

UDC 519.644

CONSTRUCTION OF THE SIXTH ORDER ALGEBRAIC-HYPERBOLIC INTERPOLATION NATURAL SPLINE

^{1,2,3}Hayotov A.R., ^{1,2}Nuraliyev F.A., ^{1*}Abdullayeva G.Sh.

*gulruxshukurillayevna@gmail.com

¹V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences,
9, University str., Tashkent, 100174 Uzbekistan;

²Tashkent International University,
7, Kichik khalka yoli str., Tashkent, 100084 Uzbekistan;

³Central Asian University,
264, Milliy bog St, Tashkent, 111221 Uzbekistan.

Now splines are being constructed in different spaces and with different methods, and their application is widely studied. In this work, We construct a parametric spline that belongs $K_{3,\omega}$ space. For this, we will use the Sobolev method and obtain a spline function for the approximate calculation of the unknown function. Firstly, we will present the interpolation spline function under which conditions gives a minimum to the norm in a certain Hilbert space. We will give a equations system to find the coefficients of interpolation natural spline spline. We use Sobolev method to find the coefficients of this spline. This method allows to obtain an analytical solution of such systems. This method is based on constructing a discrete analogue of the differential operator L^*L . When we found the coefficients of the sixth order algebraic-hyperbolic interpolation natural spline, we obtain the exact expression of this spline.

Keywords: parametric interpolation spline, Hilbert space, Sobolev's method, discrete argument function, discrete analogy of the differential operator.

Citation: Hayotov A.R., Nuraliyev F.A., Abdullayeva G.Sh. 2024. Construction of the sixth order algebraic-hyperbolic interpolation natural spline. *Problems of Computational and Applied Mathematics*. 4/1(59): 107-121.

1 Introduction

Nowadays, interpolation plays a crucial role in various fields including mathematics, engineering, computer science, statistics, and more. It involves approximate functions, fill in missing data, smooth noisy data, and create continuous representations from discrete data. There are several types of interpolation methods, each with its own characteristics and suitability for different types of data and applications. Here are some common types: linear Interpolation, polynomial interpolation, Spline Interpolation, Piecewise Interpolation, Inverse Distance Weighting (IDW), Kriging. These are some of the main types of interpolation methods commonly used in various fields. Among of them, splines provide a significant tool for the design of computationally economical curves and surfaces for the construction of various objects like automobiles, ship hulls, airplane fuselages and wings, propeller blades, shoe insoles, bottles, etc. It also contributes in the description of geological, physical statistical, and even medical phenomena. Spline methods have proven to be indispensable in a variety of modern industries, including computer vision, robotics, signal and image processing, visualization, textile, graphic design, and even media. For example, In [1], a medical application based on biomarkers is presented; a longitudinal and survival

fitting model based on cubic polynomial B splines sets is presented for modeling the longitudinal markers. [2] research aims to develop a machine learning model for predicting the compressive strength of eco-friendly concrete using Multivariate Adaptive Regression Splines (MARS). [3] presents the theory of Interpolation and its applications in numerical analysis. It specially focuses on cubic spline interpolation. In [4], The cubic spline interpolation method is used to restore the clipping waveform to solve the near-field data loss. In this paper, The recoverability of seismic waveforms with different clipped levels is evaluated through artificial clipping experiments and compared the recovery waveforms with the projection onto convex sets (POCS) method.

There are a few articles that give methods to construct splines and their applications. For example, A data-driven approach to represent (multi) exponential decay data is presented in [5]. In [6], a cubic Hermite spline interpolating scheme reproducing both linear polynomials and hyperbolic functions is considered. Moreover, in [7], some ideas about kernel-based greedy algorithms to exponential-polynomial spline is extend, whose main drawback consists in possible overfitting and consequent oscillations of the approximant. Construction of Marsden's identity for Uniform Algebraic Hyperbolic B-splines is developed and a clear proof is given in [8], the paper [9] provides a new Hermite-type cubic spline interpolating approach that is based on algebraic hyperbolic functions and has an optimal property.

In this work, we construct a spline by using a method that Sobolev proposed [10, 11]. Several splines that minimized the norms in $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ [12], $L_2^{(m)}(0,1)$ [13], $K_2(P_m)$ [14] was constructed and applied by this method. We will construct a spline that minimizes the semi-norm in this space.

$$K_{3,\omega} = \{ f : [0,1] \rightarrow R \mid f'' \text{ is absolutely continuous and } f''' \in L_2(0,1) \}, \quad (1)$$

With the semi norm

$$\|f\| := \left\{ \int_0^1 (f'''(x) - \omega^2 f'(x))^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (2)$$

where

$$\int_0^1 (f'''(x) - \omega^2 f'(x))^2 dx < \infty.$$

The equality (2) gives the semi-norm and $\|f\| = 0$ if and only if $f(x) = d_1 \sinh(\omega x) + d_2 \cosh(\omega x) + d_3$. In this space other problems is solved too. For example, in [15], the problem of constructing an optimal quadrature formula in the sense of Sard based on the functional approach for the numerical calculation of the Fourier integral is considered. And also, the optimization of quadrature formulas in the space of functions that have generalized third-order derivatives that are square summable is studied in [16].

In this work, we construct a parametric spline, this parameter gives help to more minimize the semi norm (2) .

The first definition of the generalized spline is given in [17]. Now, we give a definition of the sixth order algebraic-hyperbolic spline by following the definition given [17].

Let L be a linear operator given by the formula

$$L \equiv \frac{d^3}{dx^3} - \omega^2 \frac{d}{dx}. \quad (3)$$

Let us denote by L^* the operator conjugate to L :

$$L^* \equiv -\frac{d^3}{dx^3} + \omega^2 \frac{d}{dx}. \quad (4)$$

Definition.1.1. Sixth order algebraic-hyperbolic spline of defect 1 relative to the mesh: $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_N = 1$ on the segment $[0, 1]$ this function $S_\Delta(x)$ from the class $K_{3,\omega}$ satisfying the differential equation

$$L^*LS = 0. \quad (5)$$

On each open interval (x_{i-1}, x_i) , $i = 1, 2, \dots, N$.

In addition, let us be given the corresponding values $Y : y_0, y_1, \dots, y_N$ and the knot points $x_0, x_1, \dots, x_N$. We are looking for a sixth order algebraic-hyperbolic spline of defect one that satisfies the following conditions

$$S_\Delta(Y; x_j) = y_j, \quad j = 0, 1, \dots, N. \quad (6)$$

2 Property of the minimum norm

Now, we present under what conditions $S_\Delta(x)$ gives a minimum to the norm $K_{3,\omega}$.

Theorem.2.1. If the function $f(x)$ belongs to the space $K_{3,\omega}$ the $S_\Delta(f; x)$ spline interpolates it on the mesh $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_N = 1$ and fulfilled any of the conditions:

1. at the end points of the mesh Δ for the algebraic-hyperbolic spline $S_\Delta(f, x)$ the equalities $LS(f; 0) = 0$, $LS(f; 1) = 0$, $(LS(f; 0))' = 0$, $(LS(f; 1))' = 0$, are valid;
2. The function $f(x)$ and algebraic-hyperbolic spline $S_\Delta(f, x)$ satisfy the boundary conditions $f'(0) = S'(f, 0)$, $f'(1) = S'(f, 1)$, $f''(0) = S''(f, 0)$, $f''(1) = S''(f, 1)$;
3. The function $f(x)$ and the generalized spline $S_\Delta(f, x)$ are periodic;

Then the first integral identity holds

$$\int_0^1 \{Lf(x)\}^2 dx = \int_0^1 \{LS_\Delta(f; x)\}^2 dx + \int_0^1 \{L[f(x) - S_\Delta(f; x)]\}^2 dx. \quad (7)$$

It should be noted that a sixth order algebraic-hyperbolic spline is called

1. a natural interpolation spline, when condition a) satisfied
2. a clamped interpolation spline, when condition b) satisfied
3. a periodic interpolation spline, when condition c) satisfied

Prove:

Let $u(x)$ and $v(x)$ be functions from the Hilbert space $K_{3,\omega}$. Integrating by parts the indefinite integral of the product $Lu(x)v(x)$ we obtain the following identity.

$$\int Lu(x)v(x)dx = \sum_{j=0}^2 u^{(2-j)} \sum_{k=0}^j (-1)^k \{a_{3-j+k}(x)v(x)\}^{\{k\}} + \int u(x)L^*v(x)dx. \quad (8)$$

Where a_k is the coefficients of the operator (3) and In our condition, they are

$$a_3 = 1, \quad a_2 = 0, \quad a_1 = -\omega^2, \quad a_0 = 0. \quad (9)$$

Let us be given a mesh $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_N = 1$ and sixth order algebraic-hyperbolic $S_\Delta(x)$ spline on it and the function $f(x)$ belong to the space $K_{3,\omega}(0, 1)$. We

differentiate both sides of the equation (8) and then we put $u(x) = f(x) - S_\Delta(x)$ and $v(x) = LS_\Delta(x)$ on it. Then we obtain the following equality by integrating the resulting equality over $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, N$ interval

$$\begin{aligned} & \int_{x_{i-1}}^{x_i} L\{f(x) - S_\Delta(x)\}LS_\Delta(x)dx = \\ & = \left| \sum_{j=0}^2 [f(x) - S_\Delta(x)]^{(2-j)} \sum_{k=0}^j (-1)^k \{a_{3-j+k}(x)LS_\Delta(x)\}^{(k)} \right|_{x_{i-1}}^{x_i} + \\ & + \int_{x_{i-1}}^{x_i} \{f(x) - S_\Delta(x)\}L * LS_\Delta(x)dx. \end{aligned}$$

From here, taking into account equation (3), we come the following.

$$\begin{aligned} & \int_{x_{i-1}}^{x_i} L\{f(x) - S_\Delta(x)\}LS_\Delta(x)dx = \\ & = \left| \left(\sum_{j=0}^2 [f(x) - S_\Delta(x)]^{(2-j)} \sum_{k=0}^j (-1)^k \{a_{3-j+k}(x)LS_\Delta(x)\}^{(k)} \right) \right|_{x_{i-1}}^{x_i}. \end{aligned} \quad (10)$$

Next we consider the following identity.

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \{L[f(x) - S_\Delta(x)]\}^2 dx = \int_0^1 \{Lf(x)\}^2 dx - \int_0^1 \{LS_\Delta(x)\}^2 dx - \\ & - 2 \int_0^1 L[f(x) - S_\Delta(x)]LS_\Delta(x)dx. \end{aligned}$$

From here, taking into account (10), we obtain the following.

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \{L[f(x) - S_\Delta(x)]\}^2 dx = \int_0^1 \{Lf(x)\}^2 dx - \int_0^1 \{LS_\Delta(x)\}^2 dx - \\ & - 2 \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=0}^2 [f(x) - S_\Delta(x)]^{(2-j)} \sum_{k=0}^j (-1)^k \{a_{3-j+k}(x)LS_\Delta(x)\}^{(k)} \right) \Big|_{x_{i-1}}^{x_i}. \end{aligned} \quad (11)$$

Now, we study the conditions on the functions and on the generalized spline $S_\Delta(x)$ becomes zero this yields (7) identity. Let us consider the last sum in identity (10) and denote it as follows:

$$A(f, S_\Delta) = \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=0}^2 [f(x) - S_\Delta(x)]^{(2-j)} \sum_{k=0}^j (-1)^k \{a_{2-j+k}(x)LS_\Delta(x)\}^{(k)} \right) \Big|_{x_{i-1}}^{x_i},$$

for $A(f, S_\Delta)$, expanding the integral sum, we have

$$\begin{aligned} & A(f, S_\Delta) = \sum_{i=1}^N \{[f''(x) - S''_\Delta(x)] \cdot a_3(x)LS_\Delta(x)\} \Big|_{x_{i-1}}^{x_i} + \\ & + \sum_{i=1}^N \{[f'(x) - S'_\Delta(x)] \cdot (a_2(x)LS_\Delta(x) + (a_3(x)LS_\Delta(x))')\} \Big|_{x_{i-1}}^{x_i} + \\ & + \sum_{i=1}^N \{[f(x) - S_\Delta(x)] \cdot (a_1(x)LS_\Delta(x) + (a_2LS_\Delta(x))' + (a_3LS_\Delta(x))'')\} \Big|_{x_{i-1}}^{x_i}. \end{aligned} \quad (12)$$

Let the function $f(x)$ from the space $K_{3,\omega}(0,1)$ at the nodes x_j , $j = 0, 1, \dots, N$ takes values (6) and $S_\Delta(Y, x)$ be sixth order algebraic-hyperbolic spline interpolating values (6) at $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_N = 1$ mesh, i.e.

$$S_\Delta(f; x_j) = f(x_j), \quad j = 0, 1, \dots, N. \quad (13)$$

In (12), the last sum becomes zero because the spline $S_\Delta(x)$ and $f(x)$ function satisfy (13) condition.

$$\begin{aligned} A(f, S_\Delta(f)) &= \sum_{i=1}^N \{[f''(x) - S''_\Delta(x)] \cdot a_3(x)LS_\Delta(x)\}|_{x_{i-1}}^{x_i} + \\ &+ \sum_{i=1}^N \{[f'(x) - S'_\Delta(x)] \cdot (a_2(x)LS_\Delta(x) + (a_3(x)LS_\Delta(x))')\}|_{x_{i-1}}^{x_i}. \end{aligned} \quad (14)$$

When each sums in (14) is opened all terms in the middle are removed, leaving only the first and last terms, and it takes the following form:

$$\begin{aligned} A(f, S_\Delta(f)) &= [f''(x_N) - S''_\Delta(x_N)] \cdot a_3(x_N)LS_\Delta(x_N) - \\ &- [f''(x_0) - S''_\Delta(x_0)] \cdot a_3(x_0)LS_\Delta(x_0) + \\ &+ [f'(x_N) - S'_\Delta(x_N)] \cdot (a_2(x_N)LS_\Delta(x_N) + (a_3(x_N)LS_\Delta(x_N))') - \\ &- [f'(x_0) - S'_\Delta(x_0)] \cdot (a_2(x_0)LS_\Delta(x_0) + (a_3(x_0)LS_\Delta(x_0))'). \end{aligned}$$

Substituting the x_N , x_0 and (9) equality's into the appropriate terms in expression above, we obtain the following expression:

$$\begin{aligned} A(f, S_\Delta(f)) &= [f''(1) - S''_\Delta(1)] \cdot LS_\Delta(1) - [f''(0) - S''_\Delta(0)] \cdot LS_\Delta(0) + \\ &+ [f'(1) - S'_\Delta(1)] \cdot (LS_\Delta(1))' - [f'(0) - S'_\Delta(0)] \cdot ((LS_\Delta(0))'). \end{aligned} \quad (15)$$

For expression (15) to turn into a zero, it is enough to fulfill one of the conditions given in the theorem (7). this result follows from a more generation result in [17]. In a result, we gain (7) because of $A(f; S_\Delta(f)) = 0$. Theorem (2.1) is proved.

3 To construct of a system for the sixth order algebraic-hyperbolic natural interpolation spline

Let a mesh $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_N = 1$ in the open interval $(0,1)$ and a sequence of corresponding values $(y_0, y_1, \dots, y_N)$ be given. As mentioned above, among all functions $f(x)$ satisfying the interpolation conditions $f(x_i) = y_i$, $i = 0, 1, \dots, N$, from the space natural interpolation spline $S_\Delta(Y, x)$ with the conditions $LS(f; 0) = 0$, $LS(f; 1) = 0$, $(LS(f; 0))' = 0$, $(LS(f; 1))' = 0$, , gives a minimum to the integral $\int_0^1 (L(f(x)))^2 dx$.

So now, we come the following problem.

Problem 1 Find the function $S(x) \in K_2(P_3)$ which gives minimum to the semi-norm (3) and satisfies the interpolation condition

$$x_\beta \in [0, 1] S(x_\beta) = f(x_\beta), \quad \beta = 0, 1, \dots, N, \quad (16)$$

for any $f \in K_2(P_3)$, it where $x_\beta \in [0, 1]$ are nodes of interpolation.

Let L and L^* be second order differential operators defined by (3) and (4), respectively. Also, let the functions $\sinh \omega x$, $\cosh \omega x$, 1 be the basis of the kernel of the operator L , and the functions $\sinh \omega x$, $\cosh \omega x$, 1 , $\omega x \sinh \omega x$, $\omega x \cosh \omega x$, ωx be the basis of the kernel of the operator L^*L . Then the sixth order algebraic-hyperbolic spline $S_\Delta(Y, x)$ is uniquely determined by the following conditions.

1. $S_{\Delta}(Y, x)$ consists of a linear combinations $\sinh \omega x, \cosh \omega x, 1, \omega x \sinh \omega x, \omega x \cosh \omega x, \omega x$ functions in every (x_i, x_{i+1}) , $i = 0, 1, \dots, N - 1$ intervals.
2. $S_{\Delta}(Y, x)$ is a linear combination of $\sinh \omega x, \cosh \omega x, 1$ functions in $(-\infty, a)$ and (b, ∞) intervals.
3. $S_{\Delta}(Y, x)$ satisfies the following continuity and natural spline conditions.

$$S_{\Delta}(Y, x_i - 0) = S_{\Delta}(Y, x_i + 0), \alpha = 0, 1, 2, 3, 4, 5, i = 1, 2, \dots, N - 1,$$

$$LS(f; 0) = 0, LS(f; 1) = 0, (LS(f; 0))' = 0, (LS(f; 1))' = 0.$$

4. The function $S_{\Delta}(Y, x)$ satisfies interpolation conditions

$$S_{\Delta}(Y, x_i) = y_i, i = 0, 1, \dots, N.$$

We get following theorem based on above

Theorem 3.1 The solution of the problem 1 is a algebraic -hyperbolic spline and it has the following form:

$$S_{\Delta}(Y, x) = \sum_{i=0}^N C_i G(x - x_i) + d_1 \sinh(\omega x) + d_2 \cosh(\omega x) + d_3. \quad (17)$$

Where $C_i, i = 0, 1, \dots, N, d_1, d_2$, – coefficients of the splayn (17) . $G(x)$ is the fundamental solution of the operator L^*L and satisfies $L^*LG(x) = \delta(x)$ equation and have the following form and

$$G(x) = \frac{\text{sign}(x)}{4v^5} (\omega x \cosh(\omega v x) - 3 \sinh(\omega x) - 2\omega x). \quad (18)$$

Where $\delta(x)$ – is the Diraka-delta function.

The Coefficients of the algebraic-hyperbolic interpolation natural splayn satisfies the following system of the linear equations.

$$\sum_{i=0}^N C_i G(x_j - x_i) + d_1 \sinh(\omega x_j) + d_2 \cosh(\omega x_j) + d_3 = y_i, i = 0, 1, \dots, N, \quad (19)$$

$$\sum_{i=0}^N C_i \sinh(\omega x_i) = 0, \quad (20)$$

$$\sum_{i=0}^N C_i \cosh(\omega x_i) = 0, \quad (21)$$

$$\sum_{i=0}^N C_i = 0. \quad (22)$$

Now, we show the proof of the Theorem3.1.

Prove:

$G(x - x_{\gamma})$ –has until fourth order continuity and he fifth order derivative has a discontinuity of the first type at the point x_{γ} and the discontinuity is equal to 1 i.e $G(x - x_{\gamma}^+) - G(x - x_{\gamma}^-)$. Suppose that the function $p_{\gamma}(x)$ overlaps with $S_{\Delta}(Y, x)$ in the interval $(x_{\gamma}, x_{\gamma+1})$, i.e., $p_{\gamma}(x) := p_{\gamma-1}(x) + C_{\gamma}G(x - x_{\gamma})$, $x \in (x_{\gamma}, x_{\gamma+1})$, where C_{γ} is the jump of the function $S^{(5)}(x)$ at x_{γ} :

$$C_{\gamma} = S^{(5)}(x_{\gamma}^+) - S^{(5)}(x_{\gamma}^-),$$

Then the spline $S(x)$ can be written in the following form

$$S(x) = \sum_{\gamma=0}^N C_{\gamma} G(x - x_{\gamma}) + p_{-1}(x), \quad (23)$$

where

$$p_{-1}(x) = d_1 \sinh(vx) + d_2 \cosh(vx) + d_3, \quad (24)$$

are real numbers.

We obtain (19) equation from the (23), (24) and the condition (IV). Furthermore, the function $S(x)$ satisfies the condition (II) and therefore the function

$$\frac{1}{4} \sum_{\gamma=0}^N C_{\gamma} (v(x - x_{\gamma}) \cosh(v(x - x_{\gamma})) - 3 \sinh(v(x - x_{\gamma})) + 2(v(x - x_{\gamma}))),$$

is a linear combination of the functions $\sinh(vx)$, $\cosh(vx)$, 1. It leads to the following conditions for C_{γ} ,

$$\sum_{\gamma=0}^N C_{\gamma} \sinh(vx_{\gamma}) = 0, \quad \sum_{\gamma=0}^N C_{\gamma} \cosh(vx_{\gamma}) = 0, \quad \sum_{\gamma=0}^N C_{\gamma} = 0. \quad (25)$$

(25) conditions is said orthogonality conditions.

in the end , we obtain (19)-(22) equations system. After all, we have proved Theorem 3.1.

A system of equations of the form (19)-(22) is called discrete systems of the Winer-Hopf [Sobolev introduction]. Such systems are ill-conditioned and standard methods require a large amount of computation to solve them. Therefore S.L.Sobolev proposed a special method for solving such systems. This method allows to obtain an analytical solution of such systems. This method is based on constructing a discrete analogue of the differential analogue of the differential operator L^*L . In the next paragraph we give an algorithm for solving a system of (19)-(22) equations.

4 Algorithm for solving a equations system

In this section, we give an algorithm for finding the coefficients of (17) splayn and we assumu that the nodes x_{β} are equally spaced, i.e., $x_{\beta} = h\beta$, $h = 1/N$, $N = 1, 2, \dots$

We mainly use the terms of discrete function and their convulation. Let $\varphi[h\beta]$ and $\psi[h\beta]$ functions $\varphi(h\beta) * \psi(h\beta) = [\varphi(h\beta), \psi(h\beta - h\gamma)] = \sum_{\gamma=-\infty}^{\infty} \varphi(h\gamma) \cdot \psi(h\beta - h\gamma)$. be discrete functions and their convulation is defined as follow:

$$\varphi(h\beta) * \psi(h\beta) = [\varphi(h\beta), \psi(h\beta - h\gamma)] = \sum_{\gamma=-\infty}^{\infty} \varphi(h\gamma) \cdot \psi(h\beta - h\gamma). \quad (26)$$

Suppose that $C_{\beta} = 0$ when $\beta < 0$ and $\beta > N$. Using convolution, we write equalties (19)-(22) as follows:

$$G(h\beta) * C_{\beta} + d_1 \sinh(\omega x_{\beta}) + d_2 \cosh(\omega x_{\beta}) + d_3 = f(x_{\beta}), \quad \beta = 0, 1, \dots, N, \quad (27)$$

$$\sum_{\gamma=0}^N C_{\gamma} \sinh(\omega x_{\gamma}) = 0, \quad (28)$$

$$\sum_{\gamma=0}^N C_{\gamma} \cosh(\omega x_{\gamma}) = 0, \quad (29)$$

$$\sum_{\gamma=0}^N C_{\gamma} = 0, \quad (30)$$

where $G(h\beta)$ is a function of discrete argument corresponding to the function G is given in (18) .

Thus, we have the following problem.

Problem 2 find the *coefficients* C_{β} , $\beta = 0, 1, \dots, N$ and the *constants* d_1, d_2, d_3 which satisfy the system (27)-(30).

Futher we investigate Problem 2 which is equivalent to Problem 1. Namely, instead of C_{β} we introduce the following functions

$$v(h\beta) = G(h\beta) * C_{\beta}, \quad (31)$$

$$u(h\beta) = v(h\beta) + d_1 \sinh(\omega h\beta) + d_2 \cosh(\omega h\beta) + d_3. \quad (32)$$

In such a statement it is necessary to express the coefficients C_{β} by the function $u(h\beta)$. For this we have to construct such an operator $D(h\beta)$ which satisfies the equality

$$D(h\beta) * G(h\beta) = \delta(h\beta), \quad (33)$$

Where $\delta(h\beta) = \begin{cases} 0, & \beta \neq 0 \\ 1, & \beta = 0 \end{cases}$ is the discrete delta-function.

The construction of the discrete analogue $D(h\beta)$ of the differential operator $\frac{d^6}{dx^6} - 2\omega^2 \frac{d^4}{dx^4} + \omega^4 \frac{d^2}{dx^2}$ is given in [18] .

Following [18] we have:

Theorem 4.1 The discrete analogue of the differential operator $\frac{d^6}{dx^6} - 2\omega^2 \frac{d^4}{dx^4} + \omega^4 \frac{d^2}{dx^2}$ has the form

$$D_3(h\beta) = \frac{2\omega^5}{p_4} \begin{cases} \sum_{k=1}^2 A_k \lambda_k^{|\beta|-1}, & |\beta| \geq 0, \\ 1 + \sum_{k=1}^2 A_k, & |\beta| = 1, \\ C + \sum_{k=1}^2 \frac{A_k}{\lambda_k}, & |\beta| = 0, \end{cases} \quad (34)$$

$$p = h\omega \cosh(h\omega) - 3 \sinh(\omega h) + 2\omega h,$$

$$C = -(2 + 4 \cosh(\omega h)) - \frac{3 \sinh(2\omega h) - 2\omega h + 6 \sinh(\omega h) - 10\omega h \cosh(\omega h)}{(\omega h) \cosh(\omega h) - 3 \sinh(\omega h) + 2\omega h}, \quad (35)$$

$$A_k = \frac{(1 - \lambda_k)^2 (\lambda_k^2 + 1 - 2\lambda_k \cosh(\omega h))^2 (\omega h \cosh(\omega h) - 3 \sinh(\omega h) + 2\omega h)^2}{\lambda_k P_4'(\lambda_k)},$$

λ_1, λ_2 are zero of the polynomial

$P_4(\lambda) = (1 - \lambda_K)^2 [(\omega h \cosh(\omega h) - 3 \sinh(\omega h)) \lambda_k^2 + [3 \sinh(2\omega h) - 2\omega h] \lambda + (h \cosh h - 3 \sinh h)] + 2\omega h (\lambda_k^2 - 2\lambda_k \cosh(\omega h) + 1)^2$ and $|\lambda_k| < 1$.

Theorem 4.2 Discrete analogue $D(h\beta)$ of the differential operator $\frac{d^6}{dx^6} - 2\omega^2 \frac{d^4}{dx^4} + \omega^4 \frac{d^2}{dx^2}$ satisfies the following equalities:

- 1) $D(h\beta) * \sinh(\omega h\beta) = 0$,
- 2) $D(h\beta) * \cosh(\omega h\beta) = 0$,
- 3) $D(h\beta) * (\omega h\beta) \sinh(\omega h\beta) = 0$,
- 4) $D(h\beta) * (\omega h\beta) \cosh(\omega h\beta) = 0$,
- 5) $D(h\beta) * G(h\beta) = \delta(h\beta)$,
- 6) $D(h\beta) * (h\beta) = 0$,
- 7) $D(h\beta) * 1 = 0$,

This properties was proved in [19].

Now, first, we calculate

$D(h\beta) * u(h\beta) = D(h\beta) * (C_\beta * G(h\beta) + d_1 \sinh(\omega h\beta) + d_2 \cosh(\omega h\beta) + d_3)$ and we use (33) and Theorems (27). As a result we obtain the following:

$$C_\beta = D(h\beta) * u(h\beta). \quad (36)$$

Thus, if we find the function $u(h\beta)$ then the coefficients C_β can be obtained from equality (36). In order to calculate the convolution (36) we need a representation of the function $u(h\beta)$ for all integer values of β . From equality (27) we get that $u(h\beta) = \varphi(h\beta)$ when $h\beta \in [0, 1]$. Now we need to find a representation of the function $u(h\beta)$ when $\beta < 0$ and $\beta > N$.

Since $C_\beta = 0$ when $h\beta \notin [0, 1]$ then $C_\beta = D_m(h\beta) * u(h\beta) = 0$, $h\beta \notin [0, 1]$. We calculate now the convolution $v(h\beta) = G(h\beta) * C_\beta$ when $\beta \leq 0$ and $\beta \geq N$.

Supposing $\beta \leq 0$ and taking into account equalities (18), (28), (29), (30), we have

$$\begin{aligned} v(h\beta) &= \sum_{\gamma=-\infty}^{\infty} C_\gamma G(h\beta - h\gamma) = \sum_{\gamma=-\infty}^{\infty} C_\gamma \frac{\text{sign}(h\beta - h\gamma)}{4\omega^5} \{(\omega(h\beta - h\gamma)) \cosh(\omega(h\beta - h\gamma)) - \\ &\quad - 3 \sinh(\omega(h\beta - h\gamma)) + 2(\omega(h\beta - h\gamma))\} = \\ &= -\frac{1}{4} \sum_{\gamma=-\infty}^{\infty} C_\gamma \{(\omega(h\beta - h\gamma)) [\cosh(\omega h\beta) \cosh(\omega h\gamma) - \\ &\quad - \sinh(\omega h\beta) \sinh(\omega h\gamma)] - 3[\sinh(\omega h\beta) \cosh(\omega h\gamma) - \\ &\quad - \cosh(\omega h\beta) \sinh(\omega h\gamma)] + 2(\omega(h\beta - h\gamma))\} = \\ &= -\frac{1}{4} \sum_{\gamma=-\infty}^{\infty} C_\gamma \{(\omega h\beta) \cosh(\omega h\beta) \cosh(\omega h\gamma) - (\omega h\beta) \sinh(\omega h\beta) \sinh(\omega h\gamma) - \\ &\quad - (\omega h\gamma) \cosh(\omega h\beta) \cosh(\omega h\gamma) + (\omega h\gamma) \sinh(\omega h\beta) \sinh(\omega h\gamma) - 3 \sinh(\omega h\beta) \cosh(\omega h\gamma) \\ &\quad + 3 \cosh(\omega h\beta) \sinh(\omega h\gamma) + 2(\omega h\beta) - 2(\omega h\gamma)\} = \\ &= -\frac{1}{4} \sum_{\gamma=-\infty}^{\infty} C_\gamma \{(\omega h\beta) \cosh(\omega h\beta) \cosh(\omega h\gamma) - \\ &\quad - (\omega h\beta) \sinh(\omega h\beta) \sinh(\omega h\gamma) - (h\gamma) \cosh(h\beta) \cosh(h\gamma) + (h\gamma) \sinh(h\beta) \sinh(h\gamma)] - \\ &\quad - 3 \sinh(h\beta) \cosh(h\gamma) + 3 \cosh(h\beta) \sinh(h\gamma) + 2(\omega h\beta) - 2(\omega h\gamma)\} = \\ &= \cosh(\omega h\beta) \frac{1}{4} \sum_{\gamma=-\infty}^{\infty} C_\gamma (\omega h\gamma) \cosh(\omega h\gamma) - \\ &\quad - \sinh(\omega h\beta) \frac{1}{4} \sum_{\gamma=-\infty}^{\infty} C_\gamma (\omega h\gamma) \sinh(\omega h\gamma) + \frac{1}{2} \sum_{\gamma=-\infty}^{\infty} C_\gamma (h\omega\gamma). \end{aligned}$$

Denoting

$$b_1 = \frac{1}{4} \sum_{\gamma=-\infty}^{\infty} C_\gamma (\omega h\gamma) \sinh(\omega h\gamma), \quad b_2 = \frac{1}{4} \sum_{\gamma=-\infty}^{\infty} C_\gamma (\omega h\gamma) \cosh(\omega h\gamma), \quad b_3 = \frac{1}{2} \sum_{\gamma=-\infty}^{\infty} C_\gamma (\omega h\gamma),$$

we get for $\beta \leq 0$

$$v(h\beta) = -b_1 \sinh(\omega h\beta) + b_2 \cosh(\omega h\beta) + b_3,$$

And for $\beta \geq N$

$$v(h\beta) = b_1 \sinh(\omega h\beta) - b_2 \cosh(\omega h\beta) - b_3.$$

Now, setting

$$\begin{aligned} d_1^- &= d_1 - b_1, \quad d_2^- = d_2 + b_2, \quad d_3^- = d_3 + b_3, \\ d_1^+ &= d_1 + b_1, \quad d_2^+ = d_2 - b_2, \quad d_3^+ = d_3 - b_3. \end{aligned}$$

We formulate the following problem:

Problem 3 Find the solution of the equation

$$D_m(h\beta) * u(h\beta) = 0, \quad h\beta \notin [0, 1]. \quad (37)$$

In the form:

$$u(h\beta) = \begin{cases} d_1^- \sinh(\omega h\beta) + d_2^- \cosh(\omega h\beta) + d_3^-, & \beta \leq 0, \\ f(h\beta), & 0 \leq \beta \leq N, \\ d_1^+ \sinh(\omega h\beta) + d_2^+ \cosh(\omega h\beta) + d_3^+, & \beta \geq N, \end{cases} \quad (38)$$

where $d_1^-, d_2^-, d_3^-, d_1^+, d_2^+, d_3^+$ are unknowns.

It is clear that

$$d_i = \frac{1}{2}(d_i^+ + d_i^-), \quad i = 1, 2, 3, \quad b_1 = \frac{1}{2}(d_1^+ - d_1^-), \quad b_l = \frac{1}{2}(d_l^- - d_l^+), \quad l = 2, 3. \quad (39)$$

These unknowns $d_1^-, d_2^-, d_3^-, d_1^+, d_2^+, d_3^+$ can be found from equation (37), using the function $D(h\beta)$. Then the explicit form of the function $u(h\beta)$ and coefficients C_β, d_1, d_2, d_3 can be found. Thus, Problem 3 and respectively Problems 2 and 1 can be solved.

In the next section we realize this algorithm for computing the coefficients $C_\beta, \beta = 0, 1, \dots, N, d_1, d_2, d_3$ of the interpolation spline (17) for any $N = 1, 2, \dots$

5 Computing of coefficients of the interpolation spline

In this section using the algorithm from the previous section we obtain explicit formulae for coefficients of interpolation (17) which is the solution of Problem 1.

Theorem 5.1 Coefficients of interpolation spline (17) which minimizes the semi norm (2) with equally spaced nodes in the space $K_2(P_3)$ have the following form:

$$C_0 = \frac{2}{p} \{-d_1^- \sinh \omega h + d_2^- \cosh \omega h + d_3^- + C f(0) + f(h) + \sum_{k=1}^2 \frac{A_k}{\lambda_k} [M_k + \sum_{\gamma=0}^N \lambda_k^\gamma f(h\gamma) + \lambda_k^N N_k]\},$$

$$C_\beta = \frac{2}{p} \{f(h(\beta-1)) + C f(h\beta) + f(h(\beta+1)) + \sum_{k=1}^2 \frac{A_k}{\lambda_k} [\lambda_k^\beta M_k + \sum_{\gamma=0}^N \lambda_k^{|\beta-\gamma|} f(h\gamma) + \lambda_k^{N-\beta} N_k]\},$$

$$C_N = \frac{2}{p} \{d_1^+ \sinh(\omega(h+1)) + d_2^+ \cosh(\omega(h+1)) + d_3^+ + f(1-h) + C f(1) +$$

$$+ \sum_{k=1}^2 \frac{A_k}{\lambda_k} [\lambda_k^N M_k + \sum_{\gamma=0}^N \lambda_k^{N-\gamma} f(h\gamma) + N_k]\},$$

$$d_i = \frac{1}{2}(d_i^+ + d_i^-), \quad i = 1, 2, 3$$

where

$$M_k = -d_1^- \frac{\lambda_k \sinh \omega h}{1 + \lambda_k^2 - 2\lambda_k \cosh(\omega h)} + d_2^- \frac{\lambda_k (\cosh(\omega h) - \lambda_k)}{1 + \lambda_k^2 - 2\lambda_k \cosh(\omega h)} + d_3^- \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_k}, \quad (40)$$

$$\begin{aligned} N_k = & d_1^+ \frac{\lambda_k (\sinh(\omega(h+1)) - \lambda_k \sinh \omega)}{1 + \lambda_k^2 - 2\lambda_k \cosh(\omega h)} + \\ & + d_2^+ \frac{\lambda_k (\cosh(\omega(h+1)) - \lambda_k \cosh \omega)}{1 + \lambda_k^2 - 2\lambda_k \cosh(\omega h)} + d_3^+ \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_k}, \end{aligned} \quad (41)$$

and p, A_k, C, λ_k are given in (35) and $d_1^-, d_2^-, d_3^-, d_1^+, d_2^+, d_3^+$ are defined by (42), (47).

Proof. First we find the expression for d_2^- and d_2^+ . When $\beta = 0$ and $\beta = N$, from (38) we get

$$d_2^- = f(0) - d_3^-, \quad d_2^+ = \frac{f(1) - d_1^+ \sinh(\omega) - d_3^+}{\cosh(\omega)}. \quad (42)$$

Now we find other four unknowns $d_1^-, d_3^-, d_1^+, d_3^+$ which can be found from (37) when $\beta = -1, -2, N+1, N+2$. Taking into account (38) and from (37) we have:

$$\begin{aligned} & \sum_{\gamma=-\infty}^{-1} D(h\beta - h\gamma)(d_1^- \sinh(\omega h\gamma) + d_2^- \cosh(\omega h\gamma) + d_3^-) + \sum_{\gamma=0}^N D(h\beta - h\gamma)f(h\gamma) \\ & + \sum_{\gamma=N+1}^{\infty} D(h\beta - h\gamma)(d_1^+ \sinh(\omega h\gamma) + d_2^+ \cosh(\omega h\gamma) + d_3^+) = 0, \end{aligned}$$

Now, we use (42) and for $\beta = -1, -2, N+1, N+2$ we get the following system of linear equations for $d_1^-, d_3^-, d_1^+, d_3^+$.

$$\begin{aligned} & -d_1^- \sum_{\gamma=1}^{\infty} D_3(h\gamma + h\beta) \sinh(\omega h\gamma) + d_3^- \sum_{\gamma=1}^{\infty} D_3(h\gamma + h\beta)(1 - \cosh(\omega h\gamma)) \\ & + d_1^+ \frac{1}{\cosh \omega} \sum_{\gamma=1}^{\infty} D_3(h(\gamma + N - \beta)) \sinh(\omega h\gamma) + d_3^+ \sum_{\gamma=1}^{\infty} D_3(h(\gamma + N - \beta))(1 - \frac{\cosh(\omega(h\gamma+1))}{\cosh \omega}) \\ & = - \sum_{\gamma=0}^N D_3(h\beta - h\gamma)f(h\gamma) - f(0) \sum_{\gamma=1}^{\infty} D_3(h\beta + h\gamma) \cosh(\omega h\gamma) - \\ & \quad - \frac{f(1)}{\cosh \omega} \sum_{\gamma=1}^{\infty} D_3(h(\gamma + N - \beta)) \cosh(\omega(h\gamma + 1)), \end{aligned}$$

and for $\beta = -1, -2, N+1, N+2$ we get the following system of linear equations for $d_1^-, d_3^-, d_1^+, d_3^+$

$$\begin{aligned} & -d_1^- \sum_{\gamma=1}^{\infty} D_3(h\gamma - h) \sinh(\omega h\gamma) + d_3^- \sum_{\gamma=1}^{\infty} D_3(h\gamma - h)(1 - \cosh(\omega h\gamma)) \\ & + d_1^+ \frac{1}{\cosh \omega} \sum_{\gamma=1}^{\infty} D_3(h(\gamma + N + 1)) \sinh(\omega h\gamma) + d_3^+ \sum_{\gamma=1}^{\infty} D_3(h(\gamma + N + 1))(1 - \frac{\cosh(\omega(h\gamma+1))}{\cosh \omega}) \\ & = - \sum_{\gamma=0}^N D_3(h\gamma + h)f(h\gamma) - f(0) \sum_{\gamma=1}^{\infty} D_3(h\gamma - h) \cosh(\omega h\gamma) - \\ & \quad - \frac{f(1)}{\cosh \omega} \sum_{\gamma=1}^{\infty} D_3(h(\gamma + N + 1)) \cosh(\omega(h\gamma + 1)), \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned}
& -d_1^- \sum_{\gamma=1}^{\infty} D_3(h\gamma - 2h) \sinh(\omega h\gamma) + d_3^- \sum_{\gamma=1}^{\infty} D_3(h\gamma - 2h)(1 - \cosh(\omega h\gamma)) \\
& + d_1^+ \frac{1}{\cosh \omega} \sum_{\gamma=1}^{\infty} D_3(h(\gamma + N + 2)) \sinh(\omega h\gamma) + d_3^+ \sum_{\gamma=1}^{\infty} D_3(h(\gamma + N + 2))(1 - \frac{\cosh(\omega(h\gamma+1))}{\cosh \omega}) \\
& = - \sum_{\gamma=0}^N D_3(h\gamma + 2h) f(h\gamma) - f(0) \sum_{\gamma=1}^{\infty} D_3(h\gamma - 2h) \cosh(\omega h\gamma -) \\
& \quad - \frac{f(1)}{\cosh \omega} \sum_{\gamma=1}^{\infty} D_3(h(\gamma + N + 2)) \cosh(\omega(h\gamma + 1)),
\end{aligned} \tag{44}$$

$$\begin{aligned}
& -d_1^- \sum_{\gamma=1}^{\infty} D_3(h(\gamma + N + 1)) \sinh(\omega h\gamma) + d_3^- \sum_{\gamma=1}^{\infty} D_3(h(\gamma + N + 1))(1 - \cosh(\omega h\gamma)) \\
& + d_1^+ \frac{1}{\cosh \omega} \sum_{\gamma=1}^{\infty} D_3(h(\gamma - 1)) \sinh(\omega h\gamma) + d_3^+ \sum_{\gamma=1}^{\infty} D_3(h(\gamma - 1))(1 - \frac{\cosh(\omega(h\gamma+1))}{\cosh \omega}) \\
& = - \sum_{\gamma=0}^N D_3(h(N + 1 - \gamma)) f(h\gamma) - f(0) \sum_{\gamma=1}^{\infty} D_3(h(\gamma + N + 1)) \cosh(\omega h\gamma -) \\
& \quad - \frac{f(1)}{\cosh \omega} \sum_{\gamma=1}^{\infty} D_3(h(\gamma - 1)) \cosh(\omega(h\gamma + 1)),
\end{aligned} \tag{45}$$

$$\begin{aligned}
& -d_1^- \sum_{\gamma=1}^{\infty} D_3(h(\gamma + N + 2)) \sinh(\omega h\gamma) + d_3^- \sum_{\gamma=1}^{\infty} D_3(h(\gamma + N + 2))(1 - \cosh(\omega h\gamma)) \\
& + d_1^+ \frac{1}{\cosh \omega} \sum_{\gamma=1}^{\infty} D_3(h(\gamma - 2)) \sinh(\omega h\gamma) + d_3^+ \sum_{\gamma=1}^{\infty} D_3(h(\gamma - 2))(1 - \frac{\cosh(\omega(h\gamma+1))}{\cosh \omega}) \\
& = - \sum_{\gamma=0}^N D_3(h(N + 2 - \gamma)) f(h\gamma) - f(0) \sum_{\gamma=1}^{\infty} D_3(h(\gamma + N + 2)) \cosh(\omega h\gamma -) \\
& \quad - \frac{f(1)}{\cosh \omega} \sum_{\gamma=1}^{\infty} D_3(h(\gamma - 2)) \cosh(\omega(h\gamma + 1)).
\end{aligned} \tag{46}$$

Since $|\lambda_k| < 1$, $k = 1, 2$, the series in the previous system of equations are convergent.

Using (42) and taking into account (34), after some calculations, from (43)-(46) we obtain the following equations system:

$$\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & B_{24} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & B_{34} \\ B_{41} & B_{42} & B_{43} & B_{44} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} d_1^- \\ d_3^- \\ d_1^+ \\ d_1^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{pmatrix} \tag{47}$$

where

$$\begin{aligned}
B_{i1} &= \frac{2}{p} [\sinh(\omega h(i - 1)) + C \sinh(\omega hi) + \sinh(\omega h(i + 1)) + \\
& \quad + \sum_{k=1}^2 \frac{A_k}{\lambda_k} \sum_{\gamma=1}^{\infty} \lambda_k^{|\gamma-i|} \sinh(\omega h\gamma)], \\
B_{i2} &= \frac{2}{p} [2 + C + \sum_{k=1}^2 \frac{A_k}{\lambda_k} \sum_{\gamma=1}^{\infty} \lambda_k^{|\gamma-i|} - (\cosh(\omega h(i - 1)) + C \cosh(\omega hi) + \cosh(\omega h(i + 1)) + \\
& \quad + \sum_{k=1}^2 \frac{A_k}{\lambda_k} \sum_{\gamma=1}^{\infty} \lambda_k^{|\gamma-i|} \cosh(\omega h\gamma))], \\
B_{i3} &= \frac{2}{p \cosh \omega} \sum_{k=1}^2 A_k \lambda_k^{N+i-1} \sum_{\gamma=1}^{\infty} \lambda_k^{\gamma} \sinh(\omega h\gamma), \\
B_{i4} &= \frac{2}{p} [\sum_{k=1}^2 A_k \lambda_k^{N+i-1} \sum_{\gamma=1}^{\infty} \lambda_k^{\gamma} - \frac{1}{\cosh \omega} \sum_{k=1}^2 A_k \lambda_k^{N+i-1} \sum_{\gamma=1}^{\infty} \lambda_k^{\gamma} \cosh(\omega(h\gamma + 1))] \quad i = 1, 2.
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
B_{(i+2)1} &= \frac{2}{p} \sum_{k=1}^2 A_k \lambda_k^{N+i-1} \sum_{\gamma=1}^{\infty} \lambda_k^{\gamma} \sinh(\omega h \gamma) \\
B_{(i+2)2} &= \frac{2}{p} \left[\sum_{k=1}^2 A_k \lambda_k^{N+i-1} \sum_{\gamma=1}^{\infty} \lambda_k^{\gamma} - \frac{1}{\cosh \omega} \sum_{k=1}^2 A_k \lambda_k^{N+i-1} \sum_{\gamma=1}^{\infty} \lambda_k^{\gamma} \cosh(\omega h \gamma) \right], \\
B_{(i+2)3} &= \frac{2}{p \cosh \omega} [\sinh(\omega h(i-1)) + C \sinh(\omega h i) + \\
&\quad + \sinh(\omega h(i+1)) + \sum_{k=1}^2 \frac{A_k}{\lambda_k} \sum_{\gamma=1}^{\infty} \lambda_k^{|\gamma-i|} \sinh(\omega h \gamma)], \\
B_{(i+2)4} &= \frac{2}{p} [C + 2 + \sum_{k=1}^2 \frac{A_k}{\lambda_k} \sum_{\gamma=1}^{\infty} \lambda_k^{|\gamma-i|} - \frac{1}{\cosh \omega} \{ \cosh(\omega h(i-1) + 1) + C \cosh(\omega(hi+1)) \\
&\quad + \cosh(\omega h(i+1) + 1) + \sum_{k=1}^2 \frac{A_k}{\lambda_k} \sum_{\gamma=1}^{\infty} \lambda_k^{|\gamma-i|} \cosh(\omega(h\gamma+1)) \}] \quad i = 1, 2,
\end{aligned}$$

Infinite sums is calculated in follow:

$$\begin{aligned}
1) \sum_{\gamma=1}^{\infty} \lambda_k^{\gamma} \sinh(\omega h \gamma) &= \frac{\lambda_k \sinh \omega h}{1 + \lambda_k^2 - 2\lambda_k \cosh(\omega h)}; \quad 2) \sum_{\gamma=1}^{\infty} \lambda_k^{\gamma} \cosh(\omega h \gamma) = \frac{\lambda_k (\cosh \omega h - \lambda_k)}{1 + \lambda_k^2 - 2\lambda_k \cosh(\omega h)}; \\
3) \sum_{\gamma=1}^{\infty} \lambda_k^{\gamma} &= \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_k}; \quad 4) \sum_{\gamma=1}^{\infty} \lambda_k^{\gamma} \sinh(\omega(h\gamma+1)) = \frac{\lambda_k (\sinh(\omega(h+1)) - \lambda_k \sinh \omega)}{1 + \lambda_k^2 - 2\lambda_k \cosh(\omega h)}; \\
5) \sum_{\gamma=1}^{\infty} \lambda_k^{\gamma} \cosh(\omega(h\gamma+1)) &= \frac{\lambda_k (\cosh(\omega(h+1)) - \lambda_k \cosh \omega)}{1 + \lambda_k^2 - 2\lambda_k \cosh(\omega h)}.
\end{aligned}$$

Combaining (47) and (42) we obtain d_1^- , d_2^- , d_3^- , d_1^+ , d_2^+ , d_3^+ . Then we obtain d_1, d_2, d_3 which are given in the statement of the theorem 5.1.

Now, We calculate the coefficients C_{β} , $\beta = 0, 1, 2, \dots, N$. Taking into account (36) from (37) for C_{β} we get

$$\begin{aligned}
C_{\beta} &= D_3(h\beta) * u(h\beta) = \sum_{\gamma=1}^{\infty} D(h\beta - h\gamma) u(h\gamma) = \\
&= \sum_{\gamma=1}^{\infty} D(h\beta + h\gamma) (-d_1^- \sinh(\omega h \gamma) + d_2^- \cosh(\omega h \gamma) + d_3^-) + \\
&\quad + \sum_{\gamma=0}^N D(h\beta - h\gamma) f(h\gamma) + \\
&\quad + \sum_{\gamma=1}^{\infty} D(h(N + \gamma - \beta)) (d_1^+ \sinh(\omega(h\gamma+1)) + d_2^+ \cosh(\omega(h\gamma+1)) + d_3^+).
\end{aligned}$$

From which, using (34) and taking into account notations (40), (41), when $\beta = 0, 1, \dots, N$, for C_{β} we obtain the expression given in the Theorem 5.1.

6 Conclusion

In this work, we constructed an parametric sixth order algebraic-hyperbolic interpolation, natural spline. To solve this problem, we used the Sobolev method and obtain a spline function for the approximate calculation of the unknown function. We first presented the interpolation spline function under which conditions gives a minimum to the norm in a certain Hilbert space. We showed that, the semi norm (2) can be minimized by three different spline function. We choosed interpolation narural spline and constructed it.

To find the coefficients of this spline, we created a system of equations based on certain conditions. We used Sobolev method and gave the algorithm to solve equations system. When we found the coefficients of the sixth order algebraic-hyperbolic interpolation natural siline, we obtain the exact expression of this spline.

References

- [1] Elizabeth R.B., Joseph G.I., Victor D. 2005. *A flexible B-spline model for multiple longitudinal biomarkers and survival*, *Biometrics* 61(1), – P. 64–73.
- [2] Ali H., Ali H.B., Sadiq N.,H., Adam O.K. 2022. *Application of Multivariate Adaptive Regression Splines (MARS) approach in prediction of compressive strength of eco-friendly concrete*, *Case Students in Construction Materials* 17(130):e01262, – P. 1–15.
- [3] Najmuddin A., Farah D. 2017. *The study of new approaches in cubic spline interpolation for auto mobile data*, *Journal of science and arts* no.3(40), – P. 401–406.
- [4] Weng P., Dongwang T., Qiang M., Jiang W. 2024. *Clipped Seismic record recovery analysis based on the cubic spline interpolation algorithm*, *Journal of Seismology.* no.28(3), – P. 843–857.
- [5] Rosanna C., Costanza C., Salvatore C. 2019. *Smoothing exponential-polynomial splines for multiexponential decay data.* (Padova University press, Volume 12 ,P – P. 86–100.
- [6] Salah E., Muhammed O., Abdellah L., Muhammed L. 2022. *C^2 Cubic Algebraic Hyperbolic Spline Interpolating Scheme by Means of Integral Values*, *Mathematics* 10(9). 1490.
- [7] Rosanna C., Stefano De M., Emma P., Gabrieli S. 2021. *Greedy algorithms for learning via exponential-polynomial splines*, *Numerical Analysis.* No2. – P. 1–17.
- [8] S. Eddargani, A. Lamnii, M. Lamnii, D. Sbibi, A. Zidna 2019. *Algebraic hyperbolic spline quase-interpolations and application*, *Journal of computational and applied mathematics*, volume 347, – P. 196–209.
- [9] Mohammed O., Abdellah L., Mohammed L., Muhammed M. 2022. *Fitting and smoothing data using algebraic hyperbolic cubic hermite spline interpolation*, *Engineering letters.* 30:2, – P. 1–6.
- [10] Sobolev, S.L. 2006. *The coefficients of optimal quadrature formulas*, Springer, – P. 561–566.
- [11] Sobolev S.L., V.L. Vaskevich 1997. *Introduction to the theory of Cubature formulas*, Reading, Nauka, Moscow (in Russian), volume 415.
- [12] Kholmat M.Sh., Abdulla R.H. 2012. *Construction of interpolation splines minimizing semi-norm in $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ space..* *BIT Numerical Mathematics*, 53(2), – P. 545–563.
- [13] Kholmat M.Sh., Abdulla R.H., Cabada A. 2014. *Construction of D^m splines in $L_2^{(m)}(0,1)$ space by Sobolev method.* *Applied Mathematics and computation*, – P. 542–551.
- [14] Hayotov A.R. 2018. *Constryction of interpolation splines minimizing the semi-norm in the space $L_2^{(m)}(0,1)$* *Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics* 11(3), – P. 383–396.
- [15] Hayotov A.R., Qurbonnazarov A.I. 2023. *An optimal quadrature formula for the approximate calculation of fourier integrals in the space $K_2^3(0,1)$.* *Problems of computational and applied mathematics* , no3/1. – P. 1–17.
- [16] Shadimetov Kh.M., G'ayratjon A. 2024. *Optimal coefficients of the quadrature formulkas in the space $K_{3,\omega}$* *AIP Conf. Proc.* 3004. – P. 1–14.
- [17] Ahlberg N., Nilson E., Uolsh J. 1972. *Teoriya splaynov i ee priloeniya* Reading.Mir Moskva.
- [18] Ahmadaliyev G.N., Hayotov A.R. 2017 *A discrete analogue of the differential operator $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}} - 2\omega^2 \frac{d^{2m-2}}{dx^{2m-2}} + \omega^4 \frac{d^{2m-4}}{dx^{2m-4}}$* , *Uzbek mathematical journa*Tashkent no. 3, – P. 10–22.

- [19] Qurbonnazarov A.I. 2023. *Properties of Discrete Analogue of the Differential Operator, Problems of computational an applied mathematics* – P. 20–30.

Received August 08, 2024

УДК 519.644

ПОСТРОЕНИЕ АЛГЕБРО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ИНТЕРПОЛЯЦИОННОГО НАТУРАЛЬНОГО СПЛАЙНА ШЕСТОГО ПОРЯДКА

^{1,2,3} Хаётов А.Р., ^{1,2} Нуралиев Ф.А., ^{1*} Абдуллаева Г.Ш.

*gulruxshukurillayevna@gmail.com

¹Институт математики им. В.И. Романовского АН РУз,
100174, Узбекистан, г. Ташкент, ул. Университетская, д. 9;

²Ташкентский международный университет,
100084, Узбекистан, Ташкент, ул. Кичик халка йули, 7;

³Центральноазиатский университет,
111221, Узбекистан, Ташкент, ул. Миллий Бог, 264.

Сейчас сплайны строятся в разных пространствах и разными методами, широко изучается их применение. В этой работе мы строим параметрический сплайн, принадлежащий пространству $K_{3,\omega}$. Для этого воспользуемся методом Соболева и получим сплайн-функцию для приближенного расчета неизвестной функции. Во-первых, мы представим интерполяционную сплайн-функцию, при которой условия дают минимум нормы в определенном гильбертовом пространстве. Приведем систему уравнений для нахождения коэффициентов интерполяционного натурального сплайна. Для нахождения коэффициентов этого сплайна используем метод Соболева. Этот метод позволяет получить аналитическое решение таких систем. Этот метод основан на построении дискретного аналога дифференциального оператора L^*L . Найдя коэффициенты алгебраико-гиперболической интерполяции натурального сплайна шестого порядка, мы получили точное выражение этого сплайна.

Ключевые слова: параметрический интерполяционный сплайн, гильбертово пространство, метод Соболева, дискретная аргументная функция, дискретный аналог дифференциального оператора.

Цитирование: Хаётов А.Р., Нуралиев Ф.А., Абдуллаева Г.Ш. Построение алгебро-гиперболического интерполяционного натурального сплайна шестого порядка // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2024. – № 4/1(59). – С. 107-121.

ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

№ 4/1(59) 2024

Журнал основан в 2015 году.

Издается 6 раз в год.

Учредитель:

Научно-исследовательский институт развития цифровых технологий и
искусственного интеллекта.

Главный редактор:

Равшанов Н.

Заместители главного редактора:

Азамов А.А., Арипов М.М., Шадиметов Х.М.

Ответственный секретарь:

Ахмедов Д.Д.

Редакционный совет:

Азамова Н.А., Алоев Р.Д., Амиргалиев Е.Н. (Казахстан), Бурнашев В.Ф.,
Загребина С.А. (Россия), Задорин А.И. (Россия), Игнатъев Н.А.,
Ильин В.П. (Россия), Исмагилов И.И. (Россия), Кабанихин С.И. (Россия),
Карачик В.В. (Россия), Курбонов Н.М., Маматов Н.С., Мирзаев Н.М.,
Мирзаева Г.Р., Мухамадиев А.Ш., Назирова Э.Ш., Нормуродов Ч.Б.,
Нуралиев Ф.М., Опанасенко В.Н. (Украина), Расулмухамедов М.М., Расулов А.С.,
Садуллаева Ш.А., Старовойтов В.В. (Беларусь), Хаётов А.Р., Халджигитов А.,
Хамдамов Р.Х., Хужаев И.К., Хужаеров Б.Х., Чье Ен Ун (Россия),
Шабозов М.Ш. (Таджикистан), Dimov I. (Болгария), Li Y. (США),
Mascagni M. (США), Min A. (Германия), Schaumburg H. (Германия),
Singh D. (Южная Корея), Singh M. (Южная Корея).

Журнал зарегистрирован в Агентстве информации и массовых коммуникаций при
Администрации Президента Республики Узбекистан.

Регистрационное свидетельство №0856 от 5 августа 2015 года.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

При перепечатке материалов ссылка на журнал обязательна.

За точность фактов и достоверность информации ответственность несут авторы.

Адрес редакции:

100125, г. Ташкент, м-в. Буз-2, 17А.

Тел.: +(998) 712-319-253, 712-319-249.

Э-почта: journals@airi.uz.

Веб-сайт: <https://journals.airi.uz>.

Дизайн и вёрстка:

Шарипов Х.Д.

Отпечатано в типографии НИИ РЦТИИ.

Подписано в печать 05.09.2024 г.

Формат 60x84 1/8. Заказ №5. Тираж 100 экз.

PROBLEMS OF COMPUTATIONAL AND APPLIED MATHEMATICS

No. 4/1(59) 2024

The journal was established in 2015.
6 issues are published per year.

Founder:

Digital Technologies and Artificial Intelligence Development Research Institute.

Editor-in-Chief:

Ravshanov N.

Deputy Editors:

Azamov A.A., Aripov M.M., Shadimetov Kh.M.

Executive Secretary:

Akhmedov D.D.

Editorial Council:

Azamova N.A., Alov R.D., Amirgaliev E.N. (Kazakhstan), Burnashev V.F.,
Zagrebina S.A. (Russia), Zadorin A.I. (Russia), Ignatiev N.A., Ilyin V.P. (Russia),
Ismagilov I.I. (Russia), Kabanikhin S.I. (Russia), Karachik V.V. (Russia), Kurbonov
N.M., Mamatov N.S., Mirzaev N.M., Mirzaeva G.R., Mukhamadiev A.Sh., Nazirova
E.Sh., Normurodov Ch.B., Nuraliev F.M., Opanasenko V.N. (Ukraine), Rasulov A.S.,
Sadullaeva Sh.A., Starovoitov V.V. (Belarus), Khayotov A.R., Khaldjigitov A.,
Khamdamov R.Kh., Khujaev I.K., Khujayorov B.Kh., Chye En Un (Russia),
Shabozov M.Sh. (Tajikistan), Dimov I. (Bulgaria), Li Y. (USA), Mascagni M. (USA),
Min A. (Germany), Schaumburg H. (Germany), Singh D. (South Korea),
Singh M. (South Korea).

The journal is registered by Agency of Information and Mass Communications under the
Administration of the President of the Republic of Uzbekistan.

The registration certificate No. 0856 of 5 August 2015.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

At a reprint of materials the reference to the journal is obligatory.
Authors are responsible for the accuracy of the facts and reliability of the information.

Address:

100125, Tashkent, Buz-2, 17A.

Tel.: +(998) 712-319-253, 712-319-249.

E-mail: journals@airi.uz.

Web-site: <https://journals.airi.uz>.

Layout design:

Sharipov Kh.D.

DTAIDRI printing office.

Signed for print 05.09.2024

Format 60x84 1/8. Order No. 5. Printed copies 100.



**Профессор
ИСРАИЛОВ МАРУФ ИСРАИЛОВИЧ**
(к 90-летию со дня рождения)

Маруф Исраилович Исраилов – известный ученый-математик, доктор физико-математических наук, профессор, крупный специалист в области теории чисел и вычислительной математики.

М.И. Исраилов родился 27 апреля 1934 года в городе Самарканде в семье ремесленника. В 1951 году с отличием окончив среднюю школу №16 г. Самарканда, поступил на физико-математический факультет Самаркандского государственного университета, который успешно окончил в 1956 г. С 1958 по 1961 годы проходил обучение в аспирантуре Института математики им. В.И. Романовского под руководством профессора Н.П. Романова. В 1966 году защитил кандидатскую диссертацию на тему «Проблема Тарри для быстрорастущих слагаемых и ее приложение к изучению эргодических сумм». В 1974 году М.И. Исраилову присвоено звание старшего научного сотрудника. В 1986 году М.И. Исраилов защитил докторскую диссертацию на тему «Асимптотические и точные формулы для аддитивных задач с растущим числом слагаемых», а в 1989 году получил звание профессора по специальности «Вычислительная математика».

После окончания аспирантуры М.И. Исраилов работал младшим научным сотрудником в Вычислительном центре Института математики АН РУз, затем с 1966 г. – старшим научным сотрудником. С 1976 года работал на должности заведующего лабораторией «Теория приближенного интегрирования» Института кибернетики с вычислительным центром. С 1984 г. и до 1995 г. – являлся заведующим отделом «Вычислительные методы» Института математики АН РУз. В том же 1995 году М.И. Исраилов приступил к работе в Самаркандском государственном университете в качестве заведующего кафедрой вычислительной математики.

Профессор М.И. Исраилов имел широкий диапазон научных интересов. Его глубокие исследования в областях аддитивных задач, построения общих арифметиче-

ских ортогональных и биортогональных систем в гильбертовых пространствах; нахождения числа решений различных классов диофантовых уравнений, оценке тригонометрических сумм; построения оптимальных квадратурных и кубатурных формул в различных функциональных пространствах, а также приближенного решения регулярных и сингулярных интегральных уравнений внесли существенный вклад в развитие теории чисел и вычислительной математики. Результаты его работ успешно применяются в многочисленных прикладных задачах.

М.И. Исраилов впервые исследовал проблему Тарри для общих числовых последовательностей и применил к изучению эргодических сумм. Здесь он также решил известную проблему венгерского математика П. Эрдеша (об оценке снизу максимума модуля многочленов на единичной окружности) в обобщенной и уточненной постановке. М.И. Исраилову принадлежит всестороннее исследование аддитивных задач с растущим числом слагаемых. Он получил асимптотические разложения в проблеме Варинга с полиномиальными слагаемыми и в диофантовой системе Гильберта-Камке.

Им также найдена точная формула для числа решений линейных диофантовых уравнений общего вида. Эта формула нашла применение в теории инвариантных кубатурных формул академика С.Л.Ёсоболева и позволила сильно упростить исследование и построение таких формул на поверхности многомерных сфер и шаров.

Маруф Исраилович также внес существенный вклад в применение теоретико-числовых методов и методов сплайн-функций в вычислительной математике. Им построены оптимальные квадратурные и кубатурные формулы сингулярных интегралов с ядрами Гильберта и Коши, найдены приближенно-аналитические решения систем одномерных и многомерных интегральных уравнений с ядрами Фредгольма, Гильберта и Коши. Найдены оценки погрешности в различных часто встречающихся пространствах функций. Эти результаты имеют многочисленные применения в прикладных задачах, в частности в аэродинамике и гидродинамике. Характерной особенностью этого цикла исследований является новизна постановок задач и разработка новых методов их решения.

Отдельные результаты исследований М.И. Исраилова по теории дзета-функции Римана и проблеме делителей Дирихле вызвали большой резонанс среди специалистов за пределами нашей страны.

В Маруфе Исраиловиче гармонично сочетались способности крупного ученого, талантливого педагога и умелого руководителя крупных научных исследований. Он успешно сочетал плодотворную научную и научно-организаторскую деятельность с большой педагогической и общественной деятельностью. С 1967 г. М.И. Исраилов читал общие и специальные курсы на факультете прикладной математики Ташкентского государственного университета, а с 1995 по 2003 годы – в Самаркандском государственном университете, где до конца жизни продолжал активную научно-педагогическую деятельность в качестве почетного профессора-консультанта.

М.И. Исраилов с 1972 г. являлся членом двух специализированных советов по защите кандидатских и докторских диссертаций. С 1967 по 1995 годы руководил работой организованного им городского научного семинара «Применение теории чисел в вычислительной математике» при Институте кибернетики АН РУз и Институте математики АН РУз, а с 1995 года руководил научным семинаром «Приближенные методы высшего анализа» в СамГУ.

Работая в крупнейших ВУЗах и НИИ республики, Маруф Исраилович подготовил десятки учеников, успешно работающих в различных сферах экономики республи-

ки, в странах ближнего и дальнего зарубежья. М.И. Исраилов руководил работами магистрантов, аспирантов и докторантов. Под его руководством защищены более 10 кандидатских диссертаций, он способствовал защите трех докторских диссертаций. С 1993 г. М.И. Исраилов со своими докторантами, аспирантами и студентами вел научные исследования в рамках проектов, имеющих фундаментальное значение и широкое прикладное применение.

Обычно будущих ученых Маруф Исраилович привлекал к науке со студенческой скамьи. Более того, он с аспирантских лет активно участвовал в поиске и формировании юных математических дарований в системе школьного образования. Будучи аспирантом и молодым ученым М.И. Исраилов преподавал в специализированной физико-математической школе №82 города Ташкента, организованной академиком В.К. Кабуловым. Многие ученики М.И. Исраилова из этой школы стали в последующем докторами наук и известными специалистами в своих отраслях. Подготовку математиков со школьной скамьи профессор М.И. Исраилов продолжил в физико-математическом лицее г. Самарканда, учащиеся которого регулярно занимали призовые места на различных международных математических олимпиадах. На протяжении всей педагогической деятельности своими научно-популярными статьями в энциклопедиях, в различных общественных и молодежных изданиях, ряде телепередач М.И. Исраилов умело и выверено формировал математическую культуру мышления у молодежи.

М.И. Исраилов – автор более 160 научных, 40 научно-популярных работ. Около 50 его научных статей опубликованы в авторитетных изданиях ближнего и дальнего зарубежья. Профессор М.И. Исраилов является автором широко известного двухтомного учебника по вычислительной математике «Хисоблаш методлари». Данная книга является единственным учебником подобного типа на узбекском языке и принята в качестве основного в ведущих университетах Узбекистана. Этот учебник написан на основе оригинальных лекций М.И. Исраилова, которые он читал на протяжении 40 лет в Национальном университете Узбекистана, Самаркандском государственном университете, на семинарах в Институте математики АН РУз. Также результатом многолетнего чтения лекций стал учебник по теории чисел «Сонлар назарияси» в соавторстве с профессором А. Солеевым.

М.И. Исраилов и его ученики участвовали с докладами во многих международных научных форумах. Он принимал участие в Международном конгрессе математиков, Всемирном конгрессе общества Бернулли и других. Был одним из активных организаторов всех международных конференций по теории кубатурных формул, проводимых в Узбекистане. Профессор М.И. Исраилов до последних дней оставался активным участником ежегодной Международной научно-практической конференции «Инновация». Являясь одним из бессменных руководителей секции «Математика. Математическое моделирование», М.И. Исраилов поддерживал высокий уровень научных изысканий и докладов конференции. М.И. Исраилов был членом редколлегии сборника «Вопросы вычислительной и прикладной математики», а также ответственным редактором сборников по вычислительной математике, выпускаемых в Институте математики АН РУз. А с 2001 года являлся членом редколлегии сборника научных статей Международной конференции «Инновация». Являлся членом Американского математического общества и экспертом международного журнала «Mathematical Reviews».

Маруфе Исраилович неоднократно награждался почетными грамотами Академии наук Республики Узбекистан.

В знак признания весомого многолетнего вклада профессора М.И. Исраилов в развитие математической науки и подготовку высококвалифицированных кадров в 2009 году Национальным университетом Узбекистана была проведена республиканская научная конференция «Вычислительные технологии и математическое моделирование», посвященная его 75-летию. В 2013 году проведен научный семинар «Профессор М.И. Исраилов и развитие прикладной математики в Узбекистане», в 2014 году состоялась научно-техническая конференция «Прикладная математика и информационная безопасность», посвященная 80-летию учёного. В текущем 2024 году в связи с 90-летием профессора М.И. Исраилова в НУУз организован международный научный семинар «Вычислительные модели и технологии (СМТ2024)».

Созданная профессором М.И. Исраиловым научная школа по численным методам и в настоящее время продолжает продуктивно функционировать. Ученики и последователи Маруфа Исраиловича сегодня успешно работают в различных сферах и отраслях экономики нашей республики и за рубежом, продолжая дело своего Устога-учителя.

Редакционная коллегия журнала «Проблемы вычислительной и прикладной математики» посвящает данный специальный выпуск светлой памяти профессора Маруфа Исраиловича Исраилова – выдающегося учёного, талантливого педагога, заботливого наставника и замечательного человека, который навсегда останется в памяти друзей, коллег и учеников.

Содержание

Солеев А.С., Розет И.Г., Мухтаров Я.

Исследование эколого-медицинских моделей методами бифуркационных параметров в конечно-разностных дискретных системах 9

Худойбергганов М.У., Туляганова Н.Б., Каримов Д.К.

Исследование устойчивости модифицированных разностных схем Куранта, Айзексона и Риза для квазилинейных гиперболических систем 15

Эшкuvatов З.К., Салимова Н.М., Худойбергганов М.О.

Решение системы интегральных уравнений Вольтерра первого рода модифицированным методом разложения Адомиана 23

Олимов Н.Н., Бекмуродова Д.Б.

Оптимальная интерполяционная формула с производными в пространстве Соболева 37

Курбонназаров А.И.

Оптимальная квадратурная формула для вычисления коэффициентов Фурье в гильбертовом пространстве 46

Шадиметов Х.М., Атамуродова Б.М.

Дискретная система типа Винера-Хопфа для коэффициентов интерполяционных формул 64

Шадиметов Х.М., Каримов Р.С.

Система типа Винера-Хопфа для нахождения оптимальных коэффициентов разностных формул в гильбертовом пространстве 74

Расулов А.С., Раимова Г.М.

Применение методов ускорения сходимости к асинхронным итерациям 85

Шадиметов Х.М., Шоназаров С.К.

Об одной явной оптимальной разностной формуле 96

Хаётов А.Р., Нуралиев Ф.А., Абдуллаева Г.Ш.

Построение алгебро-гиперболического интерполяционного натурального сплайна шестого порядка 107

Аллаков И., Эрдонов Б.Х.

Об одновременном представлении трех чисел суммой шести простых чисел . 122

К. Джа, К.Б. Манандхар

Общий результат с фиксированной точкой для совместимых отображений типа (K) в интуиционистском нечетком метрическом пространстве 134

Хаётов А.Р., Хаитов Т.О., Буваширов Д.С.

Оптимальная формула численного интегрирования дробного интеграла Римана-Лиувилля 142

Шадиметов Х.М., Азамов С.С., Элмуратов Г.Ч.

Минимизация погрешность квадратурной формулы в пространстве Гильберта 151

Contents

<i>Soleyev A.S., Rozet I.G., Muxtarov Y.</i>	
Research of ecological and medical models using bifurcation parameters methods in finite difference discrete systems	9
<i>Khudoyberganov M.U., Tulyaganova N.B., Karimov D.K.</i>	
Investigation of the stability of the modified difference Courant, Isaakson and Rees schemes for quasi-linear hyperbolic systems	15
<i>Eshkuvatov Z.K., Salimova N.M., Khudoyberganov M.O.</i>	
Solving system of Volterra integral equations of the first kind by modified Adomian decomposition method	23
<i>Olimov N.N., Bekmurodova D.B.</i>	
An optimal interpolation formula with derivatives in Sobolev space	37
<i>Kurbonnazarov A.I.</i>	
Optimal quadrature formula for calculating Fourier coefficients in Hilbert space .	46
<i>Shadimetov Kh.M., Atamuradova B.M.</i>	
Discrete system of Wiener–Hopf type for coefficients of interpolation formulas . .	64
<i>Shadimetov Kh.M., Karimov R.S.</i>	
Wiener–Hopf type system for finding optimal coefficients of difference formulas in the Hilbert space	74
<i>Rasulov A.S., Raimova G.M.</i>	
Applications of convergence acceleration methods to asynchronous iterations . .	85
<i>Shadimetov Kh.M., Shonazarov S.K.</i>	
On an explicit optimal difference formula	96
<i>Hayotov A.R., Nuraliyev F.A., Abdullayeva G.Sh.</i>	
Construction of the sixth order algebraic-hyperbolic interpolation natural spline	107
<i>Allakov I., Erdonov B.Kh.</i>	
On the simultaneous representation of three numbers by the sum of six numbers of primes	122
<i>Jha K., Manandhar K.B.</i>	
A common fixed point result for compatible mappings of type (K) in intuitionistic fuzzy metric space	134
<i>Hayotov A.R., Khaitov T.O., Buvasharov D.S.</i>	
An optimal formula for numerical integration of fractional Riemann-Liouville integral	142
<i>Shadimetov Kh.M., Azamov S.S., Elmuratov G.Ch.</i>	
Minimizing the error of a quadrature formula in Hilbert space	151