UDC 515.124

A COMMON FIXED POINT RESULT FOR COMPATIBLE MAPPINGS OF TYPE (K) IN INTUITIONISTIC FUZZY METRIC SPACE

Jha K., Manandhar K.B.
jhakn@ku.edu.np
School of Science, Kathmandu University,
Dhulikhel, 45200 Nepal.

The purpose of the paper is to establish a common fixed point theorem for compatible mappings of type (K) in a complete intuitionistic fuzzy Metric space with example which generalizes and improves various well-known comparable results in literature.

Keywords: fuzzy metric space, compatible mappings of type (K), common fixed point.

Citation: Jha K., Manandhar K.B. 2024. A common fixed point result for compatible mappings of type (K) in intuitionistic fuzzy metric space. *Problems of Computational and Applied Mathematics.* 4/1(59): 134-141.

1 Introduction

The fixed point theory is an important area of non-linear functional analysis. The study of common fixed point of mappings in fuzzy metric space satisfying certain contractive type conditions has been at the center of vigorous research activity. The concept of fuzzy set was introduced by L.A. Zadeh [21] in 1965. With the concept of fuzzy sets, the fuzzy metric space was introduced by O. Kramosil and J. Michalek [9] in 1975. In 1986, G. Jungck [7] introduced compatible type mapping in metric space. Also, in 1988, G. Grabiec [4] proved the contraction principle in the setting of the fuzzy metric space which was the further generalization of the results by P.V. Subrahmanyam [19] for commuting type mappings. Again, A. George and P. Veeramani [3] modified the notion of fuzzy metric spaces with the help of continuous t-norms.

In 1998, Y.J. Cho, H.K. Pathak, S.M. Kang and J.S. Jung [2] introduced the concept of compatible mappings in fuzzy metric space. Then, in 2004, the intuitionistic fuzzy metric space have been introduced by J.H. Park [13] with the help of continuous t-norm and continuous t-conorm as a generalization of fuzzy metric space. Again, K. Jha, V. Popa and K. B. Manandhar [6] introduced the concept of compatible mappings of type (K) in metric space. Further, in 2014, K. B. Manandhar, K. Jha and Y.J. Cho [11] extended compatible mappings of type (K) in fuzzy metric space.

Recently, K.B. Manandhar and K. Jha [12] have extended the notion of compatible mapping of type (K) in Intuitionistic fuzzy metric space and established a common fixed point theorem for pair of compatible mappings of type(K) in this space. The purpose of this paper is to prove a common fixed point theorem for compatible mappings of type (K) of sequence of self mappings in Intuitionistic fuzzy metric space. Our result generalizes and improves various other similar results of fixed points. We also give an example to illustrate our main result.

2 Statement of the problem

We have used the following notions:

Definition 1. *[21] Let X be any set. A* ***fuzzy set*** *A in X is a function with domain X and values in [0, 1].*

Definition 2. *[15] A binary operation $*: [0,\ 1] \times [0,\ 1] \rightarrow [0,\ 1]$ is a* ***continuous t-norm*** *if $*$ is satisfying the following conditions:*

(a) $*$ *is commutative and associative;*
(b) $*$ *is continuous;*
(c) $a * 1 = a$ *for all* $a \in [0,1]$*;*
(d) $a * b \leqslant c * d$ *whenever* $a \leqslant c$ *and* $b \leqslant d$*, and* $a, b, c, d \in [0,\ 1]$.

Definition 3. *[15] A binary operation $\diamond : [0,\ 1] \times [0,\ 1] \rightarrow [0,\ 1]$ is a* ***continuous t-norm*** *if $\diamond$ is satisfying the following conditions:*

(a) $\diamond$ *is commutative and associative;*
(b) $\diamond$ *is continuous;*
(c) $a \diamond 1 = a$ *for all* $a \in [0,1]$*;*
(d) $a \diamond b \leqslant c \diamond d$ *whenever* $a \leqslant c$ *and* $b \leqslant d$*, and* $a, b, c, d \in [0,\ 1]$.

Definition 4. *[1] A 5-tuple $(X, M, N, *, \diamond)$ is said to be an* ***intuitionistic fuzzy metric space*** *(shortly* ***IFM-Space****) if X is an arbitrary set, $*$ is a continuous t-norm, $\diamond$ is a continuous t-conorm and M, N are fuzzy sets on $X^2 \times (0, \infty)$ satisfying the following conditions: for all $x, y, z \in X$ and $s, t > 0$;*

(IFM-1) $M(x, y, t) + N(x, y, t) \leqslant 1$;

(IFM-2) $M(x,\ y,\ 0) = 0$;

(IFM-3) $M(x,\ y,\ t) = 1$ *if and only if* $x = y$;

(IFM-4) $M(x,\ y,\ t) = M(y,\ x,\ t)$;

(IFM-5) $M(x,\ y,\ t) * M\ (y,\ z,\ s) \leqslant M(x,\ z,\ t + s)$;

(IFM-6) $M(x,\ y,\ .\ ) \colon [0, \infty) \rightarrow [0,\ 1]$ *is left continuous;*

(IFM-7) $\lim_{t \rightarrow \infty} M\ (x,\ y,\ t) = 1$;
and

(IFM-8) $N(x,\ y,\ 0) = 1$;

(IFM-9) $N(x,\ y,\ t) = 0$ *if and only if* $x = y$;

(IFM-10) $N(x,\ y,\ t) = N(y,\ x,\ t)$;

(IFM-11) $N(x,\ y,\ t) \diamond N\ (\underline{y},\ z,\ s) \geqslant N\ (x,\ z,\ t + s)$;

(IFM-12) $N(x,\ y,\ .) \colon [0, \infty) \rightarrow [0,\ 1]$ *is right continuous;*

(IFM-13) $\lim_{t \rightarrow \infty} N(x,\ y,\ t) = 0$

Then $(M,\ N)$ is called an intuitionistic fuzzy metric on X. The functions $M\ (x,\ y,\ t)$ and $N(x,\ y,\ t)$ denote the degree of nearness and degree of non-nearness between x and y with respect to t, respectively.

Remark: [20] Every fuzzy metric space $(X, M,\ \ *)$ is an intuitionistic fuzzy metric space if X is of the form $(X, M, 1-M,\ *,\ \diamond)$ such that t- norm $*$ and t-conorm $\diamond$ are associated, that is, $x\ \diamond\ y\ = 1 - ((1\ -\ x)\ *\ (1\ -\ y))$ for any $x, y \in X$. But the converse is not true.

Example 1. [9] Let (X, d) be a metric space. We denote $a *\ b\ =\ ab$ and $a\ \diamond\ b\ = = \ min\{1, a + b\}$ for all $a,\ b \in\ [0,\ 1]$ and let M_d and N_d be fuzzy sets on $X^2 \times (0, \infty)$ defined as follows:

$$\mathrm{M}_d(x, y, t) = \frac{t}{t + d(x,\quad y)},\ N_d(x, y, t) = \frac{d(x,\quad y)}{t + d(x,\quad y)}.$$

Then (M_d, N_d) is an intuitionistic fuzzy metric on X. We call this intuitionistic fuzzy metric induced by a metric d the standard intuitionistic fuzzy metric.

It is noted that the above example holds even with the t-norm a $*$ b $=$min $\{a, b\}$ and the t-conorm
a$\diamond$b $= \max\{a, b\}$ and hence (M_d, N_d) is an intuitionistic fuzzy metric with respect to any continuous t-norm and continuous t- conorm.

Definition 5. *[1] Let (X, M, N, $*$, $\diamond$) be an intuitionistic fuzzy metric space.*

*(a) A sequence $\{x_n\}$ in X is called **Cauchy sequence** if for each $t > 0$ and $p > 0$, $lim_{n\to\infty} M(x_{n+p}, x_n, t) = 1$ and $lim_{n\to\infty} N(x_{n+p}, x_n, t) = 0$.*
*(b) A sequence $\{x_n\}$ in X is said to be **convergent** to $x \in X$ if $\lim_{n\to\infty} M(x_n, x, t) = 1$ and $lim_{n\to\infty} N(x_n, x, t) = 0$ for each $t > 0$.*
*(c) An intuitionistic fuzzy metric space is said to be **complete** if every Cauchy sequence is convergent.*

Definition 6. *[6] The self mappings A and S of a fuzzy metric space $(X, M, *)$ are said to be **compatible of type(K)** iff $lim_{n\to\infty} M(AAx_n, Sx, t) = 1$ and $lim_{n\to\infty} M(SSx_n, Ax, t) = = 1$, whenever $\{x_n\}$ is a sequence in X such that $lim_{n\to\infty} Ax_n = lim_{n\to\infty} Sx_n = x$ for some x in X and $t > 0$.*

Lemma 1. *[13] Let $(X, M, *)$ be a fuzzy metric space. Then for all x, y in X, $M(x, y, .)$ is non-decreasing.*

Lemma 2. *[17] Let (X, M, N, $*$, $\diamond$) be an intuitionistic fuzzy metric space. If there exists a constant $k \in (0, 1)$ such that*

$$M(y_{n+2}, y_{n+1}, kt) \geqslant M(y_{n+1}, y_n, t), N(y_{n+2}, y_{n+1}, kt) \leqslant N(y_{n+1}, y_n, t)$$

for every $t > 0$ and $n = 1, 2, \ldots$ then $\{y_n\}$, is a Cauchy sequence in X .

Lemma 3. *[16] Let (X, M, *) be a fuzzy metric space with the condition: (FM6)*

$$lim_{n\to\infty} M(x, y, t) = 1.$$

for all x, y in X.
If there exists $k \in (0, 1)$ such that
$M(x, y, kt) \geqslant M(x, y, t)$ then $x = y$.

[11] If A and S be compatible mappings of type (K) on a intuitionistic fuzzy metric space (X, M, N, $*$,$\diamond$) and if one of function is continuous. Then, we have

(i) $A(x) = S(x)$ where $lim_{n\to\infty} Ax_n = x$, $lim_{n\to\infty} Sx_n = x$, for some $x \in X$ and sequence x_n, and
(i) If there exists $u \in X$ such that $Au = Su = x$, then $ASu = SAu$.

3 Main Results

Theorem 4. *Let (X, M, N, $*$,$\diamond$) be a complete intuitionistic fuzzy metric space with continuous t-norm * and continuous t-conorm $\diamond$ defined by $a * a \geqslant a$ and $a \diamond a \leqslant a$ for all $a \in [0, 1]$. Let $\{A_i\}, i = 1, 2, 3, \ldots, S$ and T be self-mappings on X satisfying the following condition:*

(i) $A_1X \subseteq TX, A_iX \subseteq SX$, for $i > 1$
(ii) the pairs (A_1, S) and (A_i, T) for $i > 1$ are compatible mappings of type (K),

(iii) *If A_1, S and one of the mapping of pair (A_i, T) for $i > 1$ is continuous,*
(iv) *there exists $k \in (0,1)$ such that $M(A_1x,\ A_iy,\ kt) \geqslant M(Sx,\ Ty,\ t) * M(A_1x,\ Sx,\ t) * M(A_iy,\ Ty,\ t) * M(A_1x,\ Ty,\ t)$, and $N(A_1x,\ A_iy,\ t) \leqslant N(Sx,\ Ty,\ t) \diamond N(A_1x,\ Sx,\ t) \diamond N(A_iy,\ Ty,\ t) \diamond N(A_1x,\ Ty,\ t)$, for every $x, y \in X$ and $t > 0$.*

Then, all the mappings $\{A_i\}$, S and T have a unique common fixed point in X.

Proof: As $A_1(X) \subseteq T(X)$, for any $x_0 \in X$, there exists a point $x_1 \in X$ such that $Ax_0 = = Tx_1$. Since $A_i(X) \subseteq S(X)$, for this point x_1, we can choose a point $x_2 \in X$ such that $A_ix_1 = Sx_2$. Inductively, we can find a sequence $\{y_n\}$ in X as follows:
$y_{2n-1} = Tx_{2n-1} = A_1x_{2n-2}$ and $y_{2n} = Sx_{2n} = A_ix_{2n-1}$ for all $n = 1, 2, 3, \ldots$
This can be done by (i). By using contractive condition, we obtain

$$\begin{aligned}
M\left(y_{2n+1}, y_{2n+2}, kt\right) &= M\left(A_1x_{2n}, A_ix_{2n+1}, kt\right)\\
&\geqslant M\left(Sx_{2n}, Tx_{2n+1}, t\right) * M\left(A_1x_{2n}, Sx_{2n}, t\right) *\\
&\quad M\left(A_ix_{2n+1}, Tx_{2n+1}, t\right) * M\left(A_1x_{2n}, Tx_{2n+1}, t\right) * M(A_1x_{2n},\\
&\quad A_ix_{2n+1}, t) * M\left(Sx_{2n}, A_ix_{2n+1}, t\right)\\
&= M\left(y_{2n}, y_{2n+1}, t\right) * M\left(y_{2n+1}, y_{2n}, t\right) * M\left(y_{2n}, y_{2n+1}, t\right) *\\
&\quad M\left(y_{2n+1}, y_{2n+1}, t\right) * M\left(y_{2n+1}, y_{2n}, t\right) * M\left(y_{2n}, y_{2n}, t\right)\\
&= M\left(y_{2n}, y_{2n+1}, t\right) * M\left(y_{2n+1}, y_{2n}, t\right) *\\
&\quad M\left(y_{2n}, y_{2n+1}, t\right) * 1 * M\left(y_{2n+1}, y_{2n}, t\right) * 1\\
&= M\left(y_{2n}, y_{2n+1}, t\right),
\end{aligned}$$

That is, $M\left(y_{2n+1}, y_{2n+2}, kt\right) \geqslant M\left(y_{2n}, y_{2n+1}, t\right).$

Similarly,
we have $M\left(y_{2n}, y_{2n+1}, kt\right) \geqslant M\left(y_{2n-1}, y_{2n}, t\right),$
So, we get

$$M\left(y_{n+2}, y_{n+1}, kt\right) \geqslant M\left(y_{n+1}, y_n, t\right). \tag{1}$$

Also, we get

$$\begin{aligned}
N(y_{2n+1}, y_{2n+2}, kt) &= N\left(A_1x_{2n},\ A_ix_{2n+1},\ kt\right)\\
&\leqslant N\left(Sx_{2n}, T x_{2n+1}, t\right) \diamond N\left(A_1x_{2n}, Sx_{2n},\ t\right) \diamond N\left(A_ix_{2n+1} \diamond Tx_{2n+1},\ t\right)\\
&\quad \diamond N\left(A_1\ x_{2n},\ T\ x_{2n+1},\ t\right) \diamond N\ \left(A_1x_{2n},\ A_ix_{2n+1}\ \mathrm{t}\right)\\
&\quad \diamond N\left(Sx_{2n},\ A_ix_{2n+1},\ t\right)\\
&\leqslant N\left(y_{2n},\ y_{2n+1},\ t\right) \diamond N\left(y_{2n+1},\ y_{2n},\ t\right) \diamond N\left(y_{2n},\ y_{2n+1},\ t\right)\\
&\quad \diamond N\left(y_{2n+1},\ y_{2n+1},\ t\right) \diamond N\ \left(y_{2n+1},\ y_{2n},\ t\right) \diamond N\ \left(y_{2n},\ y_{2n},\ t\right)\\
&\leqslant \mathrm{N}\left(y_{2n},\ y_{2n+1},\ t\right) \diamond N\left(y_{2n+1},\ y_{2n},\ t\right) \diamond N\left(y_{2n},\ y_{2n+1},\ t\right) \diamond 0\\
&\quad \diamond N\left(y_{2n+1},\ y_{2n},\ t\right) \diamond 0\\
&= N\ \left(y_{2n},\ y_{2n+1},\ t\right)
\end{aligned}$$

That is, $N\left(y_{2n+1},\ y_{2n+2},\ kt\right) \leqslant N\ \left(y_{2n},\ y_{2n+1},\ t\right).$
Similarly, we have

$$N\left(y_{2n}, y_{2n+1}, kt\right) \leqslant \left(y_{2n-1}, y_{2n}, t\right),$$

So, we get

$$N\left(y_{n+2}, y_{n+1}, kt\right) \leqslant N\left(y_{n+1}, y_n, t\right). \tag{2}$$

From equation(1) and equation(2) and using Lemma 2 , we claim that $\{y_n\}$ is a Cauchy sequence in X.
Since X is complete, therefore sequence $\{y_n\}$ in X converges to z for some z in X and so the sequences $\{Tx_{2n-1}\}$, $\{A_1x_{2n-2}\}$, $\{Sx_{2n}\}$ and $\{A_ix_{2n-1}\}$ for $i > 1$ also converges to z.
Since pair (A_1, S) is compatible mappings of type (K), we have

$$A_1z = Sz, \tag{3}$$

From equation(2), we have $A_1Sx_{2n} \to A_1z$ and from equation(3) we get $A_1Sx_{2n} \to Sz$. Also, using the continuity of S, we have, SS$x_{2n} \to Sz$.
Now, from (iv), we get

$$\begin{aligned} M\left(A_1Sx_{2n}, A_ix_{2n-1}, kt\right) \geqslant\ & M\left(\mathrm{SS}x_{2n}, Tx_{2n-1}, t\right) * M\left(A_1Sx_{2n}, SSx_{2n}, t\right) \\ & * M\left(A_ix_{2n-1}, Tx_{2n-1}, t\right) * M\left(A_1Sx_{2n}, Tx_{2n-1}, t\right), \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} N\left(A_1Sx_{2n}, A_ix_{2n-1}, kt\right) \leqslant\ & N\left(\mathrm{SS}x_{2n}, Tx_{2n-1}, t\right) \diamond N\left(A_1Sx_{2n}, SSx_{2n}, t\right) \\ & \diamond N\left(A_ix_{2n-1}, Tx_{2n-1}, t\right) \diamond N\left(A_1Sx_{2n}, Tx_{2n-1}, t\right). \end{aligned}$$

Proceeding limit as $n \to \infty$, we have

$$M(Sz, z, kt) \geqslant M(Sz, z, t) * M(Sz, Sz, t) * M(z, z, t) * M(Sz, z, t),$$

and

$$N(Sz, z, kt) \leqslant N(Sz, z, t) \diamond N(Sz, Sz, t) \diamond N(z, z, t) \diamond N(Sz, z, t).$$

From Lemma(3), we get $Sz = z$, and hence from equation(3), we get

$$A_1z = Sz = z. \tag{4}$$

Again since (A_i, T) for $i > 1$ is compatible mappings of type (K) and one of the mapping is continuous, we get

$$Tz = A_iz. \tag{5}$$

From (iv), we obtain

$$\begin{aligned} M\left(A_1x_{2n}, A_iz, kt\right) \geqslant\ & M\left(Sx_{2n}, Tz, t\right) * M\left(A_1x_{2n}, Sx_{2n}, t\right) * M\left(A_iz, Tz, t\right) \\ & * M\left(A_1x_{2n}, Tz, t\right), \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} N\left(A_1x_{2n}, A_iz, kt\right) &\leqslant N\left(Sx_{2n}, Tz, t\right) \diamond N\left(A_1x_{2n}, Sx_{2n}, t\right) \diamond N\left(A_iz, Tz, t\right) \\ &\quad \diamond N\left(A_1x_{2n}, Tz, t\right), \end{aligned}$$

Letting $n \to \infty$, we have

$$\begin{aligned} M\left(z, A_iz, kt\right) &\geqslant M(z, Tz, t) * M(z, z, t) * M\left(A_iz, Tz, t\right) * M(z, Tz, t) \\ &= M\left(z, A_iz, t\right) * M(z, z, t) * M\left(A_iz, A_iz, t\right) * M\left(z, A_iz, t\right) \\ &\geqslant M\left(z, A_iz, t\right), \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} N\left(z, A_iv, kt\right) &\leqslant N(z, Tz, t) \diamond N(z, z, t) \diamond N\left(A_iz, Tz, t\right) \diamond N(z, Tz, t) \\ &= N\left(z, A_iz, t\right) \diamond N(z, z, t) \diamond N\left(A_iz, A_iz, t\right) \diamond N\left(z, A_iz, t\right) \\ &\leqslant N\left(z, A_iz, t\right), \end{aligned}$$

which implies that A_iz = z .
Finally, from equations (1), (4), (5), we obtain A_1z = Sz = A_iz = Tz = z.
Hence $\{A_i\}$, S and T have common fixed point z in X.
For uniqueness, let w be another common fixed point of $\{A_i\}$, S and T.Then

$$\begin{aligned} M(z, w, kt) &= M\left(A_1z, A_iw, qt\right) \\ &\geqslant M(Sz, Tw, t) * M\left(A_1z, Sz, t\right) * M\left(A_iw, Tw, t\right) * M\left(A_1z, Tw, t\right) \\ &\geqslant M(z, w, t), \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} N(z, w, kt) &= N\left(A_1z, A_iw, qt\right) \\ &\leqslant N(Sz, Tw, t) \diamond N\left(A_1z, Sz, t\right) \diamond N\left(A_iw, Tw, t\right) \\ &\quad \diamond N\left(A_1z, Tw, t\right) \\ &\leqslant N(z, w, t). \end{aligned}$$

From Lemma(3), we conclude that $z = w$.

Hence $\{A_i\}$, S and T have unique common fixed point z in X.

Example 2. Let $(X, M, N, *, \diamond)$ be a intuitionistic fuzzy metric, where $X = [2, 20]$, $M(x, y, t) = \frac{t}{t+d(x,y)}$, $N(x, y, t) = \frac{d(x,y)}{t+d(x,y)}$ and d is the Euclidean metric on X.
We define $\{A_i\}, i = 1, 2, \ldots, S$ and T on X as follows: $A_1x = 2$ for all x;
$A_ix = 2$ if $x < 4$ and $\geqslant 5$ A_ix = 3 + x if $4 \leqslant x < 5$;
$Sx = x$ if $x \leqslant 8, Sx = 8$ if $x > 8$;
$Tx = 2$ if $x < 4$ or $\geqslant 5, Tx = 5 + x$ if $4 \leqslant x < 5$.
Then $\{A_i\}, S$ and T satisfy all the conditions of the above theorem and have a unique common fixed point $x = 2$.

Remarks: Our result extends and generalizes the results of S. Manro et al. [13], C. Alaca et al. [1], K.B. Manandhar et al. [11] [8], [10] Manandhar and Jha [12], Jha [5], Rao and Reddy [14], Singh and Chauhan [18]and similar other results of fixed point in literature.

References

[1] Alaca C., Turkoglu D., Yildiz C. 2006. *Fixed points in intuitionistic fuzzy metric spaces* Chaos, Solitons & Fractals vol.29, – P. 1073–1078.

[2] Cho Y.J., Pathak H.K., Kang S.M., Jung J.S. 1998. *Common fixed points of compatible maps of type (β) on fuzzy metric spaces* Fuzzy Sets and Systems vol.93, – P. 99–111.

[3] George A., Veeramani P. 1994. *On some results in fuzzy metric spaces* Fuzzy Sets and Systems vol.64, – P. 395–399.

[4] Grabiec M. 1988. *Fixed points in fuzzy metric spaces* Fuzzy Sets and Systems vol.27, – P. 385–389.

[5] Jha K. 2018. *Generalized common fixed point result in fuzzy metric space* The J. Fuzzy Maths vol.26, – P. 129–137.

[6] Jha K., Popa V., Manandhar K.B. 2014. *Common fixed points theorem for compatible of type (K) in metric space* Int. J. Math. Sci. Eng. Appl vol.89, – P. 383–391.

[7] Jungck G. 1986. *Compatible mappings and common fixed points* International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences vol.9, – P. 771–779.

[8] Manandhar K.B., Jha K. 2015. *A common fixed point theorem for compatible mappings of type (K) in intuitionistic fuzzy metric space* J. Maths and System Sci. vol.5, – P. 474–479.

[9] Kramosil I., Michálek J. 1975. *Fuzzy metrics and statistical metric spaces* Kybernetika vol.11, – P. 336–344.

[10] Manandhar K.B., Jha K., Cho Y.J. 2014. *Common fixed point theorem in intuitionistic fuzzy metric spaces using compatible mappings of type (K)* Bull. Society for Math. Services and Standards vol.3, – P. 81–87.

[11] Manandhar K.B., Jha K., Porru G. 2014. *Common fixed point theorem of compatible mappings of type (K) in fuzzy metric spaces* Electronic Journal of Mathematical Analysis and Applications vol.2, – P. 248–253.

[12] Manro S., Kumar S., Kumar S., Bhatia S.S. 2012. *Common fixed point theorem in intuitionistic fuzzy metric spaces using common (ea) property and implicit relation* Journal of Advanced Studies in Topology vol.3, – P. 60–69.

[13] Park J.H. 2004. *Intuitionistic fuzzy metric spaces* Chaos, Solitons & Fractals vol.22, – P. 1039–1046.

[14] Rao R.U., Reddy B.V. 2016. *Compatible mappings of type (K) and common fixed point of a fuzzy metric space* Advances in Theoretical and Applied Mathematics vol.11, – P. 443–449.

[15] Schweizer B., Sklar A., et al. 1960. *Statistical metric spaces* Pacific J. Math vol.10, – P. 313–334.

[16] Sharma S. 2002. *Common fixed point theorems in fuzzy metric spaces* Fuzzy Sets and Systems vol.127, – P. 345–352.

[17] Sharma S., Kutukcu S., Rathore R.S. 2007. *Common fixed point for multivalued mappings in intuitionistic fuzzy metric spaces* Communications of the Korean Mathematical Society vol.22, – P. 391–399.

[18] Singh B., Chauhan M.S. 2000. *Common fixed points of compatible maps in fuzzy metric spaces* Fuzzy Sets and Systems vol.115, – P. 471–475.

[19] Subrahmanyam P.V. 1995. *A common fixed point theorem in fuzzy metric spaces* Information Sciences vol.83, – P. 109–112.

[20] Verma M., Chandel R.S. 2012. *Common fixed point theorem for four mappings in intuitionistic fuzzy metric space using absorbing maps* IJRRAS vol.10, – P. 286–291.

[21] Zadeh L.A. 1965. *Fuzzy sets* Information and Control vol.8, – P. 338–353.

Received August 01, 2024

УДК 515.124

ОБЩИЙ РЕЗУЛЬТАТ С ФИКСИРОВАННОЙ ТОЧКОЙ ДЛЯ СОВМЕСТИМЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ ТИПА (K) В ИНТУИЦИОНИСТСКОМ НЕЧЕТКОМ МЕТРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

К. Джа, К.Б. Манандхар

jhakn@ku.edu.np

Школа естественных наук Университет Катманду,

45200, Непал, Дхуликхель.

Цель статьи — установить общую теорему о неподвижной точке для согласованных отображений типа (K) в полном интуиционистском нечетком метрическом пространстве на примере, который обобщает и улучшает различные известные в литературе сопоставимые результаты.

Ключевые слова: нечеткое метрическое пространство, совместимые отображения типа (K), общая неподвижная точка.

Цитирование: *К. Джа, К.Б. Манандхар* Общий результат с фиксированной точкой для совместимых отображений типа (K) в интуиционистском нечетком метрическом пространстве // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2024. – №4/1(59). – С. 134-141.

ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

№ 4/1(59) 2024

Журнал основан в 2015 году.
Издается 6 раз в год.

Учредитель:
Научно-исследовательский институт развития цифровых технологий и искусственного интеллекта.

Главный редактор:
Равшанов Н.

Заместители главного редактора:
Азамов А.А., Арипов М.М., Шадиметов Х.М.

Ответственный секретарь:
Ахмедов Д.Д.

Журнал зарегистрирован в Агентстве информации и массовых коммуникаций при Администрации Президента Республики Узбекистан.
Регистрационное свидетельство №0856 от 5 августа 2015 года.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

Адрес редакции:
100125, г. Ташкент, м-в. Буз-2, 17А.
Тел.: +(998) 712-319-253, 712-319-249.
Э-почта: `journals@airi.uz`.
Веб-сайт: `https://journals.airi.uz`.

Дизайн и вёрстка:
Шарипов Х.Д.

Отпечатано в типографии НИИ РЦТИИ.
Подписано в печать 05.09.2024 г.
Формат 60x84 1/8. Заказ №5. Тираж 100 экз.

PROBLEMS OF COMPUTATIONAL AND APPLIED MATHEMATICS

No. 4/1(59) 2024

The journal was established in 2015.
6 issues are published per year.

Founder:
Digital Technologies and Artificial Intelligence Development Research Institute.

The journal is registered by Agency of Information and Mass Communications under the Administration of the President of the Republic of Uzbekistan.
The registration certificate No. 0856 of 5 August 2015.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

Address:
100125, Tashkent, Buz-2, 17A.
Tel.: +(998) 712-319-253, 712-319-249.
E-mail: journals@airi.uz.
Web-site: https://journals.airi.uz.

Layout design:
Sharipov Kh.D.

DTAIDRI printing office.
Signed for print 05.09.2024
Format 60x84 1/8. Order No. 5. Printed copies 100.

Профессор
ИСРАИЛОВ МАРУФ ИСРАИЛОВИЧ
(к 90-летию со дня рождения)

Маруф Исраилович Исраилов – известный ученый-математик, доктор физико-математических наук, профессор, крупный специалист в области теории чисел и вычислительной математики.

М.И. Исраилов родился 27 апреля 1934 года в городе Самарканде в семье ремесленника. В 1951 году с отличием окончив среднюю школу №16 г. Самарканда, поступил на физико-математический факультет Самаркандского государственного университета, который успешно окончил в 1956 г. С 1958 по 1961 годы проходил обучение в аспирантуре Института математики им. В.И. Романовского под руководством профессора Н.П. Романова. В 1966 году защитил кандидатскую диссертацию на тему «Проблема Тарри для быстрорастущих слагаемых и ее приложение к изучению эргодических сумм». В 1974 году М.И. Исраилову присвоено звание старшего научного сотрудника. В 1986 году М.И. Исраилов защитил докторскую диссертацию на тему «Асимптотические и точные формулы для аддитивных задач с растущим числом слагаемых», а в 1989 году получил звание профессора по специальности «Вычислительная математика».

После окончании аспирантуры М.И. Исраилов работал младшим научным сотрудником в Вычислительном центре Института математики АН РУз, затем с 1966 г. – старшим научным сотрудником. С 1976 года работал на должности заведующего лабораторией «Теория приближенного интегрирования» Института кибернетики с вычислительным центром. С 1984 г. и до 1995 г. – являлся заведующим отделом «Вычислительные методы» Института математики АН РУз. В том же 1995 году М.И. Исраилов приступил к работе в Самаркандском государственном университете в качестве заведующего кафедрой вычислительной математики.

Профессор М.И. Исраилов имел широкий диапазон научных интересов. Его глубокие исследования в областях аддитивных задач, построения общих арифметических ортогональных и биортогональных систем в гильбертовых пространствах; нахождения числа решений различных классов диофантовых уравнений, оценке тригонометрических сумм; построения оптимальных квадратурных и кубатурных формул в различных функциональных пространствах, а также приближенного решения регулярных и сингулярных интегральных уравнений внесли существенный вклад в развитие теории чисел и вычислительной математики. Результаты его работ успешно применяются в многочисленных прикладных задачах.

М.И. Исраилов впервые исследовал проблему Тарри для общих числовых последовательностей и применил к изучению эргодических сумм. Здесь он также решил известную проблему венгерского математика П. Эрдеша (об оценке снизу максимума модуля многочленов на единичной окружности) в обобщенной и уточненной постановке. М.И. Исраилову принадлежит всестороннее исследование аддитивных задач с растущим числом слагаемых. Он получил асимптотические разложения в проблеме Варинга с полиномиальными слагаемыми и в диофантовой системе Гильберта-Камке.

Им также найдена точная формула для числа решений линейных диофантовых уравнений общего вида. Эта формула нашла применение в теории инвариантных кубатурных формул академика С.Л.ЁСоболева и позволила сильно упростить исследование и построение таких формул на поверхности многомерных сфер и шаров.

Маруф Исраилович также внес существенный вклад в применение теоретико-числовых методов и методов сплайн-функций в вычислительной математике. Им построены оптимальные квадратурные и кубатурные формулы сингулярных интегралов с ядрами Гильберта и Коши, найдены приближенно-аналитические решения систем одномерных и многомерных интегральных уравнений с ядрами Фредгольма, Гильберта и Коши. Найдены оценки погрешности в различных часто встречающихся пространствах функций. Эти результаты имеют многочисленные применения в прикладных задачах, в частности в аэродинамике и гидродинамике. Характерной особенностью этого цикла исследований является новизна постановок задач и разработка новых методов их решения.

Отдельные результаты исследований М.И. Исраилова по теории дзета-функции Римана и проблеме делителей Дирихле вызвали большой резонанс среди специалистов за пределами нашей страны.

В Маруфе Исраиловиче гармонично сочетались способности крупного ученого, талантливого педагога и умелого руководителя крупных научных исследований. Он успешно сочетал плодотворную научную и научно-организаторскую деятельность с большой педагогической и общественной деятельностью. С 1967 г. М.И. Исраилов читал общие и специальные курсы на факультете прикладной математики Ташкентского государственного университета, а с 1995 по 2003 годы – в Самаркандском государственном университете, где до конца жизни продолжал активную научно-педагогическую деятельность в качестве почетного профессора-консультанта.

М.И. Исраилов с 1972 г. являлся членом двух специализированных советов по защите кандидатских и докторских диссертаций. С 1967 по 1995 годы руководил работой организованного им городского научного семинара «Применение теории чисел в вычислительной математике» при Институте кибернетики АН РУз и Институте математики АН РУз, а с 1995 года руководил научным семинаром «Приближенные методы высшего анализа» в СамГУ.

Работая в крупнейших ВУЗах и НИИ республики, Маруф Исраилович подготовил десятки учеников, успешно работающих в различных сферах экономики республики, в странах ближнего и дальнего зарубежья. М.И. Исраилов руководил работами магистрантов, аспирантов и докторантов. Под его руководством защищены более 10 кандидатских диссертаций, он способствовал защите трех докторских диссертаций. С 1993 г. М.И. Исраилов со своими докторантами, аспирантами и студентами вёл научные исследования в рамках проектов, имеющих фундаментальное значение и широкое прикладное применение.

Обычно будущих ученых Маруф Исраилович привлекал к науке со студенческой скамьи. Более того, он с аспирантских лет активно участвовал в поиске и формировании юных математических дарований в системе школьного образования. Будучи аспирантом и молодым ученым М.И. Исраилов преподавал в специализированной физико-математической школе №82 города Ташкента, организованной академиком В.К. Кабуловым. Многие ученики М.И. Исраилова из этой школы стали в последующем докторами наук и известными специалистами в своих отраслях. Подготовку математиков со школьной скамьи профессор М.И. Исраилов продолжил в физико-математическом лицее г. Самарканда, учащиеся которого регулярно занимали призовые места на различных международных математических олимпиадах. На протяжении всей педагогической деятельности своими научно-популярными статьями в энциклопедиях, в различных общественных и молодежных изданиях, ряде телепередач М.И. Исраилов умело и выверено формировал математическую культуру мышления у молодежи.

М.И. Исраилов – автор более 160 научных, 40 научно-популярных работ. Около 50 его научных статей опубликованы в авторитетных изданиях ближнего и дальнего зарубежья. Профессор М.И. Исраилов является автором широко известного двухтомного учебника по вычислительной математике «Хисоблаш методлари». Данная книга является единственным учебником подобного типа на узбекском языке и принята в качестве основного в ведущих университетах Узбекистана. Этот учебник написан на основе оригинальных лекций М.И. Исраилова, которые он читал на протяжении 40 лет в Национальном университете Узбекистана, Самаркандском государственном университете, на семинарах в Институте математики АН РУз. Также результатом многолетнего чтения лекций стал учебник по теории чисел «Сонлар назарияси» в соавторстве с профессором А. Солеевым.

М.И. Исраилов и его ученики участвовали с докладами во многих международных научных форумах. Он принимал участие в Международном конгрессе математиков, Всемирном конгрессе общества Бернулли и других. Был одним из активных организаторов всех международных конференций по теории кубатурных формул, проводимых в Узбекистане. Профессор М.И. Исраилов до последних дней оставался активным участником ежегодной Международной научно-практической конференции «Инновация». Являясь одним из бессменных руководителей секции «Математика. Математическое моделирование», М.И. Исраилов поддерживал высокий уровень научных изысканий и докладов конференции. М.И. Исраилов был членом редколлегии сборника «Вопросы вычислительной и прикладной математики», а также ответственным редактором сборников по вычислительной математике, выпускаемых в Институте математики АН РУз. А с 2001 года являлся членом редколлегии сборника научных статей Международной конференции «Инновация». Являлся членом Американского математического общества и экспертом международного журнала «Mathematical Reviews».

Маруфе Исраилович неоднократно награждался почетными грамотами Академии наук Республики Узбекистан.

В знак признания весомого многолетнего вклада профессора М.И. Исраилов в развитие математической науки и подготовку высококвалифицированных кадров в 2009 году Национальным университетом Узбекистана была проведена республиканская научная конференция «Вычислительные технологии и математическое моделирование», посвященная его 75-летию. В 2013 году проведен научный семинар «Профессор М.И. Исраилов и развитие прикладной математики в Узбекистане», в 2014 году состоялась научно-техническая конференция «Прикладная математика и информационная безопасность», посвященная 80-летию учёного. В текущем 2024 году в связи с 90-летием профессора М.И. Исраилова в НУУз организован международный научный семинар «Вычислительные модели и технологии (CMT2024)».

Созданная профессором М.И. Исраиловым научная школа по численным методам и в настоящее время продолжает продуктивно функционировать. Ученики и последователи Маруфа Исраиловича сегодня успешно работают в различных сферах и отраслях экономики нашей республики и за рубежом, продолжая дело своего Устоза-учителя.

Редакционная коллегия журнала «Проблемы вычислительной и прикладной математики» посвящает данный специальный выпуск светлой памяти профессора Маруфа Исраиловича Исраилова – выдающегося учёного, талантливого педагога, заботливого наставника и замечательного человека, который навсегда останется в памяти друзей, коллег и учеников.

Содержание

Contents