

UDC 519.652

AN OPTIMAL INTERPOLATION FORMULA WITH DERIVATIVES IN SOBOLEV SPACE

^{1,2*} *Olimov N.N.*, ³ *Bekmurodova D.B.*

*olimovnurali8@gmail.com

¹V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics,
9, University str., Tashkent, 100174 Uzbekistan;

²Bukhara State University,
11, Muhammad Iqbal Street, Bukhara, 705018 Uzbekistan,

³Secondary school No. 154,
83A, Fitrat st., Tashkent, 100072 Uzbekistan.

The construction of an optimal interpolation formula within the Hilbert space is the focus of this paper. The difference between a given function and an interpolation formula is estimated by the norm of the error functional. We use an extremal function for the error functional R in order to compute the norm. The interpolation formula's coefficients and nodes affect the error functional. Here, with established nodes, the minimal value for the norm of the error functional is calculated with respect to coefficients. Encouraged, we obtain the system of linear equation for the optimal interpolation formula's coefficients.

Keywords: interpolation, splines, interpolation with derivatives, extremal function, error functional.

Citation: Olimov N.N., Bekmurodova D.B. 2024. An optimal interpolation formula with derivatives in Sobolev space. *Problems of Computational and Applied Mathematics*. 4/1(59): 37-45.

1 Introduction and statement of the problem

In mathematical analysis, numerical methods address various problems, including interpolation, smoothing, best approximation, and situations where approximations are integral in the study process. Conventionally, interpolating polynomials like Lagrange, Newton, and Hermitian polynomials have been utilized. However, due to their limitations in approximating functions with singularities, these polynomials exhibit drawbacks such as reduced smoothness.

For instance, when constructing Lagrangian interpolating polynomials for a continuous function with uniformly distributed nodes, there's a known issue—the polynomials deviate from accurately representing the function as their degree increases (known as the Runge phenomenon).

To address these limitations and approximate functions more effectively, splines have emerged as a preferred alternative over complex interpolating polynomials. Splines are viewed as smooth piecewise polynomial functions, while in the variational context, a spline is perceived as an element within a Hilbert or Banach space minimizing a specific functional. The properties of these solutions, including existence, uniqueness, convergence issues, construction methods, and algorithm development, are explored within this framework. More recent results on splines are described, for example, in study [1], [2].

Therefore, it is widely used in practice in telecommunications, geology, engineering, and mechanics. In particular, methods for creating electronic topographic images of surface and underwater terrain are studied in geographical research [3]. The B-spline method was used in this work.

Moreover, the use of spline interpolation, a technique commonly used in computer graphics, animations, and robotics. In work [9], it focuses on the challenges of real-time applications where future data points may not be available, making traditional methods like Catmull-Rom splines impractical. To address this, a new family of interpolation splines called Three-Point Splines is introduced, which requires only three control points instead of four and doesn't rely on future data points. These splines offer smooth curves, greater adaptability in parameterization, and avoid self-intersections without needing complex computations. Additionally, the work discusses a method to modify control points during an ongoing interpolation for both three-point splines and Catmull-Rom splines.

In addition, spline methods are used to solve medical problems. For example, in [4] work, the cubic spline method is employed to mathematically model the shape of teeth and understand the influence of orthodontic wires. It aims to provide a more accurate representation of tooth movement, offering insights into the real nature of these movements beyond symmetric shapes commonly used in orthodontics.

The current research is dedicated to the construction of optimal interpolation formulas through variation-based derivations. The interpolation formula uses the values of the function and its first and second derivatives in the interpolation nodes.

Let the functions φ belong to the Sobolev space $L_2^{(3)}(0, 1)$. Here, $L_2^{(3)}(0, 1)$ is the Hilbert space of functions that are square integrable with a second generalized derivative in the interval $[0, 1]$. Optimal interpolation formulas were constructed in variety spaces. (see [11], [12], [13], [5], [6]).

The space is equipped with the norm

$$\|\varphi\|_{L_2^{(3)}} = \sqrt{\int_0^1 (f'''(x))^2 dx}.$$

Let a grid $\Delta : 0 = x_0 < x_1 < \dots < x_N = 1$ be given on the interval $[0, 1]$. Assume that on this grid, the following values of the function and its first and second derivatives are given:

$$\varphi(x_\beta), \varphi'(x_\beta), \varphi''(x_\beta), \quad \beta = 0, 1, \dots, N. \quad (1)$$

In this work, we consider the problem of optimal interpolation of functions $\varphi(x)$ given by values (1) at points x_β , $\beta = 0, 1, \dots, N$ in the space $L_2^{(3)}(0, 1)$. For this, we consider the problem of interpolation of the functions $\varphi(x)$ with a more straightforward function of the form

$$\varphi(x) \cong P_\varphi(x) = \sum_{\beta=0}^N C_\beta(x) \varphi(x_\beta) + \sum_{\beta=0}^N C_{\beta,1}(x) \varphi'(x_\beta) + \sum_{\beta=0}^N C_{\beta,2}(x) \varphi''(x_\beta). \quad (2)$$

In this case, we get the approximate equality

$$\varphi(x) \cong P_\varphi(x), \quad (3)$$

and let the coefficient functions $C_\beta(x)$ in expression (2) be known in the following form [2]

$$C_0(z) = \frac{h-z}{h},$$

$$C_\beta(z) = \begin{cases} 0, & 0 \leq z \leq h(\beta-1), \\ \frac{z+h-h\beta}{h}, & h(\beta-1) < z \leq h(\beta), \\ \frac{h-z+h\beta}{h}, & h\beta < z \leq h(\beta+1), \\ 0, & h(\beta+1) < z \leq 1, \end{cases}$$

$$C_N(z) = \frac{h+z}{h}.$$

There is a unique analytical formula for the coefficients $C_\beta(x)$.

And the coefficient functions $C_{\beta,1}(x)$ in expression (2) have the following form [14]:

$$C_{0,1}(z) = \begin{cases} \frac{z(h-z)}{2h}, & 0 \leq z \leq h, \\ 0, & h < z \leq 1, \end{cases}$$

$$C_{\beta,1}(z) = \begin{cases} \frac{(z-h\beta)^2+h(z-h\beta)}{2h}, & h(\beta-1) \leq z < h\beta, \\ \frac{-(z-h\beta)^2+h(z-h\beta)}{2h}, & h\beta \leq z \leq h(\beta+1), \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

$$C_{N,1}(z) = \begin{cases} 0, & 0 \leq z \leq h(N-1), \\ \frac{(z-1)(z-1+h)}{2h}, & h(N-1) \leq z \leq 1. \end{cases}$$

The error associated with the approximate equality (3) takes the form of a difference expressed as

$$R_\varphi(x) = \varphi(x) - P_\varphi(x). \quad (4)$$

The error functional $R_\varphi(x)$ defines a linear continuous functions over the space $L_2^{(3)}(0,1)$ and $\varphi_1(x) = 1$, $\varphi_2(x) = x$ and $\varphi_3(x) = x^2$ are taken as basis functions for the space of all linear functions and quadratic, the imposition of

$$R_{\varphi_i}(x) = \varphi_i(x) - P_{\varphi_i}(x) = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

conditions on the error functional $R_\varphi(x)$ is sufficient for the approximation formula (3) to be accurate for all linear and quadratic functions.

According to the Cauchy-Schwarz inequality, the upper bound of the error functional looks like this:

$$|R_\varphi(x)| = |\varphi(x) - P_\varphi(x)| \leq \|R_\varphi\| \cdot \|\varphi\|. \quad (5)$$

From this, we consider

$$R(x, z) = \delta(x-z) - \sum_{\beta=0}^N C_\beta(z) \cdot \delta(x-x_\beta) + \sum_{\beta=0}^N C_{\beta,1}(z) \cdot \delta'(x-x_\beta) - \sum_{\beta=0}^N C_{\beta,2}(z) \cdot \delta''(x-x_\beta) \quad (6)$$

$$\begin{aligned} (R, \varphi) &= \int_{-\infty}^{\infty} R(x, z) \cdot \varphi(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\delta(x-z) - \sum_{\beta=0}^N C_\beta(z) \cdot \delta(x-x_\beta) + \sum_{\beta=0}^N C_{\beta,1}(z) \cdot \delta'(x-x_\beta) \right. \\ &\quad \left. - \sum_{\beta=0}^N C_{\beta,2}(z) \cdot \delta''(x-x_\beta) \right) \cdot \varphi(x) dx \\ &= \varphi(z) - \sum_{\beta=0}^N C_\beta(z) \cdot \varphi(x_\beta) - \sum_{\beta=0}^N C_{\beta,1} \cdot \varphi'(x_\beta) - \sum_{\beta=0}^N C_{\beta,2} \cdot \varphi''(x_\beta). \end{aligned}$$

$$|(R, \varphi)| \leq \|R_\varphi\| \cdot \|\varphi\|,$$

to construct an optimal interpolation formula.

In order to construct an optimal interpolation formula of the form (2), it is necessary to calculate $\|R_\varphi\|$, then we find the smallest value of this quantity in the given C_β and $C_{\beta,1}$ by the coefficients $C_{\beta,2}$. That is, we calculate

$$\inf_{C_{\beta,2}} \|R\|. \quad (7)$$

The coefficients $C_{\beta,2}$ reaching the value (7) are called optimal coefficients.

So, initially

- we calculate $\|R\|_{L_2^{(3)*}}$
- we find $\overset{\circ}{C}_{\beta,2}$ which gives $\inf_{C_{\beta,2}} \|R\|$.

To calculate $\|R\|_{L_2^{(3)*}}$, we use the definition of the extremal function [10]. $U_R(x)$ extremal function satisfying the following equality:

$$(R, U_R) = \|R\|_{L_2^{(3)*}} \cdot \|U_R\|_{L_2^{(3)}},$$

here,

$$U_R(x) = (-1)^3 R(x) * G_3(x) + p_2 x^2 + p_1 x + p_0 \quad (7*),$$

where

$$G_3(x) = \frac{|x|^5}{240}.$$

Now, we firstly calculate the convolution in equation (7*).

$$\begin{aligned} R(x) * G_3(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} R(y) \cdot G_3(x-y) dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\delta(y-z) - \sum_{\beta=0}^N C_\beta \delta(y-x_\beta) + \sum_{\beta=0}^N C_{\beta,1} \delta'(y-x_\beta) - \sum_{\beta=0}^N C_{\beta,2} \delta''(y-x_\beta) \right) \cdot \frac{|x-y|^5}{240} dy \\ &= \frac{|x-z|^5}{240} - \sum_{\beta=0}^N C_\beta \frac{|x-z|^5}{240} + \sum_{\beta=0}^N C_{\beta,1} \frac{\operatorname{sgn}(x-x_\beta)(x-x_\beta)^4}{48} - \sum_{\beta=0}^N C_{\beta,2} \frac{\operatorname{sgn}(x-x_\beta)(x-x_\beta)^3}{12}. \end{aligned} \quad (8)$$

Then the extremal function has the following form:

$$\begin{aligned} U_R(x) &= -\frac{|x-z|^5}{240} + \sum_{\beta=0}^N C_\beta \frac{|x-z|^5}{240} - \sum_{\beta=0}^N C_{\beta,1} \frac{\operatorname{sgn}(x-x_\beta)(x-x_\beta)^4}{48} \\ &\quad + \sum_{\beta=0}^N C_{\beta,2} \frac{\operatorname{sgn}(x-x_\beta)(x-x_\beta)^3}{12} + p_2 x^2 + p_1 x + p_0. \end{aligned}$$

Taking into account the last expression, we get

$$\begin{aligned} (R, U_R) &= \int_{-\infty}^{\infty} R(x) \cdot U_R(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} R(x) \cdot (R(x) * G_3(x) + p_2 x^2 + p_1 x + p_0) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} R(x) \cdot (R(x) * G_3(x)) dx + p_2 (R, x^2) + p_1 (R, x) + p_0 (R, 1) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} R(x) \cdot (R(x) * G_3(x)) dx. \end{aligned} \quad (9)$$

Using expression (8), we obtain from expression (9).

$$\begin{aligned}
(R, U_R) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\delta(x-z) - \sum_{\beta=0}^N C_{\beta}(z) \cdot \delta(x-x_{\beta}) + \sum_{\beta=0}^N C_{\beta,1}(z) \cdot \delta'(x-x_{\beta}) \right. \\
&\quad \left. - \sum_{\beta=0}^N C_{\beta,2}(z) \cdot \delta''(x-x_{\beta}) \right) \cdot \left(-\frac{|x-z|^5}{240} + \sum_{\beta=0}^N C_{\beta} \frac{|x-z|^5}{240} \right. \\
&\quad \left. - \sum_{\beta=0}^N C_{\beta,1} \frac{\text{sgn}(x-x_{\beta})(x-x_{\beta})^4}{48} + \sum_{\beta=0}^N C_{\beta,2} \frac{\text{sgn}(x-x_{\beta})(x-x_{\beta})^3}{12} \right) \\
&= - \sum_{\beta=0}^N \sum_{\gamma=0}^N C_{\beta,2} C_{\gamma,2} \frac{|x_{\beta}-x_{\gamma}|}{2} - \sum_{\beta=0}^N C_{\beta,2} \left[\sum_{\gamma=0}^N C_{\gamma} \frac{|x_{\beta}-x_{\gamma}|^3}{12} \right. \\
&\quad \left. - \sum_{\gamma=0}^N C_{\gamma,1} \frac{\text{sgn}(x_{\beta}-x_{\gamma})(x_{\beta}-x_{\gamma})^2}{4} - \frac{|x_{\beta}-z|^3}{12} \right] \\
&\quad - \sum_{\beta=0}^N C_{\beta,2} \cdot \left[\sum_{\gamma=0}^N C_{\gamma} \frac{|x_{\beta}-x_{\gamma}|^3}{12} - \sum_{\gamma=0}^N C_{\gamma,1} \frac{\text{sgn}(x_{\beta}-x_{\gamma})(x_{\beta}-x_{\gamma})^2}{4} - \frac{|x_{\beta}-z|^3}{12} \right] \\
&\quad - \sum_{\beta=0}^N C_{\beta,1} \cdot \left[-\frac{\text{sgn}(x_{\beta}-z)(x_{\beta}-z)^4}{48} + \sum_{\gamma=0}^N C_{\gamma} \frac{\text{sgn}(x_{\beta}-x_{\gamma})(x_{\beta}-x_{\gamma})^4}{48} \right] \\
&\quad - \sum_{\beta=0}^N \sum_{\gamma=0}^N C_{\beta,1} C_{\gamma,1} \frac{|x_{\beta}-x_{\gamma}|^3}{12} \\
&\quad - \sum_{\beta=0}^N C_{\beta,1} \cdot \left[-\frac{\text{sgn}(x_{\beta}-z)(x_{\beta}-z)^4}{48} + \sum_{\gamma=0}^N C_{\gamma} \frac{\text{sgn}(x_{\beta}-x_{\gamma})(x_{\beta}-x_{\gamma})^4}{48} \right] \\
&\quad - \sum_{\beta=0}^N \sum_{\gamma=0}^N C_{\beta} C_{\gamma} \frac{|x_{\beta}-x_{\gamma}|^5}{240} + \sum_{\gamma=0}^N C_{\beta} \frac{|x_{\beta}-x_{\gamma}|^5}{240} + \sum_{\gamma=0}^N C_{\beta} \frac{|x_{\beta}-x_{\gamma}|^5}{240}. \tag{10}
\end{aligned}$$

We also have the following equalities

$$\begin{aligned}
(R, 1) &= \int_{-\infty}^{\infty} R(x) \cdot 1 dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\delta(x-z) - \sum_{\beta=0}^N C_{\beta} \delta(x-x_{\beta}) + \sum_{\beta=0}^N C_{\beta,1} \delta'(x-x_{\beta}) - \sum_{\beta=0}^N C_{\beta,2} \delta''(x-x_{\beta}) \right) \cdot 1 dx \\
&= 1 - \sum_{\beta=0}^N C_{\beta} - \sum_{\beta=0}^N C_{\beta,1} (1)' \sum_{\beta=0}^N C_{\beta,2} (1)'' = 1 - \sum_{\beta=0}^N C_{\beta} = 0.
\end{aligned}$$

From above, we have

$$\sum_{\beta=0}^N C_{\beta} = 1. \tag{11}$$

$$\begin{aligned}
(R, x) &= \int_{-\infty}^{\infty} R(x) \cdot x dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\delta(x - z) - \sum_{\beta=0}^N C_{\beta} \delta(x - x_{\beta}) + \sum_{\beta=0}^N C_{\beta,1} \delta'(x - x_{\beta}) - \sum_{\beta=0}^N C_{\beta,2} \delta''(x - x_{\beta}) \right) \cdot x dx \\
&= z - \sum_{\beta=0}^N C_{\beta} \cdot x_{\beta} - \sum_{\beta=0}^N C_{\beta,1} - \sum_{\beta=0}^N C_{\beta,2} \cdot 0 = z - \sum_{\beta=0}^N C_{\beta} x_{\beta} - \sum_{\beta=0}^N C_{\beta,1} = 0,
\end{aligned}$$

So, we get

$$\sum_{\beta=0}^N C_{\beta,1} = 0. \quad (12)$$

Similarly, we come

$$\begin{aligned}
(R, x^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} R(x) \cdot x^2 dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\delta(x - z) - \sum_{\beta=0}^N C_{\beta} \delta(x - x_{\beta}) + \sum_{\beta=0}^N C_{\beta,1} \delta'(x - x_{\beta}) - \sum_{\beta=0}^N C_{\beta,2} \delta''(x - x_{\beta}) \right) \cdot x^2 dx \\
&= z^2 - \sum_{\beta=0}^N C_{\beta} \cdot x_{\beta}^2 - 2 \sum_{\beta=0}^N C_{\beta,1} x_{\beta} - 2 \sum_{\beta=0}^N C_{\beta,2} = 0.
\end{aligned} \quad (13)$$

So, we get the following expression for the norm of the error functional of the interpolation formula (2).

$$\begin{aligned}
\|R\|^2 &= - \sum_{\beta=0}^N \sum_{\gamma=0}^N C_{\beta,2} C_{\gamma,2} \frac{|x_{\beta} - x_{\gamma}|}{2} - 2 \sum_{\beta=0}^N C_{\beta,2} \left[\sum_{\gamma=0}^N C_{\gamma} \frac{|x_{\beta} - x_{\gamma}|^3}{12} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{\gamma=0}^N C_{\gamma,1} \frac{\text{sgn}(x_{\beta} - x_{\gamma})(x_{\beta} - x_{\gamma})^2}{4} + \frac{|x_{\beta} - z|^3}{12} \right] \\
&\quad - 2 \sum_{\beta=0}^N C_{\beta,1} \cdot \left[- \frac{\text{sgn}(x_{\beta} - z)(x_{\beta} - z)^4}{48} + \sum_{\gamma=0}^N C_{\gamma} \frac{\text{sgn}(x_{\beta} - x_{\gamma})(x_{\beta} - x_{\gamma})^4}{48} \right] \\
&\quad - \sum_{\beta=0}^N \sum_{\gamma=0}^N C_{\beta,1} C_{\gamma,1} \frac{|x_{\beta} - x_{\gamma}|^3}{12} - \sum_{\beta=0}^N \sum_{\gamma=0}^N C_{\beta} C_{\gamma} \frac{|x_{\beta} - x_{\gamma}|^5}{240} + 2 \cdot \sum_{\gamma=0}^N C_{\beta} \frac{|x_{\beta} - x_{\gamma}|^5}{240}. \quad (14)
\end{aligned}$$

In the following two conditions, it is necessary to find the smallest value of the expression (14) according to the coefficients $C_{\beta,2}$.

From expressions (11) and (12), conditions $\sum_{\beta=0}^N C_{\beta} = 1$ and $\sum_{\beta=0}^N C_{\beta,1} = 0$ is valid for coefficients C_{β} and $C_{\beta,1}$.

We find the minimum of expression (14) under conditions (11) and (12). For this, we come to the problem of finding the conditional extremum of a multivariable Logrange function.

We construct the Logrange function:

$$\Lambda = \|R\|^2 - 2\lambda(R, x^2) = \|R\|^2 + 2\lambda \left(z^2 - \sum_{\beta=0}^N C_{\beta} \cdot x_{\beta}^2 - 2 \sum_{\beta=0}^N C_{\beta,1} x_{\beta} - 2 \sum_{\beta=0}^N C_{\beta,2} \right).$$

Then, we get the partial derivatives by coefficients $C_{\beta,2}$ and λ and equating to zero.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Lambda}{\partial C_{\beta,2}} &= -2 \sum_{\gamma=0}^N C_{\gamma,2} \frac{|x_\beta - x_\gamma|}{2} - 2 \left(\sum_{\gamma=0}^N C_\gamma \frac{\operatorname{sgn}(x_\beta - x_\gamma)(x_\beta - x_\gamma)^3}{12} \right. \\ &\quad \left. - \sum_{\gamma=0}^N C_{\gamma,1} \frac{\operatorname{sgn}(x_\beta - x_\gamma)(x_\beta - x_\gamma)^2}{4} - \frac{|x_\beta - z|^3}{12} \right) - 4\lambda = 0, \beta = 0, 1, \dots, N, \\ \frac{\partial \Lambda}{\partial \lambda} &= 2 \left((z^2 - \sum_{\beta=0}^N C_\beta \cdot x_\beta^2 - 2 \sum_{\beta=0}^N C_{\beta,1} x_\beta - 2 \sum_{\beta=0}^N C_{\beta,2}) \right) = 0. \end{aligned}$$

So, we get the following system of linear equations:

$$\begin{aligned} \sum_{\gamma=0}^N C_{\gamma,2} \frac{|x_\beta - x_\gamma|}{2} + 2\lambda &= f(x_\beta, z), \\ \beta &= 0, 1, \dots, N, \\ \sum_{\gamma=0}^N C_{\gamma,2} &= \frac{z^2}{2} - \frac{1}{2} \sum_{\gamma=0}^N C_\gamma \cdot x_\gamma^2 - \sum_{\gamma=0}^N C_{\gamma,1} x_\gamma, \end{aligned}$$

here,

$$f(x_\beta, z) = - \sum_{\gamma=0}^N C_{\gamma,1} \frac{\operatorname{sgn}(x_\beta - x_\gamma)(x_\beta - x_\gamma)^2}{4} + \sum_{\gamma=0}^N C_\gamma \frac{|x_\beta - x_\gamma|^3}{12} - \frac{|x_\beta - z|^3}{12}.$$

2 Conclusion

In this work, the issue of building the optimal interpolation formula is considered. In this case, the values of the function $\varphi(x)$ and its first and second derivatives at the given nodes are required. The error functional representation of the function being constructed was found. An extremal function representation corresponding to this error functional was found. In this, the norm of the error functional is found. To find the minimum of the square of the norm of this error functional, the Lagrange function is used to find the multivariate conditional extremum. By calculating the partial derivatives of this function, a system of linear equations was obtained.

References

- [1] S.S. Babaev, N. Olimov, Sh. Imomova, B. Kuvvatov 2024. *Construction of natural L spline in $W_{2,\sigma}^{(2,1)}$ space. AIP Conf. Proc., 3004 (060021)* doi: <http://dx.doi.org/10.1063/5.0199595>
- [2] Babaev S.S., Mamatova N.Kh., Hayotov A.R. 2017. *Optimal interpolation formula in $L_2^{(m)}(0, 1)$ space. Uzbek Mathematical Journal, Vol. 2, – P. 23–31.*
- [3] Yuyukin, Igor V. 2021. “Application of the spline-functions method in underwater relief computer visualization.” *Vestnik Gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota imeni admirala S.O. Makarova., Vol. 13.1: – P. 64–79.*
- [4] Rokiah R.A., Najah Gh., Azmin Sh.R., Ummul Kh.S. Din and Nasruddin H. *Application of Cubic Spline in the Implementation of Braces for the Case of a Child. Journal of Mathematics and Statistics, Malaysia, 2012, Vol 8(1): – P. 144–149,*

- [5] S.S. Babaev, J.R. Davronov, A. Abdullayev, S.Z. Polvonov 2022. *Optimal interpolation formulas exact for trigonometric functions* AIP Conf. Proc., 2781 020064 doi: <http://dx.doi.org/10.1063/5.0144752>.
- [6] A.R. Hayotov, S.S. Babaev, Sh. Imomova, N.N. Olimov 2023. *The error functional of optimal interpolation formulas in $W_{2,\sigma}^{(2,1)}$ space* AIP Conf. Proc., 2781 (020044) doi: <http://dx.doi.org/10.1063/5.0144752>.
- [7] Hayotov A.R., Olimov N.N. 2023. *An optimal interpolation formula of Hermite type in the Sobolev space. Abstracts of the 8th international conference “Actual problems of applied mathematics and information technologies” - Al-Khwarizmi 2023 Tashkent , Uzbekistan, – P. 126-127.*
- [8] Hayotov A.R., Olimov N.N. 2023. *An optimal interpolation formula with derivatives in the Sobolev space . Abstracts modern problems differential equations and their applications 2023 Tashkent , Uzbekistan, – P. 111–112.*
- [9] Ogniewski, Jens. *Cubic Spline Interpolation in Real-Time Applications using Three Control Points*. 2019. *International Conference in Central Europe on Computer Graphics, Visualization and Computer Vision WSCG 2019, Plzen, Czech Republic*
- [10] Sobolev S.L. 1974. *Introduction to the theory of cubature formulas*. (Russian), Nauka, Moscow.
- [11] Babaev S.S., A.R. Hayotov 2019. *Optimal interpolation formulas in the space $W_2^{(m,m-1)}$* . *Calcolo*, Springer International Publishing, 56(3): – P. 1–25. doi: <http://dx.doi.org/10.1007/s10092-019-0320-9>.
- [12] Kh.M. Shadimetov, A.R. Hayotov 2013. *Construction of interpolation splines minimizing semi-norm in $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ space* Bit Numer. Math., 53(2) (), 545–563. doi: <http://dx.doi.org/10.1007/s10543-012-0407-z>.
- [13] Kh.M. Shadimetov, A.R. Hayotov, F.A. Nuraliev 2019. *Optimal interpolation formulas with derivative in the space $L_2^{(m)}(0,1)$* Filomat, 33, – P. 5661–5675. doi: <http://dx.doi.org/10.2298/FIL1917661S>.
- [14] A.R. Hayotov, S.S. Babaev, N.N. Olimov *An optimal interpolation formula of Hermite type in the Sobolev space Filomat,(reprint)*

Received August 2, 2024

УДК 519.652

ОПТИМАЛЬНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИОННАЯ ФОРМУЛА С ПРОИЗВОДНЫМИ В ПРОСТРАНСТВЕ СОБОЛЕВА

^{1,2*}Олимов Н.Н., ³Бекмуродова Д.Б.

*olimovnurali8@gmail.com

¹Институт математики им. В.И. Романовского АН РУз,
100174, Узбекистан, г. Ташкент, ул. Университетская, д. 9;

²Бухарский государственный университет,
705018, Узбекистан, Бухара, ул. Мухаммада Икбала, 11;

³Средняя общеобразовательная школа № 154,
100072, Узбекистан, Ташкент, ул. Фитрата, 83А.

Настоящая работа посвящена построению оптимальной интерполяционной формулы в пределах гильбертова пространства. Норма функционала ошибок оценивает

различие между заданной функцией и интерполяционной формулой. Для расчета нормы воспользуемся экстремальной функцией для R . Функция ошибок зависит от коэффициентов и узлов интерполяционной формулы. Здесь минимальное значение нормы функционала ошибок найдено по коэффициентам с устоявшимися узлами. В итоге получаем систему линейных уравнений для коэффициентов оптимальной интерполяционной формулы.

Ключевые слова: интерполяция, сплайн, интерполяция с производными, экстремальная функция, функционал ошибки.

Цитирование: Олимов Н.Н., Бежмуродова Д.Б. Оптимальная интерполяционная формула с производными в пространстве Соболева // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2024. – № 4/1(59). – С. 37-45.

ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

№ 4/1(59) 2024

Журнал основан в 2015 году.

Издается 6 раз в год.

Учредитель:

Научно-исследовательский институт развития цифровых технологий и
искусственного интеллекта.

Главный редактор:

Равшанов Н.

Заместители главного редактора:

Азамов А.А., Арипов М.М., Шадиметов Х.М.

Ответственный секретарь:

Ахмедов Д.Д.

Редакционный совет:

Азамова Н.А., Алоев Р.Д., Амиргалиев Е.Н. (Казахстан), Бурнашев В.Ф.,
Загребина С.А. (Россия), Задорин А.И. (Россия), Игнатьев Н.А.,
Ильин В.П. (Россия), Исмагилов И.И. (Россия), Кабанихин С.И. (Россия),
Карачик В.В. (Россия), Курбонов Н.М., Маматов Н.С., Мирзаев Н.М.,
Мирзаева Г.Р., Мухамадиев А.Ш., Назирова Э.Ш., Нормуродов Ч.Б.,
Нуралиев Ф.М., Опанасенко В.Н. (Украина), Расулмухамедов М.М., Расулов А.С.,
Садуллаева Ш.А., Старовойтов В.В. (Беларусь), Хаётов А.Р., Халджигитов А.,
Хамдамов Р.Х., Хужаев И.К., Хужаеров Б.Х., Чье Ен Ун (Россия),
Шабозов М.Ш. (Таджикистан), Dimov I. (Болгария), Li Y. (США),
Mascagni M. (США), Min A. (Германия), Schaumburg H. (Германия),
Singh D. (Южная Корея), Singh M. (Южная Корея).

Журнал зарегистрирован в Агентстве информации и массовых коммуникаций при
Администрации Президента Республики Узбекистан.

Регистрационное свидетельство №0856 от 5 августа 2015 года.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

При перепечатке материалов ссылка на журнал обязательна.

За точность фактов и достоверность информации ответственность несут авторы.

Адрес редакции:

100125, г. Ташкент, м-в. Буз-2, 17А.

Тел.: +(998) 712-319-253, 712-319-249.

Э-почта: journals@airi.uz.

Веб-сайт: <https://journals.airi.uz>.

Дизайн и вёрстка:

Шарипов Х.Д.

Отпечатано в типографии НИИ РЦТИИ.

Подписано в печать 05.09.2024 г.

Формат 60x84 1/8. Заказ №5. Тираж 100 экз.

PROBLEMS OF COMPUTATIONAL AND APPLIED MATHEMATICS

No. 4/1(59) 2024

The journal was established in 2015.
6 issues are published per year.

Founder:

Digital Technologies and Artificial Intelligence Development Research Institute.

Editor-in-Chief:

Ravshanov N.

Deputy Editors:

Azamov A.A., Aripov M.M., Shadimetov Kh.M.

Executive Secretary:

Akhmedov D.D.

Editorial Council:

Azamova N.A., Alov R.D., Amirgaliev E.N. (Kazakhstan), Burnashev V.F.,
Zagrebina S.A. (Russia), Zadorin A.I. (Russia), Ignatiev N.A., Ilyin V.P. (Russia),
Ismagilov I.I. (Russia), Kabanikhin S.I. (Russia), Karachik V.V. (Russia), Kurbonov
N.M., Mamatov N.S., Mirzaev N.M., Mirzaeva G.R., Mukhamadiev A.Sh., Nazirova
E.Sh., Normurodov Ch.B., Nuraliev F.M., Opanasenko V.N. (Ukraine), Rasulov A.S.,
Sadullaeva Sh.A., Starovoitov V.V. (Belarus), Khayotov A.R., Khaldjigitov A.,
Khamdamov R.Kh., Khujaev I.K., Khujayorov B.Kh., Chye En Un (Russia),
Shabozov M.Sh. (Tajikistan), Dimov I. (Bulgaria), Li Y. (USA), Mascagni M. (USA),
Min A. (Germany), Schaumburg H. (Germany), Singh D. (South Korea),
Singh M. (South Korea).

The journal is registered by Agency of Information and Mass Communications under the
Administration of the President of the Republic of Uzbekistan.

The registration certificate No. 0856 of 5 August 2015.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

At a reprint of materials the reference to the journal is obligatory.

Authors are responsible for the accuracy of the facts and reliability of the information.

Address:

100125, Tashkent, Buz-2, 17A.

Tel.: +(998) 712-319-253, 712-319-249.

E-mail: journals@airi.uz.

Web-site: <https://journals.airi.uz>.

Layout design:

Sharipov Kh.D.

DTAIDRI printing office.

Signed for print 05.09.2024

Format 60x84 1/8. Order No. 5. Printed copies 100.



**Профессор
ИСРАИЛОВ МАРУФ ИСРАИЛОВИЧ**
(к 90-летию со дня рождения)

Маруф Исраилович Исраилов – известный ученый-математик, доктор физико-математических наук, профессор, крупный специалист в области теории чисел и вычислительной математики.

М.И. Исраилов родился 27 апреля 1934 года в городе Самарканде в семье ремесленника. В 1951 году с отличием окончив среднюю школу №16 г. Самарканда, поступил на физико-математический факультет Самаркандского государственного университета, который успешно окончил в 1956 г. С 1958 по 1961 годы проходил обучение в аспирантуре Института математики им. В.И. Романовского под руководством профессора Н.П. Романова. В 1966 году защитил кандидатскую диссертацию на тему «Проблема Тарри для быстрорастущих слагаемых и ее приложение к изучению эргодических сумм». В 1974 году М.И. Исраилову присвоено звание старшего научного сотрудника. В 1986 году М.И. Исраилов защитил докторскую диссертацию на тему «Асимптотические и точные формулы для аддитивных задач с растущим числом слагаемых», а в 1989 году получил звание профессора по специальности «Вычислительная математика».

После окончания аспирантуры М.И. Исраилов работал младшим научным сотрудником в Вычислительном центре Института математики АН РУз, затем с 1966 г. – старшим научным сотрудником. С 1976 года работал на должности заведующего лабораторией «Теория приближенного интегрирования» Института кибернетики с вычислительным центром. С 1984 г. и до 1995 г. – являлся заведующим отделом «Вычислительные методы» Института математики АН РУз. В том же 1995 году М.И. Исраилов приступил к работе в Самаркандском государственном университете в качестве заведующего кафедрой вычислительной математики.

Профессор М.И. Исраилов имел широкий диапазон научных интересов. Его глубокие исследования в областях аддитивных задач, построения общих арифметиче-

ских ортогональных и биортогональных систем в гильбертовых пространствах; нахождения числа решений различных классов диофантовых уравнений, оценке тригонометрических сумм; построения оптимальных квадратурных и кубатурных формул в различных функциональных пространствах, а также приближенного решения регулярных и сингулярных интегральных уравнений внесли существенный вклад в развитие теории чисел и вычислительной математики. Результаты его работ успешно применяются в многочисленных прикладных задачах.

М.И. Исраилов впервые исследовал проблему Тарри для общих числовых последовательностей и применил к изучению эргодических сумм. Здесь он также решил известную проблему венгерского математика П. Эрдеша (об оценке снизу максимума модуля многочленов на единичной окружности) в обобщенной и уточненной постановке. М.И. Исраилову принадлежит всестороннее исследование аддитивных задач с растущим числом слагаемых. Он получил асимптотические разложения в проблеме Варинга с полиномиальными слагаемыми и в диофантовой системе Гильберта-Камке.

Им также найдена точная формула для числа решений линейных диофантовых уравнений общего вида. Эта формула нашла применение в теории инвариантных кубатурных формул академика С.Л.Ёсоболева и позволила сильно упростить исследование и построение таких формул на поверхности многомерных сфер и шаров.

Маруф Исраилович также внес существенный вклад в применение теоретико-числовых методов и методов сплайн-функций в вычислительной математике. Им построены оптимальные квадратурные и кубатурные формулы сингулярных интегралов с ядрами Гильберта и Коши, найдены приближенно-аналитические решения систем одномерных и многомерных интегральных уравнений с ядрами Фредгольма, Гильберта и Коши. Найдены оценки погрешности в различных часто встречающихся пространствах функций. Эти результаты имеют многочисленные применения в прикладных задачах, в частности в аэродинамике и гидродинамике. Характерной особенностью этого цикла исследований является новизна постановок задач и разработка новых методов их решения.

Отдельные результаты исследований М.И. Исраилова по теории дзета-функции Римана и проблеме делителей Дирихле вызвали большой резонанс среди специалистов за пределами нашей страны.

В Маруфе Исраиловиче гармонично сочетались способности крупного ученого, талантливого педагога и умелого руководителя крупных научных исследований. Он успешно сочетал плодотворную научную и научно-организаторскую деятельность с большой педагогической и общественной деятельностью. С 1967 г. М.И. Исраилов читал общие и специальные курсы на факультете прикладной математики Ташкентского государственного университета, а с 1995 по 2003 годы – в Самаркандском государственном университете, где до конца жизни продолжал активную научно-педагогическую деятельность в качестве почетного профессора-консультанта.

М.И. Исраилов с 1972 г. являлся членом двух специализированных советов по защите кандидатских и докторских диссертаций. С 1967 по 1995 годы руководил работой организованного им городского научного семинара «Применение теории чисел в вычислительной математике» при Институте кибернетики АН РУз и Институте математики АН РУз, а с 1995 года руководил научным семинаром «Приближенные методы высшего анализа» в СамГУ.

Работая в крупнейших ВУЗах и НИИ республики, Маруф Исраилович подготовил десятки учеников, успешно работающих в различных сферах экономики республи-

ки, в странах ближнего и дальнего зарубежья. М.И. Исраилов руководил работами магистрантов, аспирантов и докторантов. Под его руководством защищены более 10 кандидатских диссертаций, он способствовал защите трех докторских диссертаций. С 1993 г. М.И. Исраилов со своими докторантами, аспирантами и студентами вел научные исследования в рамках проектов, имеющих фундаментальное значение и широкое прикладное применение.

Обычно будущих ученых Маруф Исраилович привлекал к науке со студенческой скамьи. Более того, он с аспирантских лет активно участвовал в поиске и формировании юных математических дарований в системе школьного образования. Будучи аспирантом и молодым ученым М.И. Исраилов преподавал в специализированной физико-математической школе №82 города Ташкента, организованной академиком В.К. Кабуловым. Многие ученики М.И. Исраилова из этой школы стали в последующем докторами наук и известными специалистами в своих отраслях. Подготовку математиков со школьной скамьи профессор М.И. Исраилов продолжил в физико-математическом лицее г. Самарканда, учащиеся которого регулярно занимали призовые места на различных международных математических олимпиадах. На протяжении всей педагогической деятельности своими научно-популярными статьями в энциклопедиях, в различных общественных и молодежных изданиях, ряде телепередач М.И. Исраилов умело и выверено формировал математическую культуру мышления у молодежи.

М.И. Исраилов – автор более 160 научных, 40 научно-популярных работ. Около 50 его научных статей опубликованы в авторитетных изданиях ближнего и дальнего зарубежья. Профессор М.И. Исраилов является автором широко известного двухтомного учебника по вычислительной математике «Хисоблаш методлари». Данная книга является единственным учебником подобного типа на узбекском языке и принята в качестве основного в ведущих университетах Узбекистана. Этот учебник написан на основе оригинальных лекций М.И. Исраилова, которые он читал на протяжении 40 лет в Национальном университете Узбекистана, Самаркандском государственном университете, на семинарах в Институте математики АН РУз. Также результатом многолетнего чтения лекций стал учебник по теории чисел «Сонлар назарияси» в соавторстве с профессором А. Солеевым.

М.И. Исраилов и его ученики участвовали с докладами во многих международных научных форумах. Он принимал участие в Международном конгрессе математиков, Всемирном конгрессе общества Бернулли и других. Был одним из активных организаторов всех международных конференций по теории кубатурных формул, проводимых в Узбекистане. Профессор М.И. Исраилов до последних дней оставался активным участником ежегодной Международной научно-практической конференции «Инновация». Являясь одним из бессменных руководителей секции «Математика. Математическое моделирование», М.И. Исраилов поддерживал высокий уровень научных изысканий и докладов конференции. М.И. Исраилов был членом редколлегии сборника «Вопросы вычислительной и прикладной математики», а также ответственным редактором сборников по вычислительной математике, выпускаемых в Институте математики АН РУз. А с 2001 года являлся членом редколлегии сборника научных статей Международной конференции «Инновация». Являлся членом Американского математического общества и экспертом международного журнала «Mathematical Reviews».

Маруфе Исраилович неоднократно награждался почетными грамотами Академии наук Республики Узбекистан.

В знак признания весомого многолетнего вклада профессора М.И. Исраилов в развитие математической науки и подготовку высококвалифицированных кадров в 2009 году Национальным университетом Узбекистана была проведена республиканская научная конференция «Вычислительные технологии и математическое моделирование», посвященная его 75-летию. В 2013 году проведен научный семинар «Профессор М.И. Исраилов и развитие прикладной математики в Узбекистане», в 2014 году состоялась научно-техническая конференция «Прикладная математика и информационная безопасность», посвященная 80-летию учёного. В текущем 2024 году в связи с 90-летием профессора М.И. Исраилова в НУУз организован международный научный семинар «Вычислительные модели и технологии (СМТ2024)».

Созданная профессором М.И. Исраиловым научная школа по численным методам и в настоящее время продолжает продуктивно функционировать. Ученики и последователи Маруфа Исраиловича сегодня успешно работают в различных сферах и отраслях экономики нашей республики и за рубежом, продолжая дело своего Устога-учителя.

Редакционная коллегия журнала «Проблемы вычислительной и прикладной математики» посвящает данный специальный выпуск светлой памяти профессора Маруфа Исраиловича Исраилова – выдающегося учёного, талантливого педагога, заботливого наставника и замечательного человека, который навсегда останется в памяти друзей, коллег и учеников.

Содержание

Солеев А.С., Розет И.Г., Мухтаров Я.

Исследование эколого-медицинских моделей методами бифуркационных параметров в конечно-разностных дискретных системах 9

Худойбергганов М.У., Туляганова Н.Б., Каримов Д.К.

Исследование устойчивости модифицированных разностных схем Куранта, Айзексона и Риза для квазилинейных гиперболических систем 15

Эшкuvatов З.К., Салимова Н.М., Худойбергганов М.О.

Решение системы интегральных уравнений Вольтерра первого рода модифицированным методом разложения Адомиана 23

Олимов Н.Н., Бекмуродова Д.Б.

Оптимальная интерполяционная формула с производными в пространстве Соболева 37

Курбонназаров А.И.

Оптимальная квадратурная формула для вычисления коэффициентов Фурье в гильбертовом пространстве 46

Шадиметов Х.М., Атамуродова Б.М.

Дискретная система типа Винера-Хопфа для коэффициентов интерполяционных формул 64

Шадиметов Х.М., Каримов Р.С.

Система типа Винера-Хопфа для нахождения оптимальных коэффициентов разностных формул в гильбертовом пространстве 74

Расулов А.С., Раимова Г.М.

Применение методов ускорения сходимости к асинхронным итерациям 85

Шадиметов Х.М., Шоназаров С.К.

Об одной явной оптимальной разностной формуле 96

Хаётов А.Р., Нуралиев Ф.А., Абдуллаева Г.Ш.

Построение алгебро-гиперболического интерполяционного натурального сплайна шестого порядка 107

Аллаков И., Эрдонов Б.Х.

Об одновременном представлении трех чисел суммой шести простых чисел . 122

К. Джа, К.Б. Манандхар

Общий результат с фиксированной точкой для совместимых отображений типа (K) в интуиционистском нечетком метрическом пространстве 134

Хаётов А.Р., Хаитов Т.О., Буваширов Д.С.

Оптимальная формула численного интегрирования дробного интеграла Римана-Лиувилля 142

Шадиметов Х.М., Азамов С.С., Элмуратов Г.Ч.

Минимизация погрешность квадратурной формулы в пространстве Гильберта 151

Contents

<i>Soleyev A.S., Rozet I.G., Muxtarov Y.</i>	
Research of ecological and medical models using bifurcation parameters methods in finite difference discrete systems	9
<i>Khudoyberganov M.U., Tulyaganova N.B., Karimov D.K.</i>	
Investigation of the stability of the modified difference Courant, Isaakson and Rees schemes for quasi-linear hyperbolic systems	15
<i>Eshkuvatov Z.K., Salimova N.M., Khudoyberganov M.O.</i>	
Solving system of Volterra integral equations of the first kind by modified Adomian decomposition method	23
<i>Olimov N.N., Bekmurodova D.B.</i>	
An optimal interpolation formula with derivatives in Sobolev space	37
<i>Kurbonnazarov A.I.</i>	
Optimal quadrature formula for calculating Fourier coefficients in Hilbert space .	46
<i>Shadimetov Kh.M., Atamuradova B.M.</i>	
Discrete system of Wiener–Hopf type for coefficients of interpolation formulas . .	64
<i>Shadimetov Kh.M., Karimov R.S.</i>	
Wiener–Hopf type system for finding optimal coefficients of difference formulas in the Hilbert space	74
<i>Rasulov A.S., Raimova G.M.</i>	
Applications of convergence acceleration methods to asynchronous iterations . .	85
<i>Shadimetov Kh.M., Shonazarov S.K.</i>	
On an explicit optimal difference formula	96
<i>Hayotov A.R., Nuraliyev F.A., Abdullayeva G.Sh.</i>	
Construction of the sixth order algebraic-hyperbolic interpolation natural spline	107
<i>Allakov I., Erdonov B.Kh.</i>	
On the simultaneous representation of three numbers by the sum of six numbers of primes	122
<i>Jha K., Manandhar K.B.</i>	
A common fixed point result for compatible mappings of type (K) in intuitionistic fuzzy metric space	134
<i>Hayotov A.R., Khaitov T.O., Buvashev D.S.</i>	
An optimal formula for numerical integration of fractional Riemann-Liouville integral	142
<i>Shadimetov Kh.M., Azamov S.S., Elmuratov G.Ch.</i>	
Minimizing the error of a quadrature formula in Hilbert space	151