

УДК 519.652

ОБ ОДНОЙ МОДИФИКАЦИИ МЕТОДА СОБОЛЕВА ДЛЯ ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИИ

Болтаев А.К.

aziz_boltayev@mail.ru.

Институт математики им. В.И. Романовского АН РУз,
100174, Узбекистан, г. Ташкент, ул. Университетская, д. 9;
Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека,
100174, Узбекистан, Ташкент, ул. Университетская, 4.

В теории сплайнов существуют алгебраический и вариационный подходы. В алгебраическом подходе сплайны рассматриваются как некоторые гладкие кусочно-полиномиальные функции. В вариационном подходе сплайны понимаются как элементы гильбертова или банахова пространства, минимизирующие определенные функционалы. Затем изучаются проблемы существования, единственности и сходимости сплайнов и алгоритмы их построения на основе собственных свойств сплайнов. В настоящей работе изучается задача построения оптимальных интерполяционных формул в гильбертовом пространстве. Здесь, используя метод Соболева, приведен алгоритм для решения системы линейных алгебраических уравнений для коэффициентов оптимальных интерполяционных формул. Получено явное выражение оптимальных коэффициентов интерполяционной формулы в гильбертовом пространстве.

Ключевые слова: пространство Гильберта, экстремальная функция, функционал погрешности, интерполяционная формула.

Цитирование: Болтаев А.К. Об одной модификации метода Соболева для приближения функции // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2024. – № 4/2(60). – С. 33-44.

1 Введение и постановка задачи

Задача интерполяции является одной из самых распространенных задач в теории приближений. Классический метод ее решения заключается в построении интерполяционных полиномов. Однако интерполяционные полиномы имеют ряд недостатков при использовании их для функций с сингулярностями или для недостаточно гладких функций. Доказано, что последовательность интерполяционных полиномов Лагранжа, построенных для конкретной непрерывной функции, не сходится к самой функции. В связи с этим на практике вместо интерполяционных полиномов высокого порядка используются сплайн-функции.

Теория сплайнов, основанная на вариационных методах, была изучена и получила развитие в работах Дж. Алберга, Э. Нельсона и Дж. Уолша [1], К. де Бура [2, 3], П. Дж. Лорана [4], Дж. Мastroianni и Г. В. Миловановича [5], И. Я. Шенберга [6], Л. Л. Шумакера [7], С. Б. Стечкина и Ю. Н. Субботина [8], В. А. Василенко [9] и других. Вполне исчерпывающий список литературы по теории сплайновых функций можно найти, например, в [7].

Настоящая же работа посвящена построению интерполяционных формул в гильбертовом пространстве $W_2^{(m,0)}(0,1)$.

Предположим, что нам дана таблица значений $\varphi(x_\beta), \beta = 0, 1, \dots, N$ функции φ в точках $x_\beta \in [0, 1]$. Требуется аппроксимировать функцию φ другой, более простой

функцией P_φ , т. е.

$$\varphi(z) \cong P_\varphi(z) = \sum_{\beta=0}^N C_\beta(z) \varphi(x_\beta), \quad (1)$$

где $P_\varphi(z) = \sum_{\beta=0}^N C_\beta(z) \varphi(x_\beta)$ – интерполяционная формула и

$$\ell(x, z) = \delta(x - z) - \sum_{\beta=0}^N C_\beta(z) \delta(x - x_\beta), \quad (2)$$

функционал погрешности этой интерполяционной формулы, $C_\beta(z)$ – коэффициенты, а x_β – узлы интерполяционной формулы $P_\varphi(z)$, $x_\beta \in [0, 1]$, $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака, функция $\varphi(x)$ принадлежит гильбертову пространству $W_2^{(m,0)}(0, 1)$. Норма функций в этом пространстве определяется следующим образом

$$\|\varphi(x)\|_{W_2^{(m,0)}} = \left[\int_0^1 (\varphi^{(m)}(x) + \varphi(x))^2 dx \right]^{1/2}. \quad (3)$$

Погрешностью интерполяционной формулы (1) называется разность

$$(\ell, \varphi) = \varphi(z) - P_\varphi(z). \quad (4)$$

По неравенству Коши-Шварца абсолютная погрешность (4) оценивается следующим образом

$$|(\ell, \varphi)| \leq \|\varphi\|_{W_2^{(m,0)}} \cdot \|\ell\|_{W_2^{(m,0)*}},$$

где

$$\|\ell\|_{W_2^{(m,0)*}} = \sup_{\varphi, \|\varphi\| \neq 0} \frac{|(\ell, \varphi)|}{\|\varphi\|_{W_2^{(m,0)}}}.$$

Поэтому для оценки погрешности интерполяционной формулы (1) по функциям пространства $W_2^{(m,0)}$ требуется найти норму функционала погрешности ℓ в сопряженном пространстве $W_2^{(m,0)*}$.

Отсюда мы получим

Задача 1. Найти норму функционала погрешности ℓ интерполяционной формулы (1) в пространстве $W_2^{(m,0)}$.

Ясно, что норма функционала погрешности ℓ зависит от коэффициентов $C_\beta(z)$ и узлов x_β . Задача минимизации величины $\|\ell\|$ по коэффициентам $C_\beta(z)$ является линейной задачей, а по узлам x_β , в общем случае, нелинейной и сложной задачей. Здесь мы рассматриваем задачу минимизации величины ℓ коэффициентами $C_\beta(z)$ при фиксированных узлах x_β .

Коэффициенты $\overset{\circ}{C}_\beta(z)$ (если они существуют), удовлетворяющие следующему равенству

$$\left\| \overset{\circ}{\ell} \right\|_{W_2^{(m,0)*}} = \inf_{C_\beta(z)} \|\ell\|_{W_2^{(m,0)*}}, \quad (5)$$

называются *оптимальными коэффициентами* и соответствующая им интерполяционная формула

$$\overset{\circ}{P}_\varphi(z) = \sum_{\beta=0}^N \overset{\circ}{C}_\beta(z) \varphi(x_\beta),$$

называется *оптимальной интерполяционной формулой* в пространстве $W_2^{(m,0)}$.

Таким образом, для построения оптимальной интерполяционной формулы вида (1) в пространстве $W_2^{(m,0)}$ нам необходимо решить следующую задачу.

Задача 2. Найти коэффициенты $\overset{\circ}{C}_\beta(z)$, удовлетворяющие равенству (5) при фиксированных узлах x_β .

Данная работа является непосредственным продолжением работы [10] и посвящена решению системы

$$\sum_{\gamma=0}^N C_\gamma(z) G_m(x_\beta - x_\gamma) + r_{1,k}(z) e^{x_\beta \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{m}\right)} \cos\left(x_\beta \sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{m}\right)\right) + \\ + r_{2,k}(z) e^{x_\beta \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{m}\right)} \sin\left(x_\beta \sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{m}\right)\right) = G_m(z - x_\beta), \quad \beta = \overline{0, N}, \quad (6)$$

$$\sum_{\gamma=0}^N C_\gamma(z) e^{x_\gamma \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{m}\right)} \cos\left(x_\gamma \sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{m}\right)\right) = e^{z \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{m}\right)} \cos\left(z \sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{m}\right)\right), \quad (7)$$

$$\sum_{\gamma=0}^N C_\gamma(z) e^{x_\gamma \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{m}\right)} \sin\left(x_\gamma \sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{m}\right)\right) = e^{z \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{m}\right)} \sin\left(z \sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{m}\right)\right), \quad (8)$$

где $k = \overline{1, \frac{m}{2}}$ и m — четное натуральное число.

Следует отметить, что система (6) - (8) имеет единственное решение. Доказательство единственности решения системы (6) - (8) аналогично доказательству единственности решения системы для оптимальных коэффициентов в пространстве $L_2^{(m)}$, полученных в работах Соболева [11, 12].

Далее рассмотрим случай равноотстоящих узлов. Предположим, что $x_\beta = h\beta$, $\beta = \overline{0, 1, 2, \dots, N}$, $h = \frac{1}{N}$, $N = 1, 2, \dots$

Мы предполагаем что $C_\beta(z) = 0$ для $\beta < 0$ и $\beta > N$. Затем, используя свертку двух функций дискретного аргумента $\varphi(h\beta)$ и $\psi(h\beta)$ (см. [11, 12])

$$\varphi(h\beta) * \psi(h\beta) = \sum_{\gamma=-\infty}^{\infty} \varphi(h\gamma) \cdot \psi(h\beta - h\gamma),$$

мы перепишем систему (6) - (8) в следующей форму свертки

$$C_\beta(z) * G_m(h\beta) + r_{1,k}(z) e^{x_\beta \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{m}\right)} \cos\left(x_\beta \sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{m}\right)\right) + \\ + r_{2,k}(z) e^{x_\beta \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{m}\right)} \sin\left(x_\beta \sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{m}\right)\right) = G_m(z - x_\beta), \quad \beta = \overline{0, N}, \quad (9)$$

$$\sum_{\gamma=0}^N C_\gamma(z) e^{x_\gamma \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{m}\right)} \cos\left(x_\gamma \sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{m}\right)\right) = e^{z \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{m}\right)} \cos\left(z \sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{m}\right)\right), \quad (10)$$

$$\sum_{\gamma=0}^N C_\gamma(z) e^{x_\gamma \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{m}\right)} \sin\left(x_\gamma \sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{m}\right)\right) = e^{z \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{m}\right)} \sin\left(z \sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{m}\right)\right), \quad (11)$$

где

$$G_m(z - h\beta) = \\ = \frac{\text{sign}(z - h\beta)}{2m^2} \sum_{k=1}^m \left[(1 - m) e^{(z-h\beta) \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{m}\right)} \cos\left((z - h\beta) \sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{m}\right)\right) + \right. \\ \left. + \frac{(2k-1)\pi}{m} \right] + (z - h\beta) e^{(z-h\beta) \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{m}\right)} \cos\left(x \sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{m}\right) + \frac{2\pi \cdot (2k-1)}{m}\right) \Big]. \quad (12)$$

В системе (9) - (11) $N+m+1$ неизвестных $C_\beta(z)$, $\beta = 0, 1, \dots, N$, $r_{1,k}, r_{2,k}$ ($k = 1, 2, \dots, \frac{m}{2}$) и $N + m + 1$ линейных уравнений.

Для решения системы (9) - (11) методом Соболева нам понадобится дискретный аналог дифференциального оператора $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}} + 2\frac{d^m}{dx^m} + 1$ при m — четном. Следующий параграф посвящен построению этого дискретного аналога.

2 Дискретный оператор $D_m(h\beta)$

В настоящем параграфе для четного натурального числа m строится функция $D_m(h\beta)$ дискретного аргумента, удовлетворяющая уравнению

$$D_m(h\beta) * G_m(h\beta) = \delta_d(h\beta), \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} G_m(h\beta) = \\ = \frac{\text{sign}(h\beta)}{2m^2} \sum_{k=1}^m \left[(1-m)e^{h\beta \cos \frac{(2k-1)\pi}{m}} \cos \left(h\beta \sin \left(\frac{(2k-1)\pi}{m} \right) + \frac{(2k-1)\pi}{m} \right) + \right. \\ \left. + h\beta e^{h\beta \cos \frac{(2k-1)\pi}{m}} \cos \left(h\beta \sin \left(\frac{(2k-1)\pi}{m} \right) + \frac{2\pi \cdot (2k-1)}{m} \right) \right], \end{aligned} \quad (14)$$

$\delta_d(h\beta)$ - дискрет дельта-функция, т.е., $\delta_d(h\beta) = \begin{cases} 1, & \beta = 0, \\ 0, & \beta \neq 0. \end{cases}$

Следует отметить, что метод построения дискретной функции аргумента $D_m(h\beta)$ аналогично методу построения дискретных аналогов дифференциальных операторов $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}$, $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}} - \frac{d^{2m-2}}{dx^{2m-2}}$, $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}} + 2\omega^2 \frac{d^{2m-2}}{dx^{2m-2}} + \omega^4 \frac{d^{2m-4}}{dx^{2m-4}}$ и $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}} - 1$ в работах [13–16].

Дискретная функция $D_m(h\beta)$ играет важную роль при вычислении коэффициентов оптимальных интерполяционных в пространстве $W_2^{(m,0)}$. Отметим, что уравнение (13) является дискретным аналогом следующего уравнения

$$\left(\frac{d^{2m}}{dx^{2m}} + 2\frac{d^m}{dx^m} + 1 \right) G_m(x) = \delta(x), \quad (15)$$

где $G_m(x)$ определяется равенством (14), δ - дельта-функция Дирака.

Справедлива следующая

Теорема 1. Дискретный аналог дифференциального оператора $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}} + 2\frac{d^m}{dx^m} + 1$ удовлетворяющий равенству (13), при m — четном, имеет вид

$$D_m(h\beta) = \frac{m^2}{K} \cdot \begin{cases} \sum_{k=1}^{m-1} A_k^* \cdot \lambda_k^{|\beta|-1}, & |\beta| \geq 2, \\ 1 + \sum_{k=1}^{m-1} A_k^*, & |\beta| = 1, \\ M_1 - \frac{K_1}{K} + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{A_k^*}{\lambda_k}, & \beta = 0. \end{cases} \quad (16)$$

где K, K_1, M_1, A_k^* и λ_k определены в работе [17].

Теорема 2. Дискретный аналог $D_m(h\beta)$ дифференциального оператора $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}} + 2\frac{d^m}{dx^m} + 1$ удовлетворяет равенствам

- 1) $D_m(h\beta) * e^{h\beta \cos \frac{(2k-1)\pi}{m}} \cos \left(h\beta \sin \frac{(2k-1)\pi}{m} \right) = 0,$
 - 2) $D_m(h\beta) * e^{h\beta \cos \frac{(2k-1)\pi}{m}} \sin \left(h\beta \sin \frac{(2k-1)\pi}{m} \right) = 0,$
 - 3) $D_m(h\beta) * h\beta e^{h\beta \cos \frac{(2k-1)\pi}{m}} \cos \left(h\beta \sin \frac{(2k-1)\pi}{m} \right) = 0,$
 - 4) $D_m(h\beta) * h\beta e^{h\beta \cos \frac{(2k-1)\pi}{m}} \sin \left(h\beta \sin \frac{(2k-1)\pi}{m} \right) = 0,$
- где $k = 1, 2, \dots, \frac{m}{2}$, m - четное натуральное число.

Приведенные теоремы доказаны в работе [17].

3 Решение дискретной системы Винера-Хопфа

В этом параграфе мы даем алгоритм нахождения точного решения системы (9)-(11) с помощью дискретного аналога $D_m(h\beta)$ дифференциального оператора $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}} + 2\frac{d^m}{dx^m} + 1$, полученный в предыдущем разделе.

Введем функции

$$\vartheta(h\beta) = C_\beta(z) * G_m(h\beta) \quad (17)$$

и

$$u(h\beta) = \vartheta(h\beta) + Y_m(h\beta, r_{1,k}, r_{2,k}), \quad (18)$$

где

$$Y_m(h\beta, r_{1,k}, r_{2,k}) = \sum_{k=1}^{\frac{m}{2}} e^{h\beta \cos \frac{(2k-1)\pi}{m}} \left[r_{1,k} \cos \left(h\beta \sin \frac{(2k-1)\pi}{m} \right) + r_{2,k} \sin \left(h\beta \sin \frac{(2k-1)\pi}{m} \right) \right], \quad (19)$$

$r_{1,k}, r_{2,k}$, $k = 1, 2, \dots, \frac{m}{2}$ - неизвестные.

Тогда, учитывая (13), для оптимальных коэффициентов $C_\beta(z)$ имеем

$$C_\beta(z) = D_m(h\beta) * u(h\beta). \quad (20)$$

Значит, если мы находим функцию $u(h\beta)$, то оптимальные коэффициенты определяются из формулы (20).

Для того чтобы вычислить свертку (20), требуется найти представление функции $u(h\beta)$ при всех целых значениях аргумента β . Из равенства (9) видно, что $u(h\beta) = G_m(z - h\beta)$ при $h\beta \in [0, 1]$.

$$\begin{aligned} \vartheta(h\beta) = & -\frac{1}{2m^2} \sum_{\gamma=0}^N C_\gamma \sum_{n=1}^m \left[(1-m) e^{(h\beta-h\gamma) \cos \frac{(2n-1)\pi}{m}} \cos \left((h\beta-h\gamma) \sin \frac{(2n-1)\pi}{m} + \frac{(2n-1)\pi}{m} \right) \right. \\ & \left. + (h\beta-h\gamma) e^{(h\beta-h\gamma) \cos \frac{(2n-1)\pi}{m}} \cos \left((h\beta-h\gamma) \sin \frac{(2n-1)\pi}{m} + \frac{2\pi(2n-1)}{m} \right) \right]. \end{aligned} \quad (21)$$

Используя равенства (10)-(11), после некоторых упрощений при $\beta < 0$ приводим выражение (21) к виду

$$\vartheta(h\beta) = -\frac{1}{2m^2} Q(h\beta) - Y_m(h\beta, q_{1,k}, q_{2,k}),$$

где

$$Q(h\beta) = \sum_{k=1}^{\frac{m}{2}} e^{(z-h\beta) \cos \frac{(2k-1)\pi}{m}} \left[(m-1) \cos \left((z-h\beta) \sin \frac{(2k-1)\pi}{m} + \frac{(2k-1)\pi}{m} \right) - \right. \\ \left. - h\beta \cos \left((z-h\beta) \sin \frac{(2k-1)\pi}{m} + \frac{2\pi(2k-1)}{m} \right) \right], \quad (22)$$

$$Y_m(h\beta, q_{1,k}, q_{2,k}) = \sum_{k=1}^{\frac{m}{2}} \left[(m-1) e^{h\beta \cos \frac{(2k-1)\pi}{m}} \left[q_{1,k} \cos \left(h\beta \sin \frac{(2k-1)\pi}{m} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + q_{2,k} \sin \left(h\beta \sin \frac{(2k-1)\pi}{m} \right) \right] - R_m(h\beta) \right], \quad (23)$$

где $q_{1,k}, q_{2,k}, k = 1, 2, \dots, \frac{m-1}{2}$ - неизвестные и

$$R_m(h\beta) = h\beta \sum_{\gamma=0}^N C_\gamma e^{(h\beta-h\gamma) \cos \frac{(2k-1)\pi}{m}} \cos \left((h\beta-h\gamma) \sin \frac{(2k-1)\pi}{m} + \frac{2\pi(2k-1)}{m} \right) + \\ + \sum_{\gamma=0}^N C_\gamma(h\gamma) e^{(h\gamma-h\beta) \cos \frac{(2k-1)\pi}{m}} \cos \left((h\gamma-h\beta) \sin \frac{(2k-1)\pi}{m} + \frac{2\pi(2k-1)}{m} \right).$$

Вычисления показывают, что $\vartheta(h\beta)$ при $\beta > N$ имеет вид

$$\vartheta(h\beta) = \frac{1}{2m} Q(h\beta) + Y_m(h\beta, q_{1,k}, q_{2,k}).$$

Используя последние два выражения для $\vartheta(h\beta)$ и учитывая (18), мы имеем

$$u(h\beta) = \begin{cases} -\frac{1}{2m} Q(h\beta) + Y_m(h\beta, r_{1,k}, r_{2,k}) - Y_m(h\beta, q_{1,k}, q_{2,k}), & \beta < 0, \\ \frac{1}{2m} Q(h\beta) + Y_m(h\beta, r_{1,k}, r_{2,k}) + Y_m(h\beta, q_{1,k}, q_{2,k}), & \beta > N, \end{cases} \quad (24)$$

где $Y_m(h\beta, r_{1,k}, r_{2,k})$ и $Y_m(h\beta, q_{1,k}, q_{2,k})$ определяются (19) и (23), соответственно. Здесь $r_{1,k}, r_{2,k}$ и $q_{1,k}, q_{2,k}$ - неизвестные.

Обозначим

$$\begin{aligned} r_{1,k}^- &= r_{1,k} - q_{1,k}, & r_{2,k}^- &= r_{2,k} - q_{2,k}, & k &= 1, 2, \dots, \frac{m}{2}, \\ r_{1,k}^+ &= r_{1,k} + q_{1,k}, & r_{2,k}^+ &= r_{2,k} + q_{2,k}, & k &= 1, 2, \dots, \frac{m}{2}. \end{aligned} \quad (25)$$

Если мы найдем неизвестные $r_{1,k}^-, r_{2,k}^-$ и $r_{1,k}^+, r_{2,k}^+, k = 1, 2, \dots, \frac{m}{2}$, то из (25) получаем $r_{1,k}, r_{2,k}$ и $q_{1,k}, q_{2,k}, k = 1, 2, \dots, \frac{m}{2}$ следующим образом

$$\begin{aligned} r_{1,k} &= \frac{1}{2}(r_{1,k}^+ + r_{1,k}^-), & r_{2,k} &= \frac{1}{2}(r_{2,k}^+ + r_{2,k}^-), & k &= 1, 2, \dots, \frac{m}{2}, \\ q_{1,k} &= \frac{1}{2}(r_{1,k}^+ - r_{1,k}^-), & q_{2,k} &= \frac{1}{2}(r_{2,k}^+ - r_{2,k}^-), & k &= 1, 2, \dots, \frac{m}{2}. \end{aligned} \quad (26)$$

Так как при $\beta < 0$ и $\beta > N$ коэффициенты $C_\beta(z) = 0$, то из (21) при $r_{1,k}^-, r_{2,k}^-$ и $r_{1,k}^+, r_{2,k}^+, k = 1, 2, \dots, \frac{m}{2}$ получаем следующую систему $2m$ линейных уравнений

$$D_m(h\beta) * u(h\beta) = 0 \text{ for } \beta = -1, -2, \dots, -m \text{ and } \beta = N+1, N+2, \dots, N+m.$$

Решение последней системы с учетом (25) и (26) из равенств (9) и (24) мы получаем следующий явный вид для $u(h\beta)$:

$$u(h\beta) = \begin{cases} -\frac{1}{2m}Q(h\beta) + Y_m(h\beta, r_{1,k}^-, r_{2,k}^-), & \beta < 0, \\ G_m(z - h\beta), & \beta = 0, 1, \dots, N, \\ \frac{1}{2m}Q(h\beta) + Y_m(h\beta, r_{1,k}^+, r_{2,k}^+), & \beta > N. \end{cases} \quad (27)$$

Тогда получим коэффициенты $C_\beta(z)$ оптимальных интерполяционных формул вида (1) следующим образом

$$C_\beta(z) = D_m(h\beta) * u(h\beta), \quad \beta = 0, 1, \dots, N.$$

Таким образом, построение оптимальных интерполяционных формул вида (1) в пространстве $W_2^{(m,0)}$ для нечетных натуральных чисел m решено.

Замечания 1. Следует отметить, что при $m = 2$, реализуя приведенный выше алгоритм, мы получаем оптимальную интерполяционную формулу в пространстве $W_2^{(2,0)}$ который был построен в работе [18].

Замечания 2. Заметим, что используя дискретный аналог $D_2(h\beta)$ оператора $\frac{d^4}{dx^4} + 2\frac{d^2}{dx^2} + 1$, соответствующий случаю $m = 2$, получаем интерполяционный сплайн $S_2(x)$ минимизирующий полунорму в пространстве $W_2^{(2,0)}$, полученный в теореме 3.1 из [19].

В следующем разделе мы реализуем этот алгоритм в случае $m = 2$.

4 Коэффициенты оптимальной интерполяционной формулы в пространстве $W_2^{(2,0)}$

В этом параграфе мы приводим результаты реализации алгоритма построения оптимальной интерполяционной формулы (1) в пространстве $W_2^{(m,0)}$ в случае $m = 2$.

Напомним, что в случае $m = 2$ мы получаем результат теоремы 3 из [18].

При $m = 2$ система (9)-(11) имеет вид

$$C_\beta(z) * G_2(h\beta) + r_1 \sin(h\beta) + r_2 \cos(h\beta) = G_2(z - h\beta), \quad \beta = \overline{0, N}, \quad (28)$$

$$\sum_{\gamma=0}^N C_\gamma(z) \sin(x_\gamma) = \sin(z), \quad (29)$$

$$\sum_{\gamma=0}^N C_\gamma(z) \cos(x_\gamma) = \cos(z). \quad (30)$$

где

$$G_2(h\beta) = \frac{\operatorname{sgn}(h\beta)}{4} [\sin(h\beta) - h\beta \cos(h\beta)],$$

$$G_2(z - h\beta) = \frac{\operatorname{sgn}(z - h\beta)}{4} [\sin(z - h\beta) - (z - h\beta) \cos(z - h\beta)].$$

В работе [18] решена система (28) - (30) и доказана следующая теорема:

Теорема 3. Коэффициенты оптимальных интерполяционных формул вида (1) с равноотстоящими узлами в пространстве $W_2^{(2,0)}$ имеют следующий вид

$$C_0(z) = p_1 \left[p_2 G_2(z) + G_2(z-h) + G_2(z+h) - \left(a_1^- + \frac{\cos(z)+z \sin(z)}{4} \right) \cdot \sin(h) + \right. \\ \left. + \frac{A}{\lambda} \left[\sum_{\gamma=0}^N \lambda^\gamma G_2(z-h\gamma) + M_1 + \lambda^N N_1 \right] \right], \quad (31)$$

$$C_\beta(z) = p_1 \left[G_2(z-h(\beta-1)) + p_2 G_2(z-h\beta) + G_2(z-h(\beta+1)) + \right. \\ \left. + \frac{A}{\lambda} \left[\sum_{\gamma=0}^N \lambda^{|\beta-\gamma|} G_2(z-h\gamma) + \lambda^\beta M_1 + \lambda^{N-\beta} N_1 \right] \right], \quad \beta = 1, 2, \dots, N-1. \quad (32)$$

$$C_N(z) = p_1 \left[p_2 G_2(z-1) + G_2(z-1-h) + \frac{4a_1^+ - \cos(z) - z \sin(z)}{4 \cos 1} \cdot \sin(h) + \right. \\ \left. + G_2(z-1+h) + \frac{A}{\lambda} \left[\sum_{\gamma=0}^N \lambda^{N-\gamma} G_2(z-h\gamma) + \lambda^N M_1 + N_1 \right] \right], \quad (33)$$

$$r_k = \frac{1}{2}(a_k^- + a_k^+), \quad k = 1, 2, \quad (34)$$

где

$$M_1 = \frac{\lambda}{\lambda^2 - 2\lambda \cos(h) + 1} \cdot \left[G_2(z+h) + h \cos(z+h) - \lambda G_2(z) - a_1^- \sin(h) - \right. \\ \left. - \frac{1}{4}(\cos(z) + z \sin(z)) \sin(h) \right] - \frac{1}{4} \sum_{\gamma=1}^{\infty} \lambda^\gamma \cdot (h\gamma) \cdot \cos(z+h\gamma), \quad (35)$$

$$N_1 = \frac{\lambda}{\lambda^2 - 2\lambda \cos(h) + 1} \cdot \left[\frac{4a_1^+ - \cos(z) - z \sin(z)}{4 \cos 1} \sin(h) + G_2(z-1-h) + \right. \\ \left. + h \cos(z-1-h) - \lambda G_2(z-1) \right] - \frac{1}{4} \sum_{\gamma=1}^{\infty} \lambda^\gamma \cdot (h\gamma) \cdot \cos(z-1-h\gamma), \quad (36)$$

и $p_1, p_2, \lambda, a_1^-, a_1^+$ известные.

Отметим, что оптимальная интерполяционная формула вида (1) с коэффициентами, указанными в теореме 3, точна для тригонометрических функций $\sin(x)$ и $\cos(x)$.

5 Численные результаты

В этом параграфе мы приводим некоторые численные результаты которые получены в работе [22]. Во-первых, при $N = 5$ с помощью теоремы 3 получаем графики коэффициентов оптимальной интерполяционной формулы

$$\varphi(z) \cong \mathring{P}_\varphi(z) = \sum_{\beta=0}^5 \mathring{C}_\beta(z) \varphi(h\beta), \quad z \in [0, 1],$$

в случае $m = 2$. Приведем графические результаты для случая $N = 5$ и $m = 2$, т.е. для оптимальных коэффициентов справедливо следующее

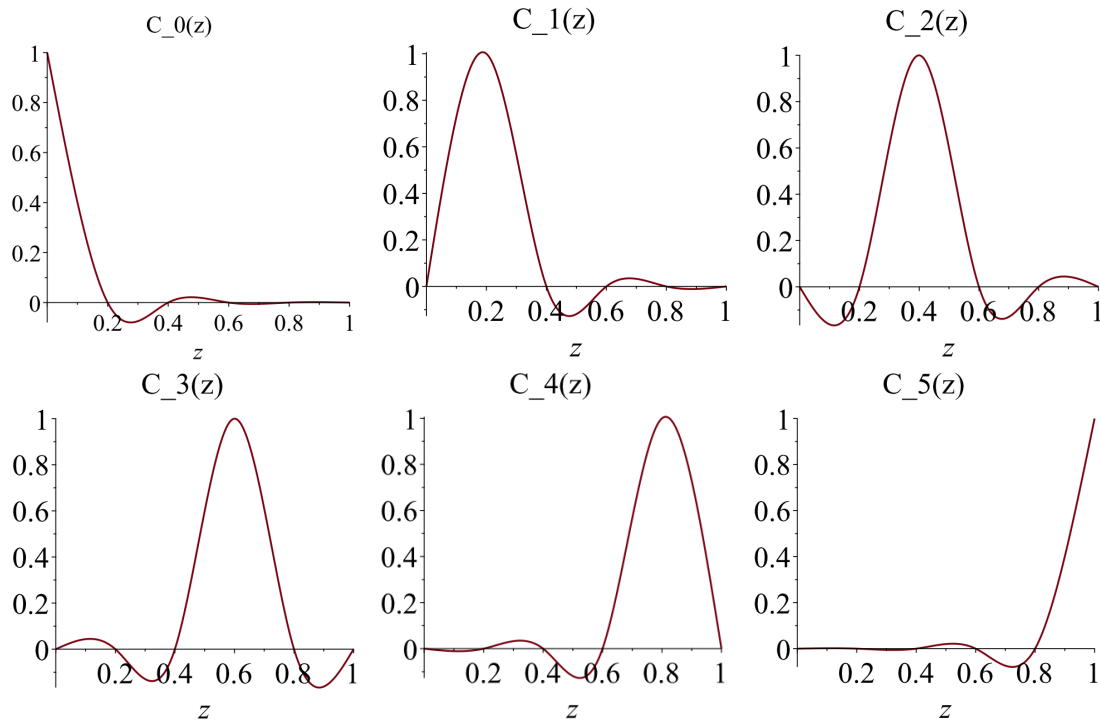


Рис. 1 Графики коэффициентов формулы (1) при $m = 2$, $N = 5$.

Эти графические результаты подтверждают *Замечание 2* для случая $N = 5$, т.е. для оптимальных коэффициентов справедливы

$$\mathring{C}_\beta(h\gamma) = \delta_{\beta\gamma}, \quad \beta, \gamma = 0, 1, \dots, 5,$$

где $\delta_{\beta\gamma}$ — символ Кронекера.

Теперь в численных примерах интерполируем функции $\varphi_1(z) = z^2$, $\varphi_2(z) = e^{2z}$ и $\varphi_3(z) = \sin z$ по оптимальной интерполяционной формуле вида (1) в случае $m = 2$ и $N = 5, 10$, используя теорему 3.

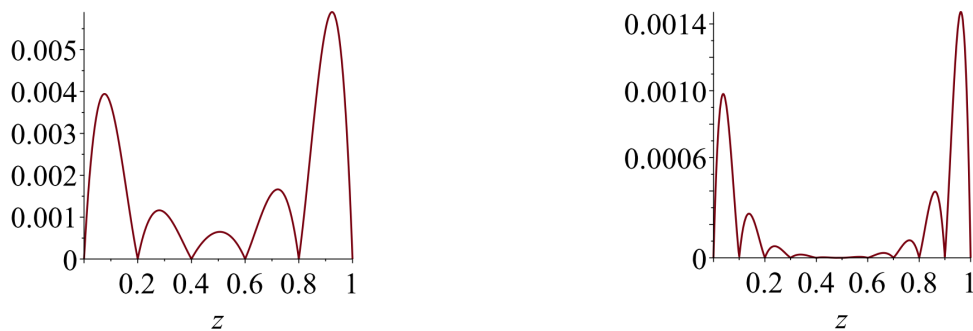


Рис. 2 Графики абсолютных погрешностей $N = 5$ и $N = 10$: $|z^2 - P_{\varphi_1}(z)|$.

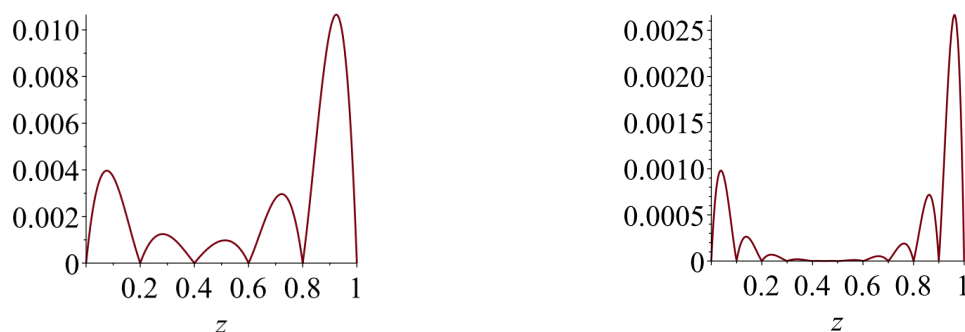


Рис. 3 Графики абсолютных погрешностей $N = 5$ и $N = 10$: $|\exp(z) - P_{\varphi_2}(z)|$.

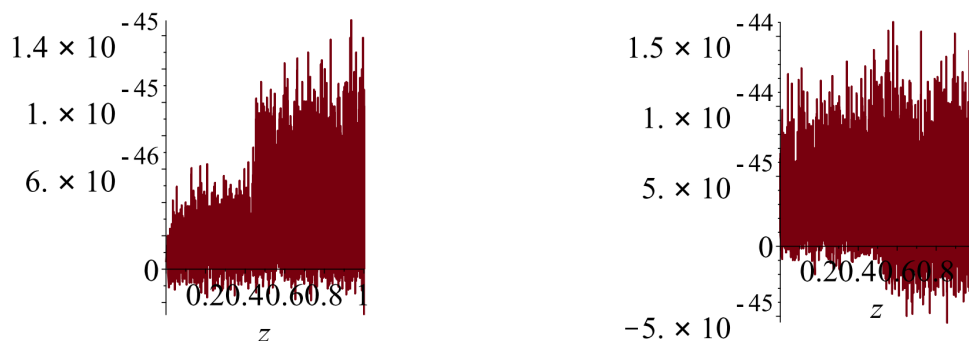


Рис. 4 Графики абсолютных погрешностей $N = 5$ и $N = 10$: $|\sin(z) - P_{\varphi_3}(z)|$.

Для функций φ_i , $i = 1, 2$ графики абсолютных погрешностей $|\varphi_i(z) - \overset{\circ}{P}_{\varphi_i}(z)|$, $i = 1, 2$, приведены на рисунках 2 и 3. На этих рисунках видно, что с увеличением значений N абсолютные погрешности между формулами оптимальной интерполяции и заданными функциями уменьшаются. Рисунок 4 показывает точность нашей оптимальной интерполяционной формулы для функции $\sin(x)$.

6 Заключение

Таким образом, в настоящей работе мы с использованием метода Соболева привели алгоритм для решений системы алгебраических уравнений для коэффициентов интерполяционных формул вида (1). Решая систему (9)-(11) при $m = 2$, мы получили явное выражение для оптимальных коэффициентов $\overset{\circ}{C}_\beta(z)$ и с помощью этих коэффициентов мы построили оптимальную интерполяционную формулу вида (1) в пространстве $W_2^{(1,0)}(0,1)$. Отметим, что оптимальная интерполяционная формула вида (1) в пространстве $W_2^{(2,0)}(0,1)$, точна для тригонометрических функций $\sin(x)$ и $\cos(x)$.

Литература

- [1] Ahlberg J.H., Nilson E.N., Walsh J.L. The theory of splines and their applications. New York: Academic Press, – 1967. – 316 p.
- [2] de Boor C. Best approximation properties of spline functions of odd degree. J. Math. Mech. – 1963. – vol.12. – P. 747–749.
- [3] de Boor C. A practical guide to splines. New York Heidelberg Berlin: Springer, – 1978. – 342 p.
- [4] Лоран П.Ж. Аппроксимация и оптимизация. М.: Мир, – 1975. – 496 с.

- [5] *Mastroianni G., Milovanović G.V.* Interpolation processes. Basic theory and applications. — Berlin: Springer, — 2008. — 262 p.
- [6] *Schoenberg I.J.* On trigonometric spline interpolation. J. Math. Mech. — 1964. — vol. 13. — P. 795–825.
- [7] *Schumaker L.L.* Spline functions: basic theory. Cambridge: Cambridge University Press, — 2007. — 600 p.
- [8] *Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н.* Сплайны в вычислительной математике. М.: Наука, — 1976. — 248 с.
- [9] *Василенко В.А.* Сплайн-функции: теория, алгоритмы, программы. Новосибирск: Наука, — 1983. — 215 с.
- [10] *Болтаев А.К., Шоназаров С.К.* Система для нахождения оптимальных коэффициентов интерполяционных формул. Проблемы вычислительной и прикладной математики. — 2022. — №5/1(44), — С. 54–63.
- [11] *Соболев С.Л.* Введение в теорию кубатурных формул. М. Наука, — 1974. — 808 с.
- [12] *Соболев С.Л., Васкевич В.Л.* Теория кубатурных формул. СО АН России. Новосибирск, — 1996. — 484 с.
- [13] *Шадиметов Х.М.* Дискретный аналог оператора и его построения. Проблемы вычислительной и прикладной математики. — 1985. — № 79. — С. 22–35.
- [14] *Shadimetov Kh.M., Hayotov A.R.* Optimal quadrature formulas in the sense of Sard in $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ space. Calcolo, — 2014. 51, — № 2, — P. 211–243.
- [15] *Hayotov A.R.* The discrete analogue of a differential operator and its applications. Lithuanian Mathematical Journal, — 2014. 54, — № 3. — P. 290–307.
- [16] *Boltaev A.K., Hayotov A.R., Shadimetov Kh.M.* Construction of optimal quadrature formulas exact for exponential-trigonometric functions by Sobolev's method. Acta Mathematica Sinica, English series, — 2021. 37, — № 7. — P. 1066–1088.
- [17] *Shadimetov Kh., Boltaev A., Parovik R.* Optimization of the approximate integration formula using the discrete analogue of a high-order differential operator. Mathematics, — 2023. 11, 3114.
- [18] *Boltaev A.K., Shadimetov Kh.M., Parovik R.I.* Construction of optimal interpolation formula exact for trigonometric functions by Sobolev's method. Вестник Краунц, Физмат, науки, — 2022. Т38, №1, — С. 131–146.
- [19] *Hayotov A.R., Milovanović G.V., Shadimetov Kh.M.* Interpolation splines minimizing a semi-norm. Calcolo, — 2014. 51, — № 2. — P. 245–260.

Поступила в редакцию 15.08.2024

UDC 519.652

ON ONE MODIFICATION OF THE SOBOLEV METHOD FOR APPROXIMATING A FUNCTION

Boltaev A.K.

aziz_boltayev@mail.ru.

V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics,
9, University str., Tashkent, 100174 Uzbekistan;
National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek,
4, University street, Tashkent, 100174 Uzbekistan.

In spline theory, there are algebraic and variational approaches. In the algebraic approach, splines are considered as some smooth piecewise polynomial functions. In the variational approach, splines are understood as elements of a Hilbert or Banach space that minimize certain functionals. Then, the problems of existence, uniqueness, and convergence of splines and algorithms for constructing them based on the proper properties of splines are studied. In this paper, we study the problem of constructing optimal interpolation formulas in a Hilbert space. Here, using the Sobolev method, an algorithm is given for solving a system of linear algebraic equations for the coefficients of optimal interpolation formulas. An explicit expression for the optimal coefficients of an interpolation formula in a Hilbert space is obtained.

Keywords: Hilbert space, extremal function, error functional, interpolation formula.

Citation: Boltaev A.K. 2024. On one modification of the Sobolev method for approximating a function. *Problems of Computational and Applied Mathematics*. 4/2(60): 33-44.

ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

№ 4/2(60) 2024

Журнал основан в 2015 году.

Издается 6 раз в год.

Учредитель:

Научно-исследовательский институт развития цифровых технологий и
искусственного интеллекта.

Главный редактор:

Равшанов Н.

Заместители главного редактора:

Азамов А.А., Арипов М.М., Шадиметов Х.М.

Ответственный секретарь:

Ахмедов Д.Д.

Редакционный совет:

Азамова Н.А., Алоев Р.Д., Амиргалиев Е.Н. (Казахстан), Бурнашев В.Ф.,
Загребина С.А. (Россия), Задорин А.И. (Россия), Игнатьев Н.А.,
Ильин В.П. (Россия), Исмагилов И.И. (Россия), Кабанихин С.И. (Россия),
Карачик В.В. (Россия), Курбонов Н.М., Маматов Н.С., Мирзаев Н.М.,
Мирзаева Г.Р., Мухамадиев А.Ш., Назирова Э.Ш., Нормуродов Ч.Б.,
Нуралиев Ф.М., Опанасенко В.Н. (Украина), Расулмухамедов М.М., Расулов А.С.,
Садуллаева Ш.А., Старовойтов В.В. (Беларусь), Хаётов А.Р., Халджигитов А.,
Хамдамов Р.Х., Хужаев И.К., Хужаеров Б.Х., Чье Ен Ун (Россия),
Шабозов М.Ш. (Таджикистан), Dimov I. (Болгария), Li Y. (США),
Mascagni M. (США), Min A. (Германия), Schaumburg H. (Германия),
Singh D. (Южная Корея), Singh M. (Южная Корея).

Журнал зарегистрирован в Агентстве информации и массовых коммуникаций при
Администрации Президента Республики Узбекистан.

Регистрационное свидетельство №0856 от 5 августа 2015 года.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

При перепечатке материалов ссылка на журнал обязательна.

За точность фактов и достоверность информации ответственность несут авторы.

Адрес редакции:

100125, г. Ташкент, м-в. Буз-2, 17А.

Тел.: +(998) 712-319-253, 712-319-249.

Э-почта: journals@airi.uz.

Веб-сайт: <https://journals.airi.uz>.

Дизайн и вёрстка:

Шарипов Х.Д.

Отпечатано в типографии НИИ РЦТИИ.

Подписано в печать 09.09.2024 г.

Формат 60x84 1/8. Заказ №6. Тираж 100 экз.

PROBLEMS OF COMPUTATIONAL AND APPLIED MATHEMATICS

No. 4/2(60) 2024

The journal was established in 2015.
6 issues are published per year.

Founder:

Digital Technologies and Artificial Intelligence Development Research Institute.

Editor-in-Chief:

Ravshanov N.

Deputy Editors:

Azamov A.A., Aripov M.M., Shadimetov Kh.M.

Executive Secretary:

Akhmedov D.D.

Editorial Council:

Azamova N.A., Alov R.D., Amirgaliev E.N. (Kazakhstan), Burnashev V.F.,
Zagrebina S.A. (Russia), Zadorin A.I. (Russia), Ignatiev N.A., Ilyin V.P. (Russia),
Ismagilov I.I. (Russia), Kabanikhin S.I. (Russia), Karachik V.V. (Russia), Kurbonov
N.M., Mamatov N.S., Mirzaev N.M., Mirzaeva G.R., Mukhamadiev A.Sh., Nazirova
E.Sh., Normurodov Ch.B., Nuraliev F.M., Opanasenko V.N. (Ukraine), Rasulov A.S.,
Sadullaeva Sh.A., Starovoitov V.V. (Belarus), Khayotov A.R., Khaldjigitov A.,
Khamdamov R.Kh., Khujaev I.K., Khujayorov B.Kh., Chye En Un (Russia),
Shabozov M.Sh. (Tajikistan), Dimov I. (Bulgaria), Li Y. (USA), Mascagni M. (USA),
Min A. (Germany), Schaumburg H. (Germany), Singh D. (South Korea),
Singh M. (South Korea).

The journal is registered by Agency of Information and Mass Communications under the
Administration of the President of the Republic of Uzbekistan.

The registration certificate No. 0856 of 5 August 2015.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

At a reprint of materials the reference to the journal is obligatory.

Authors are responsible for the accuracy of the facts and reliability of the information.

Address:

100125, Tashkent, Buz-2, 17A.

Tel.: +(998) 712-319-253, 712-319-249.

E-mail: journals@airi.uz.

Web-site: <https://journals.airi.uz>.

Layout design:

Sharipov Kh.D.

DTAIDRI printing office.

Signed for print 09.09.2024

Format 60x84 1/8. Order No. 6. Printed copies 100.

Содержание

Шадиметов Х.М., Жабборов Х.Х.

Оптимальная квадратурная формула для приближенного вычисления сингулярных интегралов с ядром Гильберта 5

Исматуллаев Г.П., Бахромов С.А., Мирзакабилов Р.Н.

Построение кубатурной формулы пятой степени точности, содержащей значения частных производных 15

Ахмедов Д.М., Авезов А.Х., Хакимова И.К.

Оптимальные квадратурные формулы для гиперсингулярных интегралов в пространстве Соболева 24

Болтаев А.К.

Об одной модификации метода Соболева для приближения функции 33

Ахмадалиев Г.Н.

Точная верхняя оценка погрешности квадратурных формул в гильбертовом пространстве $K_{2,\omega}^{(m)}$ 45

Шадиметов Х.М., Гуломов О.Х.

Оптимальные квадратурные формулы для вычисления интегралов от быстроосциллирующих функций 56

Нуралиев Ф.А., Кузиев Ш.С., Джураева К.А.

Приближенное решение интегрального уравнения Фредгольма второго рода методом оптимальных квадратур 66

Шадиметов Х.М., Усманов Х.И.

Оптимальная аппроксимация операторов со степенно-логарифмическими ядрами 74

Хаётов А.Р., Нафасов А.Ю., Бердимуратова У.А.

Оптимальные интерполяционные формулы с производной в пространстве $W_2^{(2,1)}(0,1)$ 90

Бабаев С.С.

Весовая оптимальная квадратурная формула с производными в гильбертовом пространстве 99

Абдураходов А.А.

Оптимальная аппроксимация интегралов Фурье методом фи-функций 108

Шадиметов Х.М., Усманов Х.И.

Сравнение результатов приближенного решения линейных интегральных уравнений Фредгольма второго рода различными методами 118

Юсупов М.

Исследование нелинейной вязкоупругой виброзащитной системы 134

Contents

Shadimetov Kh.M., Jabborov Kh.Kh.

Optimal quadrature formula for approximate calculation of singular integrals with Hilbert kernel 5

Ismatullaev G.P., Bakhromov S.A., Mirzakabilov R.N.

Construction of a cubature formula of the fifth degree of accuracy containing the values of partial derivatives 15

Akhmedov D.M., Avezov A.Kh., Hakimova I.K.

Optimal quadrature formulas for hypersingular integrals in the Sobolev space . . 24

Boltaev A.K.

On one modification of the Sobolev method for approximating a function 33

Akhmadaliev G.N.

A sharp upper bound for the error of quadrature formulas in Hilbert space $K_{2,\omega}^{(m)}$ 45

Shadimetov Kh.M., Gulomov O.Kh.

Optimal quadrature formulas for calculating integrals of rapidly oscillating functions 56

Nuraliev F.A., Kuziev Sh.S., Djuraeva K.A.

Approximate solution Fredholm integral equation of the second kind by the optimal quadrature method 66

Shadimetov Kh.M., Usmanov Kh.I.

Optimal approximation of operators with power-logarithmic kernels 74

Hayotov A.R., Nafasov A.Y., Berdimuradova U.A.

An optimal interpolation formulas with derivative in the space $W_2^{(2,1)}$ 90

Babaev S.S.

The weighted optimal quadrature formula with derivatives in the Hilbert space . 99

Abduakhadov A.A.

Optimal approximation of Fourier integrals by the phi-function method 108

Shadimetov Kh.M., Usmanov Kh.I.

Comparison of the results of the approximate solution of linear Fredholm integral equations of the second kind by various methods 118

Yusupov M.

Study of nonlinear viscoelastic vibration protection system 134