

УДК 511.325

ОБ ОДНОВРЕМЕННОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ТРЕХ ЧИСЕЛ СУММОЙ ШЕСТИ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ

Аллаков И., Эрдонов Б.Х.

iallakov@mail.ru

Термезский государственный университет,
190111, Узбекистан, г. Термез, ул. Баркамал авлад, 43.

В статье рассматривается задача об одновременном представлении трех натуральных чисел в виде суммы шести простых чисел. В ней доказывается степенная оценка для числа троек, которую невозможно одновременно выразить в виде суммы шести простых чисел. Также в первые получено оценка снизу для количества представлений трёх заданных натуральных чисел в виде суммы шести простых чисел. Доказанные результаты дополняют работы И. Аллакова, Б.Х. Абраева и М.Ч.Лью, К.М.Цанга в этой области.

Ключевые слова: оценка, положительная разрешимость, конгруэнт разрешимость, постоянная Эйлера, эффективная константа, фиксированное число, простое число, система линейных уравнений, степенная оценка.

Цитирование: Аллаков И., Эрдонов Б.Х. Об одновременном представлении трех чисел суммой шести простых чисел // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2024. – № 4/1(59). – С. 122-133.

1 Введение

Рассматриваются обобщенная задача Хуа-Ло-Кена (см. стр.169, [1]), об одновременном представлении натуральных чисел $b_1, b_2, \dots, b_s$ в виде

$$b_i = a_{i1}p_1 + a_{i2}p_2 + \dots + a_{im}p_m, \quad (i = 1, 2, \dots, s; \quad m > s), \quad (1)$$

где $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{im}$ – целые коэффициенты, $p_1, p_2, \dots, p_m$ – простые числа. Пусть $U_{s,m}(X) = \{(b_1, b_2, \dots, b_s), 1 \leq b_1, b_2, \dots, b_s \leq X, b_i \neq a_{i1}p_1 + a_{i2}p_2 + \dots + a_{im}p_m\}$ и $E_{s,m}(X) = \text{card} U_{s,m}(X)$. Ву Фанг [2], при $m \geq 2s+1$ доказал асимптотическую формулу для $R(\mathbf{b})$ – числа решений системы (1). Затем, М.Ч.Лью и К.М.Цанг [3], рассматривая системы (1) при $s = 2, m = 3$ получили степенную оценку $E_{2,3}(X) \leq X^{2-\varepsilon}$, где X – достаточно большое действительное число, $\varepsilon > 0$ – малое, эффективное постоянное. И.Аллаков [8] сначала улучшил эту оценку, а затем [8] обобщил, когда $s = n, m = n + 1$.

Известно, что разрешимость системы (1) связана условиями (см. стр. 73, работы [4]):

а) для любого простого p существуют такие целые числа $l_1, \dots, l_m$ с условиями $1 \leq l_1, \dots, l_m \leq p - 1$, которые удовлетворяют систему линейных сравнений:
 $a_{i1}l_1 + a_{i2}l_2 + \dots + a_{im}l_m \equiv b_i \pmod{p}, \quad i = 1, 2, \dots, s;$

б) существуют такие действительные положительные числа $y_1, \dots, y_m$ для которых выполняются равенства $a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \dots + a_{im}y_m = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, s.$

Обозначим $W_{s,m}(X)$ – множество векторов $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_s), 1 \leq b_1, \dots, b_s \leq X$ которые удовлетворяют условиям а) и б). В работах [7] и [8] И.Аллаковым и Б.Х.Абраевым рассмотрен случае, когда $s = 2, m = 4$ и получены соответствующие оценки для $W_{s,m}(X), E_{s,m}(X), R(\mathbf{b})$. В [9] мы оценили $W_{3,5}(X), E_{3,5}(X), R(\mathbf{b})$.

Из выше изложенного следуют, что вопрос изучение системы (1) при $s = 3$, $m = 6$ остается открытием. Настоящая работа посвящена изучение системы (1), именно в этом случае. В нем впервые получены оценки для $W_{3,6}(X)$, $E_{3,6}(X)$, $R(\mathbf{b})$. Пологая, $s = 3$, $m = 6$ в (1) получим:

$$b_i = a_{i1}p_1 + a_{i2}p_2 + \dots + a_{i6}p_6, \quad (i = 1, 2, 3). \quad (2)$$

Пусть $W_{3,6}(X)$ – множество векторов $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $1 \leq b_1, b_2, b_3 \leq X$, удовлетворяющие условиям а), б) и положим $B = \max \{3|a_{ij}|\}$, $(i = 1, 2, 3; j = \overline{1, 6})$. Для удобства

также обозначим: $\Delta_{ijk} = \det \begin{pmatrix} a_{1i} & a_{1j} & a_{1k} \\ a_{2i} & a_{2j} & a_{2k} \\ a_{3i} & a_{3j} & a_{3k} \end{pmatrix}$, $1 \leq i, j, k \leq 6$, $i \neq j \neq k$.

Через Δ_{bjk} (Δ_{ibk} , Δ_{ijb}) будем обозначать определитель полученные из определителя Δ_{ijk} заменой элементов i (j, k) столбца с столбцом свободных членов. Чтобы избежать тривиальности и вырожденности будем предполагать, что

$$\Delta_{123}\Delta_{124}\dots\Delta_{456} \neq 0, \quad (\Delta_{123}, \Delta_{124}, \dots, \Delta_{456}) = 1.$$

Ясно, что $\text{card}W_{3,5}(X) \leq \text{card}W_{3,6}(X)$. Отсюда и из [9] следует, множество $W_{3,6}(X)$ содержит достаточно много троек (b_1, b_2, b_3) , $1 \leq b_1, b_2, b_3 \leq X$.

Основным результатом работы является.

Теорема. Если X – достаточно большое, а ε ($0 < \varepsilon < 1$) достаточно малое действительные числа, тогда:

а) существует достаточно большое число A , такое, что при $X > B^A$ справедлива оценка $E_{3,6}(X) < X^{3-\varepsilon}$;

б) пусть $K = 36\sqrt{3}B^5|\mathbf{b}|$ и $R(\mathbf{b})$ – количество представлений $1 \leq b_1, b_2, b_3 \leq X$ в виде (2), тогда для $R(\mathbf{b})$ при заданном $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $1 \leq b_1, b_2, b_3 \leq X$ справедлива оценка $R(\mathbf{b}) \geq K^{3-\varepsilon}(\log K)^{-6}$, для всех троек $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $1 \leq b_1, b_2, b_3 \leq X$, за исключением не более чем $X^{3-\varepsilon}$ троек из них.

2 Деление область интегрирование и оценка интеграла по малой дуге

Предположим a_{ij} ($i = 1, 2, 3; j = \overline{1, 6}$) удовлетворяют условию $a_{i1}y_1 + \dots + a_{i6}y_6 > 0$, ($i = 1, 2, 3$). Для любого целого $q \geq 1$ через $\sum_{(q)}$ обозначим суммирование по всем $l_1, \dots, l_6$, удовлетворяющим условиям $1 \leq l_j \leq q$, $(l_j, q) = 1$, $\sum_{1 \leq j \leq 6} a_{ij}l_j \equiv b_i \pmod{q}$, ($i = 1, 2, 3$). Положим

$$N(q) = \sum_{(q)} 1. \quad (3)$$

Как обычно $c_1, c_2, \dots$ положительные эффективные постоянные и $\varepsilon > 0$ малое постоянное, значение которого могут зависеть от c_j . $\mathbb{R}$ – множество действительных чисел и $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_n$. X и N так чтобы они удовлетворяли соотношениям

$$X \geq B^{\exp(\delta^{-2})} \text{ и } N = 108B^5X. \quad (4)$$

Далее, положим $Q := N^\delta$, $L := NQ^{-1/90}$, $T := Q^{1/\sqrt{\delta}}$. Из (4) следует $B \leq Q^\delta$.

Пусть $\chi \pmod{q}$ и $\chi_0 \pmod{q}$ произвольный и главный характер Дирихле по модулю q , соответственно [10, 11]. Известно, что [11] существует такое постоянное c_1

в области $\sigma > 1 - c_1/\log T$, $|t| \leq T$ что L - функции Дирихле $L(s, \chi)$ — не имеют вещественных нулей за исключением не более чем одного вещественного характера $\tilde{\chi} \pmod{\tilde{r}}$ ($\tilde{r} \leq T$) В этом случае характер $\tilde{\chi} \pmod{\tilde{r}}$ называется исключительным характером, а соответствующий нуль $\tilde{\beta}$ исключительным нулем. Если существует такой нуль, то он единственный и удовлетворяет неравенству

$$\frac{c_2}{\tilde{r}^{1/2} \log^2 \tilde{r}} \leq 1 - \tilde{\beta} \leq \frac{c_1}{\log T}. \quad (5)$$

Положим

$$\omega = \begin{cases} (1 - \tilde{\beta}) \log T, & \text{если существует исключительный нуль } \tilde{\beta}; \\ 1, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Пусть для любого $y \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} S(y) = \sum_{L < n \leq N} \Lambda(n) e(ny), & S_\chi(y) = \sum_{L < n \leq N} \Lambda(n) \chi(n) e(ny), \\ I(y) = \int_L^N e(xy) dx, & \tilde{I}(y) = \int_L^N x^{\tilde{\beta}-1} e(xy) dx, & I_\chi(y) = \int_L^N e(xy) \sum_{|\gamma| \leq T} 'x^{\rho-1} dx, \end{cases} \quad (6)$$

где $e(x) = e^{2\pi i x}$, $\tilde{\beta} > 1 - c(\log T)^{-1}$ — исключительный нуль функции $L(s, \chi)$, т.е. единственный, вещественный нуль L - функции Дирихле, возможно существующий для одного характера $\chi \pmod{q}$, $\sum'_{|\gamma| \leq T}$ — означает суммирование по всем нулям $\rho = \beta + i\gamma$ (кроме исключительного нуля $\tilde{\beta}$) функции $L(s, \chi)$ лежащей внутри области: $\frac{1}{2} \leq \beta \leq 1 - c_1(\log T)^{-1}$, $|\gamma| \leq T$ и $\omega = (1 - \tilde{\beta}) \log T$ (см. [11]) и $\Lambda(n)$ — функция Мангольдта.

Пусть $\tau = N^{-1}T^{1/6}$. Для произвольных целых чисел h_1, h_2, h_3, q с условием

$$1 \leq h_1, h_2, h_3 \leq q \leq Q \text{ и } (h_1, h_2, h_3, q) = 1$$

определим куб $m(h_1, h_2, h_3, q)$ равенством

$$m(h_1, h_2, h_3, q) = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \left| x_i - \frac{h_i}{q} \right| \leq \frac{\tau}{q}, \quad i = 1, 2, 3 \right\}, \quad (7)$$

а M_1 и M_2 определим равенством

$$M_1 = \cup m(h_1, h_2, h_3, q), \quad M_2 = [\tau, 1 + \tau]^3 \setminus M_1. \quad (8)$$

Нетрудно видеть, что эти трёхмерные кубы $m(h_1, h_2, h_3, q)$ взаимно не пересекаются и лежат в $[\tau, 1 + \tau]^3$.

Для произвольных $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3) \in W_{3,6}(X)$ и $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ положим

$$\bar{x}_b = b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3, \quad \bar{x}_j = a_{1j} x_1 + a_{2j} x_2 + a_{3j} x_3, \quad (j = \overline{1, 6}) \quad (9)$$

и

$$I(\mathbf{b}) = \sum \Lambda(n_1) \dots \Lambda(n_6). \quad (10)$$

Здесь суммирование ведётся по всем n_j , которые удовлетворяют условиям

$L < n_1, \dots, n_6 \leq N$ и $\sum_{j=1}^6 a_{ij} n_j = b_i$, ($i = 1, 2, 3$). В силу (6), (8) и (10) имеем

$$I(\mathbf{b}) = \int_{\tau}^{\tau+1} \int_{\tau}^{\tau+1} \int_{\tau}^{\tau+1} e(-\bar{x}_b) \prod_{j=1}^6 S(\bar{x}_j) dx_1 dx_2 dx_3 =$$

$$= \left(\iiint_{M_1} + \iiint_{M_2} \right) e(-\bar{x}_b) \prod_{j=1}^6 S(\bar{x}_j) dx_1 dx_2 dx_3 = I_1(\mathbf{b}) + I_2(\mathbf{b}). \quad (11)$$

Доказательство теоремы следует из следующих двух лемм.

Лемма 2.1. Для всех троек b_1, b_2, b_3 , ($1 \leq b_1, b_2, b_3 \leq X$), за исключением не более чем $X^3 Q^{-1/13}$ троек из них, справедлива оценка $I_2(\mathbf{b}) < N^3 Q^{-1/3}$.

Лемма 2.2. Для всех троек $(b_1, b_2, b_3) \in W_{3,6}(X)$, за исключением не более чем $X^3 Q^{-1/101}$ троек из них, справедлива оценка $I_1(\mathbf{b}) \gg N^3 Q^{-5/16}$.

3 Доказательство леммы 2.1

Для оценки $I_2(\mathbf{b})$ воспользуемся тем же методом, что и в работе И. Аллакова [?]. Согласно определению $S(y)$ в (6) при $\Delta_{ijk} \neq 0$ имеем оценку

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 |S(\bar{x}_i)|^2 |S(\bar{x}_j)|^2 |S(\bar{x}_k)|^2 dx_1 dx_2 dx_3 \ll (N \log N)^3. \quad (12)$$

Используя тождества Парсеваля (см. [11] с. 152) и лемму 3.3.1 из работы Аллакова [?] при $n = 3$, получаем следующую оценку:

$$\begin{aligned} \sum_{b_1=-\infty}^{\infty} \sum_{b_2=-\infty}^{\infty} \sum_{b_3=-\infty}^{\infty} |I_2(\mathbf{b})|^2 &= \iiint_{M_2} \prod_{j=1}^6 |S(\bar{x}_j)|^2 dx_1 dx_2 dx_3 \ll \\ &\ll (\min \{|S(\bar{x}_1)|^2, |S(\bar{x}_2)|^2, |S(\bar{x}_3)|^2\})^3 \iiint_{M_2} \sum_{1 \leq i, j, k \leq 6} |S(\bar{x}_i)|^2 |S(\bar{x}_j)|^2 |S(\bar{x}_k)|^2 dx_1 dx_2 dx_3 \\ &\ll N^9 B^3 Q^{-3/4} \log^{27} N. \end{aligned}$$

Потому что согласно (12) для последнего тройного интеграла подходит значение $\ll N^3 \log^3 N$. Таким образом, количество $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ не более чем $(N^9 B^3 Q^{-3/4} \log^{27} N) N^{-6} Q^{2/3} < X^3 Q^{-1/13}$, для которых справедлива оценка $|I_2(\mathbf{b})| \geq N^3 Q^{-1/3}$. Так как $B \leq Q^\delta$. Таким образом доказана лемма 2.1.

Для произвольного характера $\chi(\text{mod } q)$ обозначим

$$C_\chi(m) := \sum_{1 \leq l \leq q} \chi(l) e_q(ml) \text{ и } C_q(m) = C_{\chi_0}(m).$$

Очевидно, что $|C_\chi(m)| \leq \varphi(q)$. Если для произвольного $(x_1, x_2, x_3) \in m(h_1, h_2, h_3, q)$ обозначим $x_j = h_j q^{-1} + \eta_j$, ($j = 1, 2, 3$), то в силу (7) справедливо неравенство $|\eta_j| < \tau q^{-1}$, ($j = 1, 2, 3$). По аналогии (8) обозначим:

$$\begin{cases} \bar{h}_j := a_{1j} h_1 + a_{2j} h_2 + a_{3j} h_3, & \bar{h}_b := b_1 h_1 + b_2 h_2 + b_3 h_3, \\ \bar{\eta}_j := a_{1j} \eta_1 + a_{2j} \eta_2 + a_{3j} \eta_3, & \bar{\eta}_b := b_1 \eta_1 + b_2 \eta_2 + b_3 \eta_3, \quad (j = \overline{1, 6}), \end{cases}$$

тогда $\bar{x}_j = \frac{\bar{h}_j}{q} + \bar{\eta}_j$, ($j = \overline{1, 6}$). Далее при $1 \leq j \leq 6$ обозначим

$$\begin{cases} G_j(\bar{h}, q, \bar{\eta}) := \sum_{\chi(\text{mod } q)} C_{\bar{\chi}}(\bar{h}_j) I_{\chi}(\bar{\eta}_j) \quad \text{и} \\ H_j(\bar{h}, q, \bar{\eta}) := C_q(\bar{h}_j) I(\bar{\eta}_j) - \delta_q C_{\bar{\chi}\chi_0}(\bar{h}_j) \tilde{I}(\bar{\eta}_j) - G_j(\bar{h}, q, \bar{\eta}), \end{cases} \quad (13)$$

где если $\tilde{r}|q$ то $\delta_q = 1$ и если $\tilde{r} \nmid q$ то $\delta_q = 0$.

Для произвольного целого $q \geq 1$ и для любых простых p обозначим

$$A(q) := \frac{1}{\varphi^6(q)} \sum_{\bar{h}}' e_q(-\bar{h}_b) \prod_{j=1}^6 C_q(\bar{h}_j), \quad s(p) := 1 + A(p).$$

Принимая во внимание определение $N(q)$ в (3) и для вектор $\mathbf{b}$ из $W_{3,6}(X)$, для всех простых p выполняется $N(p) > 0$.

Пусть $\chi_j \pmod{r_j}$, $(j = \overline{1, 6})$ примитивные характеры и $r = [r_1, \dots, r_6]$ наибольший общий делитель чисел $r_1, \dots, r_6$. В дальнейшем нам необходимо иметь оценку выражений суммы вида:

$$Z(q) = Z(q, \chi_1, \dots, \chi_6) = \sum_{\bar{h}}' e_q(-\bar{h}_b) \prod_{j=1}^6 C_{\chi_j \chi_0}(\bar{h}_j), \quad (14)$$

где число q кратное числу r , а χ_0 —главный характер по модулю q .

4 Доказательство леммы 2.2 и теоремы

В силу (13) при раскрытии произведения $\prod_{j=1}^6 H_j(\bar{h}, q, \bar{\eta})$ получается 243 слагаемых.

Их можно разделить на три группы следующим образом:

$$T_1) \prod_{j=1}^6 C_q(\bar{h}_j) I(\bar{h}_j);$$

$T_2)$ 665 слагаемых, каждый из которых имеет по крайней мере один множитель $G_j(\bar{h}, q, \bar{\eta})$;

$T_3)$ оставшиеся 63 слагаемых.

Для удобства определим:

$$M_i := \sum_{q \leq Q} \varphi^{-6}(q) \sum_{\bar{h}}' e_q(-\bar{h}_b) \iiint_{\mathbb{R}^3} T_i e(-\bar{\eta}_b) d\eta_1 d\eta_2 d\eta_3, \quad (i = 1, 2, 3). \quad (15)$$

Легко заметить, что M_i —является вещественным числом. Используя обозначение (15), в силу в работе [12] леммы 5.4 для всех рассмотренных троек $(b_1, b_2, b_3) \in W_{3,6}(X)$, за исключением $X^3 Q^{-1}$ значений из них, можем написать в виде:

$$I_1(\mathbf{b}) = M_1 + M_2 + M_3 + O(N^3 Q^{-1}). \quad (16)$$

Пусть

$$M_0 = \frac{N^3}{|\Delta_{456}|} \prod_p s(p) \iiint_D dx_1 dx_2 dx_3. \quad (17)$$

Тогда в силу в работе [?] утверждения с) леммы 5.2 и леммы 6.1 справедлива оценка

$$M_0 \gg N^3 B^{-3} Q^{-1/33} \quad (18)$$

за исключением не более чем $X^3 Q^{-1/101}$ значений $(b_1, b_2, b_3) \in W_{3,6}(X)$.

Лемма 4.1. Для всех $(b_1, b_2, b_3) \in W_{3,6}(X)$ справедливо равенство $M_1 = M_0 + O(N^3 Q^{-4/5})$.

Доказательство. Полагая в работе [12] леммы 6.1 $\rho_j = 1$ и используя лемму 5.2 d) из (15) находим

$$\begin{aligned} M_1 &= \sum_{q \leq Q} \varphi^{-6}(q) \sum_{\bar{h}}' e_q(-\bar{h}_b) \prod_{j=1}^6 C_q(\bar{h}_j) \iiint_{\mathbb{R}^3} \left(\prod_{j=1}^6 \int_L^N e(\bar{\eta}_j x) dx \right) e(-\bar{\eta}_b) d\eta_1 d\eta_2 d\eta_3 = \\ &= N^3 |\Delta_{456}|^{-1} \iiint_D dx_1 dx_2 dx_3 \left(\sum_{q \leq Q} A(q) \right) = N^3 |\Delta_{456}|^{-1} \iiint_D dx_1 dx_2 dx_3 \left(\sum_{q=1}^{\infty} A(q) \right) + \\ &\quad + O(N^3 Q^{-1} N^{c_3/\log \log N} \log^{68} Q). \end{aligned} \quad (19)$$

В работе [12] в силу леммы 5.1 а), б) и (5.2) $\sum_{q=1}^{\infty} A(q) = \prod_p (1 + A(p)) = \prod_p s(p)$ и ясно, что $N^{c_3/\log \log N} \log^{68} Q < Q^{1/5}$. Из этого и равенств (17), (19) следует доказываемая лемма.

Теперь оценим M_3 . Пусть $m_1, m_2, \dots$ различные целые числа из множества $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ и

$$G(m_1, m_2, \dots) := \sum_{(\tilde{r})} \tilde{\chi}(l_{m_1}) \tilde{\chi}(l_{m_2}) \dots \quad (20)$$

$$\mathcal{P}(m_1, m_2, \dots) := \iiint_D (Nx_{m_1})^{\tilde{\beta}-1} (Nx_{m_2})^{\tilde{\beta}-1} \dots dx_1 dx_2 dx_3, \quad (21)$$

где область D определяется по (6.3) в работе [12]. Очевидно,

$$|\mathcal{P}(m_1, m_2, \dots)| \leq 1. \quad (22)$$

Лемма 4.2. Имеют место следующие оценки:

- а) $|G(m_1, m_2, \dots)| \leq N(\tilde{r}) \leq \varphi^3(\tilde{r})$;
- б) $G(m_1, m_2, \dots) \ll B^{90} \tilde{r}^{7/4}$ за исключением не более, чем $X^3 \tilde{r}^{-1/2}$ значений $(b_1, b_2, b_3) \in [1, X]^3$.

Доказательство. а) в работе [12] следует из определения функции $N(\tilde{r})$ и его мультипликативности, если учитывать лемму 5.1 с).

Докажем б). Для удобства рассмотрим конкретный набор из $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, например 1,2,3 то есть $G(1, 2, 3)$. Согласно (20) $G(1, 2, 3)$ можно представить в виде [?]

$$G(1, 2, 3) = \frac{1}{\tilde{r}^3} \sum_{1 \leq h_1, h_2, h_3 \leq \tilde{r}} e_{\tilde{r}}(-\bar{h}_b) C_{\tilde{\chi}}(\bar{h}_1) C_{\tilde{\chi}}(\bar{h}_2) C_{\tilde{\chi}}(\bar{h}_3) C_{\tilde{r}}(\bar{h}_4) C_{\tilde{r}}(\bar{h}_5) C_{\tilde{r}}(\bar{h}_6).$$

Используя тождество Парсеваля получим:

$$\sum_{1 \leq b_1, b_2, b_3 \leq \tilde{r}} |G(1, 2, 3)|^2 = \frac{1}{\tilde{r}^3} \left| \sum_{1 \leq h_1, h_2, h_3 \leq \tilde{r}} C_{\tilde{\chi}}(\bar{h}_1) \dots C_{\tilde{\chi}}(\bar{h}_3) C_{\tilde{r}}(\bar{h}_4) \dots C_{\tilde{r}}(\bar{h}_6) \right|^2.$$

Так как $\tilde{\chi}$ —является примитивным характером, то справедливо равенство $C_{\tilde{\chi}}(m) = \tilde{\chi}(m) C_{\tilde{\chi}}(1)$ и $C_{\tilde{\chi}}(1) = \sqrt{\tilde{r}}$. Поэтому

$$\sum_{1 \leq b_1, b_2, b_3 \leq \tilde{r}} |G(1, 2, 3)|^2 \leq \sum_{\substack{1 \leq h_1, h_2, h_3 \leq \tilde{r} \\ (h_1, h_2, h_3, \tilde{r})=1}} |C_{\tilde{r}}(\bar{h}_4) \dots C_{\tilde{r}}(\bar{h}_6)|^2. \quad (23)$$

Известно, что модуль квадратичного характера $\tilde{\chi}$ должен иметь вид $\tilde{r} = \nu_1 \nu_2 \dots \nu_k$ (здесь $\nu_1 = 2^t$, $t = \{0, 2, 3\}$ и $\nu_2 < \nu_3 < \dots < \nu_k$ нечетные простые числа). Пусть $U_1 = \{\nu_j \mid \nu_j \nmid \Delta_{123} \Delta_{124} \dots \Delta_{456}, j \geq 2\}$ и $U_2 = \{\nu_j \mid \nu_j \notin U_1\}$, а также обозначим $u_i = \prod_{\nu_j \in U_i} \nu_j$, ($i = 1, 2$). Тогда имеет место

$$\tilde{r} = u_1 u_2 \text{ и } u_2 = \prod_{\nu_j \in U_2} \nu_j = \nu_1 \prod_{\nu_j \in U_2 \setminus \{\nu_1\}} \nu_j \leq 8 \underbrace{|\Delta_{123} \Delta_{124} \dots \Delta_{456}|}_{20} \ll B^{60}.$$

Здесь мы можем показать, что

$$\sum_{\substack{1 \leq h_1, h_2, h_3 \leq \tilde{r} \\ (h_1, h_2, h_3, \tilde{r})=1}} |C_{\tilde{r}}(\bar{h}_4) \dots C_{\tilde{r}}(\bar{h}_6)|^2 = \prod_{j=1}^k \left\{ \sum_{\substack{1 \leq h_1, h_2, h_3 \leq \nu_j \\ (h_1, h_2, h_3, \nu_j)=1}} |C_{\nu_j}(\bar{h}_4) \dots C_{\nu_j}(\bar{h}_6)|^2 \right\}, \quad (24)$$

выполнено. Фиксируем $\nu_j \in U_1$ и рассмотрим соответствующую сумму в правой части равенства (24)

$$C_{\nu_j}(\bar{h}_i) = \sum'_{l \leq \nu_j} e\left(\frac{l \bar{h}_i}{\nu_j}\right) = \begin{cases} \varphi(\nu_j), & \text{если } \nu_j \mid \bar{h}_i, \\ -1, & \text{если } \nu_j \nmid \bar{h}_i, \end{cases} \quad (i = 4, 5, 6).$$

Также существуют 1 значений h_1, h_2, h_3 , для которых $\nu_j \mid \bar{h}_i$, ($i = 4, 5, 6$). Поэтому из (24) для всех $\nu_j \in U_1$ находим

$$\sum_{\substack{1 \leq h_1, h_2, h_3 \leq \nu_j \\ (h_1, h_2, h_3, \nu_j)=1}} |C_{\nu_j}(\bar{h}_4) C_{\nu_j}(\bar{h}_5) C_{\nu_j}(\bar{h}_6)|^2 \leq \varphi^6(\nu_j). \quad (25)$$

Если $\nu_j \in U_2$, очевидно, что выражений левой части неравенства (25) не больше ν_j^9 . Из (23)-(26) следует

$$\sum_{1 \leq b_1, b_2, b_3 \leq \tilde{r}} |G(1, 2, 3)|^2 \ll \prod_{\nu_j \in U_1} \varphi^6(\nu_j) \prod_{\nu_j \in U_2} \nu_j^9 \leq \tilde{r}^6 u_2^3 \ll \tilde{r}^6 B^{180}.$$

Последняя оценка показывает, что количество наборов b_1, b_2, b_3 принадлежащих $[1, \tilde{r}]^3$, для которых $G(1, 2, 3) \gg \tilde{r}^{7/4} B^{90}$ не превосходит $\tilde{r}^{5/2}$. Ясно, что $G(1, 2, 3)$ зависит от классов вычетов по модулю $\tilde{r}$. Таким образом для не более, чем $\left(\frac{X}{\tilde{r}}\right)^3 \tilde{r}^{5/2} = X^3 \tilde{r}^{-1/2}$ исключительных значений $(b_1, b_2, b_3) \in [1, \tilde{r}]^3$, имеет место

$$G(1, 2, 3) \ll \tilde{r}^{7/4} B^{90}. \quad (26)$$

Для остальных наборов чисел $m_1, m_2, \dots$ из $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ функция $G(m_1, m_2, \dots)$ оценивается аналогично и (26) остается в силе.

Лемма 4.3. Для M_3 определяемой равенством (15) справедливо равенство

$$\begin{aligned} M_3 = \frac{N^3 \tilde{r}^3}{|\Delta_{456}| \varphi^6(\tilde{r})} & \left(\sum_{q \leq Q/\tilde{r}, (\tilde{r}, q)=1} A(q) \right) \left[- \sum_{j=1}^6 G(j) \mathcal{P}(j) + \sum_{1 \leq i < j \leq 6} G(i, j) \mathcal{P}(i, j) - \right. \\ & \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq 6} G(i_1, i_2, i_3) \mathcal{P}(i_1, i_2, i_3) + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 < i_4 \leq 6} G(i_1, \dots, i_4) \mathcal{P}(i_1, \dots, i_4) - \\ & \left. - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_5 \leq 6} G(i_1, \dots, i_5) \mathcal{P}(i_1, \dots, i_5) + G(1, \dots, 6) \mathcal{P}(1, \dots, 6) \right]. \end{aligned} \quad (27)$$

Доказательство. Каждый из слагаемых в T_3 принадлежит одному из следующих типов

$$(-1)^m \delta_q \sum_{j=1}^m C_{\tilde{\chi}\chi_0}(\bar{h}_j) \tilde{I}(\bar{\eta}_j) \prod_{j=m+1}^5 C_q(\bar{h}_j) I(\bar{\eta}_j), \quad (m = 1, 2, \dots, 6).$$

Обозначая вклад такого члена в M_3 через $M_{3,m}$, оценим его. Для этого напомним $M_{3,m}$ следующим образом:

$$\begin{aligned} M_{3,m} &= (-1)^m \sum_{q \leq Q} \frac{1}{\varphi^6(q)} \sum_{\bar{h}}' e_q(-\bar{h}_b) \prod_{j=1}^m C_{\tilde{\chi}\chi_0}(\bar{h}_j) \prod_{j=m+1}^6 C_q(\bar{h}_j) \times \\ &\times \iiint_{\mathbb{R}^3} e(-\bar{\eta}_b) \prod_{j=1}^m \tilde{I}(\bar{\eta}_j) \prod_{j=m+1}^6 I(\bar{\eta}_j) d\eta_1 d\eta_2 d\eta_3 = (-1)^m W_m \cdot U_m \end{aligned} \quad (28)$$

где через U_m обозначен кратный интеграл по $\mathbb{R}^3$ и

$$W_m = \sum_{\substack{q \leq Q \\ \tilde{r}|q}} \frac{1}{\varphi^6(q)} \sum_{\bar{h}}' e_q(-\bar{h}_b) \prod_{j=1}^m C_{\tilde{\chi}\chi_0}(\bar{h}_j) \prod_{j=m+1}^6 C_q(\bar{h}_j).$$

Из (6), (21) и в работе [?] (6.1) (считая $\rho_j = \tilde{\beta}$ или $\rho_j = 1$) находим

$$U_m = \frac{N^3}{|\Delta_{456}|} \iiint_D \prod_{j=1}^m (Nx_j)^{\tilde{\beta}-1} dx_1 dx_2 dx_3 = \frac{N^3}{|\Delta_{456}|} \mathcal{P}(1, 2, \dots, m). \quad (29)$$

Полагая в (3.3) $\chi_1 = \dots = \chi_m = \tilde{\chi} \pmod{\tilde{r}}$ и $\chi_{m+1} = \dots = \chi_6 = \chi_0 \pmod{1}$ получим

$$W_m = \sum_{q \leq Q, \tilde{r}|q} \varphi^{-6}(q) Z(q). \quad (30)$$

В силу в работе [12] леммы 5.3. а), б) функцию $Z(q)$ можем написать в виде

$$Z(q) = Z(\tilde{r}) A(q'') \varphi^6(q'') = \tilde{r}^3 \sum_{(\tilde{r})} \prod_{j=1}^6 \tilde{\chi}(l_j) A(q'') \varphi^6(q''), \quad (31)$$

где $q = \tilde{r}q''$, $(\tilde{r}, q'') = 1$ из равенств (20), (30) и (31) имеем

$$W_m = Z(\tilde{r}) \varphi^{-6}(\tilde{r}) \sum_{q'' \leq Q/\tilde{r}, (\tilde{r}, q'')=1} A(q'') = \tilde{r}^3 \varphi^{-6}(\tilde{r}) G(1, 2, \dots, m) \sum_{q'' \leq Q/\tilde{r}, (\tilde{r}, q'')=1} A(q'').$$

Подставляя это выражение и (29) в (28) получим

$$M_{3,m} = \frac{N^3 \tilde{r}^3}{|\Delta_{456}| \varphi^6(\tilde{r})} \sum_{q'' \leq Q/\tilde{r}, (\tilde{r}, q'')=1} A(q'') ((-1)^m G(1, 2, \dots, m) \mathcal{P}(1, 2, \dots, m)).$$

Собирая выражение при $m = 1, 2, \dots, 6$ имеем равенство приведенное в лемме.

Если $Q/\tilde{r}$ достаточно “большое” сумма $\sum_{q \leq Q/\tilde{r}, (\tilde{r}, q)=1} A(q)$ в (27) является достаточно длинной и в силу в работе [12] леммы 5.2 d) мы можем представить ее в виде:

$$\sum_{q \leq Q/\tilde{r}, (\tilde{r}, q)=1} A(q) = \prod_{p \nmid \tilde{r}} s(p) + O(\tilde{r} Q^{-9/10}). \quad (32)$$

Обозначая через $A(G, \mathcal{P})$ выражение, стоящее в квадратной скобке в (27) и используя (4.18), находим

$$M_3 = \frac{N^3 \tilde{r}^3}{|\Delta_{456}| \varphi^6(\tilde{r})} \left(\prod_{p \nmid \tilde{r}} s(p) + O(\tilde{r} Q^{-9/10}) \right) A(G, \mathcal{P}).$$

Из этого и (22) из леммы 4.2 а) получим

$$M_3 = \frac{N^3 \tilde{r}^3}{|\Delta_{456}| \varphi^6(\tilde{r})} \prod_{p \nmid \tilde{r}} s(p) A(G, \mathcal{P}) + O(N^3 \tilde{r} Q^{-9/10} (\log \log Q)^3). \quad (33)$$

С другой стороны, согласно в работе [12] лемме 5.1 е) имеет место равенство

$$\prod_{p \mid \tilde{r}} s(p) = \tilde{r}^3 \varphi^{-6}(\tilde{r}) \sum_{(\tilde{r})} 1. \quad (34)$$

Поэтому из леммы 4.1 и равенства (17) получим

$$M_1 = \frac{N^3}{|\Delta_{456}|} \prod_{p \nmid \tilde{r}} s(p) \frac{\tilde{r}^3}{\varphi^6(\tilde{r})} \sum_{(\tilde{r})} \iiint_D dx_1 dx_2 dx_3 + O(N^3 Q^{-4/5}). \quad (35)$$

Из (4.19) и (4.21) следует

$$\begin{aligned} M_1 + M_3 &= \frac{N^3 \tilde{r}^3}{|\Delta_{456}| \varphi^6(\tilde{r})} \prod_{p \nmid \tilde{r}} s(p) \sum_{(\tilde{r})} \iiint_D \prod_{j=1}^6 \left(1 - \tilde{\chi}(l_j) (Nx_j)^{\tilde{\beta}-1} \right) dx_1 dx_2 dx_3 + \\ &\quad + O(N^3 \tilde{r} Q^{-4/5}). \end{aligned} \quad (36)$$

Из этого, согласно определению D в уравнении (6.3) в работе [12], следует $Nx_j > L$ и

$$\prod_{j=1}^6 \left(1 - \tilde{\chi}(l_j) (Nx_j)^{\tilde{\beta}-1} \right) \geq \left((1 - \tilde{\beta}) \log T \right)^6 = \omega^6. \quad (37)$$

Таким образом, из равенства (37) и неравенства (34), (36) приходим к заключению

$$M_1 + M_3 \geq \omega^6 M_0 - O(N^3 \tilde{r} Q^{-4/5}). \quad (38)$$

В случае, когда $Q/\tilde{r}$ является “малым” для суммы $\sum_{q \leq Q/\tilde{r}, (\tilde{r}, q)=1} A(q)$ мы не сможем получить оценку, типа (32). В этом случае в силу в работе [?] утверждения леммы 5.2 б) получим оценку для рассматриваемой суммы $\prod_p (1 + |A(p)|) \ll (\log \log N)^{14}$.

Из (27) для M_3 имеем $M_3 \ll N^3 \tilde{r}^3 \varphi^{-6}(\tilde{r}) A(G, \mathcal{P})$. В силу леммы 4.2 б) и (27) имеем оценку $A(G, \mathcal{P}) \ll B^{90} \tilde{r}^{7/4}$ справедливую за исключением $X^3 \tilde{r}^{-1/2}$ наборов $(b_1, b_2, b_3) \in [1, X]^3$. Поэтому

$$M_3 \ll \frac{N^3 \tilde{r}^3}{\varphi^6(\tilde{r})} B^{90} \tilde{r}^{7/4} (\log \log N)^{14} \ll N^3 \tilde{r}^{-5/4} B^{90} (\log \log N)^{20}. \quad (39)$$

Теперь оценим M_2 .

Лемма 4.4. Для всех $(b_1, b_2, b_3) \in [1, X]^3$ справедлива оценка $M_2 \ll M_0 \omega^6 \exp(-\frac{c_4}{\delta^{1/2}})$. Доказательство этой леммы приведено в работе лемме 7.4 из [12].

Теперь мы можем доказать лемму 2.2. Рассмотрим следующие три случая.

1-случай. Пусть не существует исключительный ноль $\tilde{\beta}$ тогда отсутствует M_3 и из (16) за исключением не более чем $X^3Q^{-1/101}$ значений $(b_1, b_2, b_3) \in W_{3,6}(X)$ справедлива оценка

$$I_1(\mathbf{b}) = M_1 + M_2 + O(N^3Q^{-1}) \gg N^3B^{-3}Q^{-1/33}.$$

2-случай. Существует исключительный ноль $\tilde{\beta}$ и пусть $\tilde{r} \leq Q^{1/11}$. Тогда в силу леммы 4.4 и из (16), (17), (34) имеем:

$$I_1(\mathbf{b}) \gg M_0(1 - \exp(-c_4\delta^{-1/2}))\omega^6 + O(N^3Q^{-39/55}), \quad (40)$$

за исключением не более чем X^3Q^{-1} значений $(b_1, b_2, b_3) \in W_{3,6}(X)$.

Поскольку, $\tilde{r} \leq Q^{1/11}$ следует $\omega = (1 - \tilde{\beta}) \log T \geq c_2(\sqrt{\delta}Q^{1/22} \log Q)^{-1}$ в (5) для нижней границы $1 - \tilde{\beta}$. Теперь используя (18) и из (40) вытекает оценка

$$I_1(\mathbf{b}) \gg N^3 \left(B^6 Q^{\frac{1}{33} + \frac{3}{11} \log^6 Q} \right)^{-1} + O(N^3Q^{-39/55}) \gg N^3Q^{-5/16},$$

за исключением не более чем $X^3Q^{-1/101}$ значений $(b_1, b_2, b_3) \in W_{3,6}(X)$ из них.

3-случай. Существует исключительный ноль $\tilde{\beta}$ и пусть $\tilde{r} > Q^{1/11}$. В этом случае применим лемму 4.1 на (39) и лемму 4.4 на (16) имеем

$$I_1(\mathbf{b}) = M_0(1 + O(\omega^6 \exp(-c_4\delta^{-1/2}))) + O(N^3Q^{-1/9}),$$

за исключением не более чем $X^3\tilde{r}^{-1/2} \leq X^3Q^{-1/22}$ значений $(b_1, b_2, b_3) \in [1, X]^3$ из них.

Как и в предыдущих двух случаях, требуемая нижняя оценка $I_1(\mathbf{b})$ следует из (18):

$$I_1(\mathbf{b}) = M_0(1 + O(\omega^6 \exp(-c_4\delta^{-1/2}))) + O(N^3Q^{-1/9}) \gg N^3Q^{-5/16}. \quad (41)$$

Поэтому, на основании (41) и леммы 2.1 из (11) имеем следующую оценку:

$$I(\mathbf{b}) > c_5N^3Q^{-5/16} - N^3Q^{-1/3} \gg N^3Q^{-5/16}.$$

То есть оценка $I(\mathbf{b}) > 0$ справедлива для всех $(b_1, b_2, b_3) \in W_{3,6}(X)$ за исключением не более, чем $X^3Q^{-1/13} + X^3Q^{-1/101} + X^3Q^{-1} + X^3Q^{-1/22} \leq X^{3-\varepsilon}$ значений из них.

Таким образом, мы доказали лемму 2.2 и утверждение а) теоремы.

Теперь оценим, количество решений $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ системы (2). Пусть $R(\mathbf{b})$ — количество решений системы (1.2) в простых числах с условием $p_j \leq N$ и $\frac{X}{2} < b_1, b_2, b_3 \leq X$, то есть $R(\mathbf{b}) = \sum_{p_j \leq N, a_{i1}p_1 + \dots + a_{i6}p_6 = b_i} 1$.

Известно, что в (2.8) суммирование ведётся по всем n_j для которых выполняются условия $L < n_1, \dots, n_6 \leq N$ и $a_{i1}n_1 + \dots + a_{i6}n_6 = b_i$ ($i = 1, 2, 3$). Тогда из (10) имеем

$$I(\mathbf{b}) = R(\mathbf{b}) \log^6 N + O(N^{1/2} \log^5 N).$$

Из этого неравенства и из равенства (11) получим

$$I_1(\mathbf{b}) + I_2(\mathbf{b}) \leq R(\mathbf{b}) \log^6 N + O(N^{1/2} \log^5 N).$$

Здесь, учитывая лемму 2.1 мы получим оценку

$$R(\mathbf{b}) \geq \frac{I_1(\mathbf{b})}{\log^6 N} - \frac{N^3 Q^{-1/3}}{\log^6 N} - O\left(\frac{N^{1/2}}{\log N}\right) = \frac{I_1(\mathbf{b})}{\log^6 N} - O\left(\frac{N^3 Q^{-1/3}}{\log N}\right),$$

для количества решений системы (2). Теперь, для $I_1(\mathbf{b})$, мы воспользуемся леммой 2.2, мы получим оценку

$$R(\mathbf{b}) \geq \frac{N^3 Q^{-5/16}}{\log^6 N} - O\left(\frac{N^3 Q^{-1/3}}{\log N}\right) \gg \frac{N^{3-\frac{5\delta}{16}}}{\log^6 N},$$

для всех (b_1, b_2, b_3) за исключением не более, чем $X^{3-\varepsilon}$ значений $1 \leq b_1, b_2, b_3 \leq X$ из них. Здесь, учитывая, что $|\mathbf{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2} \leq \sqrt{3}X$ и $N = 108B^5 X \geq 36\sqrt{3}B^5 |\mathbf{b}|$ то следует часть б) теоремы.

Литература

- [1] *Хуа Ло-Кен*. Аддитивная теория простых чисел. Тр. Матем. ин-та им. В.А.Стеклова, – 1947. – том 22, – С. 3–179.
- [2] *Wu Fang*. On the solutions of the systems of linear equations with prime variables. Acta Math.Sinica. – 1957. – V.7. – P. 102–121.
- [3] *Liu M.C., Tsang K.M.* On pairs of linear equations in three prime variables and an application to Goldbach’s problem. J. reine angew. Math. 399 – 1989. – P. 109–136.
- [4] *Аллаков И.* Об условиях разрешимости системы линейных диофантовых уравнений в простых числах. Изв. вузов. Матем., – 2006. – № 9. – С. 10–16.
- [5] *Аллаков И., Исраилов М.И.* О разрешимости системы линейных уравнений в простых числах. Докл. АН РУз. –Ташкент, 1992. – №10–11. – С. 12–15.
- [6] *Аллаков И.* Оценка тригонометрических сумм и их приложения к решению некоторых аддитивных задач теории чисел (монография). – Термез: Сурхон нашр. – 2021. – 160 с.
- [7] *Abdayev B.Kh., Allakov I.* On solvability conditions of a pair of linear equations with four unknowns in prime numbers. Uzbek Mathematical journal. Tashkent. – 2020. – №3 – P. 16–24.
- [8] *Аллаков И., Абраев Б.Х.* Об исключительном множестве одной системы линейных уравнений с простыми числами. Чебышевский сборник. т.24 №2. – 2023. – С. 15–37.
- [9] *Эрдонов Б.Х.* Об условиях разрешимости системы линейных уравнений состоящей из трёх уравнений с пятью неизвестными в простых числах. Научный вестник НамГУ. – 2024. – №4. – С. 116–121.
- [10] *Карацуба А.А.* Основы аналитической теории чисел. М.: Наука, – 1983. – 240 с.
- [11] *Davenport H.* Multiplicative number theory. // Third edition. Springer. – 2000. – 177 p.
- [12] *Allakov I., Erdonov B.X.* Uchta sonni bir vaqtda oltita tub sonning yig‘indisi ko‘rinishida ifodalash haqida. Journal of Theory, Mathematics and Physics. – Vol.3, № 07, – 2024. – В. 22–49.

Поступила в редакцию 01.08.2024

UDC 511.325

ON THE SIMULTANEOUS REPRESENTATION OF THREE NUMBERS BY THE SUM OF SIX NUMBERS OF PRIMES

Allakov I., Erdonov B.Kh.

iallakov@mail.ru

Termez State University,

43, Barkamal avlad str., Termez 190111 Uzbekistan.

The article considers the problem of simultaneously representing three natural numbers as the sum of six prime numbers. It proves a power estimate for the number of triplets, which cannot be simultaneously expressed as a sum of six prime numbers. Also, for the first time, a lower estimate was obtained for the quantity of representation of three given natural numbers as the sum of six prime numbers. The proven results complement the works of I. Allakov, B.Kh. Abraev and M.C. Liu, K.M. Tsang in this area.

Keywords: estimate, positive solvability, congruent solvability, Euler's constant, effective constant, fixed number, prime number, system of linear equations, power estimate.

Citation: Allakov I., Erdonov B.Kh. 2024. On the simultaneous representation of three numbers by the sum of six numbers of primes. *Problems of Computational and Applied Mathematics*.4/1(59):122-133.

ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

№ 4/1(59) 2024

Журнал основан в 2015 году.

Издается 6 раз в год.

Учредитель:

Научно-исследовательский институт развития цифровых технологий и
искусственного интеллекта.

Главный редактор:

Равшанов Н.

Заместители главного редактора:

Азамов А.А., Арипов М.М., Шадиметов Х.М.

Ответственный секретарь:

Ахмедов Д.Д.

Редакционный совет:

Азамова Н.А., Алоев Р.Д., Амиргалиев Е.Н. (Казахстан), Бурнашев В.Ф.,
Загребина С.А. (Россия), Задорин А.И. (Россия), Игнатъев Н.А.,
Ильин В.П. (Россия), Исмагилов И.И. (Россия), Кабанихин С.И. (Россия),
Карачик В.В. (Россия), Курбонов Н.М., Маматов Н.С., Мирзаев Н.М.,
Мирзаева Г.Р., Мухамадиев А.Ш., Назирова Э.Ш., Нормуродов Ч.Б.,
Нуралиев Ф.М., Опанасенко В.Н. (Украина), Расулмухамедов М.М., Расулов А.С.,
Садуллаева Ш.А., Старовойтов В.В. (Беларусь), Хаётов А.Р., Халджигитов А.,
Хамдамов Р.Х., Хужаев И.К., Хужаеров Б.Х., Чье Ен Ун (Россия),
Шабозов М.Ш. (Таджикистан), Dimov I. (Болгария), Li Y. (США),
Mascagni M. (США), Min A. (Германия), Schaumburg H. (Германия),
Singh D. (Южная Корея), Singh M. (Южная Корея).

Журнал зарегистрирован в Агентстве информации и массовых коммуникаций при
Администрации Президента Республики Узбекистан.

Регистрационное свидетельство №0856 от 5 августа 2015 года.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

При перепечатке материалов ссылка на журнал обязательна.

За точность фактов и достоверность информации ответственность несут авторы.

Адрес редакции:

100125, г. Ташкент, м-в. Буз-2, 17А.

Тел.: +(998) 712-319-253, 712-319-249.

Э-почта: journals@airi.uz.

Веб-сайт: <https://journals.airi.uz>.

Дизайн и вёрстка:

Шарипов Х.Д.

Отпечатано в типографии НИИ РЦТИИ.

Подписано в печать 05.09.2024 г.

Формат 60x84 1/8. Заказ №5. Тираж 100 экз.

PROBLEMS OF COMPUTATIONAL AND APPLIED MATHEMATICS

No. 4/1(59) 2024

The journal was established in 2015.
6 issues are published per year.

Founder:

Digital Technologies and Artificial Intelligence Development Research Institute.

Editor-in-Chief:

Ravshanov N.

Deputy Editors:

Azamov A.A., Aripov M.M., Shadimetov Kh.M.

Executive Secretary:

Akhmedov D.D.

Editorial Council:

Azamova N.A., Alov R.D., Amirgaliev E.N. (Kazakhstan), Burnashev V.F.,
Zagrebina S.A. (Russia), Zadorin A.I. (Russia), Ignatiev N.A., Ilyin V.P. (Russia),
Ismagilov I.I. (Russia), Kabanikhin S.I. (Russia), Karachik V.V. (Russia), Kurbonov
N.M., Mamatov N.S., Mirzaev N.M., Mirzaeva G.R., Mukhamadiev A.Sh., Nazirova
E.Sh., Normurodov Ch.B., Nuraliev F.M., Opanasenko V.N. (Ukraine), Rasulov A.S.,
Sadullaeva Sh.A., Starovoitov V.V. (Belarus), Khayotov A.R., Khaldjigitov A.,
Khamdamov R.Kh., Khujaev I.K., Khujayorov B.Kh., Chye En Un (Russia),
Shabozov M.Sh. (Tajikistan), Dimov I. (Bulgaria), Li Y. (USA), Mascagni M. (USA),
Min A. (Germany), Schaumburg H. (Germany), Singh D. (South Korea),
Singh M. (South Korea).

The journal is registered by Agency of Information and Mass Communications under the
Administration of the President of the Republic of Uzbekistan.

The registration certificate No. 0856 of 5 August 2015.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

At a reprint of materials the reference to the journal is obligatory.
Authors are responsible for the accuracy of the facts and reliability of the information.

Address:

100125, Tashkent, Buz-2, 17A.

Tel.: +(998) 712-319-253, 712-319-249.

E-mail: journals@airi.uz.

Web-site: <https://journals.airi.uz>.

Layout design:

Sharipov Kh.D.

DTAIDRI printing office.

Signed for print 05.09.2024

Format 60x84 1/8. Order No. 5. Printed copies 100.



**Профессор
ИСРАИЛОВ МАРУФ ИСРАИЛОВИЧ**
(к 90-летию со дня рождения)

Маруф Исраилович Исраилов – известный ученый-математик, доктор физико-математических наук, профессор, крупный специалист в области теории чисел и вычислительной математики.

М.И. Исраилов родился 27 апреля 1934 года в городе Самарканде в семье ремесленника. В 1951 году с отличием окончив среднюю школу №16 г. Самарканда, поступил на физико-математический факультет Самаркандского государственного университета, который успешно окончил в 1956 г. С 1958 по 1961 годы проходил обучение в аспирантуре Института математики им. В.И. Романовского под руководством профессора Н.П. Романова. В 1966 году защитил кандидатскую диссертацию на тему «Проблема Тарри для быстрорастущих слагаемых и ее приложение к изучению эргодических сумм». В 1974 году М.И. Исраилову присвоено звание старшего научного сотрудника. В 1986 году М.И. Исраилов защитил докторскую диссертацию на тему «Асимптотические и точные формулы для аддитивных задач с растущим числом слагаемых», а в 1989 году получил звание профессора по специальности «Вычислительная математика».

После окончания аспирантуры М.И. Исраилов работал младшим научным сотрудником в Вычислительном центре Института математики АН РУз, затем с 1966 г. – старшим научным сотрудником. С 1976 года работал на должности заведующего лабораторией «Теория приближенного интегрирования» Института кибернетики с вычислительным центром. С 1984 г. и до 1995 г. – являлся заведующим отделом «Вычислительные методы» Института математики АН РУз. В том же 1995 году М.И. Исраилов приступил к работе в Самаркандском государственном университете в качестве заведующего кафедрой вычислительной математики.

Профессор М.И. Исраилов имел широкий диапазон научных интересов. Его глубокие исследования в областях аддитивных задач, построения общих арифметиче-

ских ортогональных и биортогональных систем в гильбертовых пространствах; нахождения числа решений различных классов диофантовых уравнений, оценке тригонометрических сумм; построения оптимальных квадратурных и кубатурных формул в различных функциональных пространствах, а также приближенного решения регулярных и сингулярных интегральных уравнений внесли существенный вклад в развитие теории чисел и вычислительной математики. Результаты его работ успешно применяются в многочисленных прикладных задачах.

М.И. Исраилов впервые исследовал проблему Тарри для общих числовых последовательностей и применил к изучению эргодических сумм. Здесь он также решил известную проблему венгерского математика П. Эрдеша (об оценке снизу максимума модуля многочленов на единичной окружности) в обобщенной и уточненной постановке. М.И. Исраилову принадлежит всестороннее исследование аддитивных задач с растущим числом слагаемых. Он получил асимптотические разложения в проблеме Варинга с полиномиальными слагаемыми и в диофантовой системе Гильберта-Камке.

Им также найдена точная формула для числа решений линейных диофантовых уравнений общего вида. Эта формула нашла применение в теории инвариантных кубатурных формул академика С.Л.Ёсоболева и позволила сильно упростить исследование и построение таких формул на поверхности многомерных сфер и шаров.

Маруф Исраилович также внес существенный вклад в применение теоретико-числовых методов и методов сплайн-функций в вычислительной математике. Им построены оптимальные квадратурные и кубатурные формулы сингулярных интегралов с ядрами Гильберта и Коши, найдены приближенно-аналитические решения систем одномерных и многомерных интегральных уравнений с ядрами Фредгольма, Гильберта и Коши. Найдены оценки погрешности в различных часто встречающихся пространствах функций. Эти результаты имеют многочисленные применения в прикладных задачах, в частности в аэродинамике и гидродинамике. Характерной особенностью этого цикла исследований является новизна постановок задач и разработка новых методов их решения.

Отдельные результаты исследований М.И. Исраилова по теории дзета-функции Римана и проблеме делителей Дирихле вызвали большой резонанс среди специалистов за пределами нашей страны.

В Маруфе Исраиловиче гармонично сочетались способности крупного ученого, талантливого педагога и умелого руководителя крупных научных исследований. Он успешно сочетал плодотворную научную и научно-организаторскую деятельность с большой педагогической и общественной деятельностью. С 1967 г. М.И. Исраилов читал общие и специальные курсы на факультете прикладной математики Ташкентского государственного университета, а с 1995 по 2003 годы – в Самаркандском государственном университете, где до конца жизни продолжал активную научно-педагогическую деятельность в качестве почетного профессора-консультанта.

М.И. Исраилов с 1972 г. являлся членом двух специализированных советов по защите кандидатских и докторских диссертаций. С 1967 по 1995 годы руководил работой организованного им городского научного семинара «Применение теории чисел в вычислительной математике» при Институте кибернетики АН РУз и Институте математики АН РУз, а с 1995 года руководил научным семинаром «Приближенные методы высшего анализа» в СамГУ.

Работая в крупнейших ВУЗах и НИИ республики, Маруф Исраилович подготовил десятки учеников, успешно работающих в различных сферах экономики республи-

ки, в странах ближнего и дальнего зарубежья. М.И. Исраилов руководил работами магистрантов, аспирантов и докторантов. Под его руководством защищены более 10 кандидатских диссертаций, он способствовал защите трех докторских диссертаций. С 1993 г. М.И. Исраилов со своими докторантами, аспирантами и студентами вел научные исследования в рамках проектов, имеющих фундаментальное значение и широкое прикладное применение.

Обычно будущих ученых Маруф Исраилович привлекал к науке со студенческой скамьи. Более того, он с аспирантских лет активно участвовал в поиске и формировании юных математических дарований в системе школьного образования. Будучи аспирантом и молодым ученым М.И. Исраилов преподавал в специализированной физико-математической школе №82 города Ташкента, организованной академиком В.К. Кабуловым. Многие ученики М.И. Исраилова из этой школы стали в последующем докторами наук и известными специалистами в своих отраслях. Подготовку математиков со школьной скамьи профессор М.И. Исраилов продолжил в физико-математическом лицее г. Самарканда, учащиеся которого регулярно занимали призовые места на различных международных математических олимпиадах. На протяжении всей педагогической деятельности своими научно-популярными статьями в энциклопедиях, в различных общественных и молодежных изданиях, ряде телепередач М.И. Исраилов умело и выверено формировал математическую культуру мышления у молодежи.

М.И. Исраилов – автор более 160 научных, 40 научно-популярных работ. Около 50 его научных статей опубликованы в авторитетных изданиях ближнего и дальнего зарубежья. Профессор М.И. Исраилов является автором широко известного двухтомного учебника по вычислительной математике «Хисоблаш методлари». Данная книга является единственным учебником подобного типа на узбекском языке и принята в качестве основного в ведущих университетах Узбекистана. Этот учебник написан на основе оригинальных лекций М.И. Исраилова, которые он читал на протяжении 40 лет в Национальном университете Узбекистана, Самаркандском государственном университете, на семинарах в Институте математики АН РУз. Также результатом многолетнего чтения лекций стал учебник по теории чисел «Сонлар назарияси» в соавторстве с профессором А. Солеевым.

М.И. Исраилов и его ученики участвовали с докладами во многих международных научных форумах. Он принимал участие в Международном конгрессе математиков, Всемирном конгрессе общества Бернулли и других. Был одним из активных организаторов всех международных конференций по теории кубатурных формул, проводимых в Узбекистане. Профессор М.И. Исраилов до последних дней оставался активным участником ежегодной Международной научно-практической конференции «Инновация». Являясь одним из бессменных руководителей секции «Математика. Математическое моделирование», М.И. Исраилов поддерживал высокий уровень научных изысканий и докладов конференции. М.И. Исраилов был членом редколлегии сборника «Вопросы вычислительной и прикладной математики», а также ответственным редактором сборников по вычислительной математике, выпускаемых в Институте математики АН РУз. А с 2001 года являлся членом редколлегии сборника научных статей Международной конференции «Инновация». Являлся членом Американского математического общества и экспертом международного журнала «Mathematical Reviews».

Маруфе Исраилович неоднократно награждался почетными грамотами Академии наук Республики Узбекистан.

В знак признания весомого многолетнего вклада профессора М.И. Исраилов в развитие математической науки и подготовку высококвалифицированных кадров в 2009 году Национальным университетом Узбекистана была проведена республиканская научная конференция «Вычислительные технологии и математическое моделирование», посвященная его 75-летию. В 2013 году проведен научный семинар «Профессор М.И. Исраилов и развитие прикладной математики в Узбекистане», в 2014 году состоялась научно-техническая конференция «Прикладная математика и информационная безопасность», посвященная 80-летию учёного. В текущем 2024 году в связи с 90-летием профессора М.И. Исраилова в НУУз организован международный научный семинар «Вычислительные модели и технологии (СМТ2024)».

Созданная профессором М.И. Исраиловым научная школа по численным методам и в настоящее время продолжает продуктивно функционировать. Ученики и последователи Маруфа Исраиловича сегодня успешно работают в различных сферах и отраслях экономики нашей республики и за рубежом, продолжая дело своего Устога-учителя.

Редакционная коллегия журнала «Проблемы вычислительной и прикладной математики» посвящает данный специальный выпуск светлой памяти профессора Маруфа Исраиловича Исраилова – выдающегося учёного, талантливого педагога, заботливого наставника и замечательного человека, который навсегда останется в памяти друзей, коллег и учеников.

Содержание

Солеев А.С., Розет И.Г., Мухтаров Я.

Исследование эколого-медицинских моделей методами бифуркационных параметров в конечно-разностных дискретных системах 9

Худойбергганов М.У., Туляганова Н.Б., Каримов Д.К.

Исследование устойчивости модифицированных разностных схем Куранта, Айзексона и Риза для квазилинейных гиперболических систем 15

Эшкuvatов З.К., Салимова Н.М., Худойбергганов М.О.

Решение системы интегральных уравнений Вольтерра первого рода модифицированным методом разложения Адомиана 23

Олимов Н.Н., Бекмуродова Д.Б.

Оптимальная интерполяционная формула с производными в пространстве Соболева 37

Курбонназаров А.И.

Оптимальная квадратурная формула для вычисления коэффициентов Фурье в гильбертовом пространстве 46

Шадиметов Х.М., Атамуродова Б.М.

Дискретная система типа Винера-Хопфа для коэффициентов интерполяционных формул 64

Шадиметов Х.М., Каримов Р.С.

Система типа Винера-Хопфа для нахождения оптимальных коэффициентов разностных формул в гильбертовом пространстве 74

Расулов А.С., Раимова Г.М.

Применение методов ускорения сходимости к асинхронным итерациям 85

Шадиметов Х.М., Шоназаров С.К.

Об одной явной оптимальной разностной формуле 96

Хаётов А.Р., Нуралиев Ф.А., Абдуллаева Г.Ш.

Построение алгебро-гиперболического интерполяционного натурального сплайна шестого порядка 107

Аллаков И., Эрдонов Б.Х.

Об одновременном представлении трех чисел суммой шести простых чисел . 122

К. Джа, К.Б. Манандхар

Общий результат с фиксированной точкой для совместимых отображений типа (K) в интуиционистском нечетком метрическом пространстве 134

Хаётов А.Р., Хаитов Т.О., Буваширов Д.С.

Оптимальная формула численного интегрирования дробного интеграла Римана-Лиувилля 142

Шадиметов Х.М., Азамов С.С., Элмуратов Г.Ч.

Минимизация погрешность квадратурной формулы в пространстве Гильберта 151

Contents

<i>Soleyev A.S., Rozet I.G., Muxtarov Y.</i>	
Research of ecological and medical models using bifurcation parameters methods in finite difference discrete systems	9
<i>Khudoyberganov M.U., Tulyaganova N.B., Karimov D.K.</i>	
Investigation of the stability of the modified difference Courant, Isaakson and Rees schemes for quasi-linear hyperbolic systems	15
<i>Eshkuvatov Z.K., Salimova N.M., Khudoyberganov M.O.</i>	
Solving system of Volterra integral equations of the first kind by modified Ado- mian decomposition method	23
<i>Olimov N.N., Bekmurodova D.B.</i>	
An optimal interpolation formula with derivatives in Sobolev space	37
<i>Kurbonnazarov A.I.</i>	
Optimal quadrature formula for calculating Fourier coefficients in Hilbert space .	46
<i>Shadimetov Kh.M., Atamuradova B.M.</i>	
Discrete system of Wiener–Hopf type for coefficients of interpolation formulas . .	64
<i>Shadimetov Kh.M., Karimov R.S.</i>	
Wiener–Hopf type system for finding optimal coefficients of difference formulas in the Hilbert space	74
<i>Rasulov A.S., Raimova G.M.</i>	
Applications of convergence acceleration methods to asynchronous iterations . .	85
<i>Shadimetov Kh.M., Shonazarov S.K.</i>	
On an explicit optimal difference formula	96
<i>Hayotov A.R., Nuraliyev F.A., Abdullayeva G.Sh.</i>	
Construction of the sixth order algebraic-hyperbolic interpolation natural spline	107
<i>Allakov I., Erdonov B.Kh.</i>	
On the simultaneous representation of three numbers by the sum of six numbers of primes	122
<i>Jha K., Manandhar K.B.</i>	
A common fixed point result for compatible mappings of type (K) in intuitionistic fuzzy metric space	134
<i>Hayotov A.R., Khaitov T.O., Buvasharov D.S.</i>	
An optimal formula for numerical integration of fractional Riemann-Liouville integral	142
<i>Shadimetov Kh.M., Azamov S.S., Elmuratov G.Ch.</i>	
Minimizing the error of a quadrature formula in Hilbert space	151