

UDC 519.653

ON AN EXPLICIT OPTIMAL DIFFERENCE FORMULA

^{1,2*} *Shadimetov Kh.M., ²Shonazarov S.K.*

*kholmatshadimetov@mail.ru

¹Tashkent State Transport University,

1, Temiryolchilar str., Tashkent, 100167 Uzbekistan;

²V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, AS RUz,

9, University str., Tashkent, 100174 Uzbekistan.

The finite difference method is used to numerically solve many problems in physics and engineering described by mathematical physics equations. The basic concepts of difference methods are approximation, stability, and convergence, which are illustrated by examples of difference schemes for ordinary differential equations. Optimization of the process of finding approximate solutions to ordinary differential equations is essential in a large number of calculations. Therefore, in this paper, we consider the problem of constructing an explicit optimal difference formula in the Sobolev space for an approximate solution of the Cauchy problem posed for an ordinary differential equation of the second order. Here we present an algorithm for the construction of an explicit optimal difference formula. We use the Sobolev method to construct the explicit optimal difference formula of the Stürmer type. For this purpose, using the discrete analogue of the second-order differential operator, we find the appearance of the optimal difference formula and also calculate the error estimate of this formula.

Keywords: Sobolev space, extremal function, discrete analogue, Lagrange function, Sobolev method, optimal coefficients.

Citation: Shadimetov Kh.M., Shonazarov S.K. 2024. On an explicit optimal difference formula. *Problems of Computational and Applied Mathematics*. 4/1(59):96-106.

1 Introduction

It is known that the common feature of all numerical methods is the reduction of a mathematical problem to a finite-dimensional one. This is most often achieved by discretization of the original problem, i.e., by transitioning from functions of a continuous argument to functions of a discrete argument. After discretization of the original problem, it is necessary to construct a computational algorithm, i.e., to specify a sequence of arithmetic and logical operations that give a solution to the discrete problem in a finite number of operations. The resulting solution to the discrete problem is taken as an approximate solution to the original mathematical problem.

In this paper we consider the Cauchy problem for the following second-order ordinary differential equation:

$$y'' = f(x, y), \quad (1)$$

$$y(0) = y_0,$$

$$y'(0) = y_1.$$

Let it be required to find an approximate solution to this problem on the interval $[0, 1]$. We divide this segment into N parts of length $h = \frac{1}{N}$ and look for approximate values y_n of the desired solution $y(x_n)$ at the points $x_n = nh$, $n = 0, 1, \dots, N$.

To approximately solve problem (1), we consider the following general difference formula [1, 2]

$$\sum_{\beta=0}^k C[\beta] \varphi[\beta] - h^2 \sum_{\beta=0}^k C^{(\parallel)}[\beta] \varphi''[\beta] \cong 0, \quad (2)$$

here $h = \frac{1}{N}$, $[\beta] = h\beta$, $(\beta = 0, 1, \dots, k)$, $C[\beta]$ and $C^{(\parallel)}[\beta]$ are unknown coefficients of the difference formula. We consider a function $\varphi(x)$ obtained from Sobolev's space. $L_2^{(3)}(0, 1)$ is the Hilbert space of such $\varphi(x)$ functions that are absolutely continuous up to the second derivative and their third derivative square-integrable on $[0, 1]$.

For any two functions φ and ψ in space $L_2^{(3)}(0, 1)$, the inner product is defined as follows [3]

$$\{\varphi, \psi\} = \int_0^1 \left(\frac{d^3 \varphi(x)}{dx^3} \right) \left(\frac{d^3 \psi(x)}{dx^3} \right) dx. \quad (3)$$

Also, in space $L_2^{(3)}(0, 1)$, the norm corresponding to the inner product (3) is defined as:

$$\|\varphi\|_{L_2^{(3)}(0, 1)} = \left(\int_0^1 (\varphi^{(3)}(x))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

The difference between the sums given in formula (2)

$$\begin{aligned} (\ell, \varphi) &= \sum_{\beta=0}^k C[\beta] \varphi[\beta] - h^2 \sum_{\beta=0}^k C^{(\parallel)}[\beta] \varphi''[\beta] = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{\beta=0}^k C[\beta] \delta(x - h\beta) - h^2 \sum_{\beta=0}^k C^{(\parallel)}[\beta] \delta''(x - h\beta) \right] \varphi(x) dx, \end{aligned}$$

is called the errors of the difference formula (2). The error functional corresponding to the error of (2) is:

$$\ell(x) = \sum_{\beta=0}^k C[\beta] \delta(x - h\beta) - h^2 \sum_{\beta=0}^k C^{(\parallel)}[\beta] \delta''(x - h\beta), \quad (4)$$

where $\delta(x)$ is Dirac's delta-function. The error functional value (ℓ, φ) is defined as:

$$(\ell, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \ell(x) \varphi(x) dx.$$

2 Statement of the problem

It should be noted that, since the error functional ℓ is defined for functions taken from space $L_2^{(3)}(0, 1)$, this functional must satisfy the following conditions:

$$(\ell, 1) = \int_{-\infty}^{+\infty} \ell(x) \cdot 1 dx = 0, \quad (5)$$

$$(\ell, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \ell(x) \cdot x dx = 0, \quad (6)$$

and

$$(\ell, x^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \ell(x) \cdot x^2 dx = 0. \quad (7)$$

The fulfillment of conditions (5)-(7) by the error functional ℓ indicates that this functional is bounded in the considered space [3]. From the above conditions (5)-(7), we obtain the following orthogonality conditions for the coefficients:

$$\sum_{\beta=0}^k C[\beta] = 0. \quad (8)$$

$$\sum_{\beta=0}^k C[\beta] \cdot (h\beta) = 0, \quad (9)$$

$$\sum_{\beta=0}^k C[\beta] \cdot (h\beta)^2 - 2h^2 \sum_{\beta=0}^k C^{(\text{II})}[\beta] = 0. \quad (10)$$

According to the Cauchy-Schwarz inequality we have

$$|(\ell, \varphi)| \leq \left\| \ell \right\|_{L_2^{(3)*}(0,1)} \cdot \left\| \varphi \right\|_{L_2^{(3)}(0,1)},$$

this means that the absolute error of the difference formula (2) is bounded from above by the norms of the error functional ℓ and the functions φ . The norm $\left\| \ell \right\|_{L_2^{(3)*}(0,1)}$ of the error functional depends on the coefficients $C[\beta]$ and $C^{(\text{II})}[\beta]$, as well as the nodes $h\beta$ ($\beta = 0, 1, \dots, N$). In the optimal formula we consider, the norm of the error functional which is minimized with respect to the coefficients $C^{(\text{II})}[\beta]$. The coefficients $C[\beta]$ in the difference formula (2) are chosen to satisfy the stability condition [2]. The norm of the functional is thus a finite number. From this, the following problems arise:

Problem 1 Calculate the norm of the error functional $\left\| \ell \right\|_{L_2^{(3)*}(0,1)}$ of the difference formula (2) given by (4).

Problem 2 In space $L_2^{(3)}(0,1)$, find the optimal coefficients $C^{(\text{II})}[\beta] = \overset{\circ}{C}^{(\text{II})}[\beta]$ that satisfy the expression

$$\left\| \overset{\circ}{\ell} \right\|_{L_2^{(3)*}(0,1)} := \inf_{C^{(\text{II})}[\beta]} \left\| \ell \right\|_{L_2^{(3)*}(0,1)}.$$

Here, $\overset{\circ}{C}^{(\text{II})}[\beta]$ are called *optimal coefficients*, and the corresponding difference formula (2) with these coefficients is called the *optimal difference formula*.

In works [2, 8–15], Adams-type optimal difference formulas have been constructed in certain Hilbert spaces for the approximate solution of the Cauchy problem for first-order differential equations.

3 Coefficients of explicit optimal difference formula in Sobolev space $L_2^{(3)}(0, 1)$

To calculate the error functional norm ℓ , we use the concept of extremal function ψ_ℓ satisfying the following equality

$$(\ell, \psi_\ell) = \left\| \ell \right|_{L_2^{(3)*}(0, 1)} \left\| \psi_\ell \right|_{L_2^{(3)}(0, 1)}.$$

Since $L_2^{(3)}(0, 1)$ is the Hilbert space, then using the Riesz theorem on the general form of a linear continuous functional on Hilbert spaces, for the error functional $\ell \in L_2^{(3)*}(0, 1)$, there exists a unique function $\psi_\ell \in L_2^{(3)}(0, 1)$, such that for any $\varphi \in L_2^{(3)}(0, 1)$, the following equality is fulfilled

$$(\ell, \varphi) = \langle \psi_\ell, \varphi \rangle_{L_2^{(3)}(0, 1)}.$$

Additionally, $\|\ell\| = \|\psi_\ell\|$. Here, $\langle \psi_\ell, \varphi \rangle_{L_2^{(3)}(0, 1)}$ is the inner product of two functions defined by equality (3) in the space $L_2^{(3)}(0, 1)$.

For the extremal function and the square of the norm of the error functional ℓ , we present the following theorem, which was proven in [4]

Theorem 1. *The extremal function of the error functional of the difference formula (2) in the Sobolev space $L_2^{(3)}(0, 1)$ is*

$$\psi_\ell(x) = -\ell(x) * G_3(x) + P_2(x),$$

where $G_3(x) = \frac{|x|^5}{2 \cdot 5!}$ and it satisfies the equality $\frac{d^6 G_3(x)}{dx^6} = \delta(x)$, $P_2(x)$ is a polynomial of the second degree.

Theorem 2. *Square of the norm of the error functional of the difference formula (2) is defined by the formula*

$$\begin{aligned} \left\| \ell \right|_{L_2^{(3)*}(0, 1)}^2 &= (-1) \left[\sum_{\beta=0}^k \sum_{\gamma=0}^k C[\beta] C[\gamma] G_3(h\beta - h\gamma) - \right. \\ &\quad \left. - 2h^2 \sum_{\beta=0}^k \sum_{\gamma=0}^k C[\beta] C^{(\parallel)}[\gamma] G_3''(h\beta - h\gamma) + h^4 \sum_{\beta=0}^k \sum_{\gamma=0}^k C^{(\parallel)}[\beta] C^{(\parallel)}[\gamma] G_3^{IV}(h\beta - h\gamma) \right], \end{aligned}$$

here $G_3(x) = \frac{|x|^5}{2 \cdot 5!}$, $G_3''(x) = \frac{|x|^3}{2 \cdot 3!}$ and $G_3^{IV}(x) = \frac{|x|}{2}$.

Now we minimize the square of the norm of the error functional of the difference formula (2) by the coefficients $C^{(\parallel)}[\beta]$ (in this work, $C[\beta]$ coefficients are considered known), that is, we use Lagrange's method of unknown multipliers to find the extremum of a multivariable function.

Thus, we consider the following Lagrange function:

$$\Lambda(C, C^{(\parallel)}, d) = \|\ell\|^2 - 2 \sum_{\alpha=0}^2 d_\alpha (\ell, x^\alpha).$$

Partial derivatives of the function $\Lambda(C, C^{(\parallel)}, d)$ by $C^{(\parallel)}[\beta]$ and d_α are equated to zero

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial C^{(\parallel)}[\beta]} = 0, \quad \beta = 0, 1, \dots, k,$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial d_\alpha} = 0, \quad \alpha = 0, 1, 2.$$

From this, we get the following system of equations.

$$\begin{cases} h^2 \sum_{\gamma=0}^k \overset{\circ}{C}^{(\parallel)}[\gamma] G_3^{(IV)}(h\beta - h\gamma) + d_2 = \sum_{\gamma=0}^k C[\gamma] G''_3(h\beta - h\gamma), \quad \beta = 0, 1, \dots, k, \\ \sum_{\gamma=0}^k \overset{\circ}{C}^{(\parallel)}[\gamma] = 1. \end{cases} \quad (11)$$

The solution of system (11), which we denote by $\overset{\circ}{C}^{(\parallel)}[\beta]$, d_2 is a critical point for the function $\Lambda(C, C^{(\parallel)}, d)$. The found solution gives the conditional minimum of the norm of the error functional according to the conditions (8)-(10). From the Lagrange method, it follows that the solutions to $C^{(\parallel)}[\beta] = \overset{\circ}{C}^{(\parallel)}[\beta]$ are the optimal coefficients of the difference formula (2). It is known that according to Dahlquist's meaning [5, 6], the stability of the difference formula (2) depends solely on the coefficients $C[\beta]$, $\beta = 0, 1, \dots, k$.

Thus, in this work, we select the coefficients $C[\beta]$ to be stable in the sense of Dahlquist and satisfying the equation $\sum_{\gamma=0}^k C[\gamma] = 0$ in the following form:

$$C[\gamma] = \begin{cases} 0, & \text{at } \gamma = \overline{0, k-3}, \\ 1, & \text{at } \gamma = k-2, \\ -2, & \text{at } \gamma = k-1, \\ 1, & \text{at } \gamma = k. \end{cases} \quad (12)$$

In the system of equations (11), we take $\overset{\circ}{C}^{(\parallel)}[k] = 0$ and consider constructing the explicit difference formula of the Störmer type [1]. In that case, the form of the system (11) will be as follows:

$$\begin{cases} h^2 \sum_{\gamma=0}^{k-1} \overset{\circ}{C}^{(\parallel)}[\gamma] G_3^{(IV)}(h\beta - h\gamma) + d_2 = \sum_{\gamma=0}^k C[\gamma] G''_3(h\beta - h\gamma), \quad \beta = \overline{0, k-1}, \\ \sum_{\gamma=0}^{k-1} \overset{\circ}{C}^{(\parallel)}[\gamma] = 1, \end{cases} \quad (13)$$

here, $\overset{\circ}{C}^{(\parallel)}[\gamma]$, $\gamma = 0, 1, \dots, k-1$ are unknown coefficients and d_2 is an unknown constant. We denote the right-hand side of the first equation in the system (13) as

$$f_3[\beta] = \sum_{\gamma=0}^k C[\gamma] G''_3(h\beta - h\gamma), \quad \beta = 0, 1, \dots, k-1, \quad (14)$$

and find its explicit form.

It is known from the equation $G''_3(x) = \frac{|x|^3}{2 \cdot 3!}$ that the resulting equation is $G''_3(h\beta - h\gamma) = \frac{|h\beta - h\gamma|^3}{12}$, and now, using $C[k] = 1$, $C[k-1] = -2$, $C[k-2] = 1$, $C[k-i] = 0$ $i = 3, 4, \dots, k$, we can write equation (14) as follows:

$$f_3[\beta] = \sum_{\gamma=0}^k C[\gamma] G''_3(h\beta - h\gamma) = \sum_{\gamma=0}^k C[\gamma] \frac{(h\beta - h\gamma)^3}{12} =$$

$$= \frac{h^3}{12} [|k - \beta - 2|^3 - 2|k - \beta - 1|^3 + |k - \beta|^3],$$

where the function $f_3[\beta]$ varies up to $\beta = 0, 1, \dots, k-1$, its general layout becomes like this:

$$f_3[\beta] = \frac{h^3}{2} \begin{cases} k - \beta - 1, & \text{at } \beta = \overline{0, k-3}, \\ 1, & \text{at } \beta = k-2, \\ \frac{1}{3}, & \text{at } \beta = k-1. \end{cases}$$

Assuming that the coefficients $\overset{\circ}{C}^{(\parallel)}[\beta]$ are zero when $\beta < 0$ and $\beta > k-1$, and we rewrite the system (13) in a convoluted form:

$$h^2 \overset{\circ}{C}^{(\parallel)}[\beta] * G_3^{(IV)}[\beta] + d_2 = f_3(h\beta), \quad \beta = 0, 1, \dots, k-1, \quad (15)$$

$$\sum_{\gamma=0}^{k-1} \overset{\circ}{C}^{(\parallel)}[\gamma] = 1. \quad (16)$$

We denote the right-hand side of equation (15) as $u_3[\beta]$. Therefore,

$$u_3[\beta] = h^2 \overset{\circ}{C}^{(\parallel)}[\beta] * G_3^{(IV)}[\beta] + d_2.$$

Where using the fact that $\overset{\circ}{C}^{(\parallel)}[\beta] = 0$ at $\beta < 0$ and $\beta > k-1$, and we denote the convolution part of the function $u_3[\beta]$ as

$$\vartheta_3[\beta] = h^2 \overset{\circ}{C}^{(\parallel)}[\beta] * G_3^{(IV)}[\beta].$$

Then, we calculate $\vartheta_3[\beta]$ using last expressions for $\beta < 0$ and $\beta > k-1$. Firstly, when $\beta < 0$

$$\begin{aligned} \vartheta_3[\beta] &= h^2 \overset{\circ}{C}^{(\parallel)}[\beta] * G_3^{(IV)}[\beta] = h^2 \sum_{\gamma=-\infty}^{\infty} \overset{\circ}{C}^{(\parallel)}[\gamma] G_3^{(IV)}(h\beta - h\gamma) = \\ &= -\frac{h^2}{2} \sum_{\gamma=0}^{k-1} \overset{\circ}{C}^{(\parallel)}[\gamma] (h\beta - h\gamma) = -\frac{h^3}{2} \beta \sum_{\gamma=0}^{k-1} \overset{\circ}{C}^{(\parallel)}[\gamma] + \frac{h^3}{2} \sum_{\gamma=0}^{k-1} \overset{\circ}{C}^{(\parallel)}[\gamma] \cdot \gamma. \end{aligned}$$

Taking into account equation (16), we obtain the following:

$$\vartheta_3[\beta] = -\left[\frac{h^3}{2}\beta + b_0\right],$$

where $b_0 = -\frac{h^3}{2} \sum_{\gamma=0}^{k-1} \overset{\circ}{C}^{(\parallel)}[\gamma] \gamma$. Similarly, for $\beta > k-1$ we get the following

$$\vartheta_3[\beta] = \frac{h^3}{2}\beta + b_0.$$

Now we write the representation of $u_3[\beta]$

$$u_3[\beta] = \begin{cases} -\frac{h^3}{2}\beta + d_2^-, & \text{at } \beta < 0, \\ f_3[\beta], & \text{at } \beta = \overline{0, k-1}, \\ \frac{h^3}{2}\beta + d_2^+, & \text{at } \beta > k-1, \end{cases}$$

here $d_2^- = d_2 - b_0$, $d_2^+ = d_2 + b_0$. By putting $\beta = 0$ in $u_3[\beta]$, we get the following equation

$$d_2^- = f_3[0] = \frac{h^3}{2}(k-1),$$

let's put $\beta = k-1$ in $u_3[\beta]$

$$\frac{h^3}{2}(k-1) + d_2^+ = \frac{h^3}{6},$$

$$d_2^+ = \frac{h^3}{2} \left(\frac{4}{3} - k \right).$$

So,

$$d_2 = \frac{d_2^- + d_2^+}{2} = \frac{h^3}{4} \left(k-1 + \frac{4}{3} - k \right) = \frac{h^3}{12}.$$

From this, the general appearance of $u_3[\beta]$ is as follows

$$u_3[\beta] = \begin{cases} \frac{h^3}{2}(k-\beta-1), & \text{at } \beta < 0, \\ f_3[\beta], & \text{at } \beta = \overline{0, k-1}, \\ \frac{h^3}{2}(\beta - \frac{4}{3} - k), & \text{at } \beta > k-1. \end{cases}$$

And now,

$$\overset{\circ}{C}^{(\parallel)}[\beta] = h^{-1} [D_1[\beta] * u_3[\beta]]. \quad (17)$$

using equation (17), we find the coefficients $\overset{\circ}{C}^{(\parallel)}[\beta]$. In us

$$hD_1[\beta] * G_1[\beta] = \delta[\beta] \quad (18)$$

the discrete operator $D_1[\beta]$ satisfying equality (18) has the following form [7]

$$D_1[\beta] = h^{-2} \begin{cases} 1, & \text{at } |\beta| = 1, \\ -2, & \text{at } \beta = 0, \\ 0, & \text{at } |\beta| \geq 2. \end{cases}$$

Now we will expand equation (17) at $\beta = \overline{0, k-1}$

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{C}^{(\parallel)}[\beta] &= h^{-1} \sum_{\gamma=-\infty}^{\infty} D_1(h\gamma) u_3(h\beta - h\gamma) = \\ &= h^{-1} [D_1(-h)u_3(h\beta + h) + D_1(0)u_3(h\beta) + D_1(h)u_3(h\beta - h)] = \\ &= h^{-3} [u_3(h\beta + h) - 2u_3(h\beta) + u_3(h\beta - h)]. \end{aligned}$$

Thus, from the final equation we obtain

$$\overset{\circ}{C}^{(\parallel)}[\beta] = h^{-3} [u_3(h\beta + h) - 2u_3(h\beta) + u_3(h\beta - h)].$$

Now we will calculate the optimal coefficients: at $\beta = \overline{0, k-3}$,

$$\overset{\circ}{C}^{(\parallel)}[\beta] = h^{-3} \frac{h^3}{2} [k - (\beta + 1) - 1 - 2(k - \beta - 1) + k - (\beta - 1) - 1] = 0,$$

at $\beta = k-2$,

$$\overset{\circ}{C}^{(\parallel)}[k-2] = h^{-3} \frac{h^3}{2} \left[\frac{1}{3} - 2 + 2 \right] = \frac{1}{6},$$

at $\beta = k-1$,

$$\overset{\circ}{C}^{(\parallel)}[k-1] = h^{-3} \frac{h^3}{2} \left[\frac{4}{3} - \frac{2}{3} + 1 \right] = \frac{5}{6}.$$

Finally, we found the values of the optimal coefficients:

$$\overset{\circ}{C}^{(\parallel)}[\beta] = \begin{cases} 0, & \text{at } \beta = \overline{0, k-3}, \\ \frac{1}{6}, & \text{at } \beta = k-2, \\ \frac{5}{6}, & \text{at } \beta = k-1. \end{cases}$$

Theorem 3. *In the Sobolev space $L_2^{(3)}(0,1)$, there exists a unique explicit optimal difference formula of the Störmer type, whose coefficients are as follows:*

$$\overset{\circ}{C}^{(\parallel)}[\beta] = \begin{cases} 0, & \text{at } \beta = \overline{0, k-3}, \\ \frac{1}{6}, & \text{at } \beta = k-2, \\ \frac{5}{6}, & \text{at } \beta = k-1. \end{cases} \quad (19)$$

Using the found coefficients, the optimal explicit difference formula in the space $L_2^{(3)}(0,1)$ takes the following form:

$$\varphi_{n+k} = 2\varphi_{n+k-1} - \varphi_{n+k-2} + \frac{h^2}{6} (\varphi''_{n+k-2} + 5\varphi''_{n+k-1}), \quad n = 0, 1, \dots, N-k, \quad k \geq 2.$$

4 Calculating the norm of the error functional for the explicit optimal formula

The square of the norm of the error functional is equal to the following based on the second theorem and the fact that $C^{(\parallel)}[k] = 0$:

$$\begin{aligned} \left\| \ell \Big|_{L_2^{(3)*}(0,1)} \right\|^2 &= (-1) \left[\sum_{\beta=0}^k \sum_{\gamma=0}^k C[\beta] C[\gamma] \frac{|h\beta - h\gamma|^5}{2 \cdot 5!} - \right. \\ &\quad \left. - 2h^2 \sum_{\beta=0}^k \sum_{\gamma=0}^{k-1} C[\beta] C^{(\parallel)}[\gamma] \frac{|h\beta - h\gamma|^3}{2 \cdot 3!} + h^4 \sum_{\beta=0}^{k-1} \sum_{\gamma=0}^{k-1} C^{(\parallel)}[\beta] C^{(\parallel)}[\gamma] \frac{|h\beta - h\gamma|}{2} \right]. \end{aligned} \quad (20)$$

We calculate the coefficients in formulas (12) and (19) by substituting them into formula (20):

$$\begin{aligned} \left\| \ell \Big|_{L_2^{(3)*}(0,1)} \right\|^2 &= (-1) \sum_{\beta=0}^k C[\beta] \left[\sum_{\gamma=0}^k C[\gamma] \frac{|h\beta - h\gamma|^5}{2 \cdot 5!} - h^2 \sum_{\gamma=0}^{k-1} C^{(\parallel)}[\gamma] \frac{|h\beta - h\gamma|^3}{2 \cdot 3!} \right] + \\ &+ h^2 \sum_{\gamma=0}^{k-1} C^{(\parallel)}[\gamma] d_2 = (-1) \sum_{\beta=0}^k C[\beta] \left[\frac{h^5}{2 \cdot 5!} (|\beta - k + 2|^5 - 2|\beta - k + 1|^5 + |\beta - k|^5) - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{h^5}{12 \cdot 3!} (|\beta - k + 2|^3 + 5|\beta - k + 1|^3) + \frac{h^5}{12} = (-1) \left[\frac{h^5}{2 \cdot 5!} (0 - 2 + 32) - \frac{5h^5}{3 \cdot 4!} (0 + 5) - \right. \\
& \quad \left. -2 \left[\frac{h^5}{2 \cdot 5!} (1 + 1) - \frac{h^5}{3 \cdot 4!} (1 + 0) \right] + \frac{h^5}{2 \cdot 5!} (32 - 2 + 0) - \frac{h^5}{3 \cdot 4!} (8 + 5) \right] + \frac{h^5}{12} = \\
& \quad (-1) \left[\frac{4h^5}{3 \cdot 4!} - 2 \frac{3 - 5}{15 \cdot 4!} + \frac{-4h^5}{3 \cdot 4!} \right] + \frac{h^5}{12} = -\frac{h^5}{90} + \frac{h^5}{12} = \frac{13}{180} h^5.
\end{aligned}$$

In this way, we have also proven the following theorem:

Theorem 4. *In the Sobolev space $L_2^{(3)}(0, 1)$, the square of the norm of the error functional for the explicit optimal difference formula in the form (2) is expressed by the following formula:*

$$\left\| \ell \left| L_2^{(3)*}(0, 1) \right. \right\|^2 = \frac{13}{180} h^5.$$

5 Conclusion

We have found an extremal function for calculating the norm of the error functional for an explicit optimal difference formula constructed for the approximate solution of ordinary second-order differential equations in the Sobolev space. Using the obtained extremal function, we found an analytical formula for the square of the norm of the error functional. To find the optimal coefficients, we used the method of unknown Lagrange multipliers and constructed the Lagrange function. By equating the partial derivatives of the Lagrange function with respect to unknown variables to zero, we obtained a system of equations. This system was solved using the Sobolev method. The Sobolev method is based on constructing a discrete analogue of the differential operator, and similarly, we used the discrete analogue $D_1[\beta]$ of the differential operator $\frac{d^2}{dx^2}$ to solve this system and find the optimal coefficients. Using the obtained optimal coefficients, we calculated the square of the norm of the error functional. Thus, we found an exact upper bound for the error of the constructed difference formula.

References

- [1] Samarsky A.A. 1987. *Introduction to numerical methods*. Nauka, Moscow, Chief editor physics-math., – 288 p.
- [2] Babuška I., Vitasek E., Prager M. 1969. *Numerical processes for solution of differential equations*. Mir, Moscow, – 369 p.
- [3] Sobolev S.L. 1974. *Introduction to the theory of cubature formulas*. Nauka, Moscow, – 808 p.
- [4] Shadimetov Kh.M., Shonazarov S.K. 2023. *Difference formulas for an approximate solution of a second-order differential equation*. Problems of Computational and Applied Mathematics, 2/1(48), – P. 117–126.
- [5] Dahlquists G. 1956. *Convergence and stability in the numerical integration of ordinary differential equations*. MATHEMATICA SCANDINAVICA, 4, – P. 33–53.
- [6] Dahlquists G. 1959. *Stability and error bounds in the numerical integration of ordinary differential equations*. Trans. Roy. Inst. Technol., Stockholm, – 85 p.

- [7] Shadimetov Kh.M. 1985. *The discrete analogue of the differential operator $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}$ and its construction*. In: Questions of Computations and Applied Mathematics. Tashkent, no. 79, – P. 22–35.
- [8] Shadimetov Kh.M., Mirzakabilov R.N. 2018. *The problem of constructing difference formulas*. Problems of Computational and Applied Mathematics. Tashkent. 5(17) – P. 95–101.
- [9] Shadimetov Kh.M., Mirzakabilov R.N. 2021. *Optimization of difference formulas in the Sobolev factor space*. Problems of Computational and Applied Mathematics. Tashkent. 5(35) – P. 137–151.
- [10] Shadimetov Kh.M., Mirzakabilov R.N. 2022. *Optimal difference formulas in Sobolev space*. Modern Mathematics. Fundamental Directions. Vol. 68, No. 1 – P. 167–177.
- [11] Shadimetov Kh.M., Mirzakabilov R.N. 2022. *Representation of optimal coefficients of difference formulas*. Problems of Computational and Applied Mathematics.. Tashkent. 5/1(44). – P. 160–170.
- [12] Shadimetov Kh.M., A.R. Hayotov, R.S. Karimov. 2023. *Optimization of Explicit Difference Methods in the Hilbert Space* AIP Conference Proceedings, 2781, 00054.
- [13] Shadimetov Kh.M., Karimov R.S. 2024. *Optimization of Adams-type difference formulas in Hilbert space*. Journal of Computational Analysis and Applications, 32(1), – P. 300–319.
- [14] Shadimetov Kh.M., Karimov R.S. 2024. *Optimal coefficients of an implicit difference formula in the Hilbert space*. AIP Conference Proceedings, 3004, 060030.
- [15] Shadimetov Kh.M., Karimov R.S. 2023. *Coefficients of the optimal explicit difference formula in a Hilbert space*. Problems of Computational and Applied Mathematics, 2/1(48), – P. 45–57.

Received August 01, 2024

УДК 519.653

ОБ ОДНОЙ ЯВНОЙ ОПТИМАЛЬНОЙ РАЗНОСТНОЙ ФОРМУЛЕ

^{1,2*} **Шадиметов Х.М., ²Шоназаров С.К.**

*kholmatshadimetov@mail.ru

¹Ташкентский государственный транспортный университет,
100167, Узбекистан, г. Ташкент, ул.Темирийулчилар, дом 1;

²Институт математики им. В.И. Романовского АН РУз,
100174, Узбекистан, г. Ташкент, ул. Университетская, д. 9.

Метод конечных разностей используется для численного решения многих задач физики и техники, описываемых уравнениями математической физики. Основными понятиями разностных методов являются аппроксимация, устойчивость и сходимость, которые иллюстрируются примерами разностных схем для обыкновенных дифференциальных уравнений. Оптимизация процесса поиска приближенных решений обыкновенных дифференциальных уравнений необходима при большом количестве вычислений. Поэтому в данной работе рассматривается задача построения явной оптимальной разностной формулы в пространстве Соболева для приближенного решения задачи Коши, поставленной для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. Здесь мы представили алгоритм построения явной оптимальной разностной формулы. Мы использовали метод Соболева для построения

явной оптимальной разностной формулы типа Штёрмера. Для этого с помощью дискретного аналога дифференциального оператора второго порядка нашли вид оптимальной разностной формулы, а также вычислили оценку погрешности этой формулы.

Ключевые слова: пространство Соболева, экстремальная функция, дискретный аналог, функция Лагранжа, метод Соболева, оптимальные коэффициенты.

Цитирование: *Шадиметов Х.М., Шоназаров С.К.* Об одной явной оптимальной разностной формуле // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2024. – № 4/1(59). – С. 96-106.

ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

№ 4/1(59) 2024

Журнал основан в 2015 году.

Издается 6 раз в год.

Учредитель:

Научно-исследовательский институт развития цифровых технологий и
искусственного интеллекта.

Главный редактор:

Равшанов Н.

Заместители главного редактора:

Азамов А.А., Арипов М.М., Шадиметов Х.М.

Ответственный секретарь:

Ахмедов Д.Д.

Редакционный совет:

Азамова Н.А., Алоев Р.Д., Амиргалиев Е.Н. (Казахстан), Бурнашев В.Ф.,
Загребина С.А. (Россия), Задорин А.И. (Россия), Игнатъев Н.А.,
Ильин В.П. (Россия), Исмагилов И.И. (Россия), Кабанихин С.И. (Россия),
Карачик В.В. (Россия), Курбонов Н.М., Маматов Н.С., Мирзаев Н.М.,
Мирзаева Г.Р., Мухамадиев А.Ш., Назирова Э.Ш., Нормуродов Ч.Б.,
Нуралиев Ф.М., Опанасенко В.Н. (Украина), Расулмухамедов М.М., Расулов А.С.,
Садуллаева Ш.А., Старовойтов В.В. (Беларусь), Хаётов А.Р., Халджигитов А.,
Хамдамов Р.Х., Хужаев И.К., Хужаеров Б.Х., Чье Ен Ун (Россия),
Шабозов М.Ш. (Таджикистан), Dimov I. (Болгария), Li Y. (США),
Mascagni M. (США), Min A. (Германия), Schaumburg H. (Германия),
Singh D. (Южная Корея), Singh M. (Южная Корея).

Журнал зарегистрирован в Агентстве информации и массовых коммуникаций при
Администрации Президента Республики Узбекистан.

Регистрационное свидетельство №0856 от 5 августа 2015 года.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

При перепечатке материалов ссылка на журнал обязательна.

За точность фактов и достоверность информации ответственность несут авторы.

Адрес редакции:

100125, г. Ташкент, м-в. Буз-2, 17А.

Тел.: +(998) 712-319-253, 712-319-249.

Э-почта: journals@airi.uz.

Веб-сайт: <https://journals.airi.uz>.

Дизайн и вёрстка:

Шарипов Х.Д.

Отпечатано в типографии НИИ РЦТИИ.

Подписано в печать 05.09.2024 г.

Формат 60x84 1/8. Заказ №5. Тираж 100 экз.

PROBLEMS OF COMPUTATIONAL AND APPLIED MATHEMATICS

No. 4/1(59) 2024

The journal was established in 2015.
6 issues are published per year.

Founder:

Digital Technologies and Artificial Intelligence Development Research Institute.

Editor-in-Chief:

Ravshanov N.

Deputy Editors:

Azamov A.A., Aripov M.M., Shadimetov Kh.M.

Executive Secretary:

Akhmedov D.D.

Editorial Council:

Azamova N.A., Alov R.D., Amirgaliev E.N. (Kazakhstan), Burnashev V.F.,
Zagrebina S.A. (Russia), Zadorin A.I. (Russia), Ignatiev N.A., Ilyin V.P. (Russia),
Ismagilov I.I. (Russia), Kabanikhin S.I. (Russia), Karachik V.V. (Russia), Kurbonov
N.M., Mamatov N.S., Mirzaev N.M., Mirzaeva G.R., Mukhamadiev A.Sh., Nazirova
E.Sh., Normurodov Ch.B., Nuraliev F.M., Opanasenko V.N. (Ukraine), Rasulov A.S.,
Sadullaeva Sh.A., Starovoitov V.V. (Belarus), Khayotov A.R., Khaldjigitov A.,
Khamdamov R.Kh., Khujaev I.K., Khujayorov B.Kh., Chye En Un (Russia),
Shabozov M.Sh. (Tajikistan), Dimov I. (Bulgaria), Li Y. (USA), Mascagni M. (USA),
Min A. (Germany), Schaumburg H. (Germany), Singh D. (South Korea),
Singh M. (South Korea).

The journal is registered by Agency of Information and Mass Communications under the
Administration of the President of the Republic of Uzbekistan.

The registration certificate No. 0856 of 5 August 2015.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

At a reprint of materials the reference to the journal is obligatory.
Authors are responsible for the accuracy of the facts and reliability of the information.

Address:

100125, Tashkent, Buz-2, 17A.

Tel.: +(998) 712-319-253, 712-319-249.

E-mail: journals@airi.uz.

Web-site: <https://journals.airi.uz>.

Layout design:

Sharipov Kh.D.

DTAIDRI printing office.

Signed for print 05.09.2024

Format 60x84 1/8. Order No. 5. Printed copies 100.



**Профессор
ИСРАИЛОВ МАРУФ ИСРАИЛОВИЧ**
(к 90-летию со дня рождения)

Маруф Исраилович Исраилов – известный ученый-математик, доктор физико-математических наук, профессор, крупный специалист в области теории чисел и вычислительной математики.

М.И. Исраилов родился 27 апреля 1934 года в городе Самарканде в семье ремесленника. В 1951 году с отличием окончив среднюю школу №16 г. Самарканда, поступил на физико-математический факультет Самаркандского государственного университета, который успешно окончил в 1956 г. С 1958 по 1961 годы проходил обучение в аспирантуре Института математики им. В.И. Романовского под руководством профессора Н.П. Романова. В 1966 году защитил кандидатскую диссертацию на тему «Проблема Тарри для быстрорастущих слагаемых и ее приложение к изучению эргодических сумм». В 1974 году М.И. Исраилову присвоено звание старшего научного сотрудника. В 1986 году М.И. Исраилов защитил докторскую диссертацию на тему «Асимптотические и точные формулы для аддитивных задач с растущим числом слагаемых», а в 1989 году получил звание профессора по специальности «Вычислительная математика».

После окончания аспирантуры М.И. Исраилов работал младшим научным сотрудником в Вычислительном центре Института математики АН РУз, затем с 1966 г. – старшим научным сотрудником. С 1976 года работал на должности заведующего лабораторией «Теория приближенного интегрирования» Института кибернетики с вычислительным центром. С 1984 г. и до 1995 г. – являлся заведующим отделом «Вычислительные методы» Института математики АН РУз. В том же 1995 году М.И. Исраилов приступил к работе в Самаркандском государственном университете в качестве заведующего кафедрой вычислительной математики.

Профессор М.И. Исраилов имел широкий диапазон научных интересов. Его глубокие исследования в областях аддитивных задач, построения общих арифметиче-

ских ортогональных и биортогональных систем в гильбертовых пространствах; нахождения числа решений различных классов диофантовых уравнений, оценке тригонометрических сумм; построения оптимальных квадратурных и кубатурных формул в различных функциональных пространствах, а также приближенного решения регулярных и сингулярных интегральных уравнений внесли существенный вклад в развитие теории чисел и вычислительной математики. Результаты его работ успешно применяются в многочисленных прикладных задачах.

М.И. Исраилов впервые исследовал проблему Тарри для общих числовых последовательностей и применил к изучению эргодических сумм. Здесь он также решил известную проблему венгерского математика П. Эрдеша (об оценке снизу максимума модуля многочленов на единичной окружности) в обобщенной и уточненной постановке. М.И. Исраилову принадлежит всестороннее исследование аддитивных задач с растущим числом слагаемых. Он получил асимптотические разложения в проблеме Варинга с полиномиальными слагаемыми и в диофантовой системе Гильберта-Камке.

Им также найдена точная формула для числа решений линейных диофантовых уравнений общего вида. Эта формула нашла применение в теории инвариантных кубатурных формул академика С.Л.Ёсоболева и позволила сильно упростить исследование и построение таких формул на поверхности многомерных сфер и шаров.

Маруф Исраилович также внес существенный вклад в применение теоретико-числовых методов и методов сплайн-функций в вычислительной математике. Им построены оптимальные квадратурные и кубатурные формулы сингулярных интегралов с ядрами Гильберта и Коши, найдены приближенно-аналитические решения систем одномерных и многомерных интегральных уравнений с ядрами Фредгольма, Гильберта и Коши. Найдены оценки погрешности в различных часто встречающихся пространствах функций. Эти результаты имеют многочисленные применения в прикладных задачах, в частности в аэродинамике и гидродинамике. Характерной особенностью этого цикла исследований является новизна постановок задач и разработка новых методов их решения.

Отдельные результаты исследований М.И. Исраилова по теории дзета-функции Римана и проблеме делителей Дирихле вызвали большой резонанс среди специалистов за пределами нашей страны.

В Маруфе Исраиловиче гармонично сочетались способности крупного ученого, талантливого педагога и умелого руководителя крупных научных исследований. Он успешно сочетал плодотворную научную и научно-организаторскую деятельность с большой педагогической и общественной деятельностью. С 1967 г. М.И. Исраилов читал общие и специальные курсы на факультете прикладной математики Ташкентского государственного университета, а с 1995 по 2003 годы – в Самаркандском государственном университете, где до конца жизни продолжал активную научно-педагогическую деятельность в качестве почетного профессора-консультанта.

М.И. Исраилов с 1972 г. являлся членом двух специализированных советов по защите кандидатских и докторских диссертаций. С 1967 по 1995 годы руководил работой организованного им городского научного семинара «Применение теории чисел в вычислительной математике» при Институте кибернетики АН РУз и Институте математики АН РУз, а с 1995 года руководил научным семинаром «Приближенные методы высшего анализа» в СамГУ.

Работая в крупнейших ВУЗах и НИИ республики, Маруф Исраилович подготовил десятки учеников, успешно работающих в различных сферах экономики республи-

ки, в странах ближнего и дальнего зарубежья. М.И. Исраилов руководил работами магистрантов, аспирантов и докторантов. Под его руководством защищены более 10 кандидатских диссертаций, он способствовал защите трех докторских диссертаций. С 1993 г. М.И. Исраилов со своими докторантами, аспирантами и студентами вел научные исследования в рамках проектов, имеющих фундаментальное значение и широкое прикладное применение.

Обычно будущих ученых Маруф Исраилович привлекал к науке со студенческой скамьи. Более того, он с аспирантских лет активно участвовал в поиске и формировании юных математических дарований в системе школьного образования. Будучи аспирантом и молодым ученым М.И. Исраилов преподавал в специализированной физико-математической школе №82 города Ташкента, организованной академиком В.К. Кабуловым. Многие ученики М.И. Исраилова из этой школы стали в последующем докторами наук и известными специалистами в своих отраслях. Подготовку математиков со школьной скамьи профессор М.И. Исраилов продолжил в физико-математическом лицее г. Самарканда, учащиеся которого регулярно занимали призовые места на различных международных математических олимпиадах. На протяжении всей педагогической деятельности своими научно-популярными статьями в энциклопедиях, в различных общественных и молодежных изданиях, ряде телепередач М.И. Исраилов умело и выверено формировал математическую культуру мышления у молодежи.

М.И. Исраилов – автор более 160 научных, 40 научно-популярных работ. Около 50 его научных статей опубликованы в авторитетных изданиях ближнего и дальнего зарубежья. Профессор М.И. Исраилов является автором широко известного двухтомного учебника по вычислительной математике «Хисоблаш методлари». Данная книга является единственным учебником подобного типа на узбекском языке и принята в качестве основного в ведущих университетах Узбекистана. Этот учебник написан на основе оригинальных лекций М.И. Исраилова, которые он читал на протяжении 40 лет в Национальном университете Узбекистана, Самаркандском государственном университете, на семинарах в Институте математики АН РУз. Также результатом многолетнего чтения лекций стал учебник по теории чисел «Сонлар назарияси» в соавторстве с профессором А. Солеевым.

М.И. Исраилов и его ученики участвовали с докладами во многих международных научных форумах. Он принимал участие в Международном конгрессе математиков, Всемирном конгрессе общества Бернулли и других. Был одним из активных организаторов всех международных конференций по теории кубатурных формул, проводимых в Узбекистане. Профессор М.И. Исраилов до последних дней оставался активным участником ежегодной Международной научно-практической конференции «Инновация». Являясь одним из бессменных руководителей секции «Математика. Математическое моделирование», М.И. Исраилов поддерживал высокий уровень научных изысканий и докладов конференции. М.И. Исраилов был членом редколлегии сборника «Вопросы вычислительной и прикладной математики», а также ответственным редактором сборников по вычислительной математике, выпускаемых в Институте математики АН РУз. А с 2001 года являлся членом редколлегии сборника научных статей Международной конференции «Инновация». Являлся членом Американского математического общества и экспертом международного журнала «Mathematical Reviews».

Маруфе Исраилович неоднократно награждался почетными грамотами Академии наук Республики Узбекистан.

В знак признания весомого многолетнего вклада профессора М.И. Исраилов в развитие математической науки и подготовку высококвалифицированных кадров в 2009 году Национальным университетом Узбекистана была проведена республиканская научная конференция «Вычислительные технологии и математическое моделирование», посвященная его 75-летию. В 2013 году проведен научный семинар «Профессор М.И. Исраилов и развитие прикладной математики в Узбекистане», в 2014 году состоялась научно-техническая конференция «Прикладная математика и информационная безопасность», посвященная 80-летию учёного. В текущем 2024 году в связи с 90-летием профессора М.И. Исраилова в НУУз организован международный научный семинар «Вычислительные модели и технологии (СМТ2024)».

Созданная профессором М.И. Исраиловым научная школа по численным методам и в настоящее время продолжает продуктивно функционировать. Ученики и последователи Маруфа Исраиловича сегодня успешно работают в различных сферах и отраслях экономики нашей республики и за рубежом, продолжая дело своего Устога-учителя.

Редакционная коллегия журнала «Проблемы вычислительной и прикладной математики» посвящает данный специальный выпуск светлой памяти профессора Маруфа Исраиловича Исраилова – выдающегося учёного, талантливого педагога, заботливого наставника и замечательного человека, который навсегда останется в памяти друзей, коллег и учеников.

Содержание

Солеев А.С., Розет И.Г., Мухтаров Я.

Исследование эколого-медицинских моделей методами бифуркационных параметров в конечно-разностных дискретных системах 9

Худойбергганов М.У., Туляганова Н.Б., Каримов Д.К.

Исследование устойчивости модифицированных разностных схем Куранта, Айзексона и Риза для квазилинейных гиперболических систем 15

Эшкuvatов З.К., Салимова Н.М., Худойбергганов М.О.

Решение системы интегральных уравнений Вольтерра первого рода модифицированным методом разложения Адомиана 23

Олимов Н.Н., Бекмуродова Д.Б.

Оптимальная интерполяционная формула с производными в пространстве Соболева 37

Курбонназаров А.И.

Оптимальная квадратурная формула для вычисления коэффициентов Фурье в гильбертовом пространстве 46

Шадиметов Х.М., Атамуродова Б.М.

Дискретная система типа Винера-Хопфа для коэффициентов интерполяционных формул 64

Шадиметов Х.М., Каримов Р.С.

Система типа Винера-Хопфа для нахождения оптимальных коэффициентов разностных формул в гильбертовом пространстве 74

Расулов А.С., Раимова Г.М.

Применение методов ускорения сходимости к асинхронным итерациям 85

Шадиметов Х.М., Шоназаров С.К.

Об одной явной оптимальной разностной формуле 96

Хаётов А.Р., Нуралиев Ф.А., Абдуллаева Г.Ш.

Построение алгебро-гиперболического интерполяционного натурального сплайна шестого порядка 107

Аллаков И., Эрдонов Б.Х.

Об одновременном представлении трех чисел суммой шести простых чисел . 122

К. Джа, К.Б. Манандхар

Общий результат с фиксированной точкой для совместимых отображений типа (K) в интуиционистском нечетком метрическом пространстве 134

Хаётов А.Р., Хаитов Т.О., Буваширов Д.С.

Оптимальная формула численного интегрирования дробного интеграла Римана-Лиувилля 142

Шадиметов Х.М., Азамов С.С., Элмуратов Г.Ч.

Минимизация погрешность квадратурной формулы в пространстве Гильберта 151

Contents

<i>Soleyev A.S., Rozet I.G., Muxtarov Y.</i>	
Research of ecological and medical models using bifurcation parameters methods in finite difference discrete systems	9
<i>Khudoyberganov M.U., Tulyaganova N.B., Karimov D.K.</i>	
Investigation of the stability of the modified difference Courant, Isaakson and Rees schemes for quasi-linear hyperbolic systems	15
<i>Eshkuvatov Z.K., Salimova N.M., Khudoyberganov M.O.</i>	
Solving system of Volterra integral equations of the first kind by modified Adomian decomposition method	23
<i>Olimov N.N., Bekmurodova D.B.</i>	
An optimal interpolation formula with derivatives in Sobolev space	37
<i>Kurbonnazarov A.I.</i>	
Optimal quadrature formula for calculating Fourier coefficients in Hilbert space .	46
<i>Shadimetov Kh.M., Atamuradova B.M.</i>	
Discrete system of Wiener–Hopf type for coefficients of interpolation formulas . .	64
<i>Shadimetov Kh.M., Karimov R.S.</i>	
Wiener–Hopf type system for finding optimal coefficients of difference formulas in the Hilbert space	74
<i>Rasulov A.S., Raimova G.M.</i>	
Applications of convergence acceleration methods to asynchronous iterations . .	85
<i>Shadimetov Kh.M., Shonazarov S.K.</i>	
On an explicit optimal difference formula	96
<i>Hayotov A.R., Nuraliyev F.A., Abdullayeva G.Sh.</i>	
Construction of the sixth order algebraic-hyperbolic interpolation natural spline	107
<i>Allakov I., Erdonov B.Kh.</i>	
On the simultaneous representation of three numbers by the sum of six numbers of primes	122
<i>Jha K., Manandhar K.B.</i>	
A common fixed point result for compatible mappings of type (K) in intuitionistic fuzzy metric space	134
<i>Hayotov A.R., Khaitov T.O., Buvashev D.S.</i>	
An optimal formula for numerical integration of fractional Riemann-Liouville integral	142
<i>Shadimetov Kh.M., Azamov S.S., Elmuratov G.Ch.</i>	
Minimizing the error of a quadrature formula in Hilbert space	151