^{(m)}(x) - \omega^2 \varphi^{(m-2)}(x))^2 dx \right\}^{1/2},$$

при этом $\int_0^1 (\varphi^{(m)}(x) - \omega^2 \varphi^{(m-2)}(x))^2 dx < \infty$ и $\|\varphi\|_{K_{2,\omega}^{(m)}} = 0$ тогда и только тогда, когда $\varphi(x) = c_1 \sinh(\omega x) + c_2 \cosh(\omega x) + R_{m-3}(x)$, где c_1, c_2 постоянные и $R_{m-3}(x)$ полином степени $m-3$, $\omega \in R \setminus \{0\}$, $m \geq 2$.

Разность

$$(\ell, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \ell(x) \varphi(x) dx = \int_0^1 \varphi(x) dx - \sum_{\beta=0}^N C_\beta \varphi(h\beta) \quad (3)$$

называется *погрешностью* квадратурной формулы (1).

На основании неравенства Коши-Шварца

$$|(\ell, \varphi)| \leq \|\ell\|_{K_{2,\omega}^{(m)*}} \cdot \|\varphi\|_{K_{2,\omega}^{(m)}}$$

абсолютное значение погрешности (3) оценивается нормой

$$\|\ell\|_{K_{2,\omega}^{(m)*}} = \sup_{\|\varphi\|_{K_{2,\omega}^{(m)}}=1} |(\ell, \varphi)| \quad (4)$$

функционала погрешности (2).

Очевидно, что норма (4) функционала погрешности (2) зависит от коэффициентов C_β и узлов x_β квадратурной формулы (1). Задача нахождения минимума нормы функционала погрешности по коэффициентам и по узлам получила название задачи С.М.Никольского, а полученная формула называется *оптимальной квадратурной формулой в смысле Никольского*. Впервые эта задача была рассмотрена С.М.Никольским [2]. Достаточно полный обзор работ по оптимальным квадратурным формулам в смысле Никольского можно посмотреть, в книге С.М.Никольского [3].

Минимизация нормы (4) функционала погрешности (2) по коэффициентам C_β при фиксированных узлах x_β называется задачей Сарда, а полученная формула — *оптимальной квадратурной формулой в смысле Сарда*. А для квадратурных формул вида (1), когда пределы интеграла равны $[0, N]$ в пространстве $L_2^{(m)}$, впервые эту задачу исследовал А. Сард [4], где $L_2^{(m)}$ — пространство Соболева функций, интегрируемых с квадратом m -й обобщенной производной. А.Сард и Л.Ф.Мейерс [5] получили решения этой задачи при $m = 2$ для $N \leq 20$, когда $m = 3$ для $N \leq 12$ и когда $m = 4$ для $N \leq 19$. В работах Дж.Комана [6, 7] проблема Сарда изучалась в случае $m = 2$ для произвольного N . В этих работах Дж.Коман получил рекурсивную формулу для нахождения оптимальных коэффициентов квадратурных формул вида (1) в случае $m = 2$.

Чтобы найти максимально возможную погрешность квадратурной формулы над пространством $K_{2,\omega}^{(m)}$, то надо решить следующую задачу.

Задача 1. Найти норму функционала погрешности (2) рассматриваемой квадратурной формулы (1) в пространстве $K_{2,\omega}^{(m)}$.

Чтобы получить квадратурную формулу в пространстве $K_{2,\omega}^{(m)}$, то надо исследовать задачу.

Задача 2. Найти коэффициенты $\overset{\circ}{C}_\beta$ дающие наименьшее значение величине $\|\ell|K_{2,\omega}^{(m)*}\|$ и вычислить $\|\overset{\circ}{\ell}|K_{2,\omega}^{(m)*}\| = \inf_{C_\beta} \|\ell|K_{2,\omega}^{(m)*}\|$.

Следует, отметить, что в различных пространствах, основываясь на методы сплайн функций, φ - функций и Соболева задача Сарда исследована многими авторами [8–10].

В работе [11] рассматриваются кубатурные формулы по единичному кубу пространства с параллелепипедальной решеткой узлов, веса которых заданы в явном виде. Описана конструкция таких формул и установлена их инвариантность относительно группы симметрий единичного куба. Явно оценены погрешности формул на базисной последовательности тригонометрических функций. Для кубатурных формул типа Грегори выведены оценки норм функционалов погрешности в пространствах Соболева и даны явные оценки снизу суммы модулей весов рассматриваемых кубатур.

Процедура построения квадратурных формул, точных для решений линейных дифференциальных уравнений и оптимальных по Сарду, в которой приводятся необходимые и достаточные условия существования этих формул, рассмотрено несколько формул, полученных этим методом, и проведено их сравнение с известными формулами обсуждаются в работе [12].

Проблем подбора параметрических кривых и поверхностей из набора данных Лагранжа или Эрмита представляется в работе [13]. В частности, изучается задача интерполяции путем минимизации некоторого функционала в пространстве Соболева, что приводит к новому понятию интерполяционного вариационного сплайна. Тщательно установлен результат сходимости.

В настоящей работе мы будем заниматься основные результаты этой работы; точная верхняя оценка погрешности квадратурной формулы, т.е. функция на которой функционал погрешности квадратурной формулы достигает своего наибольшего значения в пространстве $K_{2,\omega}^{(m)*}$; норма функционала погрешности квадратурных формул.

2 Основной результат

Так как пространство $K_{2,\omega}^{(m)}$ является гильбертовым, тогда, по теореме Рисса для функционала ℓ и для любой функции $\varphi \in K_{2,\omega}^{(m)}$ существует единственная функция $\psi_\ell \in K_{2,\omega}^{(m)}$ для которой имеет место следующее равенство [14]

$$(\ell, \varphi) = \langle \psi_\ell, \varphi \rangle_{K_{2,\omega}^{(m)}}, \quad (5)$$

где

$$\langle \psi_\ell, \varphi \rangle_{K_{2,\omega}^{(m)}} = \int_0^1 \left(\psi_\ell^{(m)}(x) - \omega^2 \psi_\ell^{(m-2)}(x) \right) \left(\varphi^{(m)}(x) - \omega^2 \varphi^{(m-2)}(x) \right) dx \quad (6)$$

- скалярное произведение, определенное в пространстве $K_{2,\omega}^{(m)}$. Так как $\ell \in K_{2,\omega}^{(m)*}$, то на функционал ℓ налагаются следующие условия

$$(\ell, \sinh(\omega x)) = 0, \quad (\ell, \cosh(\omega x)) = 0, \quad (\ell, x^\alpha) = 0, \quad \alpha = 0, 1, \dots, m-3. \quad (7)$$

Для получения точной оценки погрешности квадратурных формул в пространстве $K_{2,\omega}^{(m)}$ мы будем пользоваться так называемой экстремальной функцией функционала погрешности ℓ .

Функцией ψ_ℓ функционала погрешности ℓ , которая удовлетворяет равенство

$$(\ell, \psi_\ell) = \|\ell|K_{2,\omega}^{(m)*}\|^2 = \|\psi_\ell|K_{2,\omega}^{(m)}\|^2. \quad (8)$$

Легко показать, что в нашем случае решение $\psi_\ell(x)$ уравнения (5) и есть экстремальная функция ψ_ℓ удовлетворяющая равенству (8).

Действительно, так как равенство (8) справедливо для всех φ из пространства $K_{m,\omega}$, это равенство верно и в частности при $\varphi = \psi_\ell$. Тогда из (5) имеем

$$(\ell, \psi_\ell) = \langle \psi_\ell, \varphi \rangle_{K_{2,\omega}^{(m)}} = \|\psi_\ell|K_{2,\omega}^{(m)}\|^2. \quad (9)$$

С другой стороны по теореме Рисса об общем виде линейного непрерывного функционала на гильбертовом пространстве имеет место равенство $\|\ell|K_{2,\omega}^{(m)*}\|^2 = \|\psi_\ell|K_{2,\omega}^{(m)}\|^2$.

Тогда из (9) получаем

$$(\ell, \psi_\ell) = \|\psi_\ell|K_{2,\omega}^{(m)}\|^2 = \|\ell|K_{2,\omega}^{(m)*}\| \cdot \|\psi_\ell|K_{2,\omega}^{(m)}\|. \quad (10)$$

Поэтому, далее занимаемся решением уравнения (5). Это уравнение с начала будем решать для функций φ из пространства $\dot{C}^{(\infty)}(0, 1)$, где $\dot{C}^{(\infty)}(0, 1)$ это пространство бесконечно дифференцируемых и финитных функций на $[0, 1]$.

Тогда предполагая, что функция φ из $\dot{C}^{(\infty)}(0, 1)$, интегрируя по частям из (6) получаем

$$\langle \psi_\ell, \varphi \rangle_{K_{m,\omega}} = (-1)^m \int_0^1 \left(\psi_\ell^{(2m)}(x) - 2\omega^2 \psi_\ell^{(2m-2)}(x) + \omega^4 \psi_\ell^{(2m-4)}(x) \right) \varphi(x) dx. \quad (11)$$

Имея в виду (5) и (11) мы заключаем, что

$$\psi_\ell^{(2m)}(x) - 2\omega^2 \psi_\ell^{(2m-2)}(x) + \omega^4 \psi_\ell^{(2m-4)}(x) = (-1)^m \ell(x). \quad (12)$$

Таким образом, для $\dot{C}^{(\infty)}(0, 1)$ экстремальная функция ψ_ℓ является решением уравнения (12). Но, мы должны решить уравнение (5) когда $\varphi \in K_{2,\omega}^{(m)}$.

Так как пространство $\dot{C}^{(\infty)}(0, 1)$ является плотным в пространстве $K_{2,\omega}^{(m)*}$ то функции из пространства $K_{2,\omega}^{(m)}$ могут быть равномерно приближены сколь угодно точно с помощью функций из пространства $\dot{C}^{(\infty)}(0, 1)$. Для $\varphi \in K_{2,\omega}^{(m)}$ рассмотрим скалярное

произведение (11). Интегрируя по частям правую сторону (6), получаем

$$\begin{aligned} \langle \psi_\ell, \varphi \rangle &= \sum_{s=0}^{m-3} (-1)^s \left(\psi_\ell^{(m+s)}(x) - \omega^2 \psi_\ell^{(m+s-2)}(x) \right) \left(\varphi^{(m-1-s)}(x) - \omega^2 \varphi^{(m-3-s)}(x) \right) \Big|_0^1 + \\ &+ (-1)^{m-2} \left(\psi_\ell^{(2m-2)}(x) - \omega^2 \psi_\ell^{(2m-4)}(x) \right) \varphi'(x) \Big|_0^1 + \\ &+ (-1)^{m-1} \left(\psi_\ell^{(2m-1)}(x) - \omega^2 \psi_\ell^{(2m-2)}(x) \right) \varphi(x) \Big|_0^1 + \\ &+ (-1)^m \int_0^1 \left(\psi_\ell^{(2m)}(x) - 2\omega^2 \psi_\ell^{(2m-2)}(x) + \omega^4 \psi_\ell^{(2m-4)}(x) \right) \varphi(x) dx. \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая произвольность функций φ и единственность функции ψ_ℓ (с точностью до функций $\sinh(\omega x)$, $\cosh(\omega x)$ и полиномов степени $m-3$), имея в виду (12), с краевыми условиями

$$\left(\psi_\ell^{(m+s)}(x) - \omega^2 \psi_\ell^{(m+s-2)}(x) \right) \Big|_0^1 = 0, \quad s = 0, 1, \dots, m-1. \quad (13)$$

Таким образом, мы делаем заключение, что экстремальная функция является решением краевой задачи (12)-(13).

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Решение краевой задачи (12)-(13) в пространстве $K_{2,\omega}^{(m)}$ является экстремальной функцией ψ_ℓ функционала погрешности ℓ и она имеет следующий вид

$$\psi_\ell(x) = (-1)^m (G_m * \ell)(x) + d_1 \sinh \omega x + d_2 \cosh \omega x + R_{m-3}(x),$$

где d_1, d_2 - действительные числа, и $R_{m-3}(x)$ -полином степени $m-3$,

$$G_m(x) = \frac{\text{sign} x}{4\omega^{2m-1}} \left(\omega x \cosh \omega x - (2m-3) \sinh \omega x + 2 \sum_{k=1}^{m-2} \frac{(m-k-1)(\omega x)^{2k-1}}{(2k-1)!} \right) \quad (14)$$

- решение следующего уравнения при $m \geq 2$

$$G_m^{(2m)}(x) - 2\omega^2 G_m^{(2m-2)}(x) + \omega^4 G_m^{(2m-4)}(x) = \delta(x). \quad (15)$$

Доказательство. Известно, что общее решение неоднородного дифференциального уравнения представляется как сумма частного решения неоднородного дифференциального уравнения и общего решения соответствующего однородного дифференциального уравнения. В нашем случае общее решение соответствующего однородного уравнения для (12) даётся следующим образом

$$\psi_\ell^h(x) = d_1 \sinh \omega x + d_2 \cosh \omega x + d_3 x \sinh \omega x + d_4 x \cosh \omega x + R_{2m-5}(x), \quad (16)$$

где $d_k, k = \overline{1, 4}$,- произвольные константы, $R_{2m-5}(x)$ - полином степени $2m-5$.

Нетрудно проверить, что частное решение дифференциального уравнения (12) выражается как свёртка правой части $(-1)^m \ell(x)$ уравнения (12) и функции $G_m(x)$,

т.е. $(-1)^m \ell(x) * G_m(x)$. Функция $G_m(x)$ является фундаментальным решением уравнения (12) и она определяется равенством (14).

По общему правилу нахождения фундаментальных решений линейных дифференциальных операторов [15], в нашем случае для оператора $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}} - 2\omega^2 \frac{d^{2m-2}}{dx^{2m-2}} + \omega^4 \frac{d^{2m-4}}{dx^{2m-4}}$ мы получаем (14).

Таким образом, мы имеем следующее общее решение уравнения (12)

$$\psi_\ell(x) = (-1)^m \ell(x) * G_m(x) + d_1 \sinh \omega x + d_2 \cosh \omega x + d_3 x \sinh \omega x + d_4 x \cosh \omega x + R_{2m-5}(x).$$

По теореме Рисса в пространстве $K_{2,\omega}^{(m)}$ для функционала ℓ функция ψ_ℓ , удовлетворяющая равенству (5), единственна (с точностью до функций $\sinh \omega x$, $\cosh \omega x$ и $m-3$ полиномов степени). Тогда из последнего равенства для ψ_ℓ мы имеем

$$\psi_\ell(x) = (-1)^m (G_m * \ell)(x) + d_1 \sinh \omega x + d_2 \cosh \omega x + R_{m-3}(x), \quad (17)$$

Используя (7), можно легко показать, что функция, определенная равенством (17), удовлетворяет условиям (13).

Теперь занимаемся решением уравнение (15).

Для этого $\frac{d}{dx}$ заменим на p и вместо оператора $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}} - 2\omega^2 \frac{d^{2m-2}}{dx^{2m-2}} + \omega^4 \frac{d^{2m-4}}{dx^{2m-4}}$ мы получим $P(p) = p^{2m} - 2\omega^2 p^{2m-2} + \omega^4 p^{2m-4}$ многочлен степени $2m$ относительно p . Далее требуется разлагать $\frac{1}{P(p)}$ на элементарные дроби (15).

$$\begin{aligned} \frac{1}{P(p)} &= \frac{1}{p^{2m-4}(p+\omega)^2(p-\omega)^2} = \frac{A_1}{p^{2m-4}} + \frac{A_2}{p^{2m-5}} + \dots + \frac{A_{2m-5}}{p^2} + \frac{A_{2m-4}}{p} + \\ &+ \frac{B_1}{p+\omega} + \frac{B_2}{(p+\omega)^2} + \frac{C_1}{(p-\omega)} + \frac{C_2}{(p-\omega)^2}. \end{aligned} \quad (18)$$

Отсюда, имеем тождество

$$\begin{aligned} 1 &= A_1(p+\omega)^2(p-\omega)^2 + A_2(p+\omega)^2(p-\omega)^2 + A_3(p+\omega)^2(p-\omega)^2 + \dots + \\ &+ A_{(2m-7)}p^{2m-8}(p+\omega)^2(p-\omega)^2 + A_{(2m-6)}p^{2m-7}(p+\omega)^2(p-\omega)^2 + \\ &+ A_{(2m-5)}p^{2m-6}(p+\omega)^2(p-\omega)^2 + A_{(2m-4)}p^{2m-5}(p+\omega)^2(p-\omega)^2 + \\ &+ B_1p^{2m-4}(p+\omega)(p-\omega)^2 + B_2p^{2m-4}(p-\omega)^2 + C_1p^{2m-4}(p+\omega)^2(p-\omega) + \\ &+ C_2p^{2m-4}(p+\omega)^2, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} 1 &= A_1(p^4 - 2\omega^2 p^2 + \omega^4) + A_2p(p^4 - 2\omega^2 p^2 + \omega^4) + A_3p^2(p^4 - 2\omega^2 p^2 + \omega^4) + \\ &+ \dots + A_{2m-7}p^{2m-8}(p^4 - 2\omega^2 p^2 + \omega^4) + A_{2m-6}p^{2m-7}(p^4 - 2\omega^2 p^2 + \omega^4) + \\ &+ A_{(2m-4)}p^{2m-5}(p+\omega)^2(p-\omega)^2 + B_1p^{2m-4}(p^2 - \omega^2)(p-\omega) + \\ &+ B_2p^{2m-4}(p^2 - 2\omega p + \omega^2) + C_1p^{2m-4}(p^2 - \omega^2)(p-\omega) + \\ &+ C_2p^{2m-4}(p^2 + 2\omega p + \omega^2). \end{aligned} \quad (19)$$

Далее, правую сторону последнего равенства группируем по степеням p .

Для этого сначала рассмотрим следующие выражения

$$\begin{aligned}
 (p^2 - \omega^2)(p + \omega) &= p^3 + p^2\omega - p\omega^2 + \omega^3, (p^2 - \omega^2)(p - \omega) = p^3 - p^2\omega - p\omega^2 - \omega^3, \\
 A_1 : \omega^4 - 2\omega^2p^2 + p^4, A_2 : \omega^4p - 2\omega^2p^3 + p^5, A_3 : \omega^4p^2 - 2\omega^2p^4 + p^6, \\
 A_4 : \omega^4p^3 - 2\omega^2p^5 + p^7, A_5 : \omega^4p^4 - 2\omega^2p^6 + p^8, \\
 A_{2m-7} : \omega^4p^{2m-8} - 2\omega^2p^{2m-6} + p^{2m-4}, A_{2m-6} : \omega^4p^{2m-7} - 2\omega^2p^{2m-5} + p^{2m-3}, \\
 A_{2m-5} : \omega^4p^{2m-6} - 2\omega^2p^{2m-4} + p^{2m-2}, B_1 : \omega^3p^{2m-4} - 2\omega^2p^{2m-3} + \omega p^{2m-2} + p^{2m-1}, \\
 B_2 : \omega^2p^{2m-4} - 2\omega p^{2m-3} + p^{2m-2}, C_1 : -\omega^3p^{2m-4} - \omega^2p^{2m-3} + \omega p^{2m-2} + p^{2m-1}, \\
 C_2 : \omega^2p^{2m-4} + 2\omega p^{2m-3} + p^{2m-2}.
 \end{aligned} \tag{20}$$

Тогда учитывая (20) из (19) получаем

$$\begin{aligned}
 1 &= p^{2m-1}(C_1 + B_1 + A_{(2m-4)}) + p^{2m-2}(C_2 + B_2 + A_{(2m-5)}) + p^{2m-3}(2\omega C_2 - \omega^2 C_1 - \\
 &\quad - 2\omega B_2 - \omega^2 B_2 + 2\omega^3 B_1 - 2\omega^2 A_{2m-5} + A_{2m-7}) + p^{2m-4}(\omega^2 C_2 - \omega^3 C_1 + \omega B_2 - \\
 &\quad - \omega^2 B_1 - 2\omega A_{2m-4} + A_{2m-6}) + p^{2m-5}(-2\omega^2 A_{2m-6} + \omega^4 A_{2m-4} + A_{2m-8}) + \\
 &\quad + p^{2m-6}(\omega^4 A_{2m-5} - 2\omega^2 A_{2m-7} + A_{2m-9}) + \dots + p^{2m-6}(\omega^4 A_5 - 2\omega^2 A_3 + A_1) + \\
 &\quad + p^3(\omega^4 A_4 - 2\omega^2 A_2) + p^2(\omega^4 A_3 - 2\omega^2 A_1) + p^2(\omega^4 A_2) + \omega^4 A_1).
 \end{aligned} \tag{21}$$

Из (21) приравнявая коэффициенты при равных степенях p имеем

$$\begin{aligned}
 p^0 : \omega^4 A_1 &= 1, p^1 : \omega^4 A_2 = 0, p^2 : \omega^4 A_3 - 2\omega^2 A_1 = 0, p^3 : \omega^4 A_4 - 2\omega^2 A_2 = 0, \\
 p^4 : \omega^4 A_5 - 2\omega^2 A_3 + A_1 &= 0, p^5 : \omega^4 A_6 - 2\omega^2 A_4 + A_2 = 0, \dots \\
 p^{2m-6} : \omega^4 A_{2m-5} - 2\omega^2 A_{2m-7} + A_{2m-9} &= 0, \\
 p^{2m-5} : \omega^4 A_{2m-4} - 2\omega^2 A_{2m-6} + A_{2m-8} &= 0, \\
 p^{2m-4} : \omega^2 C_2 - \omega^3 C_1 + \omega^2 B_2 + \omega^3 B_1 - 2\omega^2 A_{2m-5} + A_{2m-7} &= 0, \\
 p^{2m-3} : 2\omega C_2 - \omega^2 C_1 - 2\omega B_2 - \omega^2 B_1 - 2\omega^2 A_{2m-4} + A_{2m-6} &= 0, \\
 p^{2m-2} : C_2 + B_2 + A_{2m-5} + \omega C_1 - \omega B_1 &= 0, p^{2m-1} : C_1 + B_1 + A_{2m-4} = 0.
 \end{aligned} \tag{22}$$

Отсюда видно, что $A_2 = A_4 = A_6 \dots = A_{2m-4} = A_{2m-6} = 0$, $A_1 = \frac{1}{\omega^4}$, $A_3 = \frac{2}{\omega^6}$, $A_5 = \frac{3}{\omega^8}$, $A_7 = \frac{4}{\omega^{10}}$, ..., $A_{2m-9} = \frac{m-4}{\omega^{2m-6}}$, $A_{2m-7} = \frac{m-3}{\omega^{2m-4}}$, $A_{2m-5} = \frac{m-2}{\omega^{2m-2}}$.

Значит,

$$A_{2k} = 0, \text{ и } A_{2k-1} = \frac{k}{\omega^{2k-2}}, k = 1, 2, \dots, m-2. \tag{23}$$

Тогда из последних четырёх уравнений (22), учитывая (23), имеем

$$\begin{aligned}
 \omega^2 C_2 - \omega^3 C_1 + \omega^2 B_2 + \omega^3 B_1 - 2\omega^2 \frac{m-2}{\omega^{2m-2}} + \frac{m-3}{\omega^{2m-4}} &= 0, \\
 2\omega(C_2 - B_2) - \omega^2(C_1 + B_1) &= 0, \\
 (C_2 + B_2) - \frac{m-2}{\omega^{2m-2}} + \omega(C_1 - B_1) &= 0, \\
 C_1 + B_1 &= 0.
 \end{aligned}$$

Отсюда, получим

$$B_1 = \frac{2m-3}{4\omega^{2m-1}}, C_1 = -\frac{2m-3}{4\omega^{2m-1}}, B_2 = \frac{1}{4\omega^{2m-2}}, C_2 = \frac{1}{4\omega^{2m-2}}. \tag{24}$$

Известно, из книги [15], что преобразованию Фурье $(p - \lambda)^{-k}$ соответствует оригинал

$$\frac{x^{k-1} \operatorname{sign} x}{2(k-1)} \cdot e^{\lambda x}. \quad (25)$$

Учитывая (22) и (23), имея в виду последнее утверждение из (18) для

$$\frac{1}{P(p)} = \sum_{k=1}^{m-2} \frac{A_{2k-1}}{p^{2m-2k-2}} + \frac{B_1}{p + \omega} + \frac{B_2}{(p + \omega)^2} + \frac{C_1}{(p - \omega)} + \frac{C_2}{(p - \omega)^2}.$$

выражения найдём соответствующий оригинал

$$\frac{\operatorname{sign} x}{2} \left[2C_1 \frac{e^{\omega x} - e^{-\omega x}}{2} + 2C_2 \cdot x \frac{e^{\omega x} + e^{-\omega x}}{2} + \sum_{k=1}^{m-2} \frac{A_{2k-1} \cdot x^{2m-2k-3}}{(2m-2k-3)!} \right].$$

Это и есть искомая функция

$$G_m(x) = \frac{\operatorname{sign} x}{2} \left[2C_1 \sinh(\omega x) + 2C_2 x \cosh(\omega x) + \sum_{k=1}^{m-2} \frac{A_{2k-1} \cdot x^{2m-2k-3}}{(2m-2k-3)!} \right].$$

Отсюда, учитывая (24) получаем

$$G_m(x) = \frac{\operatorname{sign} x}{4\omega^{2m-1}} \times \left[\omega x \cdot \cosh(\omega x) - (2m-3) \sinh(\omega x) + 2 \sum_{k=1}^{m-2} \frac{(m-k-1)(\omega x)^{2k-1}}{(2k-1)!} \right]. \quad (26)$$

В частности, из последнего равенства при $m = 2$ имеем

$$G_2(x) = \frac{\operatorname{sign} x}{4\omega^3} [\omega x \cdot \cosh(\omega x) - \sinh(\omega x)] \quad (27)$$

и при $m = 3$

$$G_3(x) = \frac{\operatorname{sign} x}{4\omega^5} [\omega x \cdot \cosh(\omega x) - 3 \sinh(\omega x) + 2\omega x]. \quad (28)$$

Отсюда, учитывая произвольность функций φ и единственность функции ψ_ℓ (с точностью до функций $\sinh(\omega x)$, $\cosh(\omega x)$ и полиномов степени $m-3$), имея в виду (12), должно выполняться следующее равенство

$$\psi_\ell^{(2m)}(x) - 2\omega^2 \psi_\ell^{(2m-2)}(x) + \omega^4 \psi_\ell^{(2m-4)}(x) = (-1)^m \ell(x). \quad (29)$$

$$\left(\psi_\ell^{(m+s)}(x) - \omega^2 \psi_\ell^{(m+s-2)}(x) \right) \Bigg|_{x=0}^{x=1}, \quad s = 0, 1, \dots, m-1. \quad (30)$$

Таким образом, мы имеем следующее общее решение уравнения (29)

$$\psi_\ell(x) = (-1)^m \ell(x) * G_m(x) + d_1 \sinh \omega x + d_2 \cosh \omega x + R_{m-3}(x),$$

где $R_{m-3}(x) = c_{m-3} x_\beta^{m-3} + c_{m-4} x_\beta^{m-4} + \dots + c_1 x_\beta + c_0$, -полином степени $m-3$, d_1, d_2 - константы.

Теперь мы можем вычислять норму функционала погрешности $\ell(x)$.

Равенства (7) означают, что наша квадратурная формула в пространстве $K_{2,\omega}^{(m)}$ будет точна для функций $\sinh(\omega x)$, $\cosh(\omega x)$ и для полиномов степени $m - 3$.

Теперь, используя теорему 1, мы сразу получаем следующее представление нормы функционала погрешности квадратурных формул в пространстве $K_{2,\omega}^{(m)}$:

Для квадрата нормы функционала погрешности справедлива следующая формула

$$\begin{aligned} \left| |\ell| K_{2,\omega}^{(m)} \right|^2 = & (-1)^m \left[\sum_{\beta=0}^N \sum_{\gamma=0}^N C_\beta C_\gamma G_m(h\gamma - h\beta) - \right. \\ & \left. - 2 \sum_{\beta=0}^N C_\beta \int_0^1 G_m(x - h\beta) dx + \int_0^1 \int_0^1 G_m(x - y) dx dy \right], \end{aligned} \quad (31)$$

где $G_m(x)$ определяется равенством (14).

На самом деле, поскольку пространство $K_{2,\omega}^{(m)}$ гильбертово, то $\left| |\ell| K_{2,\omega}^{(m)*} \right|^2 = (\ell, \psi_\ell)$. С учетом (7) и теоремы 1, имеем

$$\begin{aligned} \left| |\ell| K_{2,\omega}^{(m)*} \right|^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \ell(x), \psi_\ell(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\chi_{[0,1]}(x) - \sum_{\beta=0}^N C_\beta \delta(x - h\beta) \right) \times \\ &\times ((-1)^m \ell(x) * G_m(x) + d_1 \sinh \omega x + d_2 \cosh \omega x + R_{m-3}(x)) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \ell(x) ((-1)^m \ell(x) * G_m(x)) dx. \end{aligned}$$

В последнем выражении сначала вычислим свертку $\ell(x) * G_m(x)$.

$$\begin{aligned} \ell(x) * G_m(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \ell(y) G_m(x - y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\chi_{[0,1]}(x) - \sum_{\beta=0}^N C_\beta \delta(y - x\beta) \right) \times \\ &\times G_m(x - y) dy = \int_0^1 G_m(x - y) dy - \sum_{\beta=0}^N C_\beta G_m(x)(x - x\beta). \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} (\ell, \psi_\ell) &= (-1)^m (\ell, \psi_\ell) = (-1)^m \int_{-\infty}^{\infty} \left(\chi_{[0,1]}(x) - \sum_{\beta=0}^N C_\beta \delta(y - x\beta) \right) \times \\ &\times \left(\int_0^1 G_m(x - y) dy - \sum_{\beta=0}^N C_\beta G_m(x)(x - x\beta) \right) dx = \\ &= (-1)^m \left(\int_0^1 \int_0^1 G_m(x - y) dx dy - \sum_{\beta=0}^N C_\beta \int_0^1 G_m(x - x\beta) dx - \right. \\ &\left. - \sum_{\beta=0}^N C_\beta \int_0^1 G_m(x\beta - y) dy + \sum_{\beta=0}^N \sum_{\gamma=0}^N C_\beta C_\gamma G_m(x\beta - x\gamma) \right). \end{aligned}$$

Так как $G_m(x)$ -четная функция, то, учитывая $G_m(x_\beta - x) = G_m(x - x_\beta)$, получим равенство (31).

Таким образом, в пространстве $K_{2,\omega}^{(m)}$ мы решили задачу 1.

Теорема доказана полностью.

3 Заключение

В заключение отметим, что нормы функционала и его экстремальной функции оценивают функционал любой функции из основного пространства, иными словами, обеспечивают оценку функционала на рассматриваемом классе функций.

В данной работе найдена точная верхняя оценка погрешности формулы квадратурных формул в пространствах. Используя точную верхнюю оценку погрешности формулы вычислены нормы функционалов погрешности в соответствующих пространствах. Чтобы найти наименьшее значение нормы функционалов погрешности по коэффициентам при конкретных условиях, применен метод Лагранжа. Кроме того, доказана, точная верхняя оценка погрешности, которая получена для оптимальных коэффициентов, которые условный минимум нормам функционала погрешности в соответствующих пространствах.

Литература

- [1] Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж. Теория сплайнов и ее приложения.: М.: Мир, – 1972. – 316 с.
- [2] Никольский С.М. К вопросу об оценках приближений квадратурными формулами.: Успехи матем. наук. -Москва,- – 1950. – Т.5.– №3. – С. 165–177.
- [3] Никольский С.М. Квадратурные формулы.: – Москва: Наука, – 1988. – 256 с.
- [4] Sard A. Best approximate integration formulas, best approximate formulas.: American J. of Math. – 1949. - LXXI. – P. 80–91.
- [5] Meyers L.F., Sard A. Best approximate integration formulas.: J.Math and Phus. – 1950. XXIX. – P. 118–123.
- [6] Coman G. Formule de cuadrature de tip Sard.: Stud. Univ. Babes-Bolyai. Ser. Math.-mech. – 1972. – vol.17. – №-2. – P. 73–77.
- [7] Coman G. Monoplines and optimal quadrature Formule.: Rend . mat., – 1972. – vol.6. №-5 – P. 567–577.
- [8] K.M. Shadimetov., A.R. Hayotov., F.A. Nuraliev Construction of Optimal Interpolation Formulas in the Sobolev Space: Journal of Mathematical Sciences (United States). – 2022. – 264(6). – P. 782–793.
- [9] D.M. Akhmedov., A.R. Hayotov., K.M. Shadimetov Optimal quadrature formulas with derivatives for Cauchy type singular integrals.: Applied Mathematics and Computation. – 2018. – vol. 4. – P. 150–159.
- [10] Shadimetov Kh.M., Akhmadaliev G.N. Optimal coefficients of the quadrature formulas in the space $K_{3,\omega}$: AIP Conf. Proc. 3004, 060017 – 2024. <https://doi.org/10.1063/5.0199926>
- [11] Vaskevich V.L. Invariant cubature formulas of Gregory type for a multidimensional cube.: Siberian Journal of Industrial Mathematics. Novosibirsk. – 2003. – vol.3. – P. 34–36.
- [12] Lanzara F. On optimal quadrature formulae: Ineq. Appl, – 2000. – P. 201–202.
- [13] Arcangeli R., Lopez de Silanes M.C., Torrens J.J. Multidimensional minimizing splines.: Kluwer Academic publishers. Boston, – 2004. – vol. 4. – P. 21–41.
- [14] Соболев С.Л. О кубатурных формулах на сфере, инвариантных при преобразованиях конечных групп вращений.: М. Докл. АН СССР, – 1962. – Т.146. –№2. – С. 310–313.
- [15] Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физики. : Москва, Наука, – 1979. – 320 с.

Поступила в редакцию 15.08.2024

UDC 519.644

A SHARP UPPER BOUND FOR THE ERROR OF QUADRATURE FORMULAS IN HILBERT SPACE $K_{2,\omega}^{(M)}$

Akhmadaliev G.N.

ahmadaliyev78@mail.ru

Tashkent State Transport University,
1, Temiryolchilar str., Tashkent, 100167 Uzbekistan.

One of the main problems of computational mathematics is the optimization of computational methods in function spaces. Optimization of computational methods has proven itself well in problems of the theory of quadrature formulas. This paper studies the problem of constructing an optimal quadrature formula in a Hilbert space. The article considers the problem of finding an exact upper bound for the error of quadrature formulas in the Hilbert space $K_{2,\omega}^{(m)}$ found.

Keywords: quadrature formulas, the error functional, exact upper bound for error, Hilbert space, optimal coefficients.

Citation: Akhmadaliev G.N. 2024. A sharp upper bound for the error of quadrature formulas in Hilbert space $K_{2,\omega}^{(m)}$. *Problems of Computational and Applied Mathematics*. 4/2(60): 45-55.

ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

№ 4/2(60) 2024

Журнал основан в 2015 году.

Издается 6 раз в год.

Учредитель:

Научно-исследовательский институт развития цифровых технологий и
искусственного интеллекта.

Главный редактор:

Равшанов Н.

Заместители главного редактора:

Азамов А.А., Арипов М.М., Шадиметов Х.М.

Ответственный секретарь:

Ахмедов Д.Д.

Редакционный совет:

Азамова Н.А., Алоев Р.Д., Амиргалиев Е.Н. (Казахстан), Бурнашев В.Ф.,
Загребина С.А. (Россия), Задорин А.И. (Россия), Игнатьев Н.А.,
Ильин В.П. (Россия), Исмагилов И.И. (Россия), Кабанихин С.И. (Россия),
Карачик В.В. (Россия), Курбонов Н.М., Маматов Н.С., Мирзаев Н.М.,
Мирзаева Г.Р., Мухамадиев А.Ш., Назирова Э.Ш., Нормуродов Ч.Б.,
Нуралиев Ф.М., Опанасенко В.Н. (Украина), Расулмухамедов М.М., Расулов А.С.,
Садуллаева Ш.А., Старовойтов В.В. (Беларусь), Хаётов А.Р., Халджигитов А.,
Хамдамов Р.Х., Хужаев И.К., Хужаеров Б.Х., Чье Ен Ун (Россия),
Шабозов М.Ш. (Таджикистан), Dimov I. (Болгария), Li Y. (США),
Mascagni M. (США), Min A. (Германия), Schaumburg H. (Германия),
Singh D. (Южная Корея), Singh M. (Южная Корея).

Журнал зарегистрирован в Агентстве информации и массовых коммуникаций при
Администрации Президента Республики Узбекистан.

Регистрационное свидетельство №0856 от 5 августа 2015 года.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

При перепечатке материалов ссылка на журнал обязательна.

За точность фактов и достоверность информации ответственность несут авторы.

Адрес редакции:

100125, г. Ташкент, м-в. Буз-2, 17А.

Тел.: +(998) 712-319-253, 712-319-249.

Э-почта: journals@airi.uz.

Веб-сайт: <https://journals.airi.uz>.

Дизайн и вёрстка:

Шарипов Х.Д.

Отпечатано в типографии НИИ РЦТИИ.

Подписано в печать 09.09.2024 г.

Формат 60x84 1/8. Заказ №6. Тираж 100 экз.

PROBLEMS OF COMPUTATIONAL AND APPLIED MATHEMATICS

No. 4/2(60) 2024

The journal was established in 2015.
6 issues are published per year.

Founder:

Digital Technologies and Artificial Intelligence Development Research Institute.

Editor-in-Chief:

Ravshanov N.

Deputy Editors:

Azamov A.A., Aripov M.M., Shadimetov Kh.M.

Executive Secretary:

Akhmedov D.D.

Editorial Council:

Azamova N.A., Alov R.D., Amirgaliev E.N. (Kazakhstan), Burnashev V.F.,
Zagrebina S.A. (Russia), Zadorin A.I. (Russia), Ignatiev N.A., Ilyin V.P. (Russia),
Ismagilov I.I. (Russia), Kabanikhin S.I. (Russia), Karachik V.V. (Russia), Kurbonov
N.M., Mamatov N.S., Mirzaev N.M., Mirzaeva G.R., Mukhamadiev A.Sh., Nazirova
E.Sh., Normurodov Ch.B., Nuraliev F.M., Opanasenko V.N. (Ukraine), Rasulov A.S.,
Sadullaeva Sh.A., Starovoitov V.V. (Belarus), Khayotov A.R., Khaldjigitov A.,
Khamdamov R.Kh., Khujaev I.K., Khujayorov B.Kh., Chye En Un (Russia),
Shabozov M.Sh. (Tajikistan), Dimov I. (Bulgaria), Li Y. (USA), Mascagni M. (USA),
Min A. (Germany), Schaumburg H. (Germany), Singh D. (South Korea),
Singh M. (South Korea).

The journal is registered by Agency of Information and Mass Communications under the
Administration of the President of the Republic of Uzbekistan.

The registration certificate No. 0856 of 5 August 2015.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

At a reprint of materials the reference to the journal is obligatory.
Authors are responsible for the accuracy of the facts and reliability of the information.

Address:

100125, Tashkent, Buz-2, 17A.

Tel.: +(998) 712-319-253, 712-319-249.

E-mail: journals@airi.uz.

Web-site: <https://journals.airi.uz>.

Layout design:

Sharipov Kh.D.

DTAIDRI printing office.

Signed for print 09.09.2024

Format 60x84 1/8. Order No. 6. Printed copies 100.

Содержание

Шадиметов Х.М., Жабборов Х.Х.

Оптимальная квадратурная формула для приближенного вычисления сингулярных интегралов с ядром Гильберта 5

Исматуллаев Г.П., Бахромов С.А., Мирзакабилов Р.Н.

Построение кубатурной формулы пятой степени точности, содержащей значения частных производных 15

Ахмедов Д.М., Авезов А.Х., Хакимова И.К.

Оптимальные квадратурные формулы для гиперсингулярных интегралов в пространстве Соболева 24

Болтаев А.К.

Об одной модификации метода Соболева для приближения функции 33

Ахмадалиев Г.Н.

Точная верхняя оценка погрешности квадратурных формул в гильбертовом пространстве $K_{2,\omega}^{(m)}$ 45

Шадиметов Х.М., Гуломов О.Х.

Оптимальные квадратурные формулы для вычисления интегралов от быстроосциллирующих функций 56

Нуралиев Ф.А., Кузиев Ш.С., Джураева К.А.

Приближенное решение интегрального уравнения Фредгольма второго рода методом оптимальных квадратур 66

Шадиметов Х.М., Усманов Х.И.

Оптимальная аппроксимация операторов со степенно-логарифмическими ядрами 74

Хаётов А.Р., Нафасов А.Ю., Бердимуратова У.А.

Оптимальные интерполяционные формулы с производной в пространстве $W_2^{(2,1)}(0,1)$ 90

Бабаев С.С.

Весовая оптимальная квадратурная формула с производными в гильбертовом пространстве 99

Абдураходов А.А.

Оптимальная аппроксимация интегралов Фурье методом фи-функций 108

Шадиметов Х.М., Усманов Х.И.

Сравнение результатов приближенного решения линейных интегральных уравнений Фредгольма второго рода различными методами 118

Юсупов М.

Исследование нелинейной вязкоупругой виброзащитной системы 134

Contents

Shadimetov Kh.M., Jabborov Kh.Kh.

Optimal quadrature formula for approximate calculation of singular integrals with Hilbert kernel 5

Ismatullaev G.P., Bakhromov S.A., Mirzakabilov R.N.

Construction of a cubature formula of the fifth degree of accuracy containing the values of partial derivatives 15

Akhmedov D.M., Avezov A.Kh., Hakimova I.K.

Optimal quadrature formulas for hypersingular integrals in the Sobolev space . . 24

Boltaev A.K.

On one modification of the Sobolev method for approximating a function 33

Akhmadaliev G.N.

A sharp upper bound for the error of quadrature formulas in Hilbert space $K_{2,\omega}^{(m)}$ 45

Shadimetov Kh.M., Gulomov O.Kh.

Optimal quadrature formulas for calculating integrals of rapidly oscillating functions 56

Nuraliev F.A., Kuziev Sh.S., Djuraeva K.A.

Approximate solution Fredholm integral equation of the second kind by the optimal quadrature method 66

Shadimetov Kh.M., Usmanov Kh.I.

Optimal approximation of operators with power-logarithmic kernels 74

Hayotov A.R., Nafasov A.Y., Berdimuradova U.A.

An optimal interpolation formulas with derivative in the space $W_2^{(2,1)}$ 90

Babaev S.S.

The weighted optimal quadrature formula with derivatives in the Hilbert space . 99

Abduakhadov A.A.

Optimal approximation of Fourier integrals by the phi-function method 108

Shadimetov Kh.M., Usmanov Kh.I.

Comparison of the results of the approximate solution of linear Fredholm integral equations of the second kind by various methods 118

Yusupov M.

Study of nonlinear viscoelastic vibration protection system 134