

UDC 51

APPLICATIONS OF CONVERGENCE ACCELERATION METHODS TO ASYNCHRONOUS ITERATIONS

Rasulov A.S., Raimova G.M.

asrasulov@gmail.com

The University of World Economy and Diplomacy,
54, Mustakillik Ave., Tashkent, 100007 Uzbekistan.

In this work we will consider asynchronous iteration algorithms. As is well known in multiprocessor computers the parallel application of iterative methods often shows poor scaling and less than optimal parallel efficiency. The ordinary iterative asynchronous method often has much better efficiency as they almost never need to wait to communicate between possessors. The result of our numerical experiments shows better efficiency of asynchronous iterative processes for considered problem.

Keywords: asynchronous iterations, parallel algorithms, relaxation methods.

Citation: Rasulov A.S., Raimova G.M. 2024. Applications of convergence acceleration methods to asynchronous iterations. *Problems of Computational and Applied Mathematics*. 4/1(59):85-95.

Systems of linear algebraic equations can be solved either by direct methods or by iterative methods. For systems of moderate size, the use of direct methods is often advantageous. Iterative methods are used primarily for solving large and complex problems for which, because of storage and arithmetic requirements, it would not be feasible or it would be less efficient to solve by a direct method. For example, iterative methods are usually used to solve problems involving three spatial variables, problems involving non-linear systems of equations, problems resulting from the discretization of coupled partial differential equations, and time-dependent problems involving more than one spatial variable.

In our paper [1] we introduce a general class of asynchronous iterative methods (called “totally asynchronous”), and we develop a general theorem for proving their convergence. This theorem is used repeatedly to establish the validity of a broad variety of asynchronous algorithms involving iteration mappings that are either monotone or contracting with respect to a weighted maximum norm. In particular, we showed convergence of linear and non-linear iterations involving weighted maximum norm contractions arising in the solution of systems of algebraic equations.

Below we will discuss general principles concerning convergence and rates of convergence of basic asynchronous iterative methods. We will study convergence accelerations methods for proposed our asynchronous iterations, and ways to decrease the errors. By speed of convergence for asynchronous iterations we mean the speed by which we decrease the errors, which depends on the number of iterations.

It is known that increasing the efficiency of the asynchronous iterative method is used when:

1. The convergence rate is made as close to that of the simple synchronous iterative method.
2. The computation cost of each asynchronous iterative method is reduced.

Let's consider the system of linear algebraic equations

$$A\Psi = b. \quad (1)$$

To solve the system (1) we will build the following iterative algorithm

$$B\psi^{k+1} = B\psi^k - \tau(A\psi^k - b),$$

which will be transformed into the form $\psi^{k+1} = \alpha\psi^k + f$, where

$$\alpha = I - \tau B^{-1}A, \quad f = \tau B^{-1}b.$$

By choosing τ and B we can construct many different iterative algorithms. Here B is an easily invertible matrix. The purpose of the optimization is to find a τ that provides the maximum speed of convergence of our asynchronous computations.

Let A be a symmetric positive definite matrix. If $B = I$, then the eigenvalue, $\bar{\lambda}$, of the matrix $\alpha = I - \tau B^{-1}A$, is related to the eigenvalue, λ , of the matrix A in the following way, $\bar{\lambda} = 1 - \tau\lambda$.

As is known [2-4], for convergence of the asynchronous algorithm for $\psi^{k+1} = \alpha\psi^k + f$ a sufficient condition is any norm of should be less than γ/S , where $\gamma < 1$ and S is the number of asynchronously formed groups of components of the unknown vector. Consequently, if τ is chosen by the inequality $|1 - \tau\lambda| < \gamma/S$, then it provides a sufficient condition for the convergence of these asynchronous computations. By solving the inequality for τ , as given above, we obtain the following

$$|1 - \gamma/S|/\lambda < \tau < (1 + \gamma/S)/\lambda. \quad (2)$$

Let's our system of linear equations (1) will be rewritten in the following form

$$\begin{aligned} \psi_1 &= f_1(\psi_1, \dots, \psi_N), \\ \psi_2 &= f_2(\psi_1, \dots, \psi_N), \\ \psi_N &= f_N(\psi_1, \dots, \psi_N). \end{aligned} \quad (3)$$

We can write the system (3) in operator form as $\psi = F(\psi)$.

Let's define [3, 4] an asynchronous iterative method for solving the system (3). Let $\{J_n\}_{n=1}^{\infty}$ be a sequence of non-empty subsets of set $\{1, 2, \dots, N\}$ which is called chaotic sequence of sets.

Let the given initial vector be $\psi(0)$. We will construct the sequence $\{\psi(n)\}_{n=1}^{\infty}$ of iterations by the following way [5], [6].

$$\psi(n+1) = F_{J_{n+1}}(\psi(n)), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4)$$

Here

$$\psi_i(n+1) = \begin{cases} \psi_i(n), & \text{if } i \notin J_n \\ f_i(\psi(n)), & \text{if } i \in J_n, \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5)$$

Further we give another way of organizing asynchronous computations for solving equations.

The results obtained in this section will be applied to solving a real life problem in the next section.

In this section we give another probabilistic model for the asynchronous algorithms of organizing asynchronous computations for solving equations.

Suppose a computer has S processors. The first l_1 components of system (3) will be solved on the first processor, and the second l_2 components of the system (3) on the second processor etc. Each of the S processors computes its own group of components of the unknown vector ψ simultaneously. At the end of an iteration the value of group components are copied to computer memory of and they become accessible to all processors. This procedure works for shared memory multiprocessors.

In this case, asynchronous calculations can be represented in the following form:

$$\psi_i^T = q_i^T f_i(\psi^{T_i}) + (1 - q_i^T) \psi_i^T, \quad i = \overline{1, S}, \quad (6)$$

where $\psi_i^T (i = 1, S)$ is an element of a vector of the current approximation at time T .

$$\psi_i^T = (0, 0, \dots, \psi_i^T, 0, \dots)', \quad \psi^{T_i} = (\psi_1^{T_1}, \psi_2^{T_2}, \dots, \psi_S^{T_S})'$$

are vectors of the current approximation which are calculated at time $T_i < T$. Here T_i denotes the beginning of the next calculation step of the group component ψ_i^T . $f_i(\psi^{T_i}) = \delta_i F(\psi^{T_i})$, where δ_i is a diagonal matrix, the components δ_{jj} are equal to one if component x_j is calculated by the i -th processor, otherwise they are zero. The coefficients $q_i^T, i = 1, S$ will be set to be one when the time interval $T - T_i$ is long enough calculate and write the vector ψ_i^T into shared memory, of computer and otherwise it will be set to be zero.

The time interval $T - T_i$ depends on the time T , and T_i denotes the beginning of the next time step for calculating group components. T could be a random variable that has a specific distribution.

Let's divide T into time intervals. For $T_i \in T$ the equality $T^i = T - n_i^T$ is valid, where, $n_i^T = T - T^i$ is an integer depending on T and $n_i^T \geq 1$. Let $n_j^T > n_i^T$, thus numbers $T - n_j^T$ denote the starting time of the next time step, and the end of the previous step. Let p_i^T be an integer that takes values of either n_i^T , or n_j^T . For $\psi^T = \psi_1^T + \dots + \psi_S^T$ we will transform equation (6) to the form new form and it gives a new method of organizing this asynchronous computational process for the solving equation (3). Analyzing and comparing these two asynchronous methods (6) and (5), we can conclude their equivalence. Indeed, in (6) we use values of the other components ψ^T to compute component $f_i(x^{T-p_i^T})$, which were calculated up to time $T - p_i^T$ i.e.

We thus define the following iterative process according to (1)

$$\psi^T = \sum_{i=1}^S \delta_i (I - \tau A^I A) \psi^{T-p_i^T} + \tau A^I b, \quad A^I = B^{-1}.$$

If τ satisfies the inequality (2), where λ is the minimal eigenvalue of the matrix $A^T A$, then algorithm (3) will converge to the solution of the system (1). To increase the speed of convergence, it is necessary to minimize the norm of the matrix α . Methods for minimizing the various norms of matrices like α are given in [2]. If the matrix α has the form $(I - \tau B^{-1} A)$, then by choosing the diagonal components of the matrix in the following way, we minimize its norms.

For example, if $|[BA]_{ii}^{-1}| \leq \left| \sum_{j=1, j \neq i}^n [B^{-1} A]_{ij} \right|$, then $\tau = 1/[B^{-1} A]_{ii}$.

At the same time, if the last inequality is valid for arbitrary $i = 1, 2, \dots, n$, then as a result of minimization we will get $\|\alpha\|_1 < 1$.

Now we consider the case of a system of non-linear algebraic equations.

Definition: The asynchronous method (6) will be said to be "coinciding with the simple iterative method" $\psi^{k+1} = F(\psi^k)$, if the following conditions are satisfied

$$f_i(\psi^{T-p_i^T}) = \delta_i f(\psi^{T-p_i^T}), \quad i = 1, S, \quad \sum_{i=1}^S \delta_i = I.$$

Theorem 1. Let the following mapping F , f_i , $i = 1, S$ in domain D satisfying the following condition for any ψ_1 and ψ_2

$$\|F(\psi_1) - F(\psi_2)\| < \alpha \|\psi_1 - \psi_2\|, \quad \|f_i(\psi_1) - f_j(\psi_2)\| < \alpha_i \|\psi_1 - \psi_2\|$$

$$0 < \alpha < 1, \quad 0 < \alpha_i < 1, \quad i = 1, \dots, S.$$

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \leq \alpha, \quad \psi^T \in D, \quad T = 1, 2, \dots$$

Then the convergence speed of the asynchronous method (6) is almost as grow as the convergence speed of the coinciding simple iterative method.

Proof. Let's estimate the norm of error vector $r^{1\alpha}$, where 1α is the first asynchronous iterative

$$\begin{aligned} \|r^{1\alpha}\| &= \left\| \sum_{i=1}^S f_i(\psi^*) - \sum_{i=1}^S f_i(\psi^{T-p_i^T}) \right\| \leq \sum_{i=1}^S \alpha_i \|\psi^* - \psi^{T-p_i^T}\|_{\max} \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^S \alpha_i \|\psi^* - \psi^0\| = \sum_{i=1}^S \alpha_i \|r^0\|. \end{aligned}$$

Since $\sum_{i=1}^S \alpha_i \leq \alpha$, $\|r^{1\alpha}\| \leq \alpha \|r^0\|$ then $\|r^{1\alpha}\| \leq \|r^0\|$. Let $\|r^{(k-1)\alpha}\| \leq \|r^{k-1}\|$.

Let's estimate the norm of vector $r^{K\alpha}$ as

$$\|r^{K\alpha}\| = \left\| \sum_{i=1}^S f_i(\psi^x) - \sum_{i=1}^S f_i(\psi^{T-p_i^T}) \right\| \leq \sum_{i=1}^S \alpha_i \|\psi^* - \psi^{k-1}\| \leq \sum_{i=1}^S \alpha_i \|r^{k-1}\| \leq r^k,$$

that is $\|r^{k\alpha}\| \leq \|r^k\|$ for any k , i.e. the convergence speed of the asynchronous method is not less than the convergence speed of the simple iterative method.

We established a general condition, on the mapping F , so that the convergence speed of the asynchronous method is not less than the convergence speed of the corresponding simple iterative method. F is Lipschitz p-contraction operator. We need further development of the theory of asynchronous methods, to establish other sufficient conditions for convergence, and to widen the ways of applicability of the asynchronous iterative method. At the same time, it is desirable to increase the convergence speed of the asynchronous iteration's methods.

Let us consider the following non-linear operator equation

$$\psi = F(\psi) + \psi_0, \tag{7}$$

where operator F is definition $H = \prod_{j=1}^N H_i$, where H_i the Hilbert spaces.

Suppose that the operator F is a monotonic operator, i.e. for arbitrary x and $y \in H$,

$$\langle F(x) - F(y), x - y \rangle \geq \gamma_1 \|x - y\|, \quad (8)$$

$$\|F(x) - F(y)\| \leq \gamma_2 \langle F(y) - F(x), x - y \rangle, \quad (9)$$

here $\langle \bullet \rangle$ is scalar product in H .

We now introduce the following operator $G(\psi) = \psi + \beta(F(\psi) - \psi + \psi_0)$ in H , where $\beta > 0$. The equations

$$\psi = G(\psi) \quad (10)$$

(7) and (10) are equivalent. The proof of the next theorem was taken from [12].

Theorem 2. Let conditions (8) and (9) be satisfied, and $\beta < 2/(2 + \gamma_2)$. Then, the non-linear equation (10) has a unique solution in H for any initial $\psi_0 \in H$.

Proof. It is enough to show that operator G is a contraction on H . Then operator G will have a unique fixed point in H , which will be the solution of equation (10). Let us estimate the norm of the following difference

$$\begin{aligned} \|G(\psi_1) - G(\psi_2)\| &\leq \langle G(\psi_1) - G(\psi_2), G(\psi_1) - G(\psi_2) \rangle = \\ &\langle \psi_1 - \beta(F(\psi_1) - \psi_1 + \psi_0) - \psi_2 + \beta(F(\psi_2) - \psi_2 + \psi_0), \\ &\psi_1 - \beta(F(\psi_1) - \psi_1 + \psi_0) - \psi_2 + \beta(F(\psi_2) - \psi_2 + \psi_0) \rangle. \end{aligned}$$

From here we get

$$\begin{aligned} \|G(\psi_1) - G(\psi_2)\| &\leq (1 - \beta)^2 \|\psi_1 - \psi_2\| - \\ &- 2\beta(1 - \beta) \langle F(\psi_1) - F(\psi_2), \psi_1 - \psi_2 \rangle - \beta^2 \gamma_2 \langle F(\psi_1) - F(\psi_2), \psi_1 - \psi_2 \rangle. \end{aligned}$$

Then using the condition (9) we get

$$\|G(\psi_1) - G(\psi_2)\| \leq \rho(\beta) \|\psi_1 - \psi_2\|,$$

where $\rho(\beta) = ((1 - \beta)^2 + \beta(2\beta + \beta\gamma_2 - 2)\gamma_1)^{1/2}$. If $\beta < 2/(2 + \gamma_2)$, then $\rho(\beta) < 1$. Thus the operator G is a contracting on H , and equation (10) has a unique solution in H .

For which value of β , will $\rho(\beta)$ be minimal, i.e. optimal β . For this we take the derivative of $\rho(\beta)$ with the respect to β and set it to zero, we then obtain

$$\beta_{optimal} = \frac{1 + \gamma_1}{1 + 2\gamma_1 + \gamma_1\gamma_2}. \quad (11)$$

According to the condition of the theorem, $\beta_{optimal} < 2/(2 + \gamma_2)$, it follows that $\gamma_1 < \frac{\gamma_2}{2 + \gamma_2}$. The minimal value for $\rho(\beta)$, when $\beta = \beta_{optimal}$ will be equal to the following

$$\rho(\beta_{optimal}) = \sqrt{\frac{\gamma_1(\gamma_2 - \gamma_1)}{1 + 2\gamma_2 + \gamma_1\gamma_2}}. \quad (12)$$

We will note that the optimal value of β is the relaxation parameter.

The asynchronous iterative process for the equation we consider always converges,

$$\psi_i(n) = \begin{cases} \psi_i(n-1), & \text{if } i \notin J_n \\ G_i(y(n-1)), & \text{if } i \in J_n, \end{cases} \quad n = 1, 2, \dots \quad (13)$$

if the random sequence J_n has maximal sediment and executing the obvious condition $\rho(\beta_{optimal}) < 1$.

Now, using contraction property [see:1] it's easy to obtain the inequality

$$\|\psi(n) - \xi\| \leq \rho(\beta)^{q_\varepsilon} \|\varphi(0) - \xi\|.$$

Here, if $\varepsilon > 0$ is the required accuracy the q_ε macro-iterations need be done to reach accuracy ε , where $q_\varepsilon \geq \ln \varepsilon / \ln \rho(\beta)$.

If we use the optimal relaxation parameter $\beta_{optimal}$, then q_ε satisfied

$$q_\varepsilon \geq \frac{\ln \varepsilon}{\ln \gamma_1(\gamma_1 - \gamma_2) - \ln(1 + 2\gamma_1 + \gamma_1\gamma_2)},$$

where q_ε is the number of macro-iterations in the sequence $\{\psi(m)\}_{m=1}^\infty$ from (13).

The basic difference between the probabilistic asynchronous iterative method and the simple iterative method is the randomness (chaotic behavior) of the computations of the vector iterations. This is expressed through the concept of the random sequence of sets, J_n . The probabilistic asynchronous iterative methods has the following advantages:

- a) It allow us to derive computations for each coordinate of a vector independently from the rest of the coordinates;
- b) To obtain a speed up in computation, due to the fact that the asynchronous iterative method is an implicit iterative method.

To compute the current coordinate in a macro-iteration, we use the value of coordinates, which have already been computed. As a result, we get the following real iterative process

$$B \frac{\psi(n+1) - \psi(n)}{\beta} + \psi(n) - F(\psi(n)) = \psi_0. \quad (14)$$

If in formula (14) we make a simple transformation, we will get an asynchronous iterative method in the following form

$$\psi_i(n+1) = \begin{cases} \psi_i(n), & \text{if } i \notin J_n \\ \psi_i(n) - \beta(B^{-1}\psi(n) - F(\psi(n)) - \psi_0), & \text{if } i \in J_n. \end{cases} \quad (15)$$

If B is equal to unit matrix I , then (14) is called an explicit computational scheme. If $B \neq I$, then it is called an implicit computational method.

For any B and β , the solution of equation (14) will be a solution to equation (7). We must choose B and β based on convergence demands of the asynchronous iterative method (15) and the easy of inverts B .

As an example we have solved the following system of linear algebraic equations $Ax = b$, where A (4x4) matrix.

$$A = \begin{bmatrix} 20.90 & 1.20 & 2.10 & 0.90 \\ 1.20 & 21.20 & 1.50 & 2.50 \\ 2.10 & 1.50 & 18.18 & 1.30 \\ 0.90 & 2.50 & 1.30 & 32.10 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 21.28 \\ 27.46 \\ 26.76 \\ 049.27 \end{bmatrix}.$$

The exact solution of the system is known: $X_1 = 0.78$, $X_2 = 1$, $X_3 = 1.2$, $X_4 = 1.4$, and the number of processors used was $S = 3$. The time needed to compute the next iterative for each processor is random. Let $p_1 = 0.3$, $p_2 = 0.3$, $p_3 = 0.4$, where p_i , $i = \overline{1, 3}$ is the probability of a successful iterative at the i -th processor. The results of the differences between the exact and approximate solutions, when $\varepsilon = 10^{-4}$ are given in table 1.

Table 1. The computational results without relaxation parameter

n	$ x_*-x1 $	$ x_*-x2 $	$ x_*-x3 $	$ x_*-x4 $
1	0.0777708900	0.069950880	0.008332968	0.011144760
3	0.008108616	0.000119567	0.003048062	0.000487447
5	0.002131820	0.000095960	0.000448704	0.000046015
7	0.000019372	0.000001550	0.000015947	0.000000119
9	0.000002146	0.000000000	0.000001073	0.000000000

Here x_* is exact solution and n is the number of iterations. We also defined n_i to be the number of asynchronous iterations the i -th processors. Here $n_1 = 22$, $n_2 = 28$, $n_3 = 33$. After introducing the relaxation parameter $\beta = 2/\|A\|$, the system of equation has the form of $X = \beta b + (1 - \beta\Delta)X$. The convergence of the asynchronous process is accelerated, and that can be seen as a result of computations from table 2.

Table 2. The computational results with relaxation parameter

n	$ x_*-x1 $	$ x_*-x2 $	$ x_*-x3 $	$ x_*-x4 $
3	0.001705051	0.004578471	0.009809852	0.001702547
5	0.000022709	0.000081182	0.000172734	0.000034809

Here $n_1 = 3$, $n_2 = 6$, $n_3 = 10$.

The results of the computational experiments with model problem show that the efficiency of the asynchronous process is increased when we introduce a simple relaxation parameter.

Now we will discussed using Monte-Carlo method for improving convergence of asynchronous iterations.

An important way to increase the efficiency of modern computer systems in applying parallel algorithms, is to minimize the synchronous requirements. Asynchronous method does not demand synchronization on a multiprocessor system. Monte Carlo algorithms can serve as examples for asynchronous iterative methods. In particular, the well-known Neumann-Ulam scheme [9], that uses independent realizations of a Markov chain, is naturally asynchronous and applicable.

From the other side, the theory of asynchronous methods for the solution of linear and non-linear systems has been widely developed in recent years. One of the most important theoretical models describing asynchronous iteratives is a model of chaotic relaxation [5–7]. Conditions, under which a method of chaotic relaxation converges, are close to conditions for applying the Neumann-Ulam scheme (the maximal eigenvalue of the iteration matrix must be less than one). This and other facts connect Monte Carlo and chaotic relaxations were studied in [1, 10, 11].

Several methods, which were developed for the theory of Monte Carlo with the purpose of extending their applicability, are relevant to chaotic relaxation too. We can expect that many methods; which were developed for improving Monte Carlo, can be applied to the theory of asynchronous methods.

Let us consider solving system of linear algebraic equations. For the solution of the system

$$Ax = b \quad (16)$$

we could always construct a convergent iterative process, if $\det A \neq 0$. In this case, we will choose the following iterative scheme

$$x_{n+1} = (1 - \omega)x_n + \omega(A^T b + A^T A x_n) = B_\omega x_n + \omega A^T b. \quad (17)$$

Here $B_\omega = \omega A^T A + (1 - \omega)I$ and $C = A^T A > 0$ is positive definite and has real distinct eigenvalues. Since $A^T A$ is symmetric [13], the iterative method is symmetrize-able. The optimal value, ϖ , for the parameter ω in sense of minimal spectral radius, $\rho(B_\omega)$, of the matrix B , are determined by formula $\varpi = 2/(2 - M(C) - m(C))$, where $m(C)$ and $M(C)$ are the minimal and maximal eigenvalue of matrix C respectively. It's easy to show that the spectral radius $\rho(B_\varpi) = (M(C) - m(C))/(2 - M(C) - m(C)) < 1$, and respectively the iterative process (17) converges. Let's now consider a system of linear algebraic equations of the form

$$x = Bx + F, \quad (18)$$

where the matrix B is $(n \times n)$. For (18) the condition $\rho(B) < 1$ is satisfied. Consider a chaotic sequence $J_{n=1}^\infty$, where J_n is a non-empty subset of $1, 2, \dots, n$. Let the initial approximation be $x(0)$. We will build a sequence of iterations $x(n)_{n=1}^\infty$ by the following rule

$$x_i(n+1) = \begin{cases} x_i(n), & \text{if } i \notin J_n, \\ \sum_{j=1}^n b_{i,j} x_j(n) + F_i, & \text{if } i \in J_n, \end{cases} \quad (19)$$

which is called the method of chaotic iterative for the system of algebraic equations (18). Since, the concrete structure of set J_n is unknown, a direct application of known theorems on convergence of iterative methods is impossible. Let the chaotic sequence J_n have maximal sediment [4]. In this case studying the convergence of chaotic iterative processes becomes real when we use a multiprocessor system.

If the Neumann series converges for (18), [see:9], then for each B there exists such n_0 , such that $|B^{n_0}| < 1$, and so

$$\rho(|B^{n_0}|) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|B^{n_0 n}|} = \max_k |\lambda_k|,$$

$$\rho^n(|B|^{n_0}) = |||B|^{n_0 n}|| \leq |B|^n |B|^{n_0} < 1, \quad \rho(|B|^{n_0}) < 1.$$

This implies that the following statement is valid.

Theorem 3. If a chaotic sequence of sets J_n has maximal sediment, and $\rho(B) < 1$, then there exists an integer $n_0 > 0$, so that the method of chaotic iterations converges for

$$X_n = B^{n_0} X_{n-1} + F_1, \quad \text{where } F_1 = B^{n_0-1} F + B^{n_0-2} F + \dots + F. \quad (20)$$

This, in principal, solves the problem of constructing a convergent chaotic iterative for any system of linear algebraic equation. Here we notice that n_0 can be very large. Even when n_0 is small, B^{n_0} can have a much more complicated structure then B and can thus take much more memory.

There are other results, which have been developed in Monte Carlo theory, which may be useful. They are, for example, the decomposition of the principle part of an operator (control variates) [9, 10].

a) Decomposition of the main part of the operator.

Consider system (18) again. Suppose, that there exists a matrix A_1 of the form $A_1 = \sum_{i=1}^n a_i d_i$, where $a_i = (a_i^{(1)}, \dots, a_i^{(n)})^T$, $d_i = (d_i^{(1)}, \dots, d_i^{(n)})$ are vectors of given, linearly independent vectors so that $\lambda_m \alpha(|A - A_1|) < 1$.

We denote $A - A_1 = K$. The system of equations $x = K^{-1}A_1x + K^{-1}f$ is equivalent to the system (18). Since A_1 has a special form, then

$$x = - \sum_{i=1}^n (d_i, x) K^{-1}a_i + K^{-1}b.$$

From which we obtain

$$(x, d_i) = - \sum_{i=1}^m (d_i, x) (K^{-1}a_i, d_i) + (K^{-1}b, d_i). \quad (*)$$

Then the following assertion is valid.

Theorem 4. If 1 is not in the spectrum of A , then the solution of equation (18) can be found first by solving the $n + 1$ equations

$$KU_i = a_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad \text{and} \quad KW = b \quad (21)$$

and then forming (*). For the solution of equation (21) now we can use asynchronous iterative methods. It is known that this choice of a_j and d_j , $j = 1, \dots, n$. $a_j \bullet d_j = \bar{x}_j$, where $\bar{x}$ is j -th eigenvector of A . Certainly, this method lets us apply Monte Carlo methods to asynchronous method for systems of equations (18) for which the condition $\lambda_{\max}(|A|) < 1$ is not executed does not hold.

b) Using a block iterative method

The other method, which is tightly connected with Monte Carlo theory, is the application of block iteratives (like vector algorithms). As we have already mentioned, it is known that block asynchronous iteratives can converge in cases when the asynchronous methods diverge. A block asynchronous process is constructed in the following way. Let the integer numbers $n_i > 1$, $n_1 + n_2 + \dots + n_m = N$ be given. We will divide the matrix B (of order $N \times N$) into m submatrices A_{ij} of order $(n_i \times n_j)$, $(i, j = 1, \dots, m)$ respectively. We will denote $x = (x_1, \dots, x_m)$, $x_j = (x_{n_{j-1}+1}, \dots, x_{n_j})$, $F = (F_1, \dots, F_m)$, $F_j = (f_{n_{j-1}+1}, \dots, f_{n_j})$, $n_0 = 0$ and we will determine a block asynchronous process in the following way

$$x_j(n+1) = \begin{cases} x_j(n), & \text{if } i \notin J_n, \\ \sum_{j=1}^m A_{ij}x_j(n) + F_j & \text{if } j \in J_n. \end{cases}$$

Where J_n , as it was before, a chaotic sequence of sets the integers $1, \dots, m$. Unfortunately, studying the convergence of this process is difficult (see [10]).

We will give a simple example of a biharmonic equation on a grid, where the above method is useful.

Consider a boundary value problem for the biharmonic equation in a domain $D \subset R^2$ with a smooth boundary.

$$\Delta^2 u = f, \quad u| = 0, \quad \Delta u| = 0.$$

If for the biharmonic operator we substitute the corresponding fourth order finite – difference approximation on the grid, then it's easy to see that the system of equations can not use asynchronous methods because of divergence. In this case, we transfer to the equivalent system

$$\Delta u = v, \quad u| = 0,$$

$$\Delta v = f, \quad |v| = 0.$$

Then, we derive the following finite-difference formula where h is step of grid:

$$\begin{bmatrix} 4 & h^2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} W_{i,K} = W_{i-1,K} + W_{i+1,K} + W_{i,k+1} - \begin{bmatrix} 0 \\ h^2 f_{i,k} \end{bmatrix}, \quad (22)$$

where $W_{i,K} = \begin{bmatrix} u_{i,k} \\ v_{i,k} \end{bmatrix}$.

Multiplying (22) by $\begin{bmatrix} 4 & h^2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}^{-1}$ we get a system of equations of the form $W = DW + C$, where the matrix D , as well as W and C consist of two by two blocks. Using the results of N. Fesenko [11], we can show that, the block asynchronous iterative process with the matrix D will be converge in this case.

References

- [1] Rasulov A.S., Bakoev M.T. 2014. *Probabilistic Approach to the Asynchronous Iteration. Journal of Applied Mathematics and Physics.* 2, – P. 32–40.
- [2] Bertsekas D., Tsitsiklis J. 1997. *Parallel and Distributed Computation: Numerical Methods.* – 731 p.
- [3] Baudet G.M. 1977. *Iterative Methods for Asynchronous Multiprocessors.* High Speed Computer and Algorithm Organization. In: D. Kuck, D. Lawrie and A. Sameh, Eds., Academic Press, New York, – P. 309–310.
- [4] Baudet G.M. 1978. *Asynchronous Iterative Methods for Multiprocessors. Journal of Associated Computation.* – Vol. 25. – No. 2, – P. 226–244. <http://dx.doi.org/10.1145/322063.322067>
- [5] Robert F., Charnay M. and Musy F. 1975. *Iteration Chaotiques Serie-Paralele Pour Equations Non-Linearires de Point Fixe. Applied Mathematics.* – Vol. 20, – No. 1, – P. 1–38.
- [6] Chazan D. and Miranker W. 1969. *Chaotic Relaxation. Linear Algebra and Its Applications.* Vol. 2, – P. 199–229. [http://dx.doi.org/10.1016/0024-3795\(69\)90028-7](http://dx.doi.org/10.1016/0024-3795(69)90028-7)
- [7] Donnelly J.D. *Periodic Chotic Relaxation.* 1971. *Linear Algebra and Its Applications.* No. 2, – P. 117–128. [http://dx.doi.org/10.1016/0024-3795\(71\)90033-4](http://dx.doi.org/10.1016/0024-3795(71)90033-4)
- [8] Nesterenko B.B., Marchuk V.A. 1989. *Basics of Asynchronous Methods for Parallel Calculations.* Kiev. Nauka-Dumka, – 176 p. Monograph (in Russian).
- [9] Ermakov S.M., Nekrutkin V.V., Sipin A.S. 1989. *Random Processes for Classical Equations of Mathematical Physics.* Kluwer Academic Publication, London,
- [10] Ermakov S.M., Rasulov A.S., Bakoev M.T., Veselovskaya A.Z. 1992. *Elective algorithms of Monte-Carlo method.* Tashkent University, – 132 p.
- [11] Fesenko N. *Convergence of block asynchronous process.* 1981. *Vestnik of Leningrad State University.* ser.1, – P. 59–63.
- [12] Belectkiy V.N. 1988. *Multiprocessors and parallel structures with organization of asynchronous calculations.* Kiev. Nauka-Dumka, – 240 p.
- [13] Kantorovich L.V., Akilov G.P. 1977. *Functional analysis.* M.: Nauka. – 653 p.

Received April 14, 2024

УДК 51

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ УСКОРЕНИЯ СХОДИМОСТИ К АСИНХРОННЫМ ИТЕРАЦИЯМ

Расулов А.С., Раимова Г.М.

asrasulov@gmail.com

Университет мировой экономики и дипломатии,
100007, Узбекистан г. Ташкент, проспект Мустакиллик, 54.

В этой работе мы рассмотрим асинхронные итерационные алгоритмы. Как известно, в многопроцессорных компьютерах применение параллельных методов заметно снижает производительность и эффективность вычислительных средств. В этой работе изучаются параллельные и асинхронные итерационные методы. Асинхронные методы позволяют уменьшить время обмена информацией между процессорами в многопроцессорных ЭВМ и тем самым повысить производительность и эффективность вычислений. Для ускорения сходимости итерационных процессов применяются релаксационные методы. В работе изучаются влияние релаксационных методов на сходимость асинхронных методов и доказаны теоремы об оценке сходимости, а также получена количественная оценка эффективности распараллеливания. Результаты вычислительных экспериментов для рассмотренной задачи показывают увеличения эффективности асинхронных алгоритмов при применении релаксационных методов для многопроцессорных компьютеров.

Ключевые слова: асинхронные итерации, параллельные алгоритмы, релаксационные методы.

Цитирование: *Расулов А.С., Раимова Г.М.* Применение методов ускорения сходимости к асинхронным итерациям // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2024. – № 4/1(59). – С. 85-95.

ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

№ 4/1(59) 2024

Журнал основан в 2015 году.

Издается 6 раз в год.

Учредитель:

Научно-исследовательский институт развития цифровых технологий и
искусственного интеллекта.

Главный редактор:

Равшанов Н.

Заместители главного редактора:

Азамов А.А., Арипов М.М., Шадиметов Х.М.

Ответственный секретарь:

Ахмедов Д.Д.

Редакционный совет:

Азамова Н.А., Алоев Р.Д., Амиргалиев Е.Н. (Казахстан), Бурнашев В.Ф.,
Загребина С.А. (Россия), Задорин А.И. (Россия), Игнатъев Н.А.,
Ильин В.П. (Россия), Исмагилов И.И. (Россия), Кабанихин С.И. (Россия),
Карачик В.В. (Россия), Курбонов Н.М., Маматов Н.С., Мирзаев Н.М.,
Мирзаева Г.Р., Мухамадиев А.Ш., Назирова Э.Ш., Нормуродов Ч.Б.,
Нуралиев Ф.М., Опанасенко В.Н. (Украина), Расулмухамедов М.М., Расулов А.С.,
Садуллаева Ш.А., Старовойтов В.В. (Беларусь), Хаётов А.Р., Халджигитов А.,
Хамдамов Р.Х., Хужаев И.К., Хужаеров Б.Х., Чье Ен Ун (Россия),
Шабозов М.Ш. (Таджикистан), Dimov I. (Болгария), Li Y. (США),
Mascagni M. (США), Min A. (Германия), Schaumburg H. (Германия),
Singh D. (Южная Корея), Singh M. (Южная Корея).

Журнал зарегистрирован в Агентстве информации и массовых коммуникаций при
Администрации Президента Республики Узбекистан.

Регистрационное свидетельство №0856 от 5 августа 2015 года.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

При перепечатке материалов ссылка на журнал обязательна.

За точность фактов и достоверность информации ответственность несут авторы.

Адрес редакции:

100125, г. Ташкент, м-в. Буз-2, 17А.

Тел.: +(998) 712-319-253, 712-319-249.

Э-почта: journals@airi.uz.

Веб-сайт: <https://journals.airi.uz>.

Дизайн и вёрстка:

Шарипов Х.Д.

Отпечатано в типографии НИИ РЦТИИ.

Подписано в печать 05.09.2024 г.

Формат 60x84 1/8. Заказ №5. Тираж 100 экз.

PROBLEMS OF COMPUTATIONAL AND APPLIED MATHEMATICS

No. 4/1(59) 2024

The journal was established in 2015.
6 issues are published per year.

Founder:

Digital Technologies and Artificial Intelligence Development Research Institute.

Editor-in-Chief:

Ravshanov N.

Deputy Editors:

Azamov A.A., Aripov M.M., Shadimetov Kh.M.

Executive Secretary:

Akhmedov D.D.

Editorial Council:

Azamova N.A., Alov R.D., Amirgaliev E.N. (Kazakhstan), Burnashev V.F.,
Zagrebina S.A. (Russia), Zadorin A.I. (Russia), Ignatiev N.A., Ilyin V.P. (Russia),
Ismagilov I.I. (Russia), Kabanikhin S.I. (Russia), Karachik V.V. (Russia), Kurbonov
N.M., Mamatov N.S., Mirzaev N.M., Mirzaeva G.R., Mukhamadiev A.Sh., Nazirova
E.Sh., Normurodov Ch.B., Nuraliev F.M., Opanasenko V.N. (Ukraine), Rasulov A.S.,
Sadullaeva Sh.A., Starovoitov V.V. (Belarus), Khayotov A.R., Khaldjigitov A.,
Khamdamov R.Kh., Khujaev I.K., Khujayorov B.Kh., Chye En Un (Russia),
Shabozov M.Sh. (Tajikistan), Dimov I. (Bulgaria), Li Y. (USA), Mascagni M. (USA),
Min A. (Germany), Schaumburg H. (Germany), Singh D. (South Korea),
Singh M. (South Korea).

The journal is registered by Agency of Information and Mass Communications under the
Administration of the President of the Republic of Uzbekistan.

The registration certificate No. 0856 of 5 August 2015.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

At a reprint of materials the reference to the journal is obligatory.
Authors are responsible for the accuracy of the facts and reliability of the information.

Address:

100125, Tashkent, Buz-2, 17A.

Tel.: +(998) 712-319-253, 712-319-249.

E-mail: journals@airi.uz.

Web-site: <https://journals.airi.uz>.

Layout design:

Sharipov Kh.D.

DTAIDRI printing office.

Signed for print 05.09.2024

Format 60x84 1/8. Order No. 5. Printed copies 100.



**Профессор
ИСРАИЛОВ МАРУФ ИСРАИЛОВИЧ**
(к 90-летию со дня рождения)

Маруф Исраилович Исраилов – известный ученый-математик, доктор физико-математических наук, профессор, крупный специалист в области теории чисел и вычислительной математики.

М.И. Исраилов родился 27 апреля 1934 года в городе Самарканде в семье ремесленника. В 1951 году с отличием окончив среднюю школу №16 г. Самарканда, поступил на физико-математический факультет Самаркандского государственного университета, который успешно окончил в 1956 г. С 1958 по 1961 годы проходил обучение в аспирантуре Института математики им. В.И. Романовского под руководством профессора Н.П. Романова. В 1966 году защитил кандидатскую диссертацию на тему «Проблема Тарри для быстрорастущих слагаемых и ее приложение к изучению эргодических сумм». В 1974 году М.И. Исраилову присвоено звание старшего научного сотрудника. В 1986 году М.И. Исраилов защитил докторскую диссертацию на тему «Асимптотические и точные формулы для аддитивных задач с растущим числом слагаемых», а в 1989 году получил звание профессора по специальности «Вычислительная математика».

После окончания аспирантуры М.И. Исраилов работал младшим научным сотрудником в Вычислительном центре Института математики АН РУз, затем с 1966 г. – старшим научным сотрудником. С 1976 года работал на должности заведующего лабораторией «Теория приближенного интегрирования» Института кибернетики с вычислительным центром. С 1984 г. и до 1995 г. – являлся заведующим отделом «Вычислительные методы» Института математики АН РУз. В том же 1995 году М.И. Исраилов приступил к работе в Самаркандском государственном университете в качестве заведующего кафедрой вычислительной математики.

Профессор М.И. Исраилов имел широкий диапазон научных интересов. Его глубокие исследования в областях аддитивных задач, построения общих арифметиче-

ских ортогональных и биортогональных систем в гильбертовых пространствах; нахождения числа решений различных классов диофантовых уравнений, оценке тригонометрических сумм; построения оптимальных квадратурных и кубатурных формул в различных функциональных пространствах, а также приближенного решения регулярных и сингулярных интегральных уравнений внесли существенный вклад в развитие теории чисел и вычислительной математики. Результаты его работ успешно применяются в многочисленных прикладных задачах.

М.И. Исраилов впервые исследовал проблему Тарри для общих числовых последовательностей и применил к изучению эргодических сумм. Здесь он также решил известную проблему венгерского математика П. Эрдеша (об оценке снизу максимума модуля многочленов на единичной окружности) в обобщенной и уточненной постановке. М.И. Исраилову принадлежит всестороннее исследование аддитивных задач с растущим числом слагаемых. Он получил асимптотические разложения в проблеме Варинга с полиномиальными слагаемыми и в диофантовой системе Гильберта-Камке.

Им также найдена точная формула для числа решений линейных диофантовых уравнений общего вида. Эта формула нашла применение в теории инвариантных кубатурных формул академика С.Л.Ёсоболева и позволила сильно упростить исследование и построение таких формул на поверхности многомерных сфер и шаров.

Маруф Исраилович также внес существенный вклад в применение теоретико-числовых методов и методов сплайн-функций в вычислительной математике. Им построены оптимальные квадратурные и кубатурные формулы сингулярных интегралов с ядрами Гильберта и Коши, найдены приближенно-аналитические решения систем одномерных и многомерных интегральных уравнений с ядрами Фредгольма, Гильберта и Коши. Найдены оценки погрешности в различных часто встречающихся пространствах функций. Эти результаты имеют многочисленные применения в прикладных задачах, в частности в аэродинамике и гидродинамике. Характерной особенностью этого цикла исследований является новизна постановок задач и разработка новых методов их решения.

Отдельные результаты исследований М.И. Исраилова по теории дзета-функции Римана и проблеме делителей Дирихле вызвали большой резонанс среди специалистов за пределами нашей страны.

В Маруфе Исраиловиче гармонично сочетались способности крупного ученого, талантливого педагога и умелого руководителя крупных научных исследований. Он успешно сочетал плодотворную научную и научно-организаторскую деятельность с большой педагогической и общественной деятельностью. С 1967 г. М.И. Исраилов читал общие и специальные курсы на факультете прикладной математики Ташкентского государственного университета, а с 1995 по 2003 годы – в Самаркандском государственном университете, где до конца жизни продолжал активную научно-педагогическую деятельность в качестве почетного профессора-консультанта.

М.И. Исраилов с 1972 г. являлся членом двух специализированных советов по защите кандидатских и докторских диссертаций. С 1967 по 1995 годы руководил работой организованного им городского научного семинара «Применение теории чисел в вычислительной математике» при Институте кибернетики АН РУз и Институте математики АН РУз, а с 1995 года руководил научным семинаром «Приближенные методы высшего анализа» в СамГУ.

Работая в крупнейших ВУЗах и НИИ республики, Маруф Исраилович подготовил десятки учеников, успешно работающих в различных сферах экономики республи-

ки, в странах ближнего и дальнего зарубежья. М.И. Исраилов руководил работами магистрантов, аспирантов и докторантов. Под его руководством защищены более 10 кандидатских диссертаций, он способствовал защите трех докторских диссертаций. С 1993 г. М.И. Исраилов со своими докторантами, аспирантами и студентами вёл научные исследования в рамках проектов, имеющих фундаментальное значение и широкое прикладное применение.

Обычно будущих ученых Маруф Исраилович привлекал к науке со студенческой скамьи. Более того, он с аспирантских лет активно участвовал в поиске и формировании юных математических дарований в системе школьного образования. Будучи аспирантом и молодым ученым М.И. Исраилов преподавал в специализированной физико-математической школе №82 города Ташкента, организованной академиком В.К. Кабуловым. Многие ученики М.И. Исраилова из этой школы стали в последующем докторами наук и известными специалистами в своих отраслях. Подготовку математиков со школьной скамьи профессор М.И. Исраилов продолжил в физико-математическом лицее г. Самарканда, учащиеся которого регулярно занимали призовые места на различных международных математических олимпиадах. На протяжении всей педагогической деятельности своими научно-популярными статьями в энциклопедиях, в различных общественных и молодежных изданиях, ряде телепередач М.И. Исраилов умело и выверено формировал математическую культуру мышления у молодежи.

М.И. Исраилов – автор более 160 научных, 40 научно-популярных работ. Около 50 его научных статей опубликованы в авторитетных изданиях ближнего и дальнего зарубежья. Профессор М.И. Исраилов является автором широко известного двухтомного учебника по вычислительной математике «Хисоблаш методлари». Данная книга является единственным учебником подобного типа на узбекском языке и принята в качестве основного в ведущих университетах Узбекистана. Этот учебник написан на основе оригинальных лекций М.И. Исраилова, которые он читал на протяжении 40 лет в Национальном университете Узбекистана, Самаркандском государственном университете, на семинарах в Институте математики АН РУз. Также результатом многолетнего чтения лекций стал учебник по теории чисел «Сонлар назарияси» в соавторстве с профессором А. Солеевым.

М.И. Исраилов и его ученики участвовали с докладами во многих международных научных форумах. Он принимал участие в Международном конгрессе математиков, Всемирном конгрессе общества Бернулли и других. Был одним из активных организаторов всех международных конференций по теории кубатурных формул, проводимых в Узбекистане. Профессор М.И. Исраилов до последних дней оставался активным участником ежегодной Международной научно-практической конференции «Инновация». Являясь одним из бессменных руководителей секции «Математика. Математическое моделирование», М.И. Исраилов поддерживал высокий уровень научных изысканий и докладов конференции. М.И. Исраилов был членом редколлегии сборника «Вопросы вычислительной и прикладной математики», а также ответственным редактором сборников по вычислительной математике, выпускаемых в Институте математики АН РУз. А с 2001 года являлся членом редколлегии сборника научных статей Международной конференции «Инновация». Являлся членом Американского математического общества и экспертом международного журнала «Mathematical Reviews».

Маруфе Исраилович неоднократно награждался почетными грамотами Академии наук Республики Узбекистан.

В знак признания весомого многолетнего вклада профессора М.И. Исраилов в развитие математической науки и подготовку высококвалифицированных кадров в 2009 году Национальным университетом Узбекистана была проведена республиканская научная конференция «Вычислительные технологии и математическое моделирование», посвященная его 75-летию. В 2013 году проведен научный семинар «Профессор М.И. Исраилов и развитие прикладной математики в Узбекистане», в 2014 году состоялась научно-техническая конференция «Прикладная математика и информационная безопасность», посвященная 80-летию учёного. В текущем 2024 году в связи с 90-летием профессора М.И. Исраилова в НУУз организован международный научный семинар «Вычислительные модели и технологии (СМТ2024)».

Созданная профессором М.И. Исраиловым научная школа по численным методам и в настоящее время продолжает продуктивно функционировать. Ученики и последователи Маруфа Исраиловича сегодня успешно работают в различных сферах и отраслях экономики нашей республики и за рубежом, продолжая дело своего Устога-учителя.

Редакционная коллегия журнала «Проблемы вычислительной и прикладной математики» посвящает данный специальный выпуск светлой памяти профессора Маруфа Исраиловича Исраилова – выдающегося учёного, талантливого педагога, заботливого наставника и замечательного человека, который навсегда останется в памяти друзей, коллег и учеников.

Содержание

Солеев А.С., Розет И.Г., Мухтаров Я.

Исследование эколого-медицинских моделей методами бифуркационных параметров в конечно-разностных дискретных системах 9

Худойбергганов М.У., Туляганова Н.Б., Каримов Д.К.

Исследование устойчивости модифицированных разностных схем Куранта, Айзексона и Риза для квазилинейных гиперболических систем 15

Эшкuvatов З.К., Салимова Н.М., Худойбергганов М.О.

Решение системы интегральных уравнений Вольтерра первого рода модифицированным методом разложения Адомиана 23

Олимов Н.Н., Бекмуродова Д.Б.

Оптимальная интерполяционная формула с производными в пространстве Соболева 37

Курбонназаров А.И.

Оптимальная квадратурная формула для вычисления коэффициентов Фурье в гильбертовом пространстве 46

Шадиметов Х.М., Атамуродова Б.М.

Дискретная система типа Винера-Хопфа для коэффициентов интерполяционных формул 64

Шадиметов Х.М., Каримов Р.С.

Система типа Винера-Хопфа для нахождения оптимальных коэффициентов разностных формул в гильбертовом пространстве 74

Расулов А.С., Раимова Г.М.

Применение методов ускорения сходимости к асинхронным итерациям 85

Шадиметов Х.М., Шоназаров С.К.

Об одной явной оптимальной разностной формуле 96

Хаётов А.Р., Нуралиев Ф.А., Абдуллаева Г.Ш.

Построение алгебро-гиперболического интерполяционного натурального сплайна шестого порядка 107

Аллаков И., Эрдонов Б.Х.

Об одновременном представлении трех чисел суммой шести простых чисел . 122

К. Джа, К.Б. Манандхар

Общий результат с фиксированной точкой для совместимых отображений типа (K) в интуиционистском нечетком метрическом пространстве 134

Хаётов А.Р., Хаитов Т.О., Буваширов Д.С.

Оптимальная формула численного интегрирования дробного интеграла Римана-Лиувилля 142

Шадиметов Х.М., Азамов С.С., Элмуратов Г.Ч.

Минимизация погрешность квадратурной формулы в пространстве Гильберта 151

Contents

<i>Soleyev A.S., Rozet I.G., Muxtarov Y.</i>	
Research of ecological and medical models using bifurcation parameters methods in finite difference discrete systems	9
<i>Khudoyberganov M.U., Tulyaganova N.B., Karimov D.K.</i>	
Investigation of the stability of the modified difference Courant, Isaakson and Rees schemes for quasi-linear hyperbolic systems	15
<i>Eshkuvatov Z.K., Salimova N.M., Khudoyberganov M.O.</i>	
Solving system of Volterra integral equations of the first kind by modified Adomian decomposition method	23
<i>Olimov N.N., Bekmurodova D.B.</i>	
An optimal interpolation formula with derivatives in Sobolev space	37
<i>Kurbonnazarov A.I.</i>	
Optimal quadrature formula for calculating Fourier coefficients in Hilbert space .	46
<i>Shadimetov Kh.M., Atamuradova B.M.</i>	
Discrete system of Wiener–Hopf type for coefficients of interpolation formulas . .	64
<i>Shadimetov Kh.M., Karimov R.S.</i>	
Wiener–Hopf type system for finding optimal coefficients of difference formulas in the Hilbert space	74
<i>Rasulov A.S., Raimova G.M.</i>	
Applications of convergence acceleration methods to asynchronous iterations . .	85
<i>Shadimetov Kh.M., Shonazarov S.K.</i>	
On an explicit optimal difference formula	96
<i>Hayotov A.R., Nuraliyev F.A., Abdullayeva G.Sh.</i>	
Construction of the sixth order algebraic-hyperbolic interpolation natural spline	107
<i>Allakov I., Erdonov B.Kh.</i>	
On the simultaneous representation of three numbers by the sum of six numbers of primes	122
<i>Jha K., Manandhar K.B.</i>	
A common fixed point result for compatible mappings of type (K) in intuitionistic fuzzy metric space	134
<i>Hayotov A.R., Khaitov T.O., Buvasharov D.S.</i>	
An optimal formula for numerical integration of fractional Riemann-Liouville integral	142
<i>Shadimetov Kh.M., Azamov S.S., Elmuratov G.Ch.</i>	
Minimizing the error of a quadrature formula in Hilbert space	151