UDC 519.622

WIENER–HOPF TYPE SYSTEM FOR FINDING OPTIMAL COEFFICIENTS OF DIFFERENCE FORMULAS IN THE HILBERT SPACE

[1,2*] ***Shadimetov Kh.M.***, [2,3] ***Karimov R.S.***
*kholmatshadimetov@mail.ru
[1]Tashkent State Transport University,
1, Temiryolchilar str., Tashkent, 100167 Uzbekistan;
[2]V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics,
9, University str., Tashkent, 100174 Uzbekistan;
[3]Bukhara Institute of Natural Resources Management,
32, Gazli shokh str., Bukhara, 200100 Uzbekistan.

The optimization of computational methods in function spaces is one of the main problems in computational mathematics. In this work, using the variational method optimization of difference formulas for an approximate solution to the Cauchy problem is given. It is known that the errors of difference formulas are estimated from above using the norm of the error functional of these formulas. To find the norm of the error functional of difference formulas in explicit form, we will use the so-called extremal function of this functional. Here we will find the extremal function of this functional in a specific Hilbert space. A system of equations of the Wiener-Hopf type will be obtained by minimizing the squared norm of the error functional of difference formulas by coefficients. Next, we will prove the existence and uniqueness of a solution to this system.

Keywords: Hilbert space, Cauchy problem, the extremal function, the error functional, optimal difference formula.

Citation: Shadimetov Kh.M., Karimov R.S. 2024. Wiener–Hopf type system for finding optimal coefficients of difference formulas in the Hilbert space. *Problems of Computational and Applied Mathematics.* 4/1(59): 74-84.

1 The problem of constructing difference formulas

The problem of constructing difference formulas that are exact for polynomials of degree $\leqslant m-2$ and function e^{-x}, which we will also consider first in its algebraic formulation.

Everywhere, in what follows, by the difference formula we will understand the approximate equality

$$\sum_{\beta=0}^{k} C_\beta \varphi(h\beta) - h\sum_{\beta=0}^{k} C_\beta^{(1)} \varphi'(h\beta) \cong 0, \tag{1}$$

here $h=\frac{1}{N}$, $N=2,3,...$, $C_k\neq 0$, C_β and $C_\beta^{(1)}$−coefficients of the difference formula, $\varphi\in W_2^{(m,m-1)}(0,1)$.

A difference formula of the kth order is called implicit if $C_k^{(1)}\neq 0$, and if $C_k^{(1)}=0$ then explicit.

We will call the error of formula (1) the difference

$$(\ell,\varphi) = \sum_{\beta=0}^{k} C_\beta \varphi(h\beta) - h\sum_{\beta=0}^{k} C_\beta^{(1)} \varphi'(h\beta). \tag{2}$$

Equality (2) specifies an additive and homogeneous functional ℓ, which we will call the error functional of the difference formula (1), on classes differentiable with respect to $[0,1]$ functions φ. Let's say that the difference formula is exact for the function φ if the difference (2) is equal to zero. In other words, the functions for which the difference formula is accurate form the core of the error functional ℓ. The problem of constructing a difference formula in an algebraic formulation for a segment $[0,1]$ is as follows.

It is required to find the coefficients C_β and $C_\beta^{(1)}$ difference formula (1) in such a way that they are exact polynomials of degree $m-2$ (for the largest possible value of m) and functions e^{-x}.

Substituting in (2) instead of the function $\varphi(x)$ the next polynomial and λe^{-x}

$$P_{m-2}(x) = a_0 x^{m-2} + a_1 x^{m-3} + \ldots + a_{m-2},$$
$$g(x) = \lambda e^{-x},$$

we will get

$$(\ell, P_{m-2}(x)) = \sum_{\beta=0}^{k} C_\beta P_{m-2}(h\beta) - h \sum_{\beta=0}^{k} C_\beta^{(1)} P'_{m-2}(h\beta),$$
$$(\ell, g(x)) = \sum_{\beta=0}^{k} C_\beta \left(\lambda e^{-x}\right) + h \sum_{\beta=0}^{k} C_\beta^{(1)} \left(\lambda e^{-x}\right).$$

Thus, our requirement $(\ell, P_{m-2}(x)) = 0$ for $P_{m-2}(x) \in \mathrm{P}_{m-2}$ (P_{m-2}–the space of polynomials of degree $m-2$) and $(\ell, g(x)) = 0$ is equivalent to a system of conditions $(\ell, x^\alpha) = 0,\ \alpha = 0, 1, \ldots, m-2$ and $(\ell, e^{-x}) = 0$ is satisfied in the case when the vectors

$$C = \Big(C_0, C_1, \ldots, C_k\Big) \text{ and } C^{(1)} = \Big(C_0^{(1)}, C_1^{(1)}, \ldots, C_k^{(1)}\Big),$$

represent a solution to the system of equations

$$\sum_{\beta=0}^{k} C_\beta = 0,\ C_k = 1,$$

$$\begin{cases} (hk)^s + \sum_{\beta=0}^{k-1} C_\beta (h\beta)^s = h \sum_{\beta=0}^{k} s C_\beta^{(1)} (h\beta)^{s-1}, & s = 1, 2, \ldots, m-2, \\ \sum_{\beta=0}^{k} C_\beta e^{-h\beta} = -h \sum_{\beta=0}^{k} C_\beta^{(1)} e^{-h\beta}. \end{cases} \tag{3}$$

System (3) always has a solution for the value $k \geqslant m-1$.

Now we present well-known difference formulas constructed algebraically.

designate $\nabla y_n = y_n - y_{n-1}$, the Adams-Bashforth formula as follows:

$$y_{n+1} = y_n + h\left(y'_n + \frac{1}{2}\nabla y'_n + \frac{5}{12}\nabla^2 y'_n + \frac{3}{8}\nabla^3 y'_n + \ldots\right),$$

and the Adams-Moulton formula will look like:

$$y_n = y_{n-1} + h\left(y'_n - \frac{1}{2}\nabla y'_n - \frac{1}{12}\nabla^2 y'_n - \frac{1}{24}\nabla^3 y'_n \ldots\right).$$

There are other well-known formulas, for example, the Nystrom and Milne-Simpson formulas.

2 Functional formulation of tasks. Extremal function of difference formulas

We now turn to the functional formulation of our tasks. We will consider functions $\varphi(x)$ belonging to the Hilbert space $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$. $W_2^{(m,m-1)}$- the Hilbert space of classes of real functions $\varphi(x)$ that differ from each other by a polynomial of degree $m-2$ and function e^{-x} with derivatives (in the sense of generalized functions) of order m, quadratically integrable in the interval $[0,1]$ and inner product

$$\langle\varphi,\psi\rangle=\int_0^1\left(\varphi^{(m)}(x)+\varphi^{(m-1)}(x)\right)\left(\psi^{(m)}(x)+\psi^{(m-1)}(x)\right). \tag{4}$$

Since $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ it is embedded in the space $C(0,1)$ of continuous functions, the error functional of the difference formula will also be linear

$$\begin{gathered}(\ell,\varphi)=\sum_{\beta=0}^{k}C_\beta\varphi(h\beta)-h\sum_{\beta=0}^{k}C_\beta^{(1)}\varphi'(h\beta)\\ =\int_{-\infty}^{\infty}\left[\sum_{\beta=0}^{k}C_\beta\delta(x-h\beta)+h\sum_{\beta=0}^{k}C_\beta^{(1)}\delta'(x-h\beta)\right]\varphi(x)\,dx.\end{gathered} \tag{5}$$

The problem of constructing a difference formula

$$\sum_{\beta=0}^{k}C_\beta\varphi(h\beta)-h\sum_{\beta=0}^{k}C_\beta^{(1)}\varphi'(h\beta)\cong 0,$$

in the functional formulation consists of finding a functional (5) whose norm in space $W_2^{(m,m-1)*}(0,1)$ is minimal. To find the norm of the error functional in explicit form, ℓ we will often use the so-called extremal function of this functional, that is, a function ψ_ℓ for which

$$(\ell,\psi_\ell)=\left\|\ell\left|W_2^{(m,m-1)*}\right\|\cdot\right\|\psi_\ell\left|W_2^{(m,m-1)}\right\|.$$

It is known that in the work of I. Babushka et al. [1] found an extremal function $\psi_\ell(x)$ is reduced to solving a differential equation $2m$th order. However, the solution is not given there. Our method of finding $\psi_\ell(x)$ differs from I. Babushka's method will allow you to explicitly find the extremal function. It should be noted that the functional formulation of problems in the theory of cubature and difference formulas was considered in [2–15].

The norm of a function in Hilbert space $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ is determined by the formula

$$\left\|\varphi|W_2^{(m,m-1)}(0,1)\right\|=\left\{\int_0^1\left(\varphi^{(m)}(x)+\varphi^{(m-1)}(x)\right)^2\right\}^{1/2}. \tag{6}$$

Since the functional ℓ is of the form

$$\ell(x)=\sum_{\beta=0}^{k}C_\beta\delta(x-h\beta)+h\sum_{\beta=0}^{k}C_\beta^{(1)}\delta'(x-h\beta),$$

is defined in space $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$, then we have

$$(\ell,x^\alpha)=0,\ \ \alpha=0,1,...,m-2, \tag{7}$$

$$\left(\ell, e^{-x}\right) = 0. \tag{8}$$

Since the norm of an element φ from the Hilbert space $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ is determined by formula (6) and the inner product is determined by the formula (4), for which, using the Riesz theorem [16], for each functional, including the error functional of the difference formula, it is necessary to find an explicit expression in terms of some function ψ_ℓ that is an element Rissa. According to the Riesz theorem at $\varphi \in W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ the following equalities hold

$$(\ell, \varphi) = \langle \psi_\ell, \varphi \rangle, \tag{9}$$

$$\left\| \ell | W_2^{(m,m-1)*}(0,1) \right\| = \left\| \psi_\ell | W_2^{(m,m-1)}(0,1) \right\|.$$

By virtue of (4) and (9), we obtain that the following identity is valid for any function $\varphi \in \overset{\circ}{C}{}^{(\infty)}(0,1)$ —which is the space of infinitely differentiable compactly supported functions

$$\int_0^1 \left(\varphi^{(m)}(x) + \varphi^{(m-1)}(x)\right)\left(\psi_\ell^{(m)}(x) + \psi_\ell^{(m-1)}(x)\right) = (\ell, \varphi).$$

From here

$$\left(\psi_\ell^{(2m)}(x) - \psi_\ell^{(2m-2)}(x)\right) = (-1)^m \ell(x).$$

It is known that space $\overset{\circ}{C}{}^{(\infty)}(0,1)$ is dense in space $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$, which means we can approximate functions from space as accurately as we like $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ by a sequence of functions from $\overset{\circ}{C}{}^{(\infty)}(0,1)$. When $\varphi \in W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ we consider the inner product $\langle \psi_\ell, \varphi \rangle$ and, integrate by parts, we obtain

$$\langle \varphi, \psi_\ell \rangle = \sum_{s=1}^{m-1} (-1)^s \varphi^{(m-1-s)}(x)\left(\psi_\ell^{(m+s)}(x) - \psi_\ell^{(m+s-2)}(x)\right)\Big|_{x=0}^{x=1}$$

$$+\varphi^{(m-1)}(x)\left(\psi_\ell^{(m)}(x) + \psi_\ell^{(m-1)}(x)\right)\Big|_{x=1}^{x=0} + (-1)^m \int_0^1 \varphi(x)\left(\psi_\ell^{(2m)}(x) - \psi_\ell^{(2m-2)}(x)\right) dx.$$

From the arbitrariness $\varphi(x)$ and uniqueness of the function $\psi_\ell(x)$ (to the accuracy of a polynomial of degree $m-2$ and e^{-x}), the following equalities must be satisfied

$$\left(\psi_\ell^{(2m)}(x) - \psi_\ell^{(2m-2)}(x)\right) = (-1)^m \ell(x). \tag{10}$$

$$\left(\psi_\ell^{(m+s)}(x) - \psi_\ell^{(m+s-2)}(x)\right)\Big|_{x=0}^{x=1} = 0, \quad s = \overline{1, m-1,} \tag{11}$$

$$\left(\psi_\ell^{(m)}(x) + \psi_\ell^{(m-1)}(x)\right)\Big|_{x=0}^{x=1} = 0. \tag{12}$$

Fair

Theorem 1. *The extremal function of the difference formula* (1) *in space* $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ *is determined by the formula*

$$\psi_\ell(x) = (-1)^m \ell(x) * G_m(x) + P_{m-2}(x) + de^{-x}, \tag{13}$$

Where

$$G_m(x) = \frac{\operatorname{sign} x}{2}\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} - \sum_{k=1}^{m-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}\right),$$

is a solution to the equation

$$G^{(2m)}(x) - G^{(2m-2)}(x) = \delta(x),$$

$d = const$, $\operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0, \end{cases}$ $\quad P_{m-2}(x)$ *polynomial of degree* $m-2$.

The proof of this theorem is similar to the theorem from [17, 18].

3 Squared norm of the error functional of difference formulas

We know that, according to the Riesz theorem and the definition of an extremal function, it follows that

$$(\ell, \psi_\ell) = \left\| \ell | W_2^{(m,m-1)*} \right\| \cdot \left\| \psi_\ell | W_2^{(m,m-1)} \right\| = \left\| \ell | W_2^{(m,m-1)*} \right\|^2.$$

From this, we obtain the following theorem.

Theorem 2. *The squared norm of the error functional of a difference formula of the form* (1) *is determined by the formula*

$$\left\| \ell | W_2^{(m,m-1)*} \right\|^2 = (-1)^m \left[\sum_{\gamma=0}^{k} C_\gamma \sum_{\beta=0}^{k} C_\beta G_m(h\gamma - h\beta) \right.$$

$$\left. -2h \sum_{\gamma=0}^{k} C_\gamma^{(1)} \sum_{\beta=0}^{k} C_\beta G_m'(h\gamma - h\beta) - h^2 \sum_{\gamma=0}^{k} C_\gamma^{(1)} \sum_{\beta=0}^{k} C_\beta^{(1)} G_m''(h\gamma - h\beta) \right].$$

Proof of Theorem 2. Using the extremal function and conditions (7) and (8) of orthogonality of the error functional $\ell(x)$ to polynomials of degree $m-1$ and e^{-x}, after some calculations we obtain

$$\left\| \ell | W_2^{(m,m-1)*} \right\|^2 = (\ell, \psi_\ell) = (-1)^m \left[\sum_{\gamma=0}^{k} C_\gamma \sum_{\beta=0}^{k} C_\beta G_m(h\gamma - h\beta), \right.$$

$$\left. -2h \sum_{\gamma=0}^{k} C_\gamma^{(1)} \sum_{\beta=0}^{k} C_\beta G_m'(h\gamma - h\beta) - h^2 \sum_{\gamma=0}^{k} C_\gamma^{(1)} \sum_{\beta=0}^{k} C_\beta^{(1)} G_m''(h\gamma - h\beta) \right],$$

here

$$G_m'(x) = \frac{\operatorname{sign} x}{2} \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} - \sum_{k=1}^{m-1} \frac{x^{2k-2}}{(2k-2)!} \right),$$

$$G_m''(x) = \frac{\operatorname{sign} x}{2} \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} - \sum_{k=1}^{m-2} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} \right).$$

It is known from [19, 20] that the stability of a difference formula in the sense of Dahlquist, just like strong stability, is determined only by the coefficients C_β, $\beta = 0, 1, ..., k$.

For this reason, our search for the optimal formula is associated only with changing

$$C_\beta^{(1)}, \ \ \beta = 0, 1, ..., k.$$

A difference formula with an error functional $\ell(x)$ considered in space $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ can be characterized in two ways. On the one hand, it is determined by the coefficients $C_\beta,\ C_\beta^{(1)},\ \beta=0,1,...,k$, subject to conditions (7), and on the other hand, by the extremal function $\psi_\ell(x)$ of the difference formula. Now let's move on to the minimization of the squared norm of the error functional $\ell(x)$ of the difference formula (1) with given coefficients C_β and by unknown coefficients $C_\beta^{(1)}$, subject to conditions (7).

4 Wiener–Hopf type system for finding optimal coefficients of difference formulas and optimal polynomial

Let us apply the Lagrange method of undetermined multipliers. To do this, we create the Lagrange function.

$$\Psi\left(C,C^{(1)},\lambda\right)=\left\|\ell|W_2^{(m,m-1)*}\right\|^2-2(-1)^m\sum_{\alpha=0}^{m-2}\lambda_\alpha(\ell,x^\alpha)-2(-1)^m\lambda_{m-1}\left(\ell,e^{-x}\right).$$

Equating to zero all partial derivatives with respect to $C_\beta^{(1)}$ and λ_α from the function $\Psi\left(C,C^{(1)},\lambda\right)$ we have

$$\frac{\partial\Psi}{\partial C_\beta^{(1)}}=0\,,\quad \beta=0,1,...,k,$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial\lambda_\alpha}=0\,,\quad \alpha=0,1,...,m-1.$$

From here we obtain a system of equations

$$h\sum_{\gamma=0}^{k}C_\gamma^{(1)}G''_m(h\beta-h\gamma)+\alpha h\sum_{\alpha=0}^{m-2}\lambda_\alpha(h\beta)^{\alpha-1}+\lambda_{m-1}e^{-h\beta}$$

$$=-\sum_{\gamma=0}^{k}C_\gamma G'_m(h\beta-h\gamma)\,,\ \beta=0,1,...,k,\tag{14}$$

$$h\alpha\sum_{\gamma=0}^{k}C_\gamma^{(1)}(h\gamma)^{\alpha-1}=\sum_{\gamma=0}^{k}C_\gamma(h\gamma)^\alpha\,,\quad \alpha=0,1,...,m-2,\tag{15}$$

$$h\sum_{\gamma=0}^{k}C_\gamma^{(1)}e^{-h\gamma}=-\sum_{\gamma=0}^{k}C_\gamma e^{-h\gamma}.\tag{16}$$

$$G_m(x)=\frac{\operatorname{sign}x}{2}\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}-\sum_{k=1}^{m-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}\right),$$

$$G'_m(x)=\frac{\operatorname{sign}x}{2}\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}-\sum_{k=1}^{m-1}\frac{x^{2k-2}}{(2k-2)!}\right),$$

$$G''_m(x)=\frac{\operatorname{sign}x}{2}\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}-\sum_{k=1}^{m-2}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}\right).$$

The solution to the system (14)-(16), which we denote as $\overset{\circ}{C}{}_\beta^{(1)},\ \overset{\circ}{\lambda}_\alpha$, representing a stationary point for the function $\Psi\left(C,C^{(1)},\lambda\right)$. This system is called a Wiener-Hopf type system.

From the theory of the Lagrange method, it follows that $\overset{\circ}{C}{}_{\beta}^{(1)}$ will be the desired values of the coefficients of the optimal difference formula. They give a conditional minimum to the squared norm $\left\|\ell|W_2^{(m,m-1)*}\right\|^2$ provided that conditions (7) and (8) are met.

Let us now consider formula (13).

Since the coefficients of a polynomial $P_{m-2}(x)$ of degree are arbitrary $m-2$, we choose them so that the derivatives $(-1)^m P'_{m-2}(x)$ coincide with the polynomial $P_{m-3}(x)$ from (14). With this choice, $\psi_\ell(x)$ we obtain for the values of the derivative of the extremal function $\psi'_\ell(h\beta) = 0$ at points $h\beta$, which follows from formula (14). So, we proved the following theorem of Grandma algebraically.

Theorem 3. *Difference formulas*

$$\sum_{\beta=0}^{k} C_\beta \varphi(h\beta) \cong h \sum_{\beta=0}^{k} \overset{\circ}{C}{}_{\beta}^{(1)} \varphi'(h\beta),$$

$$\sum_{\beta=0}^{k} C_\beta \varphi(h\beta) \cong h \sum_{\beta=0}^{k-1} \overset{\circ}{C}{}_{\beta}^{(1)} \varphi'(h\beta)$$

will be optimal if and only if the function $\psi_\ell(x)$ *defined by formula* (13) *can be chosen so that*

$\psi'_\ell(h\beta) = 0$ *for* $\beta = 0, 1, ..., k$

and

$\psi'_\ell(h\beta) = 0$ *for* $\beta = 0, 1, ..., k-1,$

for implicit and explicit formulas, respectively.

As a result, to construct implicit optimal difference formulas, we will have to solve the following system of linear algebraic equations

$$\begin{cases} h\sum_{\gamma=0}^{k} C_\gamma^{(1)} G''_m(h\beta - h\gamma) + P_{m-3}(h\beta) + \lambda_{m-1}e^{-h\beta} = -\sum_{\gamma=0}^{k} C_\gamma G'_m(h\beta - h\gamma), \\ \beta = 0, 1, ..., k, \\ \sum_{\gamma=0}^{k} C_\gamma^{(1)} (h\gamma)^{\alpha-1} = \frac{1}{\alpha h}\sum_{\gamma=0}^{k} C_\gamma (h\gamma)^\alpha, \quad \alpha = 1, 2, ..., m-2, \\ \sum_{\gamma=0}^{k} C_\gamma^{(1)} e^{-h\gamma} = -\frac{1}{h}\sum_{\gamma=0}^{k} C_\gamma e^{-h\gamma}, \end{cases}$$

$C_\beta-$are determined from the stability conditions of the difference formula in the sense of Dahlquist and $\sum_{\gamma=0}^{k} C_\gamma = 0$.

Definition. *Difference formula* (1) *is stable in the Dahlquist sense if all roots* ζ_i *of the characteristic polynomial* $P(\zeta) = \sum_{\beta=0}^{k} C_\beta \zeta^\beta$ *are such that* $|\zeta_i| \leqslant 1$, *as well as roots, for which they* $|\zeta_i| = 1$, *are simple.*

For example, you can choose coefficients like this: $C_k = 1$, $C_{k-1} = -1$,$C_{k-i} = 0$ at $i = 2, 3, ..., k$.

Similarly, for the explicit difference formula we have

$$\begin{cases} \sum_{\gamma=0}^{k-1} d_\gamma^{(1)} G''_m(h\beta - h\gamma) + P_{m-3}(h\beta) + \lambda_{m-1}e^{-h\beta} = -\sum_{\gamma=0}^{k} d_\gamma G'_m(h\beta - h\gamma), \\ \beta = 0, 1, ..., k-1, \\ \sum_{\gamma=0}^{k-1} d_\gamma^{(1)} (h\gamma)^{\alpha-1} = \frac{1}{\alpha h}\sum_{\gamma=0}^{k} d_\gamma (h\gamma)^\alpha, \quad \alpha = 1, 2, ..., m-2, \\ \sum_{\gamma=0}^{k-1} d_\gamma^{(1)} e^{-h\gamma} = -\frac{1}{h}\sum_{\gamma=0}^{k} d_\gamma e^{-h\gamma}, \end{cases}$$

$d_\gamma-$are determined from the stability of the difference formula and from the equality $\sum_{\gamma=0}^{k} d_\gamma = 0$.

We have assumed here that system (14)-(16) is solvable. Its solvability follows from the general theory of Lagrange multipliers. However, one can verify this solvability directly algebraically.

From the theory of conditional extremum, we know a sufficient condition under which the solution $\overset{\circ}{C}{}^{(1)}_{\beta}$, $\overset{\circ}{\lambda}_{\alpha}$, gives a local minimum $\Psi\left(C, C^{(1)}, \lambda\right)$ on the manifold (7) and (8). It consists of a positive definite quadratic form

$$F\left(C^{(1)}\right) = \sum_{\beta=0}^{k}\sum_{\gamma=0}^{k} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial C^{(1)}_{\beta} \partial C^{(1)}_{\gamma}} C^{(1)}_{\beta} C^{(1)}_{\gamma} \tag{17}$$

on a set of vectors $C^{(1)} = \left(C^{(1)}_0, C^{(1)}_1, ..., C^{(1)}_k\right)$ subject to the requirement

$$QC^{(1)} = 0. \tag{18}$$

Here the matrix Q has the form

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & ... & 1 \\ 0 & h & 2h & ... & kh \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & h^{m-3} & (2h)^{m-3} & ... & (kh)^{m-3} \\ 1 & e^{-h} & e^{-2h} & ... & e^{-hk} \end{pmatrix}.$$

Let us show that in the considered In this case, the quadratic form $F\left(C^{(1)}\right)$ is strictly positive.

Theorem 4. *For any nonzero vector* $C^{(1)} = \left(C^{(1)}_0, C^{(1)}_1, ..., C^{(1)}_k\right) \in R^{k+1}$ *lying in the subspace* $QC^{(1)} = 0$*, the quadratic form* $F\left(C^{(1)}\right)$ *is strictly positive.*

Proof. From the definition of the Lagrange function $\Psi\left(C, C^{(1)}, \lambda\right)$ and from equality (15) it turns out that

$$F\left(C^{(1)}\right) = (-1)^m \sum_{\beta=0}^{k}\sum_{\gamma=0}^{k} G''_m\left(h\beta - h\gamma\right) C^{(1)}_{\beta} C^{(1)}_{\gamma}.$$

Consider a linear functional of the form

$$\nu_{C^{(1)}}\left(x\right) = \sum_{\beta=0}^{k} C^{(1)}_{\beta} \delta\left(x - h\beta\right).$$

If we take into account condition (18), this functional belongs to $W_2^{(m-1,m-2)*}(0,1)$. This means that it has an extremal function $U_{C^{(1)}}\left(x\right) \in W_2^{(m-1,m-2)}$, which is a solution to the equation

$$\frac{d^{2m-2}}{dx^{2m-2}} U_{C^{(1)}}\left(x\right) = (-1)^{m-1} \nu_{C^{(1)}}\left(x\right).$$

It is clear that $U_{C^{(1)}}\left(x\right)$ we can take the following linear combination of shifts of the fundamental solution

$$U_{C^{(1)}}\left(x\right) = (-1)^m \sum_{\gamma=0}^{k} C^{(1)}_{\gamma} G''_m\left(x - h\gamma\right),$$

here is $G''_m(x)$ the solution to the equation$\left(\frac{d^{2m-2}}{dx^{2m-2}} - \frac{d^{2m-4}}{dx^{2m-4}}\right) G''_m(x) = \delta(x)$.

Norm square $U_{C^{(1)}}(x)$ V $W_2^{(m-1,m-2)}(0,1)$ matches the form $F\left(C^{(1)}\right)$:

$$\left\| U_{C^{(1)}}(x) | W_2^{(m-1,m-2)} \right\|^2 = \left(\nu_{C^{(1)}}(x), U_{C^{(1)}}(x)\right) = (-1)^m \sum_{\gamma=0}^{k} \sum_{\beta=0}^{k} G''_m(h\beta - h\gamma) C_\gamma^{(1)} C_\beta^{(1)}.$$

From here it is obvious that for non-zero $C_\beta^{(1)}$ the function $F\left(C^{(1)}\right)$ is strictly positive, the theorem is proven. It is known that when $k > m$ system (18) always has a solution, that is, the matrix Q has a right inverse, then system (14)–(16) has a unique solution.

Theorem 5. *If a matrix Q has a right inverse, then the matrix M system (1.16)-(1.18) is non-degenerate.*

Proof. Let us denote by G'' the matrix of the quadratic form (17), write down the homogeneous system corresponding to the system (14)-(16) in the following form:

$$M \begin{pmatrix} C^{(1)} \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G'' & Q^* \\ Q & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C^{(1)} \\ \lambda \end{pmatrix} = 0. \tag{19}$$

Let us show that the only solution to (18) is the identical zero.

Let $\overline{C}^{(1)}, \overline{\lambda}$ be the solution (19). We form a functional for the vector $\overline{C}^{(1)}$ of the form

$$\mu_{\overline{C}^{(1)}}(x) = \sum_{\gamma=0}^{k} \overline{C}^{(1)}(\gamma) \delta(x - h\gamma).$$

This functionality obviously belongs to $W_2^{(m-1,m-2)*}(0,1)$. As an extremal function for $\mu_{\overline{C}^{(1)}}(x)$ we take the following expression

$$U_{\overline{C}^{(1)}}(x) = \sum_{\gamma=0}^{k} \overline{C}_\gamma^{(1)} G''_m(x - h\gamma) + \sum_{\alpha=1}^{m-2} \overline{\lambda}_\alpha x^{\alpha-1} + \overline{\lambda}_{m-1} e^{-x}.$$

This is possible because $U_{C^{(1)}}(x)$ it belongs to $W_2^{(m-1,m-2)}(0,1)$ and is a solution to the equation

$$\left(\frac{d^{2m-2}}{dx^{2m-2}} - \frac{d^{2m-4}}{dx^{2m-4}}\right) U_{\overline{C}^{(1)}}(x) = (-1)^{m-1} \mu_{\overline{C}^{(1)}}(x).$$

The first $k+1$ equations of the system (18) mean that $U_{C^{(1)}}(x)$ it takes zero values at all nodes of the difference formula, i.e. at $U_{\overline{C}^{(1)}}(h\beta) = 0$, $\beta = 0, 1, ..., k$.

Then, with respect to the norm of the functional $\mu_{\overline{C}^{(1)}}(x)$ in $W_2^{(m-1,m-2)*}(0,1)$ we have

$$\left\| \mu_{\overline{C}^{(1)}}(x) | W_2^{(m-1,m-2)*} \right\|^2 = \left(\mu_{\overline{C}^{(1)}}(x), U_{\overline{C}^{(1)}}(x)\right) = \sum_{\beta=0}^{k} \overline{C}_\gamma^{(1)} U_{\overline{C}^{(1)}}(h\beta) = 0,$$

which is only possible with $\overline{C}_\beta^{(1)} = 0$. Reading this, from the first $k+1$ equations of the system (19) we obtain

$$Q^* \overline{\lambda} = 0. \tag{20}$$

By condition, the matrix Q has a right inverse, but then Q^* it has a left inverse, hence from (20) it follows that the solution $\overline{\lambda}$ is also equal to zero.

Theorem 5 is proven.

Thus, the system of equations (14)-(16) has a unique solution.

5 Conclusion

This work presents the problems of constructing difference formulas, i.e. functional formulation of the problem. Here the extremal function of the error functional of the difference formula is found. Next, using this extremal function, a representation of the squared norm of the error functional of the difference formula under consideration is found . A system of equations of the Wiener-Hopf type for finding optimal coefficients is obtained. Next, the existence and uniqueness of the obtained is proven.

References

[1] Babuška I., Vitasek E., Prager M. 1969. *Numerical processes for solution of differential equations.* - Mir, Moscow, – 369 p.

[2] Babuška I., Sobolev S. 1965. Optimization of numerical methods *Apl. Mat.* 10, – P. 9–170.

[3] Sobolev S.L. 1974. *Introduction to the theory of cubature formulas.* Nauka, Moscow, – 808 p.

[4] Sobolev S.L, Vaskevich V.L. 1996. *Cubature formulas.* Izdat. Inst. Mat., Novosibirsk, – 448 p.

[5] Shadimetov Kh.M., Hayotov A.R. 2014. Optimal quadrature formulas in the sense of Sard in $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ space, *Calcolo*, Springer, 51, – P. 211–243.

[6] Shadimetov Kh.M. 2015. Functional statement of the problem of optimal difference formulas. *Uzbek mathematical Journal*, Tashkent, N. 4, – P. 179–183.

[7] Shadimetov K.M., Mirzakabilov R.N. 2021. Optimization of difference methods in the Sobolev factor space. *Problems of Computational and Applied Mathematics*, 5(35), – P. 137–151.

[8] Hayotov A.R., Karimov R.S. 2021. Optimal difference formula in the Hilbert space $W_2^{(2,1)}(0,1)$. *Problems of Computational and Applied Mathematics*, 5(35), – P. 129–136.

[9] Shadimetov K.M., Mirzakabilov R.N. 2022. Optimal Difference Formulas in the Sobolev Space. *Contemporary Mathematics. Fundamental Directions.* Vol. 68, N. 1, – P. 167–177.

[10] Karimov R.S. 2022. An implicit difference formula for linear differential equation of the first order in the Hilbert space *Problems of Computational and Applied Mathematics*, 5/1(44), – P. 123–133.

[11] Karimov R.S. 2022. A norm of an error functional of the optimal difference formula in the Hilbert space, *Bulletin of the Institute of Mathematics*, 5(5), – P. 46–52.

[12] Kh.M. Shadimetov, A.R. Hayotov, R.S. Karimov 2023. Optimization of Explicit Difference Methods in the Hilbert Space $W_2^{(2,1)}$, *AIP Conference Proceedings*, 2781, 00054.

[13] Kh.M. Shadimetov, R.S. Karimov 2023. Coefficients of the optimal explicit difference formula in a Hilbert space, *Problems of Computational and Applied Mathematics*, 2/1(48), – P. 45–57.

[14] Kh.M. Shadimetov, R.S. Karimov 2024. Optimization of Adams-type difference formulas in Hilbert space $W_2^{(2,1)}$, *Journal of Computational Analysis and Applications*, 32(1), – P. 300—319.

[15] Kh.M. Shadimetov, R.S. Karimov 2024. Optimal coefficients of an implicit difference formula in the Hilbert space, *AIP Conference Proceedings*, 3004, 060030.

[16] K. Atkinson, W. Han 2009. *Theoretical Numerical Analysis.* Springer, 39, – 625 p.

[17] Shadimetov Kh.M. 2019. *Optimal lattice quadrature and cubature formulas in Sobolev spaces.* Tashkent: Fan va Technology, – 224 p.

[18] Shadimetov Kh.M., Khayotov A.R. 2022. *Optimal approximation of error functionals of quadrature and interpolation formulas in spaces of differentiable functions.* – Tashkent, Muhr Press, – 247 p.

[19] Dahlquits G. 1956. Convergence and stability in the numerical integration of ordinary differential equations *MATHEMATICA SCANDINAVICA*, 4, – P. 33–53. https://doi.org/10.7146/math.scand.a-10454

[20] Dahlquits G. 1959. *Stability and error bounds in the numerical integration of ordinary differential equations*, Trans. Roy. Inst. Technol., Stockholm, – 85 p.

Received August 15, 2024

УДК 519.622

СИСТЕМА ТИПА ВИНЕРА–ХОПФА ДЛЯ НАХОЖДЕНИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ РАЗНОСТНЫХ ФОРМУЛ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

[1,2*]***Шадиметов Х.М.***, [2,3]***Каримов Р.С.***

*kholmatshadimetov@mail.ru

[1]Ташкентский государственный транспортный университет,
100167, Узбекистан, г. Ташкент, ул.Темирйулчилар, д. 1;

[2]Институт математики им. В.И. Романовского АН РУз,
100174, Узбекистан, г. Ташкент, ул. Университетская, д. 9;

[3]Бухарский институт управления природными ресурсами,
200100, Узбекистан, г. Бухара, ул.Газли шох, 32.

Оптимизация вычислительных методов в функционалных пространствах является одной из основных задач вычислительной математики. В настоящей работе вариационным методом приводятся оптимизация разностных формул для приближенного решения задачи Коши. Известно, что ошибки разностных формул сверху оценивается с помощи нормы функционала погрешности этих формул. Для нахождения в явном виде нормы функционала погрешности разностных формул мы будем использовать так называемую экстремальную функцию данного функционала. Здесь будут найдены экстремальная функция данного функционала в конкретном пространстве Гильберта. Минимизируя квадрат нормы функционала погрешности разностных формул по коэффициентам будут получены система уравнений типа Винера – Хопфа. Далее будет доказано существование и единственность решения этой системы.

Ключевые слова: пространство Гильберта, задача Коши, экстремальная функция, функционал погрешности, оптимальная разностная формула.

Цитирование: *Шадиметов Х.М., Каримов Р.С.* Система типа Винера–Хопфа для нахождения оптимальных коэффициентов разностных формул в гильбертовом пространстве // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2024. – №4/1(59). – С. 74-84.

ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

№ 4/1(59) 2024

Журнал основан в 2015 году.
Издается 6 раз в год.

Учредитель:
Научно-исследовательский институт развития цифровых технологий и искусственного интеллекта.

Журнал зарегистрирован в Агентстве информации и массовых коммуникаций при Администрации Президента Республики Узбекистан.
Регистрационное свидетельство №0856 от 5 августа 2015 года.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

Адрес редакции:
100125, г. Ташкент, м-в. Буз-2, 17А.
Тел.: +(998) 712-319-253, 712-319-249.
Э-почта: `journals@airi.uz`.
Веб-сайт: `https://journals.airi.uz`.

Дизайн и вёрстка:
Шарипов Х.Д.

Отпечатано в типографии НИИ РЦТИИ.
Подписано в печать 05.09.2024 г.
Формат 60x84 1/8. Заказ №5. Тираж 100 экз.

PROBLEMS OF COMPUTATIONAL AND APPLIED MATHEMATICS

No. 4/1(59) 2024

The journal was established in 2015.
6 issues are published per year.

Founder:
Digital Technologies and Artificial Intelligence Development Research Institute.

The journal is registered by Agency of Information and Mass Communications under the Administration of the President of the Republic of Uzbekistan.
The registration certificate No. 0856 of 5 August 2015.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

Address:
100125, Tashkent, Buz-2, 17A.
Tel.: +(998) 712-319-253, 712-319-249.
E-mail: `journals@airi.uz`.
Web-site: `https://journals.airi.uz`.

Layout design:
Sharipov Kh.D.

DTAIDRI printing office.
Signed for print 05.09.2024
Format 60x84 1/8. Order No. 5. Printed copies 100.

Профессор
ИСРАИЛОВ МАРУФ ИСРАИЛОВИЧ
(к 90-летию со дня рождения)

Маруф Исраилович Исраилов – известный ученый-математик, доктор физико-математических наук, профессор, крупный специалист в области теории чисел и вычислительной математики.

М.И. Исраилов родился 27 апреля 1934 года в городе Самарканде в семье ремесленника. В 1951 году с отличием окончив среднюю школу №16 г. Самарканда, поступил на физико-математический факультет Самаркандского государственного университета, который успешно окончил в 1956 г. С 1958 по 1961 годы проходил обучение в аспирантуре Института математики им. В.И. Романовского под руководством профессора Н.П. Романова. В 1966 году защитил кандидатскую диссертацию на тему «Проблема Тарри для быстрорастущих слагаемых и ее приложение к изучению эргодических сумм». В 1974 году М.И. Исраилову присвоено звание старшего научного сотрудника. В 1986 году М.И. Исраилов защитил докторскую диссертацию на тему «Асимптотические и точные формулы для аддитивных задач с растущим числом слагаемых», а в 1989 году получил звание профессора по специальности «Вычислительная математика».

После окончании аспирантуры М.И. Исраилов работал младшим научным сотрудником в Вычислительном центре Института математики АН РУз, затем с 1966 г. – старшим научным сотрудником. С 1976 года работал на должности заведующего лабораторией «Теория приближенного интегрирования» Института кибернетики с вычислительным центром. С 1984 г. и до 1995 г. – являлся заведующим отделом «Вычислительные методы» Института математики АН РУз. В том же 1995 году М.И. Исраилов приступил к работе в Самаркандском государственном университете в качестве заведующего кафедрой вычислительной математики.

Профессор М.И. Исраилов имел широкий диапазон научных интересов. Его глубокие исследования в областях аддитивных задач, построения общих арифметических ортогональных и биортогональных систем в гильбертовых пространствах; нахождения числа решений различных классов диофантовых уравнений, оценке тригонометрических сумм; построения оптимальных квадратурных и кубатурных формул в различных функциональных пространствах, а также приближенного решения регулярных и сингулярных интегральных уравнений внесли существенный вклад в развитие теории чисел и вычислительной математики. Результаты его работ успешно применяются в многочисленных прикладных задачах.

М.И. Исраилов впервые исследовал проблему Тарри для общих числовых последовательностей и применил к изучению эргодических сумм. Здесь он также решил известную проблему венгерского математика П. Эрдеша (об оценке снизу максимума модуля многочленов на единичной окружности) в обобщенной и уточненной постановке. М.И. Исраилову принадлежит всестороннее исследование аддитивных задач с растущим числом слагаемых. Он получил асимптотические разложения в проблеме Варинга с полиномиальными слагаемыми и в диофантовой системе Гильберта-Камке.

Им также найдена точная формула для числа решений линейных диофантовых уравнений общего вида. Эта формула нашла применение в теории инвариантных кубатурных формул академика С.Л.ЁСоболева и позволила сильно упростить исследование и построение таких формул на поверхности многомерных сфер и шаров.

Маруф Исраилович также внес существенный вклад в применение теоретико-числовых методов и методов сплайн-функций в вычислительной математике. Им построены оптимальные квадратурные и кубатурные формулы сингулярных интегралов с ядрами Гильберта и Коши, найдены приближенно-аналитические решения систем одномерных и многомерных интегральных уравнений с ядрами Фредгольма, Гильберта и Коши. Найдены оценки погрешности в различных часто встречающихся пространствах функций. Эти результаты имеют многочисленные применения в прикладных задачах, в частности в аэродинамике и гидродинамике. Характерной особенностью этого цикла исследований является новизна постановок задач и разработка новых методов их решения.

Отдельные результаты исследований М.И. Исраилова по теории дзета-функции Римана и проблеме делителей Дирихле вызвали большой резонанс среди специалистов за пределами нашей страны.

В Маруфе Исраиловиче гармонично сочетались способности крупного ученого, талантливого педагога и умелого руководителя крупных научных исследований. Он успешно сочетал плодотворную научную и научно-организаторскую деятельность с большой педагогической и общественной деятельностью. С 1967 г. М.И. Исраилов читал общие и специальные курсы на факультете прикладной математики Ташкентского государственного университета, а с 1995 по 2003 годы – в Самаркандском государственном университете, где до конца жизни продолжал активную научно-педагогическую деятельность в качестве почетного профессора-консультанта.

М.И. Исраилов с 1972 г. являлся членом двух специализированных советов по защите кандидатских и докторских диссертаций. С 1967 по 1995 годы руководил работой организованного им городского научного семинара «Применение теории чисел в вычислительной математике» при Институте кибернетики АН РУз и Институте математики АН РУз, а с 1995 года руководил научным семинаром «Приближенные методы высшего анализа» в СамГУ.

Работая в крупнейших ВУЗах и НИИ республики, Маруф Исраилович подготовил десятки учеников, успешно работающих в различных сферах экономики республики, в странах ближнего и дальнего зарубежья. М.И. Исраилов руководил работами магистрантов, аспирантов и докторантов. Под его руководством защищены более 10 кандидатских диссертаций, он способствовал защите трех докторских диссертаций. С 1993 г. М.И. Исраилов со своими докторантами, аспирантами и студентами вёл научные исследования в рамках проектов, имеющих фундаментальное значение и широкое прикладное применение.

Обычно будущих ученых Маруф Исраилович привлекал к науке со студенческой скамьи. Более того, он с аспирантских лет активно участвовал в поиске и формировании юных математических дарований в системе школьного образования. Будучи аспирантом и молодым ученым М.И. Исраилов преподавал в специализированной физико-математической школе №82 города Ташкента, организованной академиком В.К. Кабуловым. Многие ученики М.И. Исраилова из этой школы стали в последующем докторами наук и известными специалистами в своих отраслях. Подготовку математиков со школьной скамьи профессор М.И. Исраилов продолжил в физико-математическом лицее г. Самарканда, учащиеся которого регулярно занимали призовые места на различных международных математических олимпиадах. На протяжении всей педагогической деятельности своими научно-популярными статьями в энциклопедиях, в различных общественных и молодежных изданиях, ряде телепередач М.И. Исраилов умело и выверено формировал математическую культуру мышления у молодежи.

М.И. Исраилов – автор более 160 научных, 40 научно-популярных работ. Около 50 его научных статей опубликованы в авторитетных изданиях ближнего и дальнего зарубежья. Профессор М.И. Исраилов является автором широко известного двухтомного учебника по вычислительной математике «Хисоблаш методлари». Данная книга является единственным учебником подобного типа на узбекском языке и принята в качестве основного в ведущих университетах Узбекистана. Этот учебник написан на основе оригинальных лекций М.И. Исраилова, которые он читал на протяжении 40 лет в Национальном университете Узбекистана, Самаркандском государственном университете, на семинарах в Институте математики АН РУз. Также результатом многолетнего чтения лекций стал учебник по теории чисел «Сонлар назарияси» в соавторстве с профессором А. Солеевым.

М.И. Исраилов и его ученики участвовали с докладами во многих международных научных форумах. Он принимал участие в Международном конгрессе математиков, Всемирном конгрессе общества Бернулли и других. Был одним из активных организаторов всех международных конференций по теории кубатурных формул, проводимых в Узбекистане. Профессор М.И. Исраилов до последних дней оставался активным участником ежегодной Международной научно-практической конференции «Инновация». Являясь одним из бессменных руководителей секции «Математика. Математическое моделирование», М.И. Исраилов поддерживал высокий уровень научных изысканий и докладов конференции. М.И. Исраилов был членом редколлегии сборника «Вопросы вычислительной и прикладной математики», а также ответственным редактором сборников по вычислительной математике, выпускаемых в Институте математики АН РУз. А с 2001 года являлся членом редколлегии сборника научных статей Международной конференции «Инновация». Являлся членом Американского математического общества и экспертом международного журнала «Mathematical Reviews».

Маруфе Исраилович неоднократно награждался почетными грамотами Академии наук Республики Узбекистан.

В знак признания весомого многолетнего вклада профессора М.И. Исраилов в развитие математической науки и подготовку высококвалифицированных кадров в 2009 году Национальным университетом Узбекистана была проведена республиканская научная конференция «Вычислительные технологии и математическое моделирование», посвященная его 75-летию. В 2013 году проведен научный семинар «Профессор М.И. Исраилов и развитие прикладной математики в Узбекистане», в 2014 году состоялась научно-техническая конференция «Прикладная математика и информационная безопасность», посвященная 80-летию учёного. В текущем 2024 году в связи с 90-летием профессора М.И. Исраилова в НУУз организован международный научный семинар «Вычислительные модели и технологии (CMT2024)».

Созданная профессором М.И. Исраиловым научная школа по численным методам и в настоящее время продолжает продуктивно функционировать. Ученики и последователи Маруфа Исраиловича сегодня успешно работают в различных сферах и отраслях экономики нашей республики и за рубежом, продолжая дело своего Устоза-учителя.

Редакционная коллегия журнала «Проблемы вычислительной и прикладной математики» посвящает данный специальный выпуск светлой памяти профессора Маруфа Исраиловича Исраилова – выдающегося учёного, талантливого педагога, заботливого наставника и замечательного человека, который навсегда останется в памяти друзей, коллег и учеников.

Содержание

Contents