УДК 519.653

ОПТИМАЛЬНАЯ КВАДРАТУРНАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ФУРЬЕ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Курбонназаров А.И.

mumin_1974@inbox.ru

Термезский государственный университет,

190111, Узбекистан, Термез, ул. Баркамол Авлод 43.

В данной работе рассматривается построение оптимальной квадратурной формулы на основе функционального подхода для численного расчета коэффициентов Фурье. При этом сначала решим краевую задачу для экстремальной функции квадратурной формулы. С помощью экстремальной функции находится вид нормы функционала погрешности. Норма функционала погрешности зависит от коэффициентов и узлов. Находим минимальное значение нормы функционала по коэффициентам с заданными узлами. Таким образом, мы построим оптимальную квадратурную формулу с в гильбертовом пространстве. Порядок аппроксимации построенной квадратурной формулы $O(h^3)$ и эта формула точна для гиперболического синуса, гиперболического косинуса и постоянного числа.

Ключевые слова: квадратурная формула, коэффициенты Фурье, функционал погрешности, экстремальная функция.

Цитирование: *Курбонназаров А.И.* Оптимальная квадратурная формула для вычисления коэффициентов Фурье в гильбертовом пространстве // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2024. – № 4/1(59). – С. 46-63.

1 Введение

На практике очень важно построить квадратурную формулу в гильбертовом пространстве для приближенного вычисления интегралов. Полученные результаты построения квадратурных формул позволяют разрабатывать совершенные математические модели различных природных процессов.

Существуют различные методы построения оптимальных квадратурных формул для приближенного вычисления определенных интегралов, среди которых можно выделить метод Соболева, сплайн-функции и методы $\varphi-$функции [7, 20–31].

Метод сплайн-функций, оптимальные квадратурные формулы, минимизирующие полунорму гильбертовом пространстве $K_2\left(P_2\right)$, а также проблема интерполяционных сплайнов рассмотрены в [2].

В [30] для приближенного вычисления интегралов использовалась сплайн - квазиинтерполяция. Кроме того, при интегрировании сильных осциллирующий функциями занимались такие ученые, как С. Олвер, Т. Холл, А. Изерлес, С.П. Норсетт, Д.Р. Яндрлич, А.В. Пейчев, М.М. Спалевич, Градимир В. Милованович, Тереза Лаудадио, Никола Мастронарди, Донателлы Оккорсио, Хомейера, Шривастава, Х.М., Масьеда-Джамеи, М., Моалеми [см. (16, 19, 20, 21, 25)].

Следует отметить, что в последующие годы в гильбертовых пространствах $L_2^{(m)}$ и $W_2^{(m,m-1)}$ С.Джеон, Ч.О. Ли, Г.В. Милованович, Х.М. Шадиметов, А.Р. Хаётов, Н.Д. Болтаев, С.С. Бабаев, Б.И. Бозоров, У.Н. Хайриев провел и научные исследования по построению оптимальных квадратурных формул и их применению для приближенного вычисления осциллирующих интегралов (см. [3–6, 12]).

В [4, 5] периодических функций в гильбертовом пространстве $\widetilde{W_2}^{(m,m-1)}(0,1]$ в $m \geqslant 2$ построены оптимальные квадратурные формулы для приближенного вычисления коэффициентов Фурье в следующих случаях: $\omega \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ и $\omega h \notin \mathbb{Z}$, в $\omega \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ и $\omega h \in \mathbb{Z}$ и $\omega = 0$.

С этой целью одним из основных вопросов вычислительной математики считается выполнение научных исследований по следующим направлениям:

1) Численный расчет коэффициентов Фурье.

2) Построение оптимальных квадратурных формул в различных гильбертовых пространствах и оценка их погрешностей.

В данной работе мы строим оптимальную квадратурную формулу для аппроксимации коэффициентов Фурье с $\omega h \in \mathbb{Z}$ на основе метода Соболева.

В связи с этим рассмотрим следующую квадратурную формулу

$$\int_0^1 f(x)\, e^{2\pi i\omega x} dx \cong \sum_{\beta=0}^{N} C[\beta]\, f[\beta], \tag{1}$$

где $\omega h \in \mathbb{Z}$, $\omega \neq 0$, $C[\beta]$ −неизвестные коэффициенты квадратурной формулы вида (1), $[\beta] = h\beta\big(\beta = \overline{0,N}, h = \frac{1}{N}\big)$, $N-$ натуральное число [17].

Функции f принадлежат пространству $K_2^{(3)}(0,1)$, которое определяется следующим образом (см. [6], стр. 209)

$$K_2^{(3)}(0,1) = \{f : [0,1] \to \mathbb{C} |\, f'' - \textit{абсолютно непрерывный}, f''' \in L_2(0,1)\}.$$

Это пространство после определенной факторизации образует гильбертово пространство со следующим скалярным произведением [18]

$$\langle f, g\rangle_{K_2^{(3)}} = \int_0^1 \left(\overline{f}'''(x) - \overline{f}'(x)\right)\left(g'''(x) - g'(x)\right) dx. \tag{2}$$

Это гильбертово пространство снабжено следующей нормой, основанной на скалярном произведением (2)

$$\|f\|_{K_2^{(3)}} = \langle f, f\rangle_{K_2^{(3)}}^{1/2}. \tag{3}$$

Следует отметить, что нулевой элемент этого пространства представляет собой эквивалентный класс функций следующего вида

$$\theta(x) = b_1 + b_2 \sinh(x) + b_3 \cosh(x), b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{C}. \tag{4}$$

Известно, что при построении квадратурных формул в конкретном пространстве изучается сходимость квадратурной суммы к интегралу. В этом случае необходимо оценить полученную погрешность.

Погрешностью квадратурной формулы (1) называется следующим разность

$$(\ell, f) = \int_0^1 e^{2\pi i\omega x} f(x)\, dx - \sum_{\beta=0}^{N} C[\beta] f[\beta] \tag{5}$$

и она определяет функционал

$$\ell(x) = e^{2\pi i\omega x}\varepsilon_{[0,1]}(x) - \sum_{\beta=0}^{N} C[\beta]\delta(x - h\beta), \tag{6}$$

который называется функционалом погрешности квадратурной формулы (1), где $\varepsilon_{[0,1]}(x)-$ характеристическая функция сегмента [0,1] и $\delta(x)-$ дельта-функция Дирака.
Погрешность квадратурной формулы в виде (1) равна значению функционала погрешности ℓ в f. Этот функционал непрерывен и ограничен, его норма конечна и определяется следующим образом

$$\left\| \ell | \, K_2^{(3)*} \right\| = \sup_{f, \|f\| \neq 0} \frac{|(\ell, f)|}{\left\| f | \, K_2^{(3)} \right\|}. \tag{7}$$

Из (7) получаем приведенную выше оценку погрешности (5) квадратурной формулы в виде (1)

$$|(\ell, f)| \leqslant \left\| \ell | \, K_2^{(3)*} \right\| \cdot \left\| f | \, K_2^{(3)} \right\|. \tag{8}$$

Из неравенства (8) видно, что погрешность формулы оценивается сверху с нормой функционала погрешности.
В свою очередь, в пространстве $K_2^{(3)}(0,1)$норма элементов, не принадлежащих ядру нормы (3) и принадлежащих этому пространству, есть положительное конечное число.
Поэтому нам необходимо найти выражение нормы функциональное погрешности ℓ. Очевидно, норма ℓ является ограниченной функцией, зависящей от коэффициентов C_β квадратурной формулы (1).
Коэффициенты C_β, дающие наименьшее значение нормы функционала погрешности называются оптимальными коэффициентами квадратурной формулы вида (1) в пространстве $K_2^{(3)}(0,1)$ и обозначаются $\overset{\circ}{C}[\beta], \beta = 0, 1, \ldots, N$.
Таким образом, для построения оптимальной квадратурной формулы с $\omega h \in \mathbb{Z}, \omega \neq$ $= 0$ в гильбертовом пространстве $K_2^{(3)}(0,1)$, нам необходимо решить следующие две основные задачи.
Задача 1. Сначала для функционала погрешности ℓ вида (6), определенного в гильбертовом пространстве, найти норму $\|\ell\|$.
Задача 2. Во-вторых, найти коэффициенты $C[\beta], \quad \beta = 0, 1, \ldots, N$ (если они есть), которые дают минимум значение норме $\|\ell\|_{K_2^{(3)*}}$.
В данной работе мы рассматриваем случай, когда параметр ω кратен на N в гильбертовом пространстве $K_2^{(3)}(0,1)$, т.е.

$$\omega = Nk, \; k \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}.$$

В этом пространстве $\omega = 0$ оптимальная квадратурная формула была построена в [11].

Таким образом, в ходе данной статьи мы сделаем следующее для решения первой и второй задачи.
a) Решаем краевую задачу;
b) Получим вид нормы функционала погрешности квадратурной формулы;
c) Дискретный аналог дифференциального оператора;
d) Получаем оптимальную квадратурную формулу (для вычисления интегралов Фурье).

2 Краевая задача

Для решения первой задачи, т. е. для нахождения представления нормы для заданного функционала погрешности ℓ, воспользуемся понятием экстремальной функции, соответствующей этому функционалу.

Определение. [26] Функция g_ℓ удовлетворяющее следующему равенству

$$(\ell, g_\ell) = \| \, \ell | \, K_2^{(3)*}\left(0,1\right) \| \cdot \| \, g_\ell | \, K_2^{(3)}\left(0,1\right) \|, \tag{9}$$

называется экстремальной функцией квадратурной формулы вида (1).

В этом случае, поскольку пространство $K_2^{(3)}\left(0,1\right)$ является гильбертовым, воспользуемся теоремой Рисса об общем виде линейного непрерывного функционала (см. [17]).

По теореме Рисса для всех функций f в пространстве $K_2^{(3)}\left(0,1\right)$ существует единственная функция g_ℓ, удовлетворяющая следующему уравнению

$$(\ell, f) = < g_\ell, f > \tag{10}$$

и имеет место следующее равенство

$$\| \, \ell | \, K_2^{(3)*} \| = \| \, g_\ell | \, K_2^{(3)} \|,$$

где $< \; g_\ell, f \; >$ −скалярное произведение этих двух функций из пространства $K_2^{(3)}\left(0,1\right)$.

Отсюда мы получаем следующее

$$(\ell, g_\ell) = \ell\left(g_\ell\right) = \left\langle g_\ell, g_\ell \right\rangle_{K_2^{(3)}(0,1)} = \left\| g_\ell | \, K_2^{(3)} \right\|^2 = \left\| \ell | \, K_2^{(3)*} \right\|^2. \tag{11}$$

Интегрируя правую часть уравнения (10) по частям, приходим к этому уравнению и краевой задаче со следующими условиями

$$g_\ell^{(6)}\left(x\right) - 2g_\ell^{(4)}\left(x\right) + g_\ell^{(2)}\left(x\right) = -\bar{\ell}\left(x\right), \tag{12}$$

$$\left(g_\ell^{(3+k)}\left(x\right) - 2g_\ell^{(3+k-2)}\left(x\right)\right) |_{x=0}^{x=1} = 0, \;\; k = 0,1,2,3. \tag{13}$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. [5] Решение приведенного выше уравнения (12) при условиях (13) является экстремальной функцией для квадратурной формулы вида (1) и определяется следующим образом

$$g_\ell\left(x\right) = -\bar{\ell}\left(x\right) * G_3\left(x\right) + d_1 \cdot \sinh\left(x\right) + d_2 \cdot \cosh\left(x\right) + p_0, \tag{14}$$

где

$$G_3\left(x\right) = \frac{sign\left(x\right)}{4}\left(x \cdot \cosh(x) - 3\sinh\left(x\right) + 2x\right), \tag{15}$$

$\ell\left(x\right)$ показано в (5), d_1, d_2 и p_0− произвольные комплексные числа.

В (14) функционал погрешность ℓ удовлетворяет условиям (4), т.е.

$$\begin{aligned} (\ell\left(x\right), \sinh\left(x\right)) &= 0, \\ (\ell\left(x\right), \cosh\left(x\right)) &= 0, \\ (\ell\left(x\right), 1) &= 0. \end{aligned} \tag{16}$$

В следующем параграфе мы найдем представление нормы функционала ошибки квадратурной формулы вида (1).

3 Норма функционала погрешности квадратурной формулы

Из уравнений (16) для коэффициентов квадратурной формулы (1) получаем следующее

$$\begin{gathered}\sum_{\beta=0}^{N} C[\beta]=\int_{0}^{1} e^{2\pi i\omega x}dx,\\ \sum_{\beta=0}^{N} C[\beta]\cdot\sinh{[\beta]}=\int_{0}^{1} e^{2\pi i\omega x}\cdot\sinh{(x)}\,dx,\\ \sum_{\beta=0}^{N} C[\beta]\cdot\cosh{[\beta]}=\int_{0}^{1} e^{2\pi i\omega x}\cdot\cosh{(x)}\,dx.\end{gathered}\tag{17}$$

Последняя система уравнений (17) имеет $(N+1)$ неизвестных и три уравнения. Чтобы эта система имела решение, должна выполняется условие $N\geqslant 2$.
При $N>2$ система уравнений (17) имеет бесконечно много решений. Рассмотрим задачу нахождения наименьшего значения нормы $\|\ell\|$ среди этих решений.
Норма функционала погрешность имеет следующий вид [7]

$$\left\|\ell|\,K_2^{(3)*}\right\|^2=-\left[\sum_{\beta=0}^{N}\sum_{\gamma=0}^{N}C[\beta]C[\gamma]G_3\left[\beta-\gamma]\right)-2\sum_{\beta=0}^{N}\int_{0}^{1}C[\beta]\cdot e^{2\pi i\omega x}G_3\left(x-[\beta]\right)dx+\right.$$
$$\left.+\int_{0}^{1}\int_{0}^{1}e^{2\pi i\omega(x-y)}G_3\left(x-y\right)dxdy\right].\tag{18}$$

Линейная алгебраическая система для коэффициентов, дающих наименьшее значение в выражении (18) и условиях (17), имеет вид:

$$\sum_{\gamma=0}^{N}C[\gamma]G_3\left[\beta]-[\gamma]\right)+d_1\sinh{[\beta]})+d_2\cosh{[\beta]}+p_0=\tag{19}$$

$$=\int_{0}^{1}e^{2\pi i\omega x}G_3\left(x-[\beta]\right)dx,\qquad\qquad \beta=0,1,2,3,...,N,\tag{20}$$

$$\sum_{\gamma=0}^{N}C[\gamma]\sinh{[\gamma]})=\int_{0}^{1}e^{2\pi i\omega x}\sinh{(x)}\,dx,\tag{21}$$

$$\sum_{\gamma=0}^{N}C[\gamma]\cosh{[\gamma]})=\int_{0}^{1}e^{2\pi i\omega x}\cosh{(x)}\,dx,\tag{22}$$

$$\sum_{\gamma=0}^{N}C[\gamma]=\int_{0}^{1}e^{2\pi i\omega x}dx,\tag{23}$$

Система (19)-(23) имеет $(N+4)$ неизвестных и $(N+4)$ уравнений. Неизвестными в этой системе являются $C[\beta]$, $\gamma=\overline{0,N}$ и d_1, d_2, p_0.
В данной работе мы находим аналитическое решение системы (19)-(23). Для этого в следующем параграфе мы сначала представим некоторые известные результаты.

4 Дискретный аналог дифференциального оператора

Для решения системы уравнений (19)-(23) воспользуемся дискретным аналогом $D_3\left[\beta\right]$ дифференциального оператора

$$\frac{d^6}{dx^6}-2\frac{d^4}{dx^4}+\frac{d^2}{dx^2}.$$

Дискретный аналог этого оператора рассмотрен в [8].
Понятие дискретного аналога дифференциального оператора основано на следующих определениях [17].
Определение 1. Если функция $f\left[\beta\right]$ определена на множстве целочисленных значений переменной β, эта функция называется функцией с дискретными аргументами.
Определение 2.Число

$$\left[f\left[\beta\right],g\left[\beta\right]\right]=\sum_{\beta=-\infty}^{\infty}f\left[\beta\right]\cdot g\left[\beta\right], \tag{24}$$

называется скалярным произведением двух функций с дискретными аргументами $f\left[\beta\right]$ и $g\left[\beta\right]$, если правая часть (24) абсолютно сходится.
Определение 3. Сверткой $f\left[\beta\right]*g\left[\beta\right]$ двух функций $f\left[\beta\right]$ и $g\left[\beta\right]$ с дискретными аргументами называется следующее скалярное произведение

$$f\left[\beta\right]*g\left[\beta\right]=\left[f\left[\beta-\gamma\right],g\left[\gamma\right]\right]=\sum_{\gamma=-\infty}^{\infty}f\left[\beta-\gamma\right]\cdot g\left[\gamma\right]. \tag{25}$$

Определение 4. Боронообразная функция, соответствующая функции дискретного аргумента $f\left[\beta\right]$, определяется следующим образом:

$$\hat{f}\left(x\right)=\sum_{\beta=-\infty}^{\infty}f\left[\beta\right]\cdot\delta\left(x-\left[\beta\right]\right),$$

где $[\beta]=h\beta$, $h-$положительная малая величина.

Нам важно найти дискретную функцию $D\left[\beta\right]$

$$D_3\left[\beta\right]*G_3\left[\beta\right]=\delta_d\left[\beta\right], \tag{26}$$

где

$$G_3\left[\beta\right]=\frac{sign\left[\beta\right]}{4}\left(\left[\beta\right]\cosh\left[\beta\right]-3\sinh\left[\beta\right]+2\left[\beta\right]\right), \tag{27}$$

$\delta_d\left[\beta\right]-$ дискретная дельта-функция, равная 1 в точке $\beta=0$ и 0 в точке $\beta=0$. [см. 11].
Справедлива следуюшая

Теорема 2. Дискретный аналог дифференциального оператора $\frac{d^6}{dx^6} - 2\frac{d^4}{dx^4} + \frac{d^2}{dx^2}$, удовлетворяющего уравнению (26), имеет следующий вид

$$D_3\left[\beta\right] = \frac{2}{p}\begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{2} A_k \lambda_k^{|\beta|-1}, |\beta| \geqslant 2, \\ 1 + \sum\limits_{k=1}^{2} A_k, \ |\beta| = 1, \\ C_3 + \sum\limits_{k=1}^{2} \frac{A_k}{\lambda_k}, \beta = 0. \end{cases} \tag{28}$$

Где

$$A_k = \frac{(1-\lambda_k)^2(\lambda_k^2 + 1 - 2\lambda_k\cosh(h))^2 p}{\lambda_k \cdot P_4'(\lambda_k)}, k = 1, 2$$
$$C_3 = -(2 + 4\cosh(h)) - \frac{p_3}{p_4},$$
$$P_4(\lambda) = p_4\lambda^4 + p_3\lambda^3 + p_2\lambda^2 + p_1\lambda + p_0,$$
$$p = p_4 = p_0 = h\cosh(h) - 3\sinh(h) + 2h,$$
$$p_3 = p_1 = 3\sinh(2h) - 2h.$$

Теорема 2 доказана в работе [10].
Теорема 3. Для $D_3\left[\beta\right]$ дискретная функция аргумента имеет следующие равенства

$$\begin{aligned} &1.\ D_3\left[\beta\right] * \sinh\left[\beta\right] = 0, \\ &2.\ D_3\left[\beta\right] * \cosh\left[\beta\right] = 0, \\ &3.\ D_3\left[\beta\right] * \left[\beta\right]\sinh\left[\beta\right] = 0, \\ &4.\ D_3\left[\beta\right] * \left[\beta\right]\cosh\left[\beta\right] = 0, \\ &5.\ D_3\left[\beta\right] * 1 = 0, \\ &6.\ D_3\left[\beta\right] * \left[\beta\right] = 0, \\ &7.\ D_3\left[\beta\right] * G_3\left[\beta\right] = \delta\left[\beta\right]. \end{aligned} \tag{29}$$

Теорема 3 доказана в работе [8].
Далее, построим оптимальную квадратурную формулу для расчета коэффициентов Фурье.

5 Оптимальная квадратурная формула для вычисления интегралов Фурье

В этом параграфе нам нужно построить оптимальную квадратурную формулу в пространстве $K_2^{(3)}(0,1)$, используя метод Соболева. Мы знаем, что норма функции в пространстве $K_2^{(3)}(0,1)$ задается формулой (3).

Вводим следующие обозначение

$$f_3\left[\beta\right] = \int\limits_0^1 e^{2\pi i\omega x} G_3\left(x - [\beta]\right) dx, \tag{30}$$

$$q_s = \int\limits_0^1 e^{2\pi i\omega x} \sinh\left(x\right) dx, \tag{31}$$

$$q_c = \int\limits_0^1 e^{2\pi i\omega x} \cosh\left(x\right) dx, \tag{32}$$

$$q_0 = \int\limits_0^1 e^{2\pi i\omega x} dx. \tag{33}$$

Сначала вычисляем $f_3\left[\beta\right]$, заменяя $G_3\left(x - [\beta]\right)$ выражением (15). Рассмотрим следующее равенство

$$[\beta] = h\beta$$

и приходим к следующему результату для $f_3\left[\beta\right]$:

$$\begin{gathered}
f_3\left[\beta\right] = \frac{1}{4}\cdot\left[-\frac{1}{\pi^2\omega^2\left(4\pi^2\omega^2+1\right)^2}\right] \\
+ [\beta]\cosh[\beta]\left[-\frac{1}{4}q_c + \frac{\pi i\omega}{4\pi^2\omega^2+1}\right] \\
+ [\beta]\sinh[\beta]\left[\frac{1}{4}q_s + \frac{1}{2\left(4\pi^2\omega^2+1\right)}\right] \\
+ [\beta]\left[-\frac{1}{2}q_0 - \frac{1}{2\pi i\omega}\right] + \left[-\frac{e^{2\pi i\omega}\left(2\pi i\omega - 1\right) - 1}{8\pi^2\omega^2}\right] \\
+\frac{1}{8}\cosh[\beta]\left[\frac{-2e^{2\pi i\omega+1}-3}{2\pi i\omega+1} + \frac{-e^{2\pi i\omega+1}-1}{\left(2\pi i\omega+1\right)^2} + \frac{4e^{2\pi i\omega-1}+3}{2\pi i\omega-1} + \frac{-e^{2\pi i\omega-1}+3}{\left(2\pi i\omega-1\right)^2}\right] \\
+\frac{1}{8}\sinh[\beta]\left[\frac{2e^{2\pi i\omega+1}+3}{2\pi i\omega+1} + \frac{e^{2\pi i\omega+1}+1}{\left(2\pi i\omega+1\right)^2} + \frac{4e^{2\pi i\omega-1}+3}{2\pi i\omega-1} + \frac{-e^{2\pi i\omega-1}+3}{\left(2\pi i\omega-1\right)^2}\right].
\end{gathered}$$

Затем вычисляем q_s, q_c, q_0

$$q_s = \frac{e^{2\pi i\omega}\left(\cosh\left(1\right) - 2\pi i\omega\cdot\sinh\left(1\right)\right) - 1}{4\pi^2\omega^2+1}, \tag{34}$$

$$q_c = \frac{e^{2\pi i\omega}\left(\sinh\left(1\right) - 2\pi i\omega\cdot\cosh\left(1\right)\right) + 2\pi i\omega}{4\pi^2\omega^2+1}, \tag{35}$$

$$q_0 = \frac{e^{2\pi i\omega}-1}{2\pi i\omega}. \tag{36}$$

Теперь посмотрим на левую часть (19). Для этого введем следующие обозначения

$$u\left[\beta\right] = \sum_{\gamma=0}^{N} C\left[\beta\right]\cdot G_3\left[\beta-\gamma\right] + d_1\sinh\left[\beta\right] + d_2\cosh\left[\beta\right] + p_0. \tag{37}$$

Теперь мы имеем дело с определением функции с дискретным аргументом $u\,[\beta]$ выше.

Потому что функция $u\,[\beta]$ занимает основное место для поиска оптимальных коэффициентов $C\,[\beta]\,,\ \beta=\overline{0,N}$. Мы рассматриваем здесь коэффициенты $C\,[\beta]\,,\ \beta=\overline{0,N}$ так, как если бы они были функциями с дискретными аргументами.

Теперь определим функцию $u\,[\beta]$, заданную в (37), для всех целых значений переменной β.

Для этого предположим, что функция $C\,[\beta]\,,\ \beta=\overline{0,N}$ с дискретными аргументами принимает 0 значений в целых значениях $\beta=-1,-2,-3,\ldots$ и $\beta=N+1,N+2,N+3,\ldots$, т.е.

$$\begin{gathered} C\,[\beta]=0,\ \ \beta=-1,-2,-3,\ldots \\ \beta=N+1,N+2,N+3,\ldots. \end{gathered} \tag{38}$$

Тогда, учитывая (38), из выражения (37) получаем следующее

$$\begin{aligned} u\,[\beta]=&\sum_{\gamma=-\infty}^{\infty}C\,[\gamma]\cdot G_3\,[\beta-\gamma]+d_1\sinh\,[\beta]+d_2\cosh\,[\beta]+p_0= \\ &=C\,[\beta]*G_3\,[\beta]+d_1\sinh\,[\beta]+d_2\cosh\,[\beta]+p_0. \end{aligned} \tag{39}$$

Используя свойства (29) и применяя оператор свертки $D_3\,[\beta]$ к $u\,[\beta]$, определяемому выражением (39), получаем следующую формулу для коэффициентов $C\,[\beta]\,,\ \beta=\overline{0,N}$

$$C\,[\beta]=D_3\,[\beta]*u\,[\beta]\,. \tag{40}$$

Функция $u\,[\beta]$, определенная в (40), равна $f_3\,[\beta]$ в $\beta=\overline{0,N}$ в соответствии с (19), т.е.

$$u\,[\beta]=f_3\,[\beta]\,,\ \ \beta=\overline{0,N}. \tag{41}$$

Теперь определяем значения функции $u\,[\beta]$ в $\beta=-1,-2,-3,\ldots$ и $\beta=N+1,N+2,N+3,\ldots$.

Сначала рассмотрим случай $\beta=-1,-2,-3,\ldots$. Тогда это будет следующим образом

$$u\,[\beta]=\sum_{\gamma=-\infty}^{\infty}C\,[\gamma]\cdot G_3\,[\beta-\gamma]+d_1\sinh\,[\beta]+d_2\cosh\,[\beta]+p_0,$$

где $G_3\,(x)$ определяется формулой (15).

Таким образом, $u\,[\beta]$ равен следующему

$$\begin{gathered} u\,[\beta]=\sum_{\gamma=0}^{N}C\,[\gamma]\cdot\frac{\operatorname{sign}\,[\beta-\gamma]}{4}\left([\beta-\gamma]\cosh\,[\beta-\gamma]-3\sinh\,[\beta-\gamma]+2\,[\beta-\gamma]\right)+ \\ +d_1\sinh\,[\beta]+d_2\cosh\,[\beta]+p_0. \end{gathered} \tag{42}$$

Теперь вычисляем (38). Для этого рассмотрим случаи $\beta<0$ и $\beta>N$ отдельно, в которых раскрываем круглые скобки и, используя формулу сложения тригонометрических функций, после нескольких обозначений получаем следующий результат

$$u\,[\beta]=\begin{cases} -\frac{1}{4}\,[\beta]\cosh\,[\beta]\cdot q_c+\frac{1}{4}\,[\beta]\sinh\,[\beta]\cdot q_s-\frac{1}{2}\,[\beta]\cdot q_0+\frac{1}{4}\sinh\,[\beta]\times \\ \times\left(-Q_s+3\cdot q_c+4\cdot d_1\right)+\frac{1}{4}\cosh\,[\beta]\cdot\left(Q_c-3\cdot q_s+4\cdot d_2\right)+\left(p_0+\frac{1}{2}Q_0\right), & \beta<0, \\ f_3\,[\beta]\,, & \text{если } 0\leqslant\beta\leqslant N, \\ \frac{1}{4}\,[\beta]\cosh\,[\beta]\cdot q_c-\frac{1}{4}\,[\beta]\sinh\,[\beta]\cdot q_s+\frac{1}{2}\,[\beta]\cdot q_0+\frac{1}{4}\sinh\,[\beta]\cdot\left(Q_s-3\cdot q_c+4\cdot d_1\right) \\ +\frac{1}{4}\cosh\,[\beta]\cdot\left(-Q_c+3\cdot q_s+4\cdot d_2\right)+\left(p_0+\frac{1}{2}Q_0\right), & \text{если } \beta>N. \end{cases} \tag{43}$$

Введем следующие обозначения в (43)

$$
\begin{aligned}
Q_s^- &= -Q_s + 3\cdot q_c + 4\cdot d_1,\\
Q_c^- &= Q_c - 3\cdot q_s + 4\cdot d_2,\\
Q_s^+ &= Q_s - 3\cdot q_c + 4\cdot d_1,\\
Q_c^+ &= -Q_c + 3\cdot q_s + 4\cdot d_2\\
Q_0^- &= p_0 - Q_0,\\
Q_0^+ &= p_0 + Q_0.
\end{aligned}
$$

Исходя из приведенных выше символах, запишем (43) в следующем простом виде

$$
u[\beta] = \begin{cases}
-\frac{1}{4}[\beta]\cosh[\beta]\cdot q_c + \frac{1}{4}[\beta]\sinh[\beta]\cdot q_s - \frac{1}{2}[\beta]\cdot q_0 + \frac{1}{4}\sinh[\beta]\cdot Q_s^- + \\
+\frac{1}{4}\cosh[\beta]\cdot Q_c^- + Q_0^-, & \text{если } \beta < 0,\\
f_3[\beta], & \text{если}, \quad 0 \leqslant \beta \leqslant N,\\
\frac{1}{4}[\beta]\cosh[\beta]\cdot q_c - \frac{1}{4}[\beta]\sinh[\beta]\cdot q_s + \frac{1}{2}[\beta]\cdot q_0 + \frac{1}{4}\sinh[\beta]\cdot Q_s^+ + \\
+\frac{1}{4}\cosh[\beta]\cdot Q_c^+ + Q_0^+, & \text{если } \beta > N.
\end{cases} \tag{44}
$$

Здесь q_0, q_1, q_2- известны, $Q_s^-, Q_s^+, Q_c^-, Q_c^+, Q_0^-, Q_0^+-$ неизвестны, если эти неизвестные найдены, то оптимальные коэффициенты $C[\beta]$, $\beta = \overline{0,N}$ будут найдены по формуле (40), но нахождение коэффициентов этим методом требует больших вычислений.

Поэтому в данной работе оптимальные коэффициенты $C[\beta]$, $\beta = \overline{0,N}$ находим другим методом без нахождения неизвестных

$$
Q_s^-, Q_s^+, Q_c^-, Q_c^+, Q_0^-, Q_0^+.
$$

Им посвящены наши дальнейшие вычисления.

Для этого сначала определим появление оптимальных коэффициентов $\mathring{C}[\beta]$, $\beta = \overline{0,N}$ при $\beta = 1,2,3,\dots N-1$. Учитывая (42), вычислим (38) следующим образом. При $\beta = 1,2,3,\dots N-1$

$$
C[\beta] = D_3[\beta] * u[\beta] = \sum_{\gamma=-\infty}^{\infty} D_3[\beta-\gamma]\cdot u[\gamma]
$$

и используя формулу (44), получаем следующее

$$
\begin{aligned}
C[\beta] = \sum_{\gamma=-\infty}^{-1} D_3[\beta-\gamma]\cdot\Bigg(-\frac{1}{4}[\gamma]\cosh[\gamma]\cdot q_c + \frac{1}{4}[\gamma]\sinh[\gamma]\cdot q_s - \frac{1}{2}[\gamma]\cdot q_0 + \\
+\frac{1}{4}\sinh[\gamma]\cdot Q_s^- + \frac{1}{4}\cosh[\gamma]\cdot Q_c^- + Q_0^-\Bigg) + \sum_{\gamma=0}^{N} D_3[\beta-\gamma]\cdot f_3[\gamma] + \\
+\sum_{\gamma=N+1}^{\infty} D_3[\beta-\gamma]\cdot\Bigg(\frac{1}{4}[\gamma]\cosh[\gamma]\cdot q_c - \frac{1}{4}[\gamma]\sinh[\gamma]\cdot q_s + \frac{1}{2}[\gamma]\cdot q_0 + \\
+\frac{1}{4}\sinh[\gamma]\cdot Q_s^+ + \frac{1}{4}\cosh[\gamma]\cdot Q_c^+ + Q_0^+\Bigg).
\end{aligned} \tag{45}
$$

Упрощая (45), получаем следующее

$$
C[\beta] = D_3[\beta] * f_3[\beta] + \sum_{k=1}^{2}\left(\lambda_k^{\beta} m_k + \lambda_k^{N-\beta} n_k\right), \quad \beta = 1,2,\dots N-1, \tag{46}
$$

где

$$m_k = \frac{2A_k}{p\lambda_k} \cdot \left[\sum_{\gamma=1}^{\infty} \lambda_k^{\gamma} \cdot \left(-\frac{1}{4}(h\gamma)\cosh(h\gamma) \cdot q_c + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{4}(h\gamma)\sinh(h\gamma) \cdot q_s - \frac{1}{2}(h\gamma) \cdot q_0 \frac{1}{4}\sinh(h\gamma) \cdot Q_s^- + \frac{1}{4}\cosh(h\gamma) \cdot Q_c^- + Q_0^- - f_3(-h\gamma) \right) \right], \tag{47}$$

$$n_k = \frac{2A_k}{p\lambda_k} \cdot \left[\sum_{\gamma=1}^{\infty} \lambda_k^{\gamma} \cdot \left(\frac{1}{4}(h\gamma)\cosh(h\gamma) \cdot q_c - \frac{1}{4}(h\gamma)\sinh(h\gamma) \cdot q_s + \frac{1}{2}(h\gamma) \cdot q_0 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{4}\sinh(h\gamma) \cdot Q_s^+ + \frac{1}{4}\cosh(h\gamma) \cdot Q_c^+ + Q_0^+ - f_3(h(N+\gamma)) \right) \right. . \tag{48}$$

Теперь вычислим $C[\beta] = D_3[\beta] * f_3[\beta]$ в (46) при $\omega h \in \mathbb{Z}$, используя представление $f_3[\beta]$, заданное формулой (34).

$$D_3[\beta] * f_3[\beta] = D_3[\beta] * \frac{1}{4} \cdot \left[-\frac{1}{4\pi^2\omega^2(4\pi^2\omega^2+1)^2} \right]$$
$$= \frac{1}{4} \cdot \left[-\frac{1}{4\pi^2\omega^2(4\pi^2\omega^2+1)^2} \right] \cdot (D_3[\beta] * 1) = 0, \tag{49}$$

Итак $D_3[\beta] * f_3[\beta]$ выглядит следующее

$$D_3[\beta] * f_3[\beta] = 0. \tag{50}$$

Значит,

$$C[\beta] = \sum_{k=1}^{2} m_k \cdot \lambda_k^{\beta} + \sum_{k=1}^{2} n_k \cdot \lambda_k^{N-\beta}, \quad \beta = 1, 2, \dots N-1. \tag{51}$$

Теперь мы видим из уравнения (42), что достаточно найти оптимальные коэффициенты $C[0]$ и $C[N]$. Итак, нам нужно найти 6 неизвестных m_1, m_2, n_1, $n_2, C[0], C[N]$. Сначала находим $C[N]$ из (21), для этого запишем формулу (21) в следующем виде

$$q_s = \sum_{\gamma=1}^{N-1} C[\gamma]\sinh[\gamma] + C[N]\sinh[N].$$

Из этого имеем

$$C[N] = \frac{1}{\sinh[N]}\left(q_s - \sum_{\gamma=0}^{N-1} C_{\gamma}\sinh[\gamma] \right). \tag{52}$$

Запишем формулу (52) следующим образом, учитывая (42), после некоторых вычислений

$$C[N] = \left[\frac{\mathrm{e}^{2\pi i\omega}(\cosh[N] - 2\pi i\omega \cdot \sinh[N]) - 1}{\sinh[N](4\pi^2\omega^2+1)} - \right.$$
$$-\frac{1}{\sinh[N]}\sum_{k=1}^{2} m_k \left(\frac{\lambda_k^N \mathrm{e}\text{-}\lambda_k \mathrm{e}^h}{2(\lambda_k \mathrm{e}^h - 1)} + \frac{\lambda_k^N \mathrm{e}^{h-1}\text{-}\lambda_k}{\mathrm{e}^h - \lambda_k} \right) - \tag{53}$$
$$\left. -\frac{1}{\sinh[N]}\sum_{k=1}^{2} n_k \left(\frac{\lambda_k \mathrm{e}\text{-}\lambda_k^N \mathrm{e}^h}{2(\mathrm{e}^h - \lambda_k)} + \frac{\lambda_k^N \mathrm{e}^{h-1}\text{-}\lambda_k^N}{2(\lambda_k \mathrm{e}^h - 1)} \right) \right].$$

Теперь находим $C[0]$ из (22), т.е.

$$q_c = C[0] + \sum_{\gamma=1}^{N-1} C_{\gamma}\cosh[\gamma] + C[N]\cosh[N], \tag{54}$$

Учитывая формулу (54) и формулу (51), после некоторых вычислений запишем [0] следующим образом

$$C\,[0] = \frac{2\pi i\omega \cdot \sinh[N] + \cosh[N] - e^{2\pi i\omega}}{\sinh[N]\cdot(4\pi^2\omega^2+1)} + \tag{55}$$

$$+\frac{1}{\sinh[N]}\cdot\sum_{k=1}^{2} m_k\cdot\left[(\cosh[N]-\sinh[N])\cdot\frac{\lambda_k^N-\lambda_k e^h}{2(\lambda_k e^h-1)}+(\cosh[N]+\sinh[N])\cdot\frac{\lambda_k^N e^{h-1}-\lambda_k}{2(e^h-\lambda_k)}\right]+$$

$$+\frac{1}{\sinh[N]}\cdot\sum_{k=1}^{2} n_k\cdot\left[(\cosh[N]-\sinh[N])\cdot\frac{\lambda_k e-\lambda_k^N e^h}{2(e^h-\lambda_k)}+(\cosh[N]+\sinh[N])\cdot\frac{\lambda_k e^{h-1}-\lambda_k^N}{2(\lambda_k e^h-1)}\right].$$

Теперь, используя формулу (51), составим соответствующие уравнения для $m_k,\ n_k\ \ (k=1,2)$. Для этого мы смотрим на сумму в левой части уравнения (19), которую вычисляем с помощью (53), (55). Для этого введем следующие обозначения:

$$S=\sum_{\gamma=0}^{N} C\,[\gamma]\cdot G_3\,[\beta-\gamma]$$

$$=\sum_{\gamma=0}^{N} C\,[\gamma]\cdot\frac{\operatorname{sign}[\beta-\gamma]}{4}\cdot([\beta-\gamma]\cosh[\beta-\gamma]-3\sinh[\beta-\gamma]+2[\beta-\gamma]),$$

упрощая приведенное выше выражение, приходим к следующему

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}C\,[0]\,([\beta]\cosh[\beta]-3\sinh[\beta]+2[\beta]) \\ &+\sum_{\gamma=1}^{\beta} C\,[\gamma]\cdot\frac{1}{2}\cdot([\beta-\gamma]\cosh[\beta-\gamma]-3\sinh[\beta-\gamma]+2[\beta-\gamma]) \\ &+\sum_{\gamma=0}^{N} C\,[\gamma]\cdot\frac{1}{4}\cdot([\beta-\gamma]\cosh[\beta-\gamma]-3\sinh[\beta-\gamma]+2[\beta-\gamma]). \end{aligned} \tag{56}$$

В выражении (56) введем следующие обозначения

$$S_1=\sum_{\gamma=1}^{\beta} C\,[\gamma]\cdot\frac{1}{2}\cdot([\beta-\gamma]\cosh[\beta-\gamma]-3\sinh[\beta-\gamma]+2[\beta-\gamma]), \tag{57}$$

$$S_2=\sum_{\gamma=0}^{N} C\,[\gamma]\cdot\frac{1}{4}\cdot([\beta-\gamma]\cosh[\beta-\gamma]-3\sinh[\beta-\gamma]+2[\beta-\gamma]). \tag{58}$$

Тогда выражение (56) будет иметь следующий вид

$$S=\frac{1}{2}C[0]\,([\beta]\cosh[\beta]-3\sinh[\beta]+2[\beta])+S_1-S_2. \tag{59}$$

Сначала вычислим S_1 по формуле (57), для этого запишем с помощью (51) следующее

$$S_1=\frac{1}{2}\sum_{\gamma=1}^{\beta}\left(\sum_{k=1}^{2} m_k\lambda_k^{\beta-\gamma}+\sum_{k=1}^{2} n_k\lambda_k^{N-\beta+\gamma}\right)\cdot([\gamma]\cosh[\gamma]-3\sinh[\gamma]+2[\gamma]) \tag{60}$$

После некоторых вычислений в выражении (60) приходим к следующему

$$\begin{aligned}
S_1 &= \frac{1}{2}\left[\sum_{k=1}^{2} m_k\left(\frac{\lambda_k}{2\left(e^h-\lambda_k\right)}-\frac{\lambda_k e^h}{2\left(\lambda_k e^h-1\right)}\right)+\sum_{k=1}^{2} n_k\left(\frac{\lambda_k^N}{2\left(\lambda_k e^h-1\right)}-\frac{\lambda_k^N e^h}{2\left(e^h-\lambda_k\right)}\right)\right][\beta]\cosh[\beta]\\
&+\frac{1}{2}\left[\sum_{k=1}^{2} m_k\left(\frac{\lambda_k}{2\left(e^h-\lambda_k\right)}+\frac{\lambda_k e^h}{2\left(\lambda_k e^h-1\right)}\right)+\sum_{k=1}^{2} n_k\left(\frac{\lambda_k^N}{\lambda_k e^h-1}+\frac{\lambda_k^N e^h}{e^h-\lambda_k}\right)\right][\beta]\sinh[\beta]\\
&+\left[\sum_{k=1}^{2}\frac{m_k}{2}\left(-\frac{2\lambda_k}{\lambda_k-1}\right)+\sum_{k=1}^{2}\frac{n_k}{2}\left(\frac{2\lambda_k^N}{\lambda_k-1}\right)\right][\beta]\\
&+\left[\sum_{k=1}^{2}\frac{m_k}{2}\left(-\frac{\lambda_k h e^h}{\left(\lambda_k-e^h\right)^2}-\frac{\lambda_k h e^h}{\left(\lambda_k e^h-1\right)^2}+\frac{3\lambda_k}{\lambda_k-e^h}-\frac{3\lambda_k e^h}{\lambda_k e^h-1}\right)+\right.\\
&\left.+\sum_{k=1}^{2}\frac{n_k}{2}\left(-\frac{\lambda_k^{1+N} h e^h}{\left(\lambda_k e^h-1\right)^2}-\frac{\lambda_k^{1+N} h e^h}{\left(\lambda_k-e^h\right)^2}-\frac{3\lambda_k^N}{\lambda_k e^h-1}+\frac{3\lambda_k^N e^h}{\lambda_k-e^h}\right)\right]\cosh[\beta]\\
&+\left[\sum_{k=1}^{2}\frac{m_k}{2}\left(-\frac{\lambda_k h e^h}{\left(\lambda_k-e^h\right)^2}+\frac{\lambda_k h e^h}{\left(\lambda_k e^h-1\right)^2}+\frac{3\lambda_k}{\lambda_k-e^h}+\frac{3\lambda_k e^h}{\lambda_k e^h-1}\right)+\right.\\
&\left.+\sum_{k=1}^{2}\frac{n_k}{2}\left(-\frac{\lambda_k^{1+N} h e^h}{\left(\lambda_k e^h-1\right)^2}+\frac{\lambda_k^{1+N} h e^h}{\left(\lambda_k-e^h\right)^2}-\frac{3\lambda_k^N}{\lambda_k e^h-1}-\frac{3\lambda_k^N e^h}{\lambda_k-e^h}\right)\right]\sinh[\beta]\\
&+\left[\sum_{k=1}^{2}\frac{m_k}{2}\left(-\frac{2h\lambda_k}{\left(\lambda_k-1\right)^2}\right)+\sum_{k=1}^{2}\frac{n_k}{2}\left(\frac{2\lambda_k^{N+1}h}{\left(\lambda_k-1\right)^2}\right)\right].
\end{aligned}\tag{61}$$

Теперь вычислим S_2, выраженное уравнением (58), используя (51), тогда S_2 будет следующее

$$\begin{aligned}
S_2 &= \left(\frac{1}{4}q_c\right)[\beta]\cosh[\beta]\\
&+\left(-\frac{1}{4}q_s\right)[\beta]\sinh[\beta]\\
&+\left(\frac{1}{2}q_0\right)[\beta]\\
&+\left(-\frac{1}{2}Q_0\right)+\left(\frac{3}{4}q_s-Q_c\right)\cosh[\beta]+\left(-\frac{3}{4}q_c+Q_s\right)\sinh[\beta].
\end{aligned}\tag{62}$$

Теперь, суммируя полученные результаты, составим выражение из (19) относительно $[\beta]$. В этом

$$S+d_1\sinh[\beta]+d_2\cosh[\beta]+p_0=f_3[\beta].$$

Используя выражение для S в (59) выше, мы получаем

$$\frac{1}{2}C[0]\left([\beta]\cosh[\beta]-3\sinh[\beta]+2[\beta]\right)+S_1-S_2+d_1\sinh[\beta]+d_2\cosh[\beta]+p_0=f_3[\beta].\tag{63}$$

В уравнение (63), учитывая (61), (62) и предварительно приравняв коэффициенты перед $[\beta]\cosh[\beta]$, получим следующее уравнение

$$\frac{C[0]}{2}+\sum_{k=1}^{2}\frac{m_k}{2}\left(-\frac{\lambda_k}{\lambda_k-e^h}-\frac{\lambda_k e^h}{\lambda_k e^h-1}\right)+\sum_{k=1}^{2}\frac{n_k}{2}\left(\frac{\lambda_k^N}{\lambda_k e^h-1}+\frac{\lambda_k^N e^h}{\lambda_k-e^h}\right)=\frac{\pi i\omega}{4\pi^2\omega^2+1}.\tag{64}$$

Тогда, приравняв коэффициенты перед $[\beta]\sinh[\beta]$, получим следующее

$$\sum_{k=1}^{2}\frac{m_k}{4}\left(-\frac{\lambda_k}{\lambda_k-e^h}+\frac{\lambda_k e^h}{\lambda_k e^h-1}\right)+\sum_{k=1}^{2}\frac{n_k}{4}\left(\frac{\lambda_k^N}{\lambda_k e^h-1}-\frac{\lambda_k^N e^h}{\lambda_k-e^h}\right)=\frac{1}{2\left(4\pi^2\omega^2+1\right)}. \tag{65}$$

Наконец, приравниваем коэффициенты перед $[\beta]$ и получаем следующее

$$C[0]+\sum_{k=1}^{2}\frac{m_k}{2}\left(-\frac{2\lambda_k}{\lambda_k-1}\right)+\sum_{k=1}^{2}\frac{n_k}{2}\left(\frac{2\lambda_k^N}{\lambda_k-1}\right)=-\frac{1}{2\pi i\omega}. \tag{66}$$

и используя следующее

$$\sum_{\gamma=0}^{N}C\left[\gamma\right]=\frac{e^{2\pi i\omega}-1}{2\pi i\omega}.$$

Мы получим следующую систему

$$\begin{cases} C\left[0\right]+\sum\limits_{k=1}^{2}m_k\left(\frac{\lambda_k}{2\left(e^h-\lambda_k\right)}-\frac{\lambda_k e^h}{2\left(\lambda_k e^h-1\right)}\right)+\sum\limits_{k=1}^{2}n_k\left(\frac{\lambda_k^N}{2\left(\lambda_k e^h-1\right)}-\frac{\lambda_k^N e^h}{e^h-\lambda_k}\right)=\frac{2\pi i\omega}{4\pi^2\omega^2+1}, \\ \sum\limits_{k=1}^{2}m_k\left(\frac{\lambda_k}{2\left(e^h-\lambda_k\right)}+\frac{\lambda_k e^h}{2\left(\lambda_k e^h-1\right)}\right)+\sum\limits_{k=1}^{2}n_k\left(\frac{\lambda_k^N}{\lambda_k e^h-1}+\frac{\lambda_k^N e^h}{e^h-\lambda_k}\right)=\frac{1}{4\pi^2\omega^2+1}, \qquad (2) \\ C\left[0\right]+\sum\limits_{k=1}^{2}m_k\left(\frac{\lambda_k}{1-\lambda_k}\right)+\sum\limits_{k=1}^{2}n_k\left(\frac{-\lambda_k^N}{1-\lambda_k}\right)=-\frac{1}{2\pi i\omega}, \quad (3) \\ C\left[N\right]+\sum\limits_{k=1}^{2}m_k\left(\frac{-\lambda_k^N}{1-\lambda_k}\right)+\sum\limits_{k=1}^{2}n_k\left(\frac{\lambda_k}{1-\lambda_k}\right)=\frac{e^{2\pi i\omega}}{2\pi i\omega}. \quad (4) \end{cases} \tag{67}$$

Теперь, используя уравнение 1 в системе (67), воспользуемся следующей заменой для упрощения коэффициент $C\left[0\right]$

$$\sum_{k=1}^{2}\frac{m_k\lambda_k^{N+1}+n_k\lambda_k}{\left(\lambda_k e^h-1\right)\left(e^h-\lambda_k\right)}=\frac{2e^{2\pi i\omega}}{e^{2h}-1}\left(\frac{1}{4\pi^2\omega^2+1}\right). \tag{68}$$

при упрощении коэффициентов $C\left[N\right]$ воспользуемся этой заменой, используя уравнение 2 в системе (67)

$$\sum_{k=1}^{2}\frac{m_k\lambda_k+n_k\lambda_k^{N+1}}{\left(\lambda_k e^h-1\right)\left(e^h-\lambda_k\right)}=\frac{2}{e^{2h}-1}\left(\frac{1}{4\pi^2\omega^2+1}\right). \tag{69}$$

Таким образом, упростив (53) и (55) с помощью уравнений (68) и (53), получим оптимальные коэффициенты для оптимальной квадратурной формулы в виде (1) и приведем их в виде теоремы.

Теорема 4. *В пространстве $K_2^{(3)}\left(0,1\right)$ существует единственная оптимальная квадратурная формула вида (1) коэффициенты которой определятся равенствами*

$$\mathring{C}\left[0\right]=\frac{2\pi i\omega\cdot\sinh\left[1\right]+\cosh\left[1\right]}{\sinh\left[1\right]\cdot\left(4\pi^2\omega^2+1\right)}-e^h\sum_{k=1}^{2}\frac{m_k\lambda_k^2+n_k\lambda_k^N}{\left(e^h-\lambda_k\right)\left(\lambda_k e^h-1\right)}, \tag{70}$$

$$C\left[\beta\right]=\sum_{k=1}^{2}\lambda_k^{\beta}\cdot m_k+\sum_{k=1}^{2}\lambda_k^{N-\beta}\cdot n_k,\ \ \beta=1,2,\ldots N-1. \tag{71}$$

$$\mathring{C}\left[N\right]=\frac{e^{2\pi i\omega}\left(\cosh\left[1\right]-2\pi i\omega\cdot\sinh\left[1\right]\right)}{\sinh\left[1\right]\cdot\left(4\pi^2\omega^2+1\right)}-e^h\sum_{k=1}^{2}\frac{m_k\lambda_k^N+n_k\lambda_k^2}{\left(e^h-\lambda_k\right)\left(\lambda_k e^h-1\right)}, \tag{72}$$

Здесь $\omega h \in \mathbb{Z}, \omega \neq 0$, $|\lambda_k| < 1$,
m_k, n_k $k = 1, 2$ *задаются системой ниже*

$$\sum_{k=1}^{2} m_k \frac{\lambda_k^{N+1}}{(\lambda_k e^h - 1)(e^h - \lambda_k)} + \sum_{k=1}^{2} n_k \frac{\lambda_k}{(\lambda_k e^h - 1)(e^h - \lambda_k)} = \frac{2e^{2\pi i\omega}}{e^{2h} - 1}\left(\frac{1}{4\pi^2\omega^2 + 1}\right),$$
$$\sum_{k=1}^{2} m_k \frac{\lambda_k}{(\lambda_k e^h - 1)(e^h - \lambda_k)} + \sum_{k=1}^{2} n_k \frac{\lambda_k^{N+1}}{(\lambda_k e^h - 1)(e^h - \lambda_k)} = \frac{2}{e^{2h} - 1}\left(\frac{1}{4\pi^2\omega^2 + 1}\right),$$
$$\sum_{k=1}^{2} m_k \left(-\frac{\lambda_k}{1-\lambda_k} + \frac{e^h\lambda_k^2}{(\lambda_k e^h - 1)(e^h - \lambda_k)}\right) + \sum_{k=1}^{2} n_k \left(\frac{\lambda_k^N}{1-\lambda_k} + \frac{e^h\lambda_k^N}{(\lambda_k e^h - 1)(e^h - \lambda_k)}\right) = $$
$$= \frac{1}{2\pi i\omega},$$
$$\sum_{k=1}^{2} m_k \left(\frac{\lambda_k^N}{1-\lambda_k} + \frac{e^h\lambda_k^N}{(\lambda_k e^h - 1)(e^h - \lambda_k)}\right) + \sum_{k=1}^{2} n_k \left(-\frac{\lambda_k}{1-\lambda_k} + \frac{e^h\lambda_k^2}{(\lambda_k e^h - 1)(e^h - \lambda_k)}\right) = $$
$$= -\frac{1}{2\pi i\omega}. \tag{73}$$

Используя приведенные выше результаты, мы можем получить численные результаты, проведя эксперимент в программе Maple.

6 Численные результаты

В этом параграфе мы экспериментируем с неортогональной функцией, принадлежащей этому пространству.
Здесь мы проверяем разность между интегралом

$$\int_0^1 e^{2\pi i\omega x} f(x)$$

и суммой

$$\sum_{\beta=0}^{N} C[\beta]\, f[\beta],$$

в пространстве $\mathrm{K}_2^{(3)}(0,1)$ при $f(x) = e^{2x} + \cos(x)$, соответствующей этому пространству. Где мы рассматриваем случай $\omega h \in \mathbb{Z}$.

Таблица 1

N |ω	10	100	1000	10000	100000
10	$1.354 \cdot 10^{-5}$	$1.608 \cdot 10^{-7}$	$1.611 \cdot 10^{-9}$	$1.611 \cdot 10^{-11}$	$1.611 \cdot 10^{-13}$
100		$1.497 \cdot 10^{-9}$	$1.751 \cdot 10^{-11}$	$1.754 \cdot 10^{-13}$	$1.754 \cdot 10^{-15}$
1000			$1.512 \cdot 10^{-13}$	$1.776 \cdot 10^{-15}$	$1.768 \cdot 10^{-17}$

Здесь $\omega \neq k \cdot N$, $\quad k \in \mathbb{N}$.
Например: если $N = 10$, $\omega = 10,\ 100, \ldots$.
Если $N = 100$, $\omega = 100,\ 1000, \ldots$.
Если $N = 1000$, $\omega = 1000,\ 10000 \ldots$.

Из результатов таблицы 1 видно, что по мере увеличения N в горизонтальном направлении и увеличения ω в вертикальном направлении оптимальная квадратурная формула (1) лучше аппроксимирует. Эксперимент можно провести с произвольной функцией из данного пронстранства.

7 Заключение

Таким образом, для функционала погрешности $\|\ell_N|K_2^{(3)*}\|$ вида (6), определенной в гильбертовом пространстве, при решении задач о нахождении вида ее нормы и нахождении коэффициентов $C[\beta], \quad \beta = 0, 1, \ldots, N$(при ее наличии), придающих наименьшее значение этой нормы, используя метод Соболева мы построили оптимальную квадратурную формулу для приближенного расчета коэффициентов Фурье. При этом мы сначала решили краевую задачу для экстремальной функции квадратурной формулы. Используя экстремальную функцию, мы нашли представление нормы функционала погрешности. Норма функционала погрешности зависит от коэффициентов и узлов. Найдено минимальное значение нормы функционала погрешности на коэффициент с заданными узлами. Так что, мы построили оптимальную квадратурную формулу с $\omega h \in \mathbb{Z}$, $\omega \neq 0$ в гильбертовом пространстве $\mathrm{K}_2^{(3)}(0,1)$.
Экспериментально было показано, что эта формула точна для гиперболического синуса, гиперболического косинуса и постоянного числа. Был проведен эксперимент с использованием функции $f\left(x\right) = e^{2x} + \cos\left(x\right)$, связанной с этим пространством.

Литература

[1] *Milovanović G.V.* "Quadrature processes - development and new directions" Bulletin (Académie serbe des sciences et des arts. Classe des sciences mathématiques et naturelles. Sciences mathématiques), – No. 33 – 2008. – P. 11–41 – 31 p. https://www.jstor.org/stable/44095600.

[2] *Hayotov A.R., Milovanović G. V., Shadimetov Kh.M.* Optimal Quadrature Formulas and Interpolation Splines Minimizing the Semi-Norm in the Hilbert Space $K_2\left(P_2\right)$. Analytic Number Theory, Approximation Theory, and Special Functions. – 2014. – P. 573–611.

[3] *Shadimetov Kh.M., Hayotov A.R. and Bozarov B.* Optimal quadrature formulas for oscillatory integrals in the Sobolev space. // Journal of Inequalities and Applications, 103 – 2022. – P. 1–21. https://doi.org/10.1186/s13660-022-02839-4

[4] *Hayotov A.R., Khayriev U.N.* Optimal quadrature formulas in the space $\widetilde{W}_2^{m,m-1}$ of periodic functions. // Vestnik KRAUNC. Fiz.-Mat. nauki, – 2022. – vol. 40, – no. 3, – P. 211–226. https://doi.org/10.26117/2079-6641-2022-40-3-211-226

[5] *Hayotov A.R., Khayriev U. N.* Construction of an Optimal Quadrature Formulain the Hilbert Space of Periodic Functions. // Lobachevskii Journal of Mathematics, – 2022. – Vol. 43, – No. 11, – P. 3151–3160.

[6] *Alberg J., Nilson E. and Walsh J.* Spline theory and its applications. // - 3rd ed. Reading, MA: Mir, Moscow, – 1972. – 316 p.

[7] *Hayotov A.R., Kurbonnazarov A.I.* An optimal quadrature formula for the approximate calculation of Fourier integrals in the space $K_2^{(3)}\left(0,1\right)$. // Problems of computational and applied mathematics. – – No. 3/1(50) – 2023. – P. 183–196.

[8] *Kurbonnazarov A.I.* Properties of the discrete analogue of the differential operator. // - Problems of computational and applied mathematics, – № 3/1(50) – 2023. – P. 20–29.

[9] *Sobolev S.L.*. The coefficients of optimal quadrature formulas, Selected Works of S.L. Sobolev. // Springer, – 2006. – P. 561–566.

[10] *Hayotov A.R., Ahmadaliev G.N.* A discrete analogue of the differential operator. // Uzbek mathematical journal, – 2017. – P. 10–12.

[11] *Ахмадалиев Г.Н.* Погрешность оптимальной квадратурной формулы в одном гильбертовом пространстве. // Проблемы вычислительной и прикладной математики, – 2022. – № 5/1(44). – С. 5–13.

[12] *Boltaev N.D., Hayotov A.R., Milovanović G. V. and Shadimetov Kh.M.* Optimal quadrature formulas for Fourier coefficients in $W_2^{(m,m-1)}$ space. // Journal of Applied Analysis and Computation, – vol. 7, – Num. 4, – 2017. – P. 1233–1266.

[13] *Filon L.N.G.* On a quadrature formula for trigonometric integrals. // Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 49, – 1928. – P. 38–47.

[14] *Schoenberg I.J.* On monosplines of last deviation and best quadrature formulae // J. Soc. Indust. Appl. Math. Ser. B Numer. Anal., 2, – 1965. – P. 144–170.

[15] *Olver S. and Hall T.* Numerical Approximation of Highly Oscillatory Integrals. // 2nd ed. Reading, MA: University of Cambridge, – 2008. – 158 p. (in English)

[16] *Iserles A. and Nørsett S.P.* Efficient quadrature of highly oscillatory integrals using derivatives. // Proc. R. Soc. A, – 2005. – P. 1383–1399.

[17] *Соболев С.Л.* Введение в теорию кубатурных формул. М. Наука, – 1974. – 808 с.

[18] *Atkinson K. and Han W.* Theoretical Numerical Analysis. Springer. Textbook. USA, – 2000. – P. 83–84.

[19] *Trefethen L.N..* Exactness of Quadrature Formulas. SIAM Review, – 2022. – vol. 64, – P. 1–17.

[20] *Laudadio T., Mastronardi N., Occorsio D.* Computing integrals with an exponential weight on the real axis in floating point arithmetic. Applied Numerical Mathematics, – 2023. – P. 309–317.

[21] *Bultheel A., Cantero M.J., Cruz-Barroso R.* Matrix methods for quadrature formulas on the unit circle. A survey.Journal of Computational and Applied Mathematics, – 2015. – P. 78–100.

[22] *Hinrichs A., Krieg D., Novak E, Vybíral J.* Lower bounds for the error of quadrature formulas for Hilbert spaces. Journal of Complexity, – Volume 65, 101544. – 2021.

[23] *Ogbereyivwe O and Ojo-Orobosa V..* High Order Quadrature Based Iterative Method for Approximating the Solution of Nonlinear Equations. Caspian Journal of Mathematical Sciences, – 2020. – P. 243–255.

[24] *Gander M.J., Lunet T.* ParaStieltjes: Parallel computation of Gauss quadrature rules using a Parareal-like approach for the Stieltjes procedure.Numerical linear Algebra with Applications, – 2020. – P. 1–17.

[25] *Homeier H. H. H., Srivastava H. M., Masjed Jamei M., Moalemi Z.* Some weighted quadrature methods based upon the mean value theorems. Mathematical Methods in the Applied Sciences, – 2020. – 44(5), – P. 3840–3856.

[26] *Bellet JB., Brachet M.,Croisille JP.* QUADRATURE AND SYMMETRY ON THE CUBED SPHERE. Journal of Computational and Applied Mathematics, – 2022. – P. 1–17.

[27] *Mahesar S., Shaikh M.M., Chandio M.S. and Shaikh A.W.* Some New Time and Cost Efficient Quadrature Formulas to Compute Integrals Using Derivatives with Error Analysis. Symmetry, – 2022. – 14(12), 2611.

[28] *Hayotov A.R., Jeon S., Lee Ch.* On an optimal quadrature formula for approximation of Fourier integrals in the space $L_2^{(1)}$. Journal of Computational and Applied Mathematics, Page 112713, – Volume 372. – 2020.

[29] *Huda J.S., Noori Y.A.* An Efficient Three-step Iterative Methods Based on Bernstein Quadrature Formula for Solving Nonlinear Equations. Basrah Journal of Science, – vol. 39(3), – 2021. – P. 355–383.

[30] *Shivaram K.T., Prakasha H.T.* Введение в теорию кубатурных формул. Numerical Evaluation of Highly Oscillatory Integrals of Arbitrary Function Using Gauss-Legendre Quadrature Rule, – 2020. – P. 211–216.

[31] *Aimi A., Calabrò F., Falini A., Sampoli M. L., and Sestini A.* Quadrature formulas based on spline quasi-interpolation for hypersingular integrals arising in IgA-SGBEM. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, – 2020. – 113441.

Поступила в редакцию 12.07.2024

UDC 519.653

OPTIMAL QUADRATURE FORMULA FOR CALCULATING FOURIER COEFFICIENTS IN HILBERT SPACE

Kurbonnazarov A.I.
mumin_1974@inbox.ru
Termiz State University,
43, Barkamol Avlod str., Termiz, 190111 Uzbekistan.

This paper discusses the construction of an optimal quadrature formula based on a functional approach for the numerical calculation of Fourier coefficients. In this case, first we solve the boundary value problem for the extremal function of the quadrature formula. Using the extremal function, the form of the norm of the error functional is found. The norm of the error functional depends on the coefficients and nodes. We find the minimum value of the norm of the functional based on the coefficients with given nodes. Thus, we will construct an optimal quadrature formula with in the Hilbert space. The order of approximation of the constructed quadrature formula is $O(h^3)$ and this formula is exact for the hyperbolic sine, hyperbolic cosine and constant number.

Keywords: quadrature formula, Fourier coefficients, error functional, extremal function.

Citation: Kurbonnazarov A.I. 2024. Optimal quadrature formula for calculating Fourier coefficients in Hilbert space. *Problems of Computational and Applied Mathematics.*4/1(59): 46-63.

ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

№ 4/1(59) 2024

Журнал основан в 2015 году.
Издается 6 раз в год.

Учредитель:
Научно-исследовательский институт развития цифровых технологий и искусственного интеллекта.

Журнал зарегистрирован в Агентстве информации и массовых коммуникаций при Администрации Президента Республики Узбекистан.
Регистрационное свидетельство №0856 от 5 августа 2015 года.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

Адрес редакции:
100125, г. Ташкент, м-в. Буз-2, 17А.
Тел.: +(998) 712-319-253, 712-319-249.
Э-почта: `journals@airi.uz`.
Веб-сайт: `https://journals.airi.uz`.

Дизайн и вёрстка:
Шарипов Х.Д.

Отпечатано в типографии НИИ РЦТИИ.
Подписано в печать 05.09.2024 г.
Формат 60x84 1/8. Заказ №5. Тираж 100 экз.

PROBLEMS OF COMPUTATIONAL AND APPLIED MATHEMATICS

No. 4/1(59) 2024

The journal was established in 2015.
6 issues are published per year.

Founder:
Digital Technologies and Artificial Intelligence Development Research Institute.

The journal is registered by Agency of Information and Mass Communications under the Administration of the President of the Republic of Uzbekistan.
The registration certificate No. 0856 of 5 August 2015.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

Address:
100125, Tashkent, Buz-2, 17A.
Tel.: +(998) 712-319-253, 712-319-249.
E-mail: journals@airi.uz.
Web-site: https://journals.airi.uz.

Layout design:
Sharipov Kh.D.

DTAIDRI printing office.
Signed for print 05.09.2024
Format 60x84 1/8. Order No. 5. Printed copies 100.

Профессор
ИСРАИЛОВ МАРУФ ИСРАИЛОВИЧ
(к 90-летию со дня рождения)

Маруф Исраилович Исраилов – известный ученый-математик, доктор физико-математических наук, профессор, крупный специалист в области теории чисел и вычислительной математики.

М.И. Исраилов родился 27 апреля 1934 года в городе Самарканде в семье ремесленника. В 1951 году с отличием окончив среднюю школу №16 г. Самарканда, поступил на физико-математический факультет Самаркандского государственного университета, который успешно окончил в 1956 г. С 1958 по 1961 годы проходил обучение в аспирантуре Института математики им. В.И. Романовского под руководством профессора Н.П. Романова. В 1966 году защитил кандидатскую диссертацию на тему «Проблема Тарри для быстрорастущих слагаемых и ее приложение к изучению эргодических сумм». В 1974 году М.И. Исраилову присвоено звание старшего научного сотрудника. В 1986 году М.И. Исраилов защитил докторскую диссертацию на тему «Асимптотические и точные формулы для аддитивных задач с растущим числом слагаемых», а в 1989 году получил звание профессора по специальности «Вычислительная математика».

После окончании аспирантуры М.И. Исраилов работал младшим научным сотрудником в Вычислительном центре Института математики АН РУз, затем с 1966 г. – старшим научным сотрудником. С 1976 года работал на должности заведующего лабораторией «Теория приближенного интегрирования» Института кибернетики с вычислительным центром. С 1984 г. и до 1995 г. – являлся заведующим отделом «Вычислительные методы» Института математики АН РУз. В том же 1995 году М.И. Исраилов приступил к работе в Самаркандском государственном университете в качестве заведующего кафедрой вычислительной математики.

Профессор М.И. Исраилов имел широкий диапазон научных интересов. Его глубокие исследования в областях аддитивных задач, построения общих арифметических ортогональных и биортогональных систем в гильбертовых пространствах; нахождения числа решений различных классов диофантовых уравнений, оценке тригонометрических сумм; построения оптимальных квадратурных и кубатурных формул в различных функциональных пространствах, а также приближенного решения регулярных и сингулярных интегральных уравнений внесли существенный вклад в развитие теории чисел и вычислительной математики. Результаты его работ успешно применяются в многочисленных прикладных задачах.

М.И. Исраилов впервые исследовал проблему Тарри для общих числовых последовательностей и применил к изучению эргодических сумм. Здесь он также решил известную проблему венгерского математика П. Эрдеша (об оценке снизу максимума модуля многочленов на единичной окружности) в обобщенной и уточненной постановке. М.И. Исраилову принадлежит всестороннее исследование аддитивных задач с растущим числом слагаемых. Он получил асимптотические разложения в проблеме Варинга с полиномиальными слагаемыми и в диофантовой системе Гильберта-Камке.

Им также найдена точная формула для числа решений линейных диофантовых уравнений общего вида. Эта формула нашла применение в теории инвариантных кубатурных формул академика С.Л.ЁСоболева и позволила сильно упростить исследование и построение таких формул на поверхности многомерных сфер и шаров.

Маруф Исраилович также внес существенный вклад в применение теоретико-числовых методов и методов сплайн-функций в вычислительной математике. Им построены оптимальные квадратурные и кубатурные формулы сингулярных интегралов с ядрами Гильберта и Коши, найдены приближенно-аналитические решения систем одномерных и многомерных интегральных уравнений с ядрами Фредгольма, Гильберта и Коши. Найдены оценки погрешности в различных часто встречающихся пространствах функций. Эти результаты имеют многочисленные применения в прикладных задачах, в частности в аэродинамике и гидродинамике. Характерной особенностью этого цикла исследований является новизна постановок задач и разработка новых методов их решения.

Отдельные результаты исследований М.И. Исраилова по теории дзета-функции Римана и проблеме делителей Дирихле вызвали большой резонанс среди специалистов за пределами нашей страны.

В Маруфе Исраиловиче гармонично сочетались способности крупного ученого, талантливого педагога и умелого руководителя крупных научных исследований. Он успешно сочетал плодотворную научную и научно-организаторскую деятельность с большой педагогической и общественной деятельностью. С 1967 г. М.И. Исраилов читал общие и специальные курсы на факультете прикладной математики Ташкентского государственного университета, а с 1995 по 2003 годы – в Самаркандском государственном университете, где до конца жизни продолжал активную научно-педагогическую деятельность в качестве почетного профессора-консультанта.

М.И. Исраилов с 1972 г. являлся членом двух специализированных советов по защите кандидатских и докторских диссертаций. С 1967 по 1995 годы руководил работой организованного им городского научного семинара «Применение теории чисел в вычислительной математике» при Институте кибернетики АН РУз и Институте математики АН РУз, а с 1995 года руководил научным семинаром «Приближенные методы высшего анализа» в СамГУ.

Работая в крупнейших ВУЗах и НИИ республики, Маруф Исраилович подготовил десятки учеников, успешно работающих в различных сферах экономики республики, в странах ближнего и дальнего зарубежья. М.И. Исраилов руководил работами магистрантов, аспирантов и докторантов. Под его руководством защищены более 10 кандидатских диссертаций, он способствовал защите трех докторских диссертаций. С 1993 г. М.И. Исраилов со своими докторантами, аспирантами и студентами вёл научные исследования в рамках проектов, имеющих фундаментальное значение и широкое прикладное применение.

Обычно будущих ученых Маруф Исраилович привлекал к науке со студенческой скамьи. Более того, он с аспирантских лет активно участвовал в поиске и формировании юных математических дарований в системе школьного образования. Будучи аспирантом и молодым ученым М.И. Исраилов преподавал в специализированной физико-математической школе №82 города Ташкента, организованной академиком В.К. Кабуловым. Многие ученики М.И. Исраилова из этой школы стали в последующем докторами наук и известными специалистами в своих отраслях. Подготовку математиков со школьной скамьи профессор М.И. Исраилов продолжил в физико-математическом лицее г. Самарканда, учащиеся которого регулярно занимали призовые места на различных международных математических олимпиадах. На протяжении всей педагогической деятельности своими научно-популярными статьями в энциклопедиях, в различных общественных и молодежных изданиях, ряде телепередач М.И. Исраилов умело и выверено формировал математическую культуру мышления у молодежи.

М.И. Исраилов – автор более 160 научных, 40 научно-популярных работ. Около 50 его научных статей опубликованы в авторитетных изданиях ближнего и дальнего зарубежья. Профессор М.И. Исраилов является автором широко известного двухтомного учебника по вычислительной математике «Хисоблаш методлари». Данная книга является единственным учебником подобного типа на узбекском языке и принята в качестве основного в ведущих университетах Узбекистана. Этот учебник написан на основе оригинальных лекций М.И. Исраилова, которые он читал на протяжении 40 лет в Национальном университете Узбекистана, Самаркандском государственном университете, на семинарах в Институте математики АН РУз. Также результатом многолетнего чтения лекций стал учебник по теории чисел «Сонлар назарияси» в соавторстве с профессором А. Солеевым.

М.И. Исраилов и его ученики участвовали с докладами во многих международных научных форумах. Он принимал участие в Международном конгрессе математиков, Всемирном конгрессе общества Бернулли и других. Был одним из активных организаторов всех международных конференций по теории кубатурных формул, проводимых в Узбекистане. Профессор М.И. Исраилов до последних дней оставался активным участником ежегодной Международной научно-практической конференции «Инновация». Являясь одним из бессменных руководителей секции «Математика. Математическое моделирование», М.И. Исраилов поддерживал высокий уровень научных изысканий и докладов конференции. М.И. Исраилов был членом редколлегии сборника «Вопросы вычислительной и прикладной математики», а также ответственным редактором сборников по вычислительной математике, выпускаемых в Институте математики АН РУз. А с 2001 года являлся членом редколлегии сборника научных статей Международной конференции «Инновация». Являлся членом Американского математического общества и экспертом международного журнала «Mathematical Reviews».

Маруфе Исраилович неоднократно награждался почетными грамотами Академии наук Республики Узбекистан.

В знак признания весомого многолетнего вклада профессора М.И. Исраилов в развитие математической науки и подготовку высококвалифицированных кадров в 2009 году Национальным университетом Узбекистана была проведена республиканская научная конференция «Вычислительные технологии и математическое моделирование», посвященная его 75-летию. В 2013 году проведен научный семинар «Профессор М.И. Исраилов и развитие прикладной математики в Узбекистане», в 2014 году состоялась научно-техническая конференция «Прикладная математика и информационная безопасность», посвященная 80-летию учёного. В текущем 2024 году в связи с 90-летием профессора М.И. Исраилова в НУУз организован международный научный семинар «Вычислительные модели и технологии (CMT2024)».

Созданная профессором М.И. Исраиловым научная школа по численным методам и в настоящее время продолжает продуктивно функционировать. Ученики и последователи Маруфа Исраиловича сегодня успешно работают в различных сферах и отраслях экономики нашей республики и за рубежом, продолжая дело своего Устоза-учителя.

Редакционная коллегия журнала «Проблемы вычислительной и прикладной математики» посвящает данный специальный выпуск светлой памяти профессора Маруфа Исраиловича Исраилова – выдающегося учёного, талантливого педагога, заботливого наставника и замечательного человека, который навсегда останется в памяти друзей, коллег и учеников.

Содержание

Contents