

УДК 519.653

ДИСКРЕТНАЯ СИСТЕМА ТИПА ВИНЕРА-ХОПФА ДЛЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ФОРМУЛ

^{1,2*} *Шадиметов Х.М., ²Атамуродова Б.М.*

*kholmatshadimetov@mail.ru

¹Ташкентский государственный транспортный университет,
1000167, Узбекистан, Ташкент, ул. Темирийулчилар 1;²Институт математики им. В.И. Романовского АН РУз,
100174, Узбекистан, г. Ташкент, ул. Университетская, д. 9.

В теории сплайнов существуют алгебраический и вариационный подходы. В алгебраическом подходе сплайны рассматриваются как некоторые гладкие кусочно-полиномиальные функции. В вариационном подходе сплайны понимаются как элементы гильбертова или банахова пространства, минимизирующие определенные функционалы. Затем изучаются проблемы существования, единственности и сходимости сплайнов и алгоритмы их построения на основе собственных свойств сплайнов. В настоящей работе изучается задача построения оптимальной интерполяционной формулы в гильбертовом пространстве. Здесь используя метод Соболева решена первая часть задачи, т.е. найдено явное выражение квадрата нормы функционала погрешности и получена система линейных алгебраических уравнений для коэффициентов оптимальной интерполяционной формулы.

Ключевые слова: Hilbert space, extremal function, error functional, interpolation formula.

Цитирование: Шадиметов Х.М., Атамуродова Б.М. Дискретная система типа Винера-Хопфа для коэффициентов интерполяционных формул // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2024. – № 4/1(59). – С. 64-73.

1 Введение и постановка задачи

Задача интерполяции является одной из самых распространенных задач в теории приближений. Классический метод ее решения заключается в построении интерполяционных полиномов. Однако интерполяционные полиномы имеют ряд недостатков при использовании их для функций с сингулярностями или для недостаточно гладких функций. Доказано, что последовательность интерполяционных полиномов Лагранжа, построенных для конкретной непрерывной функции, не сходится к самой функции. В связи с этим на практике вместо интерполяционных полиномов высокого порядка используются сплайн-функции.

Первые сплайновые функции формировались из отдельных кусков кубических полиномов. Затем это построение было преобразовано, была увеличена степень полинома, изменены граничные значения, но сама идея осталась не изменной. Следующим шагом в развитии теории сплайнов стал результат Д. Холлидея [1], связывающий кубический сплайн И. Шенберга с решением задачи нахождения минимума нормы функции из пространства $L_2^{(2)}$. Далее Карл Де Боор в работе [2] обобщил результат Д. Холлидея. Полученные результаты вызвали огромный интерес, в связи с чем появилось большое количество работ, в которых в зависимости от конкретных требований вариационный функционал подвергался изменениям. Теория сплайнов, основанная на вариационных методах, была изучена и получила развитие в работах Дж. Элберга, Э. Нельсона и Дж. Уолша [3], Р. Аркангели, Лопеса де Силаньес и

Дж.Дж. Торреса [4], М. Аттея [5], К. де Боора [2, 6], М.И. Игнатова и А.Б. Певного [7], П.Дж. Лоурента [8], Дж. Мاستроянни и Г.В. Миловановича [9], И.Я. Шенберга [10], Л. Л. Шумакера [11], С.Б. Стечкина и Ю.Н. Субботина [12], В.А. Василенко [13] и других. Вполне исчерпывающий список литературы по теории сплайновых функций можно найти, например, в [11].

Настоящая же работа посвящена получению систему алгебраических уравнений для нахождения оптимальных коэффициентов интерполяционных формул в гильбертовом пространстве $W_2^{(m,0)}(0,1)$.

Предположим, что нам дана таблица значений $\varphi(x_\beta), \beta = 0, 1, \dots, N$ функции φ в точках $x_\beta \in [0, 1]$. Требуется аппроксимировать функцию φ другой, более простой функцией P_φ , т. е.

$$\varphi(z) \cong P_\varphi(z) = \sum_{\beta=0}^N C_\beta(z) \varphi(x_\beta), \quad (1)$$

где $P_\varphi(z) = \sum_{\beta=0}^N C_\beta(z) \varphi(x_\beta)$ – интерполяционная формула и

$$\ell(x, z) = \delta(x - z) - \sum_{\beta=0}^N C_\beta(z) \delta(x - x_\beta), \quad (2)$$

– функционал погрешности этой интерполяционной формулы, $C_\beta(z)$ – коэффициенты, а x_β – узлы интерполяционной формулы $P_\varphi(z)$, $x_\beta \in [0, 1]$, $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака, функция $\varphi(x)$ принадлежит гильбертову пространству $W_2^{(m,0)}(0,1)$. Норма функций в этом пространстве определяется следующим образом

$$\|\varphi(x)\|_{W_2^{(m,0)}} = \left[\int_0^1 (\varphi^{(m)}(x) - \varphi(x))^2 dx \right]^{1/2}. \quad (3)$$

Погрешностью интерполяционной формулы (1) называется разность

$$(\ell, \varphi) = \varphi(z) - P_\varphi(z) = \varphi(z) - \sum_{\beta=0}^N C_\beta(z) \varphi(x_\beta). \quad (4)$$

По неравенству Коши-Шварца абсолютная погрешность (4) оценивается следующим образом

$$|(\ell, \varphi)| \leq \|\varphi\|_{W_2^{(m,0)}} \cdot \|\ell\|_{W_2^{(m,0)*}},$$

где

$$\|\ell\|_{W_2^{(m,0)*}} = \sup_{\varphi, \|\varphi\| \neq 0} \frac{|(\ell, \varphi)|}{\|\varphi\|_{W_2^{(m,0)}}}.$$

Поэтому для оценки погрешности интерполяционной формулы (1) по функциям пространства $W_2^{(m,0)}$ требуется найти норму функционала погрешности ℓ в сопряженном пространстве $W_2^{(m,0)*}$.

Отсюда мы получим

Задача 1. Найти норму функционала погрешности ℓ интерполяционной формулы (1) в пространстве $W_2^{(m,0)}$.

Ясно, что норма функционала погрешности ℓ зависит от коэффициентов $C_\beta(z)$ и узлов x_β . Задача минимизации величины $\|\ell\|$ по коэффициентам $C_\beta(z)$ является линейной задачей, а по узлам x_β , в общем случае, нелинейной и сложной задачей. Здесь мы рассматриваем задачу минимизации величины ℓ коэффициентами $C_\beta(z)$ при фиксированных узлах x_β .

Коэффициенты $\overset{\circ}{C}_\beta(z)$ (если они существуют), удовлетворяющие следующему равенству

$$\left\| \overset{\circ}{\ell} \right\|_{W_2^{(m,0)*}} = \inf_{C_\beta(z)} \|\ell\|_{W_2^{(m,0)*}}, \quad (5)$$

называются *оптимальными коэффициентами* и соответствующая им интерполяционная формула

$$\overset{\circ}{P}_\varphi(z) = \sum_{\beta=0}^N \overset{\circ}{C}_\beta(z) \varphi(x_\beta)$$

называется *оптимальной интерполяционной формулой* в пространстве $W_2^{(m,0)}$.

Таким образом, для построения оптимальной интерполяционной формулы вида (1) в пространстве $W_2^{(m,0)}$ нам необходимо решить следующую задачу.

Задача 2. Найти коэффициенты $\overset{\circ}{C}_\beta(z)$, удовлетворяющие равенству (5) при фиксированных узлах x_β .

Коэффициенты $\overset{\circ}{C}_\beta(z)$ и узлы x_β , удовлетворяющие равенству (5) называются *оптимальными коэффициентами и оптимальными узлами* интерполяционной формулы $P_\varphi(z)$.

В работе [14] получена система линейных алгебраических уравнений для оптимальных коэффициентов в гильбертовом пространстве.

Основной целью настоящей работы является построение оптимальных интерполяционных формул в пространстве $W_2^{(m,0)}$ и получить систему линейных алгебраических уравнений типа Винера-Хопфа для оптимальных коэффициентов.

2 Экстремальная функция. Норма функционала погрешности

В этом параграфе мы решаем задачу 1, т.е. находим явное выражение нормы функционала погрешности ℓ . Здесь мы будем использовать экстремальную функцию этого функционала.

Функция ψ_ℓ , для которой выполняется равенство

$$(\ell, \psi_\ell) = \|\ell\|_{W_2^{(m,0)*}} \cdot \|\psi_\ell\|_{W_2^{(m,0)}}, \quad (6)$$

называется *экстремальной функцией* функционала погрешности ℓ [15–17].

Поскольку $W_2^{(m,0)}$ – гильбертово пространство, то по теореме Рисса об общем виде линейного непрерывного функционала в гильбертовых пространствах, для функционала погрешности $\ell \in W_2^{(m,0)*}$ существует единственная функция $\psi_\ell \in W_2^{(m,0)}$ такая, что для любого $\varphi \in W_2^{(m,0)}$ выполняется равенство

$$(\ell, \varphi) = \langle \psi_\ell, \varphi \rangle_{W_2^{(m,0)}} \quad (7)$$

и $\|\ell\|_{W_2^{(m,0)*}} = \|\psi_\ell\|_{W_2^{(m,0)}}$, где $\langle \psi_\ell, \varphi \rangle_{W_2^{(m,0)}}$ – скалярное произведение двух функций ψ_ℓ и φ из пространства $W_2^{(m,0)}$. Напомним, что скалярное произведение $\langle \psi_\ell, \varphi \rangle_{W_2^{(m,0)}}$

определяется следующим образом

$$\langle \psi_\ell, \varphi \rangle_{W_2^{(m,0)}} = \int_0^1 \left(\psi_\ell^{(m)}(x) - \psi_\ell(x) \right) \left(\varphi^{(m)}(x) - \varphi(x) \right) dx.$$

В частности, из (7) при $\varphi = \psi_\ell$ имеем

$$(\ell, \psi_\ell) = \langle \psi_\ell, \psi_\ell \rangle_{W_2^{(m,0)}} = \|\psi_\ell\|_{W_2^{(m,0)}}^2 = \|\psi_\ell\|_{W_2^{(m,0)}} \cdot \|\ell\|_{W_2^{(m,0)*}} = \|\ell\|_{W_2^{(m,0)*}}^2.$$

Отсюда видно, что решение ψ_ℓ уравнения (7) удовлетворяет уравнению (6) и является экстремальной функцией. Таким образом, чтобы вычислить норму функционала погрешности ℓ , сначала нужно найти экстремальную функцию ψ_ℓ из уравнения (7), а затем вычислить квадрат нормы функционала погрешности ℓ следующим образом

$$\|\ell\|_{W_2^{(m,0)*}}^2 = (\ell, \psi_\ell). \quad (8)$$

$$\begin{aligned} (\ell, \varphi) &= \int_0^1 \left((-1)^m \psi_\ell^{(2m)}(x) - (-1)^m \psi_\ell^{(m)}(x) - \psi_\ell^{(m)}(x) + \psi_\ell(x) \right) \varphi(x) dx + \\ &+ \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i \left(\psi_\ell^{(m+i)}(x) - \psi_\ell^{(i)}(x) \right) \varphi^{(m-i-1)}(x) \Big|_0^1. \end{aligned} \quad (9)$$

Отсюда мы приходим к следующим двум случаям для нечетных и четных значений m , соответственно:

при m - нечетном

$$\begin{aligned} (\ell, \varphi) &= - \int_0^1 \left(\psi_\ell^{(2m)}(x) - \psi_\ell(x) \right) \varphi(x) dx + \\ &+ \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i \left(\psi_\ell^{(m+i)}(x) - \psi_\ell^{(i)}(x) \right) \varphi^{(m-i-1)}(x) \Big|_0^1. \end{aligned} \quad (10)$$

и при m - четном

$$\begin{aligned} (\ell, \varphi) &= \int_0^1 \left(\psi_\ell^{(2m)}(x) - 2\psi_\ell^{(m)}(x) + \psi_\ell(x) \right) \varphi(x) dx + \\ &+ \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i \left(\psi_\ell^{(m+i)}(x) - \psi_\ell^{(i)}(x) \right) \varphi^{(m-i-1)}(x) \Big|_0^1. \end{aligned} \quad (11)$$

Ясно, что для нахождения экстремальной функции ψ_ℓ необходимо рассматривать уравнения (10) и (11) в зависимости от соответствующих значений m .

Далее, мы предполагаем, что m - нечетное натуральное число. Отсюда, учитывая единственность функции ψ_ℓ получаем уравнение

$$\psi_\ell^{(2m)}(x) - \psi_\ell(x) = -\ell(x), \quad (12)$$

с краевыми условиями

$$\left[\left(\psi_\ell^{(m+i)}(x) - \psi_\ell^{(i)}(x) \right) \right] \Big|_{x=0}^{x=1} = 0, \quad i = \overline{0, m-1}. \quad (13)$$

Справедлива следующая.

Теорема 1. *Решение уравнения (12) с краевыми условиями (13) является экстремальной функцией $\psi_\ell(x)$ функционала погрешности ℓ интерполяционной формулы (1) и имеет вид:*

$$\psi_\ell(x) = -\ell(x) * G_m(x) + Y_m(x).$$

Здесь $G_m(x)$ - функция Грина, т.е. фундаментальное решение уравнения

$$G_m^{(2m)}(x) - G_m(x) = \delta(x), \quad (14)$$

и выражается следующим образом

$$G_m(x) = \frac{\text{sign}(x)}{2m} \left[\text{sh}(x) + \sum_{k=1}^{m-1} e^{x \cos(\frac{\pi k}{m})} \cos \left(x \sin \left(\frac{\pi k}{m} \right) + \frac{\pi k}{m} \right) \right], \quad (15)$$

а

$$Y_m(x) = d_0 e^x + \sum_{k=1}^{\frac{m-1}{2}} e^{x \cos(\frac{2\pi k}{m})} \left[d_{1,k} \cos \left(x \sin \left(\frac{2\pi k}{m} \right) \right) + d_{2,k} \sin \left(x \sin \left(\frac{2\pi k}{m} \right) \right) \right], \quad (16)$$

где $d_0, d_{1,k}$ и $d_{2,k}$ - некоторые константы.

Доказательство теоремы 1 доказывается аналогично доказательству теоремы, изложенному в [18]. Поэтому мы не будем приводить доказательство теоремы 1.

Так как функционал погрешности ℓ определен в пространстве $W_2^{(m,0)}$, должны выполняться следующие условия

$$(\ell, e^x) = 0, \quad (17)$$

$$\left(\ell, e^{x \cos \frac{2\pi k}{m}} \cos \left(x \sin \frac{2\pi k}{m} \right) \right) = 0, \quad k = 1, \overline{\frac{m-1}{2}}, \quad (18)$$

$$\left(\ell, e^{x \cos \frac{2\pi k}{m}} \sin \left(x \sin \frac{2\pi k}{m} \right) \right) = 0, \quad k = 1, \overline{\frac{m-1}{2}}. \quad (19)$$

Равенства (17) - (19) означают, что полученная нами интерполяционная формула $P_\varphi(z)$ будет точна для функций e^x , $e^{x \cos \frac{2\pi k}{m}} \cos \left(x \sin \frac{2\pi k}{m} \right)$ и $e^{x \cos \frac{2\pi k}{m}} \sin \left(x \sin \frac{2\pi k}{m} \right)$.

Далее, мы предполагаем, что m - четное натуральное число. Отсюда, учитывая единственность функции ψ_ℓ получаем уравнение

$$\psi_\ell^{(2m)}(x) - 2\psi_\ell^{(m)}(x) + \psi_\ell(x) = \ell(x), \quad (20)$$

с краевыми условиями

$$\left[\left(\psi_\ell^{(m+i)}(x) - \psi_\ell^{(i)}(x) \right) \right] \Big|_{x=0}^{x=1} = 0, \quad i = \overline{0, m-1}. \quad (21)$$

Справедлива следующая.

Теорема 2. *Решение уравнения (20) с краевыми условиями (21) является экстремальной функцией $\psi_\ell(x)$ функционала погрешности ℓ интерполяционной формулы (1) и имеет вид:*

$$\psi_\ell(x) = \ell(x) * G_m(x) + Y_m(x),$$

где

$$\begin{aligned} G_m(x) = & \frac{\text{sign}(x)}{2m^2} \sum_{k=1}^m \left[(1-m)e^{x \cos \frac{2\pi k}{m}} \cos \left(x \sin \left(\frac{2\pi k}{m} \right) + \frac{2\pi k}{m} \right) + \right. \\ & \left. + x e^{x \cos \frac{2\pi k}{m}} \cos \left(x \sin \left(\frac{2\pi k}{m} \right) + \frac{4\pi k}{m} \right) \right], \end{aligned} \quad (22)$$

удовлетворяет равенству

$$G_m^{(2m)}(x) - 2G_m^{(m)}(x) + G_m(x) = \delta(x), \quad (23)$$

а

$$Y_m(x) = \sum_{k=1}^{\frac{m}{2}} e^{x \cos \frac{2\pi k}{m}} \left[r_{1,k} \cos \left(x \sin \frac{2\pi k}{m} \right) + r_{2,k} \sin \left(x \sin \frac{2\pi k}{m} \right) \right], \quad (24)$$

где $r_{1,k}$ и $r_{2,k}$ - некоторые константы.

Доказательство теоремы 2.

Известно, что общее решение неоднородного дифференциального уравнения состоит из суммы частного решения неоднородного дифференциального уравнения и общего решения соответствующего однородного дифференциального уравнения.

Однородное уравнение для дифференциального уравнения (20) имеет вид

$$\psi_\ell^{(2m)}(x) - 2\psi_\ell^{(m)}(x) + \psi_\ell(x) = 0. \quad (25)$$

Легко показать, что общее решение уравнения (25) это

$$Y_m(x) + x \cdot \sum_{k=1}^{\frac{m}{2}} e^{x \cos \frac{2\pi k}{m}} \left[r_{3,k} \cos \left(x \sin \frac{2\pi k}{m} \right) + r_{4,k} \sin \left(x \sin \frac{2\pi k}{m} \right) \right]. \quad (26)$$

Нетрудно проверить, что частное решение дифференциального уравнения (20) это

$$\ell(x) * G_m(x), \quad (27)$$

где $G_m(x)$ — фундаментальное решение уравнения (23) и определяется равенством (22), $*$ — операция свёртки и свёртка двух функций определяется следующим образом

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y) dy.$$

Правило нахождения фундаментального решения дифференциального оператора $L \equiv \frac{d^n}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \dots + a_n$, где a_j — постоянные, приведено в книге [19]. Используя это правило, нами найдена функция $G_m(x)$ имеющая вид (22), которая является фундаментальным решением оператора $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}} - 2\frac{d^m}{dx^m} + 1$.

Таким образом, мы имеем следующее общее решение уравнения (20)

$$\begin{aligned} \psi_\ell(x) = & \ell(x) * G_m(x) + Y_m(x) + \\ & + x \cdot \sum_{k=1}^{\frac{m}{2}} e^{x \cos \frac{2\pi k}{m}} \left[r_{3,k} \cos \left(x \sin \frac{2\pi k}{m} \right) + r_{4,k} \sin \left(x \sin \frac{2\pi k}{m} \right) \right]. \end{aligned} \quad (28)$$

где $r_{1,k}$, $r_{2,k}$, $r_{3,k}$ и $r_{4,k}$ - константы.

Для того, чтобы в пространстве $W_2^{(m,0)}(0,1)$ функция ψ_ℓ была единственной, она должна удовлетворять условиям (21). Здесь производные понимаются в обобщенном смысле. Из условия (21) при $i = \overline{0, m-1}$ и $x = 0, x = 1$ мы получаем однородную систему $2m$ линейных уравнений с $2m$ неизвестными. Решение этой системы будет

$$\left(\ell, e^{x \cos \frac{2\pi k}{m}} \cos \left(x \sin \frac{2\pi k}{m} \right) \right) = 0, \quad k = \overline{1, \frac{m}{2}}, \quad (29)$$

$$\left(\ell, e^{x \cos \frac{2\pi k}{m}} \sin \left(x \sin \frac{2\pi k}{m} \right) \right) = 0, \quad k = \overline{1, \frac{m}{2}}, \quad (30)$$

$$r_{3,k} = 0, \quad r_{4,k} = 0, \quad k = \overline{1, \frac{m}{2}}. \quad (31)$$

Таким образом, учитывая (29) - (30), из (28) получаем утверждение теоремы. Теорема 2 доказана.

Равенства (29) - (30), полученные при доказательстве теоремы 2, означают, что наша интерполяционная формула точна на функциях $e^{x \cos \frac{2\pi k}{m}} \cos \left(x \sin \frac{2\pi k}{m} \right)$ и $e^{x \cos \frac{2\pi k}{m}} \sin \left(x \sin \frac{2\pi k}{m} \right)$.

Теперь, учитывая равенство (8) и используя теорему 1 и теорему 2, мы вычислим норму функционала погрешности. Для квадрата нормы функционала погрешности ℓ , с учетом (17) - (19) и (29) - (30) из равенства (8) имеем

$$\begin{aligned} \|\ell\|_{W_2^{(m,0)*}}^2 = (\ell, \psi_\ell) &= \int_{-\infty}^{\infty} \ell(x) \psi_\ell(x) dx = (-1)^m \int_{-\infty}^{\infty} \ell(x) (G_m(x-z) - \\ &- \sum_{\beta=0}^N C_\beta(z) G_m(x-x_\beta) + Y_m(x)) dx = (-1)^m \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} \left(\delta(x-z) - \sum_{\beta=0}^N C_\beta(z) \delta(x-x_\beta) \right) \left(G_m(x-z) - \sum_{\beta=0}^N C_\beta(z) G_m(x-x_\beta) \right) dx. \end{aligned}$$

Отсюда, имея в виду четность функции $G_m(x)$, имеем

$$\|\ell\|_{W_2^{(m,0)*}}^2 = (-1)^m \left[2 \sum_{\beta=0}^N C_\beta(z) G_m(z-x_\beta) - \sum_{\beta=0}^N \sum_{\gamma=0}^N C_\beta(z) C_\gamma(z) G_m(x_\beta-x_\gamma) \right]. \quad (32)$$

Таким образом, задача 1 решена.

3 Система для коэффициентов оптимальных интерполяционных формул

Задача 2 в такой общей постановке довольно сложна. Минимизация нормы функционала погрешности по коэффициентам $C_\beta(z)$ это линейная задача, а по узлам x_β

вообще-то нелинейная. Поэтому для упрощения мы рассмотрим задачу 2 при фиксированных узлах x_β .

Пусть узлы x_β интерполяционной формулы $P_\varphi(z)$ фиксированы. Функционал погрешности (2) удовлетворяет условиям (17)-(19) и (29)-(30). Норма функционала погрешности ℓ является многомерной функцией коэффициентов $C_\beta(z)$ ($\beta = \overline{0, N}$). Для нахождения условного минимума квадрата нормы функционала погрешности (2) при условиях (17)-(19) и (29)-(30) применяем метод неопределенных множителей Лагранжа. Для этого составим функцию Лагранжа при m -нечетном имея в виду условия (17)-(19):

$$\begin{aligned} \Psi(C_0(z), \dots, C_N(z), d_0(z), d_{1,k}(z), d_{2,k}(z)) = & \|\ell\|^2 - 2d_0(z) \left(e^z - \sum_{\beta=0}^N C_\beta(z) e^{x_\beta} \right) - \\ & - 2d_{1,k}(z) \left[e^{z \cos \frac{2\pi k}{m}} \cos \left(z \sin \frac{2\pi k}{m} \right) - \sum_{\beta=0}^N C_\beta(z) e^{x_\beta \cos \frac{2\pi k}{m}} \cos \left(x_\beta \sin \frac{2\pi k}{m} \right) \right] - \\ & - 2d_{2,k}(z) \left[e^{z \cos \frac{2\pi k}{m}} \sin \left(z \sin \frac{2\pi k}{m} \right) - \sum_{\beta=0}^N C_\beta(z) e^{x_\beta \cos \frac{2\pi k}{m}} \sin \left(x_\beta \sin \frac{2\pi k}{m} \right) \right]. \end{aligned}$$

Приравнявая к нулю частные производные от Ψ по коэффициентам $C_\beta(z)$ ($\beta = \overline{0, N}$), $d_0(z)$, $d_{1,k}(z)$, $d_{2,k}(z)$ ($k = 1, \frac{m-1}{2}$) получаем систему линейных уравнений

$$\begin{aligned} \sum_{\gamma=0}^N C_\gamma(z) G_m(x_\beta - x_\gamma) + d_0(z) e^{x_\beta} + d_{1,k}(z) e^{x_\beta \cos \frac{2\pi k}{m}} \cos \left(x_\beta \sin \frac{2\pi k}{m} \right) + \\ + d_{2,k}(z) e^{x_\beta \cos \frac{2\pi k}{m}} \sin \left(x_\beta \sin \frac{2\pi k}{m} \right) = G_m(z - x_\beta), \quad \beta = \overline{0, N}, \end{aligned} \quad (33)$$

$$\sum_{\gamma=0}^N C_\gamma(z) e^{x_\gamma} = e^z, \quad (34)$$

$$\sum_{\gamma=0}^N C_\gamma(z) e^{x_\gamma \cos \frac{2\pi k}{m}} \cos \left(x_\gamma \sin \frac{2\pi k}{m} \right) = e^{z \cos \frac{2\pi k}{m}} \cos \left(z \sin \frac{2\pi k}{m} \right), \quad (35)$$

$$\sum_{\gamma=0}^N C_\gamma(z) e^{x_\gamma \cos \frac{2\pi k}{m}} \sin \left(x_\gamma \sin \frac{2\pi k}{m} \right) = e^{z \cos \frac{2\pi k}{m}} \sin \left(z \sin \frac{2\pi k}{m} \right). \quad (36)$$

Система (33) - (36) имеет единственное решение. Доказательство единственности решения системы (33) - (36) аналогично доказательству единственности решения системы для оптимальных коэффициентов в пространстве $L_2^{(m)}$, полученных в работах Соболева [16, 17].

Далее, мы предполагаем, что m - четное натуральное число. Отсюда, учитывая условия (29)-(30) составим функцию Лагранжа:

$$\begin{aligned} \Psi(C_0(z), C_1(z), \dots, C_N(z), r_{1,k}(z), r_{2,k}(z)) = & \|\ell\|^2 - \\ & - 2r_{1,k}(z) \left[e^{z \cos \frac{2\pi k}{m}} \cos \left(z \sin \frac{2\pi k}{m} \right) - \sum_{\beta=0}^N C_\beta(z) e^{x_\beta \cos \frac{2\pi k}{m}} \cos \left(x_\beta \sin \frac{2\pi k}{m} \right) \right] - \\ & - 2r_{2,k}(z) \left[e^{z \cos \frac{2\pi k}{m}} \sin \left(z \sin \frac{2\pi k}{m} \right) - \sum_{\beta=0}^N C_\beta(z) e^{x_\beta \cos \frac{2\pi k}{m}} \sin \left(x_\beta \sin \frac{2\pi k}{m} \right) \right]. \end{aligned} \quad (37)$$

Приравнивая к нулю частные производные от Ψ по коэффициентам $C_\beta(z)$ ($\beta = \overline{0, N}$), $r_{1,k}(z)$, $r_{2,k}(z)$ ($k = \overline{1, \frac{m}{2}}$) получаем систему линейных уравнений

$$\sum_{\gamma=0}^N C_\gamma(z) G_m(x_\beta - x_\gamma) + r_{1,k}(z) e^{x_\beta \cos \frac{2\pi k}{m}} \cos \left(x_\beta \sin \frac{2\pi k}{m} \right) + \\ + r_{2,k}(z) e^{x_\beta \cos \frac{2\pi k}{m}} \sin \left(x_\beta \sin \frac{2\pi k}{m} \right) = G_m(z - x_\beta), \quad \beta = \overline{0, N}, \quad (38)$$

$$\sum_{\gamma=0}^N C_\gamma(z) e^{x_\gamma \cos \frac{2\pi k}{m}} \cos \left(x_\gamma \sin \frac{2\pi k}{m} \right) = e^{z \cos \frac{2\pi k}{m}} \cos \left(z \sin \frac{2\pi k}{m} \right), \quad (39)$$

$$\sum_{\gamma=0}^N C_\gamma(z) e^{x_\gamma \cos \frac{2\pi k}{m}} \sin \left(x_\gamma \sin \frac{2\pi k}{m} \right) = e^{z \cos \frac{2\pi k}{m}} \sin \left(z \sin \frac{2\pi k}{m} \right). \quad (40)$$

Система (38) - (40) имеет единственное решение. Доказательство единственности решения системы (38) - (40) аналогично доказательству единственности решения системы для оптимальных коэффициентов в пространстве $L_2^{(m)}$, полученных в работах Соболева [16, 17].

4 Заключение

Таким образом, в настоящей работе мы с использованием метода Соболева решили первую часть задачи, т.е. нашли явное выражение квадрата нормы функционала погрешности. Для нахождения условного минимума квадрата нормы функционала погрешности (2) при условиях (17) - (19) и (29) - (30) применяя метод неопределенных множителей Лагранжа и приравнивая к нулю частные производные от (33) и (37) по коэффициентам $C_\beta(z)$ ($\beta = \overline{0, N}$), $d_{1,k}(z)$, $d_{2,k}(z)$ ($k = \overline{1, \frac{m-1}{2}}$) и $r_{1,k}(z)$, $r_{2,k}(z)$ ($k = \overline{1, \frac{m}{2}}$) мы получили систему линейных алгебраических уравнений для коэффициентов оптимальных интерполяционных формул в гильбертовом пространстве $W_2^{(m,0)}(0, 1)$.

Литература

- [1] Holladay J.C. Smoothest curve approximation. Math. Tables Aids Comput. – vol. 11. – 1957. – P. 223–243.
- [2] de Boor C. Best approximation properties of spline functions of odd degree. J. Math. Mech. – 1963. – vol.12. – P. 747–749.
- [3] Ahlberg J.H., Nilson E.N., Walsh J.L. The theory of splines and their applications. New York: Academic Press, – 1967. – 316 p.
- [4] Arcangeli R., Lopez de Silanes M.C., Torrens J.J. Multidimensional minimizing splines. Boston: Kluwer Academic publishers, – 2004. – 278 p.
- [5] Attea M. Hilbertian kernels and spline functions. North-Holland, – 1992. – 393 p.
- [6] de Boor C. A practical guide to splines. Springer, – 1978. – 342 p.
- [7] Игнатъев М.И., Певний А.Б. Натуральные сплайны многих переменных. М.: Наука, – 1991. – 154 с.
- [8] Лоран П.Ж. Аппроксимация и оптимизация. М.: Мир, – 1975. – 496 с.
- [9] Mastroianni G., Milovanović G.V. Interpolation processes. Basic theory and applications. – Berlin: Springer, – 2008. – 262 p.

- [10] *Schoenberg I.J.* On trigonometric spline interpolation. J. Math. Mech. – 1964. – vol. 13. – P. 795–825.
- [11] *Schumaker L.L.* Spline functions: basic theory. Cambridge Univ. Press, – 2007. – 600 p.
- [12] *Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н.* Сплайны в вычислительной математике. М.: Наука, – 1976. – 248 с.
- [13] *Василенко В. А.* Сплайн-функции: теория, алгоритмы, программы. Н.: Наука, – 1983. – 215 с.
- [14] *Болтаев А.К., Шоназаров С.К.* Система для нахождения оптимальных коэффициентов интерполяционных формул. Проблемы вычислительной и прикладной математики. Ташкент, – 2022. – № 5/1(44) – С. 54–63.
- [15] *Соболев С.Л.* Введение в теорию кубатурных формул. М. Наука, – 1974. – 808 с.
- [16] *Sobolev S.L.* The coefficients of optimal quadrature formulas, in: Selected works of S.L.Sobolev. Springer US, – 2006. – P. 561–566.
- [17] *Соболев С.Л., Васкевич В.Л.* Теория кубатурных формул. СО АН России. Новосибирск, – 1996. – 484 с.
- [18] *Shadimetov Kh.M., Boltaev A.K.* Optimal interpolation formulas on classes of differentiable functions. Uzbek Mathematical Journal. – 2021. – Vol.65. – Issue 4. – P. 166–74.
- [19] *Владимиров В.С.* Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, – 1979. – 320 с.

Поступила в редакцию 08.08.2024

UDC 519.653

DISCRETE SYSTEM OF WIENER–HOPF TYPE FOR COEFFICIENTS OF INTERPOLATION FORMULAS

^{1,2*}*Shadimetov Kh.M.*, ²*Atamuradova B.M.*

*kholmatshadimetov@mail.ru

¹Tashkent State Transport University,

1, Temiryulchilar str., Tashkent, 100167 Uzbekistan;

²V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, AS RUZ,

9, University str., Tashkent, 100174 Uzbekistan.

There are algebraic and variational approaches of construction in the spline theory. In algebraic approach splines are considered as some smooth piecewise polynomial functions. In the variational approach splines are elements of Hilbert or Banach spaces minimizing certain functionals. Then we study the problems of existence, uniqueness, and convergence of splines and algorithms for constructing them based on their own properties of splines. In this paper, we study the problem of constructing an optimal interpolation formula in a Hilbert space. Here, using the Sobolev method, the first part of the problem is solved, i.e. an explicit expression of the square of the norm of the error functional is found and a system of linear algebraic equations for the coefficients of the optimal interpolation formula is obtained.

Citation: Shadimetov Kh.M., Atamuradova B.M. 2024. Discrete system of Wiener–Hopf type for coefficients of interpolation formulas. *Problems of Computational and Applied Mathematics*.4/1(59): 64–73.

ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

№ 4/1(59) 2024

Журнал основан в 2015 году.

Издается 6 раз в год.

Учредитель:

Научно-исследовательский институт развития цифровых технологий и
искусственного интеллекта.

Главный редактор:

Равшанов Н.

Заместители главного редактора:

Азамов А.А., Арипов М.М., Шадиметов Х.М.

Ответственный секретарь:

Ахмедов Д.Д.

Редакционный совет:

Азамова Н.А., Алоев Р.Д., Амиргалиев Е.Н. (Казахстан), Бурнашев В.Ф.,
Загребина С.А. (Россия), Задорин А.И. (Россия), Игнатъев Н.А.,
Ильин В.П. (Россия), Исмагилов И.И. (Россия), Кабанихин С.И. (Россия),
Карачик В.В. (Россия), Курбонов Н.М., Маматов Н.С., Мирзаев Н.М.,
Мирзаева Г.Р., Мухамадиев А.Ш., Назирова Э.Ш., Нормуродов Ч.Б.,
Нуралиев Ф.М., Опанасенко В.Н. (Украина), Расулмухамедов М.М., Расулов А.С.,
Садуллаева Ш.А., Старовойтов В.В. (Беларусь), Хаётов А.Р., Халджигитов А.,
Хамдамов Р.Х., Хужаев И.К., Хужаеров Б.Х., Чье Ен Ун (Россия),
Шабозов М.Ш. (Таджикистан), Dimov I. (Болгария), Li Y. (США),
Mascagni M. (США), Min A. (Германия), Schaumburg H. (Германия),
Singh D. (Южная Корея), Singh M. (Южная Корея).

Журнал зарегистрирован в Агентстве информации и массовых коммуникаций при
Администрации Президента Республики Узбекистан.

Регистрационное свидетельство №0856 от 5 августа 2015 года.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

При перепечатке материалов ссылка на журнал обязательна.

За точность фактов и достоверность информации ответственность несут авторы.

Адрес редакции:

100125, г. Ташкент, м-в. Буз-2, 17А.

Тел.: +(998) 712-319-253, 712-319-249.

Э-почта: journals@airi.uz.

Веб-сайт: <https://journals.airi.uz>.

Дизайн и вёрстка:

Шарипов Х.Д.

Отпечатано в типографии НИИ РЦТИИ.

Подписано в печать 05.09.2024 г.

Формат 60x84 1/8. Заказ №5. Тираж 100 экз.

PROBLEMS OF COMPUTATIONAL AND APPLIED MATHEMATICS

No. 4/1(59) 2024

The journal was established in 2015.
6 issues are published per year.

Founder:

Digital Technologies and Artificial Intelligence Development Research Institute.

Editor-in-Chief:

Ravshanov N.

Deputy Editors:

Azamov A.A., Aripov M.M., Shadimetov Kh.M.

Executive Secretary:

Akhmedov D.D.

Editorial Council:

Azamova N.A., Alov R.D., Amirgaliev E.N. (Kazakhstan), Burnashev V.F.,
Zagrebina S.A. (Russia), Zadorin A.I. (Russia), Ignatiev N.A., Ilyin V.P. (Russia),
Ismagilov I.I. (Russia), Kabanikhin S.I. (Russia), Karachik V.V. (Russia), Kurbonov
N.M., Mamatov N.S., Mirzaev N.M., Mirzaeva G.R., Mukhamadiev A.Sh., Nazirova
E.Sh., Normurodov Ch.B., Nuraliev F.M., Opanasenko V.N. (Ukraine), Rasulov A.S.,
Sadullaeva Sh.A., Starovoitov V.V. (Belarus), Khayotov A.R., Khaldjigitov A.,
Khamdamov R.Kh., Khujaev I.K., Khujayorov B.Kh., Chye En Un (Russia),
Shabozov M.Sh. (Tajikistan), Dimov I. (Bulgaria), Li Y. (USA), Mascagni M. (USA),
Min A. (Germany), Schaumburg H. (Germany), Singh D. (South Korea),
Singh M. (South Korea).

The journal is registered by Agency of Information and Mass Communications under the
Administration of the President of the Republic of Uzbekistan.

The registration certificate No. 0856 of 5 August 2015.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

At a reprint of materials the reference to the journal is obligatory.

Authors are responsible for the accuracy of the facts and reliability of the information.

Address:

100125, Tashkent, Buz-2, 17A.

Tel.: +(998) 712-319-253, 712-319-249.

E-mail: journals@airi.uz.

Web-site: <https://journals.airi.uz>.

Layout design:

Sharipov Kh.D.

DTAIDRI printing office.

Signed for print 05.09.2024

Format 60x84 1/8. Order No. 5. Printed copies 100.



**Профессор
ИСРАИЛОВ МАРУФ ИСРАИЛОВИЧ**
(к 90-летию со дня рождения)

Маруф Исраилович Исраилов – известный ученый-математик, доктор физико-математических наук, профессор, крупный специалист в области теории чисел и вычислительной математики.

М.И. Исраилов родился 27 апреля 1934 года в городе Самарканде в семье ремесленника. В 1951 году с отличием окончив среднюю школу №16 г. Самарканда, поступил на физико-математический факультет Самаркандского государственного университета, который успешно окончил в 1956 г. С 1958 по 1961 годы проходил обучение в аспирантуре Института математики им. В.И. Романовского под руководством профессора Н.П. Романова. В 1966 году защитил кандидатскую диссертацию на тему «Проблема Тарри для быстрорастущих слагаемых и ее приложение к изучению эргодических сумм». В 1974 году М.И. Исраилову присвоено звание старшего научного сотрудника. В 1986 году М.И. Исраилов защитил докторскую диссертацию на тему «Асимптотические и точные формулы для аддитивных задач с растущим числом слагаемых», а в 1989 году получил звание профессора по специальности «Вычислительная математика».

После окончания аспирантуры М.И. Исраилов работал младшим научным сотрудником в Вычислительном центре Института математики АН РУз, затем с 1966 г. – старшим научным сотрудником. С 1976 года работал на должности заведующего лабораторией «Теория приближенного интегрирования» Института кибернетики с вычислительным центром. С 1984 г. и до 1995 г. – являлся заведующим отделом «Вычислительные методы» Института математики АН РУз. В том же 1995 году М.И. Исраилов приступил к работе в Самаркандском государственном университете в качестве заведующего кафедрой вычислительной математики.

Профессор М.И. Исраилов имел широкий диапазон научных интересов. Его глубокие исследования в областях аддитивных задач, построения общих арифметиче-

ских ортогональных и биортогональных систем в гильбертовых пространствах; нахождения числа решений различных классов диофантовых уравнений, оценке тригонометрических сумм; построения оптимальных квадратурных и кубатурных формул в различных функциональных пространствах, а также приближенного решения регулярных и сингулярных интегральных уравнений внесли существенный вклад в развитие теории чисел и вычислительной математики. Результаты его работ успешно применяются в многочисленных прикладных задачах.

М.И. Исраилов впервые исследовал проблему Тарри для общих числовых последовательностей и применил к изучению эргодических сумм. Здесь он также решил известную проблему венгерского математика П. Эрдеша (об оценке снизу максимума модуля многочленов на единичной окружности) в обобщенной и уточненной постановке. М.И. Исраилову принадлежит всестороннее исследование аддитивных задач с растущим числом слагаемых. Он получил асимптотические разложения в проблеме Варинга с полиномиальными слагаемыми и в диофантовой системе Гильберта-Камке.

Им также найдена точная формула для числа решений линейных диофантовых уравнений общего вида. Эта формула нашла применение в теории инвариантных кубатурных формул академика С.Л.Ёсоболева и позволила сильно упростить исследование и построение таких формул на поверхности многомерных сфер и шаров.

Маруф Исраилович также внес существенный вклад в применение теоретико-числовых методов и методов сплайн-функций в вычислительной математике. Им построены оптимальные квадратурные и кубатурные формулы сингулярных интегралов с ядрами Гильберта и Коши, найдены приближенно-аналитические решения систем одномерных и многомерных интегральных уравнений с ядрами Фредгольма, Гильберта и Коши. Найдены оценки погрешности в различных часто встречающихся пространствах функций. Эти результаты имеют многочисленные применения в прикладных задачах, в частности в аэродинамике и гидродинамике. Характерной особенностью этого цикла исследований является новизна постановок задач и разработка новых методов их решения.

Отдельные результаты исследований М.И. Исраилова по теории дзета-функции Римана и проблеме делителей Дирихле вызвали большой резонанс среди специалистов за пределами нашей страны.

В Маруфе Исраиловиче гармонично сочетались способности крупного ученого, талантливого педагога и умелого руководителя крупных научных исследований. Он успешно сочетал плодотворную научную и научно-организаторскую деятельность с большой педагогической и общественной деятельностью. С 1967 г. М.И. Исраилов читал общие и специальные курсы на факультете прикладной математики Ташкентского государственного университета, а с 1995 по 2003 годы – в Самаркандском государственном университете, где до конца жизни продолжал активную научно-педагогическую деятельность в качестве почетного профессора-консультанта.

М.И. Исраилов с 1972 г. являлся членом двух специализированных советов по защите кандидатских и докторских диссертаций. С 1967 по 1995 годы руководил работой организованного им городского научного семинара «Применение теории чисел в вычислительной математике» при Институте кибернетики АН РУз и Институте математики АН РУз, а с 1995 года руководил научным семинаром «Приближенные методы высшего анализа» в СамГУ.

Работая в крупнейших ВУЗах и НИИ республики, Маруф Исраилович подготовил десятки учеников, успешно работающих в различных сферах экономики республи-

ки, в странах ближнего и дальнего зарубежья. М.И. Исраилов руководил работами магистрантов, аспирантов и докторантов. Под его руководством защищены более 10 кандидатских диссертаций, он способствовал защите трех докторских диссертаций. С 1993 г. М.И. Исраилов со своими докторантами, аспирантами и студентами вел научные исследования в рамках проектов, имеющих фундаментальное значение и широкое прикладное применение.

Обычно будущих ученых Маруф Исраилович привлекал к науке со студенческой скамьи. Более того, он с аспирантских лет активно участвовал в поиске и формировании юных математических дарований в системе школьного образования. Будучи аспирантом и молодым ученым М.И. Исраилов преподавал в специализированной физико-математической школе №82 города Ташкента, организованной академиком В.К. Кабуловым. Многие ученики М.И. Исраилова из этой школы стали в последующем докторами наук и известными специалистами в своих отраслях. Подготовку математиков со школьной скамьи профессор М.И. Исраилов продолжил в физико-математическом лицее г. Самарканда, учащиеся которого регулярно занимали призовые места на различных международных математических олимпиадах. На протяжении всей педагогической деятельности своими научно-популярными статьями в энциклопедиях, в различных общественных и молодежных изданиях, ряде телепередач М.И. Исраилов умело и выверено формировал математическую культуру мышления у молодежи.

М.И. Исраилов – автор более 160 научных, 40 научно-популярных работ. Около 50 его научных статей опубликованы в авторитетных изданиях ближнего и дальнего зарубежья. Профессор М.И. Исраилов является автором широко известного двухтомного учебника по вычислительной математике «Хисоблаш методлари». Данная книга является единственным учебником подобного типа на узбекском языке и принята в качестве основного в ведущих университетах Узбекистана. Этот учебник написан на основе оригинальных лекций М.И. Исраилова, которые он читал на протяжении 40 лет в Национальном университете Узбекистана, Самаркандском государственном университете, на семинарах в Институте математики АН РУз. Также результатом многолетнего чтения лекций стал учебник по теории чисел «Сонлар назарияси» в соавторстве с профессором А. Солеевым.

М.И. Исраилов и его ученики участвовали с докладами во многих международных научных форумах. Он принимал участие в Международном конгрессе математиков, Всемирном конгрессе общества Бернулли и других. Был одним из активных организаторов всех международных конференций по теории кубатурных формул, проводимых в Узбекистане. Профессор М.И. Исраилов до последних дней оставался активным участником ежегодной Международной научно-практической конференции «Инновация». Являясь одним из бессменных руководителей секции «Математика. Математическое моделирование», М.И. Исраилов поддерживал высокий уровень научных изысканий и докладов конференции. М.И. Исраилов был членом редколлегии сборника «Вопросы вычислительной и прикладной математики», а также ответственным редактором сборников по вычислительной математике, выпускаемых в Институте математики АН РУз. А с 2001 года являлся членом редколлегии сборника научных статей Международной конференции «Инновация». Являлся членом Американского математического общества и экспертом международного журнала «Mathematical Reviews».

Маруфе Исраилович неоднократно награждался почетными грамотами Академии наук Республики Узбекистан.

В знак признания весомого многолетнего вклада профессора М.И. Исраилов в развитие математической науки и подготовку высококвалифицированных кадров в 2009 году Национальным университетом Узбекистана была проведена республиканская научная конференция «Вычислительные технологии и математическое моделирование», посвященная его 75-летию. В 2013 году проведен научный семинар «Профессор М.И. Исраилов и развитие прикладной математики в Узбекистане», в 2014 году состоялась научно-техническая конференция «Прикладная математика и информационная безопасность», посвященная 80-летию учёного. В текущем 2024 году в связи с 90-летием профессора М.И. Исраилова в НУУз организован международный научный семинар «Вычислительные модели и технологии (СМТ2024)».

Созданная профессором М.И. Исраиловым научная школа по численным методам и в настоящее время продолжает продуктивно функционировать. Ученики и последователи Маруфа Исраиловича сегодня успешно работают в различных сферах и отраслях экономики нашей республики и за рубежом, продолжая дело своего Устога-учителя.

Редакционная коллегия журнала «Проблемы вычислительной и прикладной математики» посвящает данный специальный выпуск светлой памяти профессора Маруфа Исраиловича Исраилова – выдающегося учёного, талантливого педагога, заботливого наставника и замечательного человека, который навсегда останется в памяти друзей, коллег и учеников.

Содержание

Солеев А.С., Розет И.Г., Мухтаров Я.

Исследование эколого-медицинских моделей методами бифуркационных параметров в конечно-разностных дискретных системах 9

Худойбергганов М.У., Туляганова Н.Б., Каримов Д.К.

Исследование устойчивости модифицированных разностных схем Куранта, Айзексона и Риза для квазилинейных гиперболических систем 15

Эшкuvatов З.К., Салимова Н.М., Худойбергганов М.О.

Решение системы интегральных уравнений Вольтерра первого рода модифицированным методом разложения Адомиана 23

Олимов Н.Н., Бекмуродова Д.Б.

Оптимальная интерполяционная формула с производными в пространстве Соболева 37

Курбонназаров А.И.

Оптимальная квадратурная формула для вычисления коэффициентов Фурье в гильбертовом пространстве 46

Шадиметов Х.М., Атамуродова Б.М.

Дискретная система типа Винера-Хопфа для коэффициентов интерполяционных формул 64

Шадиметов Х.М., Каримов Р.С.

Система типа Винера-Хопфа для нахождения оптимальных коэффициентов разностных формул в гильбертовом пространстве 74

Расулов А.С., Раимова Г.М.

Применение методов ускорения сходимости к асинхронным итерациям 85

Шадиметов Х.М., Шоназаров С.К.

Об одной явной оптимальной разностной формуле 96

Хаётов А.Р., Нуралиев Ф.А., Абдуллаева Г.Ш.

Построение алгебро-гиперболического интерполяционного натурального сплайна шестого порядка 107

Аллаков И., Эрдонов Б.Х.

Об одновременном представлении трех чисел суммой шести простых чисел . 122

К. Джа, К.Б. Манандхар

Общий результат с фиксированной точкой для совместимых отображений типа (K) в интуиционистском нечетком метрическом пространстве 134

Хаётов А.Р., Хаитов Т.О., Буваширов Д.С.

Оптимальная формула численного интегрирования дробного интеграла Римана-Лиувилля 142

Шадиметов Х.М., Азамов С.С., Элмуратов Г.Ч.

Минимизация погрешность квадратурной формулы в пространстве Гильберта 151

Contents

<i>Soleyev A.S., Rozet I.G., Muxtarov Y.</i>	
Research of ecological and medical models using bifurcation parameters methods in finite difference discrete systems	9
<i>Khudoyberganov M.U., Tulyaganova N.B., Karimov D.K.</i>	
Investigation of the stability of the modified difference Courant, Isaakson and Rees schemes for quasi-linear hyperbolic systems	15
<i>Eshkuvatov Z.K., Salimova N.M., Khudoyberganov M.O.</i>	
Solving system of Volterra integral equations of the first kind by modified Adomian decomposition method	23
<i>Olimov N.N., Bekmurodova D.B.</i>	
An optimal interpolation formula with derivatives in Sobolev space	37
<i>Kurbonnazarov A.I.</i>	
Optimal quadrature formula for calculating Fourier coefficients in Hilbert space .	46
<i>Shadimetov Kh.M., Atamuradova B.M.</i>	
Discrete system of Wiener–Hopf type for coefficients of interpolation formulas . .	64
<i>Shadimetov Kh.M., Karimov R.S.</i>	
Wiener–Hopf type system for finding optimal coefficients of difference formulas in the Hilbert space	74
<i>Rasulov A.S., Raimova G.M.</i>	
Applications of convergence acceleration methods to asynchronous iterations . .	85
<i>Shadimetov Kh.M., Shonazarov S.K.</i>	
On an explicit optimal difference formula	96
<i>Hayotov A.R., Nuraliyev F.A., Abdullayeva G.Sh.</i>	
Construction of the sixth order algebraic-hyperbolic interpolation natural spline	107
<i>Allakov I., Erdonov B.Kh.</i>	
On the simultaneous representation of three numbers by the sum of six numbers of primes	122
<i>Jha K., Manandhar K.B.</i>	
A common fixed point result for compatible mappings of type (K) in intuitionistic fuzzy metric space	134
<i>Hayotov A.R., Khaitov T.O., Buvasharov D.S.</i>	
An optimal formula for numerical integration of fractional Riemann-Liouville integral	142
<i>Shadimetov Kh.M., Azamov S.S., Elmuratov G.Ch.</i>	
Minimizing the error of a quadrature formula in Hilbert space	151