

UDC 519.644

SOLVING SYSTEM OF VOLTERRA INTEGRAL EQUATIONS OF THE FIRST KIND BY MODIFIED ADOMIAN DECOMPOSITION METHOD

^{1,2*}*Eshkuvatov Z.K.* ²*Salimova N.M.*, ²*Khudoyberganov M.O.*

*zainidin@umt.edu.my

¹University Malaysia Terengganu,
21030 Kuala Terengganu, Malaysia;

²National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek,
4, Universitetskaya str., Tashkent, 100174 Uzbekistan.

In this work, we consider system of linear and nonlinear Volterra integral equations (VIEs) of the first kind. At first, we have converted system of VIEs of the first kind to an equation of the second kind by differentiation of transformation. Then standard Adomian decomposition method (ADM) and modified ADM (MADM) are used to find semi-analytical solution. The Adomian decomposition method converts Volterra integral equations of the second kind into determination of computable components of iterative integral equations. The uniqueness solutions of the system of nonlinear VIEs of the second kind are proved and the choice of the initial data is shown. It is practically shown that the obtained series by MADM convergence very rapidly to the exact solution. Finally, four examples were illustrated to show validity and applicability of this approach. The examples are taken from the works mentioned in the references.

Keywords: Volterra integral equation, Adomian decomposition method, Semi-analytical solution

Citation: Eshkuvatov Z.K., Salimova N.M., Khudoyberganov M.O. 2024. Solving system of Volterra integral equations of the first kind by modified Adomian decomposition method. *Problems of Computational and Applied Mathematics*. 4/1(59): 23-36.

1 Introduction

Many problems from physics and other disciplines lead to linear and nonlinear system of integral equations. Several methods have been proposed as approximate solution of these integral equations. For instance, Adomian ([1], 1988) has developed a so-called Adomian decomposition method (ADM) for solving differential equations, Liao ([2], 1992) proposed homotopy analysis method (HAM) for nonlinear equations, He ([3], 1999) developed homotopy perturbation method for linear and nonlinear partial differential equations (PDEs), R. Impagliazzo and S. Checkoway ([4], 2021) developed weighted polynomial approximation method for different type of integral equations, Kenneth ([5], 2011) proposed quadrature method for linear integral equations, and so on. ADM and its development and implication done by many researchers for algebraic equations (Babolian [6], 2002), integral equations (A.M. Wazwaz [7], 2015), degenerate integral equations (T.K.Yuldashev, et all. [8], 2023), integro-differential equations (Z.K.Eshkuvatov et all. [9], 2023), n-th order IDEs (V. Al-Hayani, [10], 2013), differential-delay equations (J. Manafianheris [11], 2012), ADM has successfully implemented in dealing with linear as well as nonlinear problems, as it yields most of the cases analytical solutions and offers certain advantages over the standard numerical methods (P. Linz, [12], 1985), ADM is applied for linear and nonlinear integral equations with boundary-value problem or an initial-value problem or mixed boundary problems (H.M. Osama [13], 2018) and so on.

To prove fundamental results on the existence and uniqueness solution for integral equation is convenient and more simple than the differential equations problems.

A system of integral equations is a set of two or more integral equations in two or more unknown functions. Systems of Fredholm or Volterra integral equations of the first and the second kinds, appear in many areas of scientific applications (see the books published by A.M. Wazwaz ([7], 2015), P.J.Collins ([14], 2006)). Many powerful methods were used to study the systems of integral equations, for instance ADM (R. Novin, et al. ([15], 2018)), direct computation method (Malabahrami ([16], 2015)), Successive approximations method (Bayleyign, ([17], 2016)), Modified decomposition method (Rabbani and Zarali ([18], 2012)), Variational iteration method, (Zheng et al., ([19], 2017)), series solution method (Wazwaz, ([7], 2015)), and etc.

It is known that the system of linear Fredholm integral equations (FIEs) of the first and second kind (respectively) with only two unknown functions $u(x)$ and $v(x)$ is given by

$$\begin{aligned} \int_a^b (K_{1,1}(x, t) u(t) + K_{1,2}(x, t) v(t)) dt &= f_1(x), \\ \int_a^b (K_{2,1}(x, t) u(t) + K_{2,2}(x, t) v(t)) dt &= f_2(x), \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} u(x) &= f_1(x) + \int_a^b (K_{1,1}(x, t) u(t) + K_{1,2}(x, t) v(t)) dt, \\ v(x) &= f_2(x) + \int_a^b (K_{2,1}(x, t) u(t) + K_{2,2}(x, t) v(t)) dt, \end{aligned} \quad (2)$$

and system of nonlinear FIEs of the first kind

$$\begin{aligned} \int_a^b (K_{1,1}(x, t) F_1(u(t), v(t)) + K_{1,2}(x, t) F_2(u(t), v(t))) dt &= f_1(x), \\ \int_a^b (K_{2,1}(x, t) F_1(u(t), v(t)) + K_{2,2}(x, t) F_2(u(t), v(t))) dt &= f_2(x), \end{aligned} \quad (3)$$

and second kind

$$\begin{aligned} u(x) &= f_1(x) + \int_a^b (K_{1,1}(x, t) F_1(u(t), v(t)) + K_{1,2}(x, t) F_2(u(t), v(t))) dt, \\ v(x) &= f_2(x) + \int_a^b (K_{2,1}(x, t) F_1(u(t), v(t)) + K_{2,2}(x, t) F_2(u(t), v(t))) dt, \end{aligned} \quad (4)$$

where the unknown functions that will be determined are $u(x)$ and $v(x)$. Recall that for the second kind integral equations, the unknown functions appear inside and outside the integral sign. The kernels $K_{i,j}(x, t)$, $i, j = \{1, 2\}$, and the function $f_1(x)$ and $f_2(x)$ are prescribed real valued functions.

Systems of Volterra integral equations appear in many scientific applications such as Volterra population growth models, H.M. Jaradat ([21], 2011), species propagation, F.S. Emmanuel, ([22], 2020), and so on. Recall that Volterra integral equations are characterized by at least one variable in the limit of integration. Proceeding as before, we will concern ourselves for systems of Volterra integral equations of the second kind where only two unknown functions $u(x)$ and $v(x)$ are involved. The standard system of linear and nonlinear Volterra integral equations (VIEs) of the first and second kind can be expressed as Fredholm integral equation (FIEs) (1)-(4) by changing the upper limit with variable “ x ” respectively. The system of IEs (1)-(4) can be easily extended to more than two unknown functions.

In this note, our aim is to solve the system of linear and nonlinear integral equations of the first kind of Volterra type integral equations by ADM and modified ADM ([7], 2015). Do comparative analysis with existence method given in the literatures. Some theoretical analysis is also considered.

The structure is as follows. Section 1 deals with introduction, literature review and statement of problems, Section 2 describes the methodology, Section 3 presents existence

of uniqueness solution and finally Section 4 presents the numerical experiments with ending conclusion.

2 Solution of system of linear and nonlinear Volterra Integral Equation

This section deals with the system of VIEs of the first and second kind and their solution techniques. Let us consider the linear system of VIEs of the first kind

$$\int_a^x K(x, t) \bar{u}(t) dt = \bar{f}(x) \quad (5)$$

where

$$K(x, t) = \begin{bmatrix} k_{11}(x, t) & k_{12}(x, t) & \dots & k_{1N}(x, t) \\ k_{21}(x, t) & k_{22}(x, t) & \dots & k_{2N}(x, t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{N1}(x, t) & k_{N2}(x, t) & \dots & k_{NN}(x, t) \end{bmatrix},$$

$$\bar{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \dots \\ u_N(t) \end{bmatrix}, \bar{f}(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \dots \\ f_N(t) \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Eq. (5) cannot be solved by ADM. To solve it, we convert (5) into second kind of VIEs by differentiation

$$\int_a^x \frac{\partial K(x, t)}{\partial x} \bar{u}(t) dt + K(x, x) \bar{u}(x) = \bar{f}'(x). \quad (7)$$

Assuming the matrix $K(x, t)$ is invertible then

$$\bar{u}(x) + \int_a^x G(x, t) \bar{u}(t) dt = \bar{g}(x), \quad (8)$$

where

$$G(x, t) = K^{-1}(x, x) K_x(x, t) = (G_{i,k}(x, t))_{i,k=1}^N,$$

$$\bar{g}(x)^T = K^{-1}(x, x) \bar{f}'(x)^T = (g_1(x), g_2(x), \dots, g_N(x))^T, \quad (9)$$

where "T" means transpose.

Our aim is to solve system of VIEs of the second kind (7) by ADM and MADM. To do this end we have converted Eq. (5) into form of (8) and search solution of Eq. (8) in the form

$$\bar{u}(x) = \begin{bmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \\ \vdots \\ u_N(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=0}^{\infty} u_{1,j}(x), \\ \sum_{j=0}^{\infty} u_{2,j}(x), \\ \vdots \\ \sum_{j=0}^{\infty} u_{N,j}(x), \end{bmatrix}, \quad (10)$$

Substituting (10) into (8) yields

$$\begin{bmatrix} \sum_{j=0}^{\infty} u_{1,j}(x) \\ \sum_{j=0}^{\infty} u_{2,j}(x) \\ \vdots \\ \sum_{j=0}^{\infty} u_{N,j}(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^N \sum_{j=0}^{\infty} \int_a^x G_{1,k}(x, t) u_{k,j}(x) dt \\ \sum_{k=1}^N \sum_{j=0}^{\infty} \int_a^x G_{2,k}(x, t) u_{k,j}(x) dt \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^N \sum_{j=0}^{\infty} \int_a^x G_{N,k}(x, t) u_{k,j}(x) dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \\ \vdots \\ g_N(x) \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Equating both sides of Eq. (11), we have the easy computable scheme

$$\begin{aligned} u_{i,0}(x) &= g_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, N \\ u_{i,j}(x) &= - \sum_{k=1}^N \int_a^x G_{i,k}(x, t) u_{k,j-1}(t) dt, \quad j = 1, 2, \dots, \quad i = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (12)$$

Vector form of (12) is

$$\begin{aligned} \bar{u}_0(x) &= \bar{g}(x), \\ \bar{u}_n(x) &= T(\bar{u}_{n-1}), \quad n = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (13)$$

where

$$\begin{aligned} \bar{u}_0(x) &= (u_{1,0}(x), u_{2,0}(x), \dots, u_{N,0}(x))^T, \\ \bar{u}_1(x) &= (u_{1,1}(x), u_{2,1}(x), \dots, u_{N,1}(x))^T, \\ \bar{u}_2(x) &= (u_{1,2}(x), u_{2,2}(x), \dots, u_{N,2}(x))^T, \\ &\dots \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} \bar{T}(\bar{u}_0(x)) &= (T_1 \bar{u}_0(x), T_2 \bar{u}_0(x), \dots, T_N \bar{u}_0(x))^T \\ &= \left(- \sum_{k=1}^N \int_a^x G_{1,k}(x, t) u_{k,0}(t) dt, - \sum_{k=1}^N \int_a^x G_{2,k}(x, t) u_{k,0}(t) dt, \right. \\ &\quad \left. \dots, - \sum_{k=1}^N \int_a^x G_{N,k}(x, t) u_{k,0}(t) dt \right)^T, \\ \bar{T}(\bar{u}_1(x)) &= (T_1 \bar{u}_1(x), T_2 \bar{u}_1(x), \dots, T_N \bar{u}_1(x))^T \\ &= \left(- \sum_{k=1}^N \int_a^x G_{1,k}(x, t) u_{k,1}(t) dt, - \sum_{k=1}^N \int_a^x G_{2,k}(x, t) u_{k,1}(t) dt, \right. \\ &\quad \left. \dots, - \sum_{k=1}^N \int_a^x G_{N,k}(x, t) u_{k,1}(t) dt \right)^T, \\ &\dots \end{aligned}$$

To derive modified MDM, we split right sight function of Eq. (8) into two functions namely

$$\bar{g}(x) = \bar{g}_1(x) + \bar{g}_2(x), \quad (14)$$

Substituting (10) again into (8) and taking (12) into account, we have the following iterative scheme

$$\begin{aligned} u_{i,0}(x) &= g_{1,i}(x), \quad i = 1, 2, \dots, N, \\ u_{i,1}(x) &= g_{2,i}(x) - \sum_{k=1}^N \int_a^x G_{i,k}(x, t) u_{k,j-1}(t) dt, \\ u_{i,j}(x) &= - \sum_{k=1}^N \int_a^x G_{i,k}(x, t) u_{k,j-1}(t) dt, \quad j = 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (15)$$

And let us consider the nonlinear system of VIEs of the first kind

$$\int_a^x K(x, t) \bar{F}(u(t)) dt = \bar{f}(x), \quad (16)$$

where

$$K(x, t) = \begin{bmatrix} k_{11}(x, t) & k_{12}(x, t) & \dots & k_{1N}(x, t) \\ k_{21}(x, t) & k_{22}(x, t) & \dots & k_{2N}(x, t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{N1}(x, t) & k_{N2}(x, t) & \dots & k_{NN}(x, t) \end{bmatrix},$$

$$\bar{F}(u(t)) = \begin{bmatrix} F_1(u(t)) \\ F_2(u(t)) \\ \dots \\ F_N(u(t)) \end{bmatrix}, \bar{f}(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \dots \\ f_N(t) \end{bmatrix}. \quad (17)$$

Eq. (16) cannot be solved by ADM. To solve it, we convert (16) into second kind of VIEs by differentiation

$$\int_a^x \frac{\partial K(x, t)}{\partial x} \bar{F}(u(t)) dt + K(x, x) \bar{F}(u(x)) = \bar{f}'(x). \quad (18)$$

Assuming the matrix $K(x, x)$ is invertible then

$$\bar{F}(u(x)) + \int_a^x G(x, t) \bar{F}(u(t)) dt = \bar{g}(x), \quad (19)$$

where

$$G(x, t) = K^{-1}(x, x) K_x(x, t) = (G_{i,k}(x, t))_{i,k=1}^N, \quad (20)$$

$$\bar{g}(x)^T = K^{-1}(x, x) \bar{f}'(x)^T = (g_1(x), g_2(x), \dots, g_N(x))^T,$$

where "T" means transpose.

To solve nonlinear system of VIEs of the second kind (19) by ADM, we decompose nonlinear vector function $\bar{F}(u(x))$ in the form

$$\bar{F}(\bar{u}(x)) = \bar{u}(x) + \bar{Q}(\bar{u}(x)). \quad (21)$$

Substituting (21) into (19) yields

$$\bar{u}(x) + \bar{Q}(\bar{u}(x)) + \int_a^x G(x, t) \bar{u}(t) dt + \int_a^x G(x, t) \bar{Q}(\bar{u}(t)) dt = \bar{g}(x). \quad (22)$$

Eq. (20) is called standardized system of nonlinear VIEs of the second kind. To solve Eq. (22), we search solution in the form of Eq. (10) and use decompose nonlinear function $\bar{Q}(\bar{u}(x))$ into Adomian polynomials

$$\bar{Q}(\bar{u}(x)) = \begin{bmatrix} Q_1(\bar{u}(x)) \\ Q_2(\bar{u}(x)) \\ \vdots \\ Q_N(\bar{u}(x)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=0}^{\infty} A_{1,j}(x), \\ \sum_{j=0}^{\infty} A_{2,j}(x), \\ \vdots \\ \sum_{j=0}^{\infty} A_{N,j}(x), \end{bmatrix}, \quad (23)$$

Substitute (10) and (23) into (22) gives

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \sum_{j=0}^{\infty} u_{1,j}(x), \\ \sum_{j=0}^{\infty} u_{2,j}(x), \\ \vdots \\ \sum_{j=0}^{\infty} u_{N,j}(x), \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sum_{j=0}^{\infty} A_{1,j}(x), \\ \sum_{j=0}^{\infty} A_{2,j}(x), \\ \vdots \\ \sum_{j=0}^{\infty} A_{N,j}(x), \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^N \sum_{j=0}^{\infty} \int_a^x G_{1,k}(x,t) u_{k,j}(t) dt \\ \sum_{k=1}^N \sum_{j=0}^{\infty} \int_a^x G_{2,k}(x,t) u_{k,j}(t) dt \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^N \sum_{j=0}^{\infty} \int_a^x G_{N,k}(x,t) u_{k,j}(t) dt \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^N \sum_{j=0}^{\infty} \int_a^x G_{1,k}(x,t) A_{k,j}(t) dt \\ \sum_{k=1}^N \sum_{j=0}^{\infty} \int_a^x G_{2,k}(x,t) A_{k,j}(t) dt \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^N \sum_{j=0}^{\infty} \int_a^x G_{N,k}(x,t) A_{k,j}(t) dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \\ \vdots \\ g_N(x) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (24)$$

Equating both sides of Eq. (24), we have the easy computable scheme

$$\begin{aligned} u_{i,0}(x) &= g_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, N \\ u_{i,j}(u(x)) &= -A_{1,j-1}(x) - \sum_{k=1}^N \int_a^x G_{i,k}(x,t) u_{k,j-1}(u(t)) dt \\ &\quad - \sum_{k=1}^N \int_a^x G_{i,k}(x,t) A_{k,j-1}(u(t)) dt \quad j = 1, 2, \dots, \quad i = 1, 2, \dots, N, \end{aligned} \quad (25)$$

where

$$\begin{cases} A_{1,0} = Q_1(u_{0,0}), \\ A_{2,0} = u_{0,1} \frac{dQ_1(u_{0,0})}{dx}, \\ A_{3,0} = u_{0,2} \frac{d}{dx} Q_1(u_{0,0}) + \frac{u_{0,1}^2}{2!} \frac{d^2}{dx^2} Q_1(u_{0,0}), \\ \vdots \\ \dots \end{cases} \quad (26)$$

3 Uniqueness of Solutions of Linear Volterra Integral Equations of the Second Kind

It is known that nonlinear integral equations have a unique solution or have no solution or have an infinite number of solutions. The following theorems state the existence of uniqueness solution for the Volterra integral equation of the second kind.

In this paper, we consider system of nonlinear Volterra integral equation of the second kind

$$\bar{u}(x) = \bar{g}(x) - \lambda \int_a^x \bar{K}(x,t, u(t)) dt, \quad x \in [a, b], \quad (27)$$

with the kernel of the form

$$\bar{K}(x,t, \bar{u}(t)) = G(x,t) \bar{F}(\bar{u}(t)), \quad (28)$$

where $G(x,t)$ and $F(u(t))$ are continuous functions on its region.

In S.A. Micula ([23], 2020) consider one dimensional nonlinear Volterra integral equations and proved the existence of unique solution of the considered problems.

By applying the Banach fixed theorem and theory given in S.A. Micula ([23], 2020) we provide the existence of a unique solution of the equation (16)-(18). We briefly summarize the main results for the existence of fixed points of an operator on a Banach space.

Definition1. Let $(X, \|\cdot\|)$ be a Banach space. A mapping $T : X \rightarrow X$ is called q -contraction if there exists a constant $0 \leq q < 1$ such that

$$\|Tx - Ty\| \leq q \|x - y\|,$$

for all $x, y \in X$, where operator equation is given by $x = Tx$.

On Banach spaces, the well-known contraction principle holds:

Theorem 1. (S. Micula ([23], 2020)) Consider a Banach space $(X, \|\cdot\|)$ and let $T : X \rightarrow X$ be a q -contraction mapping, then

1. T has exactly one fixed point, which means equation $x = Tx$ has exactly one solution $x^* \in X$;
2. The sequence of successive approximations $x_{n+1} = Tx_n, n \in N$, converges to the solution x^* , where x_0 can be any arbitrary point in X ; for every $n \in N$, the following error estimate

$$\|x_n - x^*\| \leq \frac{q^n}{1 - q} \|Tx_0 - x_0\|,$$

holds.

Remark1. Theorem1 remains valid when X is replaced by a closed subset $\Upsilon \subseteq X$, satisfying $T(\Upsilon) \subseteq \Upsilon$.

We use Banach's theorem to establish, under certain conditions, the existence of uniqueness solution of Eq. (6). We use a suitable semi-analytical scheme (ADM) to approximate the values of the solution at given nodes. The numerical method thus resulted is quite easy to use and implement, while giving accurate approximations.

To show that Eq. (27), has a unique solution, we apply the contraction mapping principle to the associated integral operator

$$T\bar{u} = \bar{g}(x) - \lambda \int_a^x \bar{K}(x, t, \bar{u}(t)) dt, \quad x \in [a, b], \quad (29)$$

Remark2. Since $\bar{K}(x, t, u(t)) \in C([a, b] \times [a, b] \times \mathbb{R})$ and $\bar{g}(x) \in C[a, b]$, it is well known that the operator $T : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$ is well defined, i.e., $T(C[a, b]) \subseteq C[a, b]$ (for the proof see [7]).

To show that the integral Eq. (27) has a fixed point we introduce operator $\bar{T}$ defined by (29)

$$\bar{u} = T\bar{u}. \quad (30)$$

We consider the space $X = C[a, b]$ equipped with the Chebyshev norm

$$\|u\|_\tau = \max_{x \in [a, b], \forall i=1, \dots, N} |u_i(x)|, \quad u_i \in X, \quad (31)$$

and for the matrix we use logarithmic norm

$$\|A\|_l = \Lambda(A) = \max_{1 \leq i \leq N} \left(\operatorname{Re}(a_{ij}) + \sum_{i \neq j}^N |a_{ij}| \right). \quad (32)$$

Then, as is well known, $(X, \|\cdot\|_\tau)$ is a Banach space and we have the following main results.

Theorem 2. Let $T : (X, \|\cdot\|_\tau) \rightarrow (X, \|\cdot\|_\tau)$ be defined by Eq. (27). Assume that there exists a constant $L > 0$ such that

$$\|F(\bar{u}(t)) - F(\bar{v}(t))\|_\tau \leq L \|\bar{u} - \bar{v}\|_\tau, \quad (33)$$

- (a) Eq. (27) has a unique solution $u^* \in X$;
 (b) the sequence of successive approximations

$$\begin{aligned}\bar{u}_0(x) &= \bar{g}(x), \\ \bar{u}_n(x) &= T(\bar{u}_{n-1}), \quad n = 1, 2, \dots,\end{aligned}\tag{34}$$

- Converge to the solution $\bar{u}^*$ for any $\bar{u}_0 \in X$;
 (c) for every $n \in N$, the following error estimate

$$\|\bar{u}_n - \bar{u}^*\|_\tau \leq \frac{q^n}{1-q} \|\bar{T}(\bar{u}_0) - \bar{u}_0\|_\tau,\tag{35}$$

holds, where $0 < q = |\lambda| LG * (b-a) < 1$ and

$$G* = \max_{1 \leq j \leq N} \max_{a \leq t, x \leq b} \left(\operatorname{Re}(G_{jj}(x, t)) + \sum_{i \neq j}^N |G_{ij}(x, t)| \right),$$

is the contraction constant.

Proof of Theorem 2. Let $t \in [a, b]$ be fixed. By Equation (29), we have

$$\begin{aligned}\|T\bar{u}(x) - T\bar{v}(t)\|_\tau &= \left\| \lambda \int_a^x G(x, t) [\bar{F}(\bar{u}(t)) - \bar{F}(\bar{v}(t))] dt \right\|_\tau \leq \\ &\leq L |\lambda| \|\bar{u} - \bar{v}\|_\tau \left\| \int_a^x G(x, t) dt \right\|_l \\ &\leq L |\lambda| \max_{1 \leq j \leq N} \max_{a \leq t, x \leq b} \left(\operatorname{Re}(G_{jj}(x, t)) + \sum_{i \neq j}^N |G_{ij}(x, t)| \right) (b-a) \|\bar{u} - \bar{v}\|_\tau \\ &\leq |\lambda| LG * (b-a) \|\bar{u} - \bar{v}\|_\tau = q \|\bar{u} - \bar{v}\|_\tau,\end{aligned}$$

where $q = |\lambda| LG * (b-a)$.

Then from operator equations (13) we have

$$\begin{aligned}\|\bar{u}_{n+1} - \bar{u}_n\| &= \|T(\bar{u}_n) - T(\bar{u}_{n-1})\| \leq q \|\bar{u}_n - \bar{u}_{n-1}\| = q \|T(\bar{u}_{n-1}) - T(\bar{u}_{n-2})\| \\ &\leq q^2 \|\bar{u}_{n-1} - \bar{u}_{n-2}\| \leq \dots \leq q^n \|T\bar{u}_0 - \bar{u}_0\|,\end{aligned}\tag{36}$$

therefore

$$\begin{aligned}\|\bar{u}_n - \bar{u}^*\| &= \|\bar{u} * - \bar{u}_n\| = \|\bar{u}_{n+1} - \bar{u}_n + \bar{u}_{n+2} - \bar{u}_{n+1} + \dots + \bar{u}_{n+k} - \bar{u}_{n+k-1} + \dots\| \\ &\leq (q^n + q^{n+1} + \dots + q^{n+k} + \dots) \|T\bar{u}_0 - \bar{u}_0\| = \frac{q^n}{1-q} \|T\bar{u}_0 - \bar{u}_0\|.\end{aligned}\tag{37}$$

Now we can choose $\tau > 0$ such that $0 \leq q < 1$, so T is a q -contraction. The conclusions now follow from Theorem 1.

Next, we address the question of smoothness of the solution of Eq. (16). The following result holds:

4 Numerical examples

Example 1 (J. Biazar, [25, 2003]): Consider the system of linear VIEs

$$\begin{cases} \int_0^t [(1-x^2+t^2)u(t) - (2x-t)v(t)] dt = -\frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{15}x^5, \\ \int_0^x [(x+t^2)u(t) - (2x-t)v(t)] dt = x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{3}x^4 + \frac{1}{5}x^5. \end{cases}\tag{38}$$

The exact solutions of (38) is $u(x) = x^2$, $v(x) = x$.

To find the analytical-approximate solution of Eq. (38), we first differentiate it with respect to x

$$\begin{cases} u(x) - xv(x) - 2 \int_0^x (xu(t) + v(t)) dt = -x^2 - \frac{2}{3}x^4, \\ (x + x^2)u(x) + 2v(x) + \int_0^x (u(t) - v(t)) dt = 2x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{4}{3}x^3 + x^4, \end{cases} \quad (39)$$

or equivalently

$$\begin{cases} u(x) = -x^2 - \frac{2}{3}x^4 + xv(x) + 2 \int_0^x (xu(t) + v(t)) dt, \\ v(x) = x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}(x + x^2)u(x) - \frac{1}{2} \int_0^x (u(t) - v(t)) dt. \end{cases} \quad (40)$$

Choosing initial guess

$$\begin{aligned} u_0 &= -x^2 - \frac{2}{3}x^4, \\ v_0 &= x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^4, \end{aligned} \quad (41)$$

and applying ADM, we obtain

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{x}{2}v_n - \frac{1}{2x} \int_0^x (u_n(t) - tv_n(t)) dt, \\ v_{n+1} &= -\frac{1}{2}(x + x^2)u_n - \frac{1}{2} \int_0^x (u_n(t) - v_n(t)) dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (42)$$

Table1: Numerical results for Example 1 by ADM

(x,y)	Exact (u, v)	Appox(u, v), n = 5	ErrADM, n = 5	ErrADM, n = 10
(0.1,0.1)	(0.01,0.1)	(0.00999, 0.10002)	$(1 \cdot 10^{-5}, 2 \cdot 10^{-5})$	$(1 \cdot 10^{-11}, 2 \cdot 10^{-12})$
(0.3,0.3)	(0.9,0.3)	(0.899071, 0.30033)	$(9.29 \cdot 10^{-4}, 3.3 \cdot 10^{-4})$	$(5 \cdot 10^{-11}, 3 \cdot 10^{-12})$
(0.5,0.5)	(0.25,0.5)	(0.249427, 0.51705)	$(5.73 \cdot 10^{-4}, 1.71 \cdot 10^{-2})$	$(4 \cdot 10^{-11}, 2 \cdot 10^{-12})$
(0.7,0.7)	(0.49,0.7)	(0.4888897, 0.69998)	$(1.11 \cdot 10^{-3}, 2 \cdot 10^{-5})$	$(4 \cdot 10^{-11}, 5 \cdot 10^{-11})$
(0.9,0.9)	(0.81,0.9)	(0.809999, 0.899999)	$(1 \cdot 10^{-6}, 1 \cdot 10^{-6})$	$(2 \cdot 10^{-12}, 7 \cdot 10^{-12})$
(1,1)	(1,1)	(0.999999, 1.000001)	$(1 \cdot 10^{-7}, 1 \cdot 10^{-6})$	$(8 \cdot 10^{-12}, 9 \cdot 10^{-13})$
(0.2,0.9)	(0.04,0.9)	(0.03999, 0.899999)	$(1 \cdot 10^{-5}, 1 \cdot 10^{-6})$	$(2 \cdot 10^{-11}, 2 \cdot 10^{-12})$
(0.4,0.8)	(0.16,0.8)	(0.15731, 0.788889)	$(2.69 \cdot 10^{-3}, 1.1 \cdot 10^{-4})$	$(8 \cdot 10^{-11}, 4 \cdot 10^{-13})$
(0.6,0.7)	(0.36,0.7)	(0.358899, 0.69998)	$(1.01 \cdot 10^{-3}, 2 \cdot 10^{-5})$	$(1 \cdot 10^{-11}, 5 \cdot 10^{-11})$
(0.8,0.4)	(0.64,0.4)	(0.6388886, 0.40298)	$(1.11 \cdot 10^{-3}, 2.98 \cdot 10^{-3})$	$(2 \cdot 10^{-12}, 7 \cdot 10^{-12})$
(0.9,0.2)	(0.81,0.2)	(0.809999, 0.20002)	$(1 \cdot 10^{-6}, 2 \cdot 10^{-5})$	$(7 \cdot 10^{-12}, 1 \cdot 10^{-12})$
Max.	Error.		$(2.69 \cdot 10^{-3}, 1.71 \cdot 10^{-2})$	$(5 \cdot 10^{-11}, 5 \cdot 10^{-11})$

Remark 1: In source [25], the results of this example were considered for the values of (x, y) : $0 \leq x, y \leq 0.5$ and number of iteration $n = \{2, 3, \dots, 10\}$. In Table 1, we can see that the values of (x, y) can vary $0 \leq x, y \leq 1$ and error term of standard ADM decreases drastically when number of iteration $n = \{5, 10\}$ increases.

To apply modified ADM we split the right function of Eq. (40) into two and choosing initial guess as follows

$$\begin{aligned} u_0 &= -x^2, \\ v_0 &= x - \frac{1}{4}x^2, \end{aligned} \quad (43)$$

and applying MADM, we obtain

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= xv_n - 2 \int_0^x (xu_n(t) - v_n(t)) (u_n(t)) dt, \\ v_{n+1} &= -\frac{1}{2}(x + x^2) u_n - \frac{1}{2} \int_0^x (u_n(t) - v_n(t)) (v_n(t)) dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (44)$$

Table2: Numerical results for Example 1 by modified ADM

(x,y)	Exact (u, v)	Approx (u, v), n = 5	ErrorADM, n = 5	ErrorADM, n = 10
(0.1,0.1)	(0.01,0.1)	(0.0999999999, 0.1000000002)	$(1 \cdot 10^{-9}, 2 \cdot 10^{-10})$	$(12 \cdot 10^{-14}, 2 \cdot 10^{-15})$
(0.3, 0.3)	(0.9, 0.3)	(0.9000000006, 0.3000000003)	$(6 \cdot 10^{-9}, 3 \cdot 10^{-9})$	$(45 \cdot 10^{-14}, 13 \cdot 10^{-15})$
(0.5, 0.5)	(0.25, 0.5)	(0.2500000006, 0.5000000005)	$(6 \cdot 10^{-9}, 5 \cdot 10^{-9})$	$(42 \cdot 10^{-13}, 2 \cdot 10^{-13})$
(0.7, 0.7)	(0.49, 0.7)	(0.4899999998, 0.7000000005)	$(2 \cdot 10^{-9}, 5 \cdot 10^{-8})$	$(4 \cdot 10^{-14}, 5 \cdot 10^{-14})$
(0.9, 0.9)	(0.81, 0.9)	(0.8100000007, 0.9000000004)	$(7 \cdot 10^{-8}, 4 \cdot 10^{-8})$	$(72 \cdot 10^{-15}, 22 \cdot 10^{-16})$
(1,1)	(1,1)	(0.1000000005, 1.000000001)	$(5 \cdot 10^{-8}, 1 \cdot 10^{-8})$	$(8 \cdot 10^{-15}, 9 \cdot 10^{-14})$
(0.2, 0.9)	(0.04, 0.9)	(0.0399999999, 0.9000000004)	$(1 \cdot 10^{-9}, 4 \cdot 10^{-9})$	$(2 \cdot 10^{-14}, 22 \cdot 10^{-15})$
(0.4, 0.8)	(0.16, 0.8)	(0.1600000004, 0.8000000001)	$(4 \cdot 10^{-9}, 1 \cdot 10^{-8})$	$(8 \cdot 10^{-12}, 4 \cdot 10^{-13})$
(0.6, 0.7)	(0.36, 0.7)	(0.3600000007, 0.7000000005)	$(7 \cdot 10^{-9}, 5 \cdot 10^{-8})$	$(1 \cdot 10^{-12}, 5 \cdot 10^{-12})$
(0.8, 0.4)	(0.64, 0.4)	(0.6400000009, 0.4000000009)	$(9 \cdot 10^{-8}, 9 \cdot 10^{-9})$	$(2 \cdot 10^{-12}, 7 \cdot 10^{-12})$
(0.9, 0.2)	(0.81, 0.2)	(0.8100000007, 0.2000000002)	$(7 \cdot 10^{-8}, 2 \cdot 10^{-9})$	$(7 \cdot 10^{-12}, 1 \cdot 10^{-12})$
Max.	Error		$(7 \cdot 10^{-8}, 5 \cdot 10^{-8})$	$(8 \cdot 10^{-12}, 7 \cdot 10^{-12})$

Remark 2: From Table 2, it follows that as the number of iteration increases, the error term of MADM decreases drastically. Also, MADM comes much closer to the exact solution than ADM, as we can clearly seen by comparing the maximum error of Table 1 and 2.

Example 2 (J.Biazar, [25]):

Consider the following non-linear system of Volterra integral equation, with the exact solutions $u(x) = x^3$ and $v(x) = x^2$.

$$\begin{cases} \int_0^x \left[(1 + xt - x^2) u^2(t) + (1 + x - t) \sqrt{v(t)} \right] dt = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{7}x^7 - \frac{1}{56}x^9 \\ \int_0^x \left[(2 - x^2t + x^3) \sqrt[3]{u(t)} + (-xt + t^2 + 1) v^2(t) \right] dt = x^2 + \frac{11}{30}x^5 - \frac{1}{42}x^7. \end{cases} \quad (45)$$

By differentiation, we have:

$$\begin{aligned} u^2(x) + \sqrt{v(x)} + \int_0^x \left[(t - 2x) u^2(t) + \sqrt{v(t)} \right] dt &= x + \frac{1}{2}x^2 + x^6 - \frac{9}{56}x^8, \\ 2u^{1/3}(x) + v^2(x) + \int_0^x \left[(-2xt + 3x^2) u^{1/3}(t) - tv^2(t) \right] dt &= 2x + \frac{11}{6}x^4 - \frac{1}{6}x^6. \end{aligned} \quad (46)$$

Which is equivalent the second kind of VIEs

Let consider the new functions $f(t) = u^{1/3}(t)$ and $g(t) = v^{1/2}(t)$, we have:

$$\begin{aligned} u^6(x) + v(x) + \int_0^x \left[(t - 2x) u^6(t) + v(t) \right] dt &= x + \frac{1}{2}x^2 + x^6 - \frac{9}{56}x^8, \\ 2u(x) + v^4(x) + \int_0^x \left[(-2xt + 3x^2) u(t) - tv^4(t) \right] dt &= 2x + \frac{11}{6}x^4 - \frac{1}{6}x^6. \end{aligned} \quad (47)$$

And the canonical form are as follows:

$$\begin{aligned} u(x) &= x + \frac{11}{24}x^4 - \frac{1}{12}x^6 - \frac{1}{2}v^4(x) - \frac{1}{2} \int_0^x \left[(-2xt + 3x^2) u(t) - tv^4(t) \right] dt, \\ v(x) &= x + \frac{1}{2}x^2 + x^6 - \frac{9}{56}x^8 - u^6(x) - \int_0^x \left[(t - 2x) u^6(t) + v(t) \right] dt. \end{aligned} \quad (48)$$

Using the scheme of ADM (13) for IEs (45), we obtain

$$\begin{aligned} u_0 &= x + \frac{11}{24}x^4 - \frac{1}{12}x^6, \\ v_0 &= x + \frac{1}{2}x^2 + x^6 - \frac{9}{56}x^8, \\ u_{n+1} &= -\frac{1}{2}A_{1n}(v_0, \dots, v_n) - \frac{1}{2} \int_0^x B_{1n}(u_0, \dots, u_n, v_0, \dots, v_n) dt, \\ v_{n+1} &= -A_{2,n}(u_0, \dots, u_n) - \int_0^x B_{2,n}(u_0, \dots, u_n, v_0, \dots, v_n) dt. \end{aligned} \quad (49)$$

Table3: Numerical results for Example 2 by ADM

(x,y)	Exact (u,v)	App (u,v), $n = 5$	Error for $n = 5$	Error for $n = 10$
(0.1, 0.1)	(0.001, 0.01)	(0.00100001, 0.010000002)	$(1 \cdot 10^{-8}, 2 \cdot 10^{-9})$	$(18 \cdot 10^{-12}, 12 \cdot 10^{-10})$
(0.3, 0.3)	(0.027, 0.9)	(0.02700006, 0.90000003)	$(6 \cdot 10^{-8}, 3 \cdot 10^{-8})$	$(4 \cdot 10^{-11}, 3 \cdot 10^{-11})$
(0.5, 0.5)	(0.125, 0.25)	(0.12500004, 0.25000003)	$(4 \cdot 10^{-8}, 3 \cdot 10^{-8})$	$(4 \cdot 10^{-11}, 31 \cdot 10^{-10})$
(0.7, 0.7)	(0.343, 0.49)	(0.343000002, 0.490000005)	$(2 \cdot 10^{-9}, 5 \cdot 10^{-8})$	$(26.3 \cdot 10^{-11}, 54.4 \cdot 10^{-11})$
(0.9, 0.9)	(0.729, 0.81)	(0.72900007, 0.81000004)	$(7 \cdot 10^{-8}, 4 \cdot 10^{-8})$	$(17.4 \cdot 10^{-11}, 24.3 \cdot 10^{-11})$
(1,1)	(1,1)	(1.00000015, 1.00000031)	$(15 \cdot 10^{-8}, 31 \cdot 10^{-8})$	$(14.5 \cdot 10^{-10}, 32.1 \cdot 10^{-11})$
(0.2, 0.9)	(0.008, 0.81)	(0.00800012, 0.81000004)	$(12 \cdot 10^{-8}, 4 \cdot 10^{-8})$	$(2 \cdot 10^{-11}, 24.3 \cdot 10^{-11})$
(0.4, 0.8)	(0.064, 0.64)	(0.06400014, 0.64000018)	$(14 \cdot 10^{-8}, 18 \cdot 10^{-8})$	$(18 \cdot 10^{-10}, 14.8 \cdot 10^{-11})$
(0.6, 0.7)	(0.216, 0.49)	(0.21600017, 0.49000005)	$(17 \cdot 10^{-8}, 5 \cdot 10^{-8})$	$(16.3 \cdot 10^{-10}, 54.4 \cdot 10^{-11})$
(0.8, 0.4)	(0.512, 0.16)	(0.51200009, 0.16000009)	$(9 \cdot 10^{-8}, 9 \cdot 10^{-8})$	$(29.3 \cdot 10^{-11}, 5 \cdot 10^{-11})$
(0.9, 0.2)	(0.729, 0.04)	(0.72900007, 0.04000021)	$(7 \cdot 10^{-8}, 21 \cdot 10^{-8})$	$(17.4 \cdot 10^{-11}, 17.3 \cdot 10^{-12})$
Max.	Error.		$(17 \cdot 10^{-8}, 31 \cdot 10^{-8})$	$(18 \cdot 10^{-10}, 31 \cdot 10^{-10})$

Remark 3: In source [25], the results of the above example were given up to $n = 3$ iteration. We are able to increase the number of iteration and obtained more accurate solutions than the source results [25], and it turned out that when the number of iteration increases the more accurate solution is obtained.

5 Conclusion

In conclusion, our study demonstrates the effectiveness of ADM in solving linear and nonlinear Volterra IEs of the first and second type with initial value problems. The accuracy of the solutions improves with an increase in the number of iterations, which leads to a decrease in the absolute error. It is worth noting that ADM converges to the exact solution very quickly as the number of steps increases, as we can clearly see in the above tables when $n=10$. It exhibits high performance with low absolute error at high iterations. This finding highlights the unique computational strategies used by ADM, which contribute to its superior accuracy and efficiency in solving higher-order equations compared to other methods. Overall, our study contributes to the field of numerical methods for solving linear and nonlinear Volterra integral equations. This demonstrates the potential of ADM as a robust and effective approach validated through ADM. Further research could explore the application of ADM in different mathematical and scientific contexts, as well as test its performance in more complex scenarios.

6 Acknowledgments

We are grateful for the support of the work by the Research Grant Scheme, University Malaysia Terengganu and National University of Uzbekistan, Project code: 55233

References

- [1] Adomian G. 1988. A Review of the Decomposition Method in Applied Mathematics, *Journal Of Mathematical Analysis And Applications* 135, – P. 501–544.
- [2] Liao S.J. 1992. The proposed homotopy analysis technique for the solution of nonlinear problems. PhD thesis, Shanghai Jiao Tong University
- [3] Liao S.J. 2003. *Beyond Perturbation: Introduction to the Homotopy Analysis Method*. Boca Raton, Chapman and Hall/CRC Press
- [4] Russel Impagliazzo, Stephen Checkoway 2011. Polynomial approximation method,
- [5] Kenneth L. Judd 2011. *Quadrature methods*, Hoover Institution,
- [6] Babolian E. and Biazar J. 2002. On the Order of the Convergence of Adomian Method, *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 130, – P. 383–387.
- [7] Abdul-Majid Wazwaz 2015. *A first course in integral equations*, Saint Xavier University USA, Second edition,
- [8] T.K. Yuldashev, Z.K. Eshkuvatov, N.M.A. Nik Long 2023. A Nonlinear Fredholm Functional-Integral Equation of First Kind with Degenerate Kernel and Maxima, *Malaysian Journal of Fundamental and Applied Sciences(MJFAS)*, Vol.19, – P. 82–92. (SGR:0.16, Scopus, WoS)
- [9] Zainidin Eshkuvatov, Davron Khayrullaev, Muzaffar Nurillaev3, Shalela Mohd Mahali1, Anvar Narzullaev 2023. Application of HAM for Nonlinear Integro Differential Equations of Order Two, *Journal of Applied Mathematics and Physics*, 11, – P. 55–68.
- [10] Al-Hayani W. 2013. Solving nth-order integro-differential equations using the combined Laplace transform-Adomian decomposition method. *Journal of Applied Mathematics*, Vol.4(6), – P. 882–886.
- [11] Manafianheris J. 2012. Solving the Integro-Differential Equations Using the Modified Laplace Adomian Decomposition Method. *Journal of Mathematica Extension*, Vol.6, – P. 41–55.
- [12] Peter Linz 1985. *Analytical and Numerical Methods for Volterra Equations*,
- [13] Osama H.M., Huda A.S. 2018. Computational methods based Laplace decomposition for solving nonlinear system of fractional order differential equations. *Alexandria Engineering Journal*, Vol.57(4), – P. 3549–3557.
- [14] Peter J. Collins 2006. *Differential and Integral equations*, WIT Press,
- [15] Novin R., Fariborzi Araghi M.A., Mahmoudi Y. 2018. A novel fast modification of the Adomian decomposition method to solve integral equations of the first kind with hypersingular kernels. *J. Comput. Appl. Math* Vol.343, – P. 619–634.
- [16] Malabrahmi A. 2015. Direct computation method for solving a general nonlinear Fredholm integro-differential equation under the mixed conditions: Degenerate and non-degenerate kernels. *Journal of computational and applied mathematics*, Vol.282, – P. 34–43.
- [17] Matebie T.B. 2016. The Method of Successive Approximations (Neumann's Series) of Volterra Integral Equation of the Second Kind. *Pure and Applied Mathematics Journal*, Vol.5(6), – P. 211–219.
- [18] Rabbani M. and Zarali B. 2012. Solution of Fredholm Integro-Differential Equations System by Modified Decomposition Method', *The Journal of Mathematics and Computer Science*, Vol.4(4), – P. 258–264.
- [19] L. Zheng, X. Zhang 2017. Variational iteration method and Homotopy peturbation method. *Modeling and analysis modern fluid problems*,

- [20] Z. Avazzadeh, M. Heydari, G.B. Loghmani 2010. Numerical solution of Fredholm integral equations of the second kind by using integral mean value theorem. Applied Mathematical Modelling,
- [21] H.M. Jaradat, E.A. Rawashdeh, F. Awawdeh 2011. On Volterra's Population Growth Models. Annals of the University of Craiova, Mathematics and Computer Science Series Vol. 38(2),
- [22] F.S. Emmanuel 2020. Solution of Integral Equations of Volterra Type Using The Adomian Decomposition Method (ADM). MathLAB Journal, Vol.7, – P. 282–289.
- [23] S.A. Micula 2020. Numerical Method for Weakly Singular Nonlinear Volterra Integral Equations of the Second Kind. Symmetry 12(11):1862, DOI: 10.3390/sym12111862
- [24] F.A. Opeyemi, D.A. Dikko, E.O. Ayoola 2012. Numerical solution of certain integral equation,
- [25] J. Biazar, E. Babolian, R. Islam. 2003. Solution of a system of Volterra integral equations of the first kind by Adomian method,

Received August 08, 2024

УДК 519.644

РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА ПЕРВОГО РОДА МОДИФИЦИРОВАННЫМ МЕТОДОМ РАЗЛОЖЕНИЯ АДОМИАНА

^{1,2*} *Эшкуватов З.К.*, ² *Салимова Н.М.*, ² *Худойбергганов М.О.*

*zainidin@umt.edu.my

¹ Университет Малайзии Теренггану,
Малайзия, 21030 Куала-Теренггану;

² Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека,
100174, Узбекистан, г. Ташкент, ул. Университетская, д. 4.

В данной работе рассматриваются системы линейных и нелинейных интегральных уравнений Вольтерра (ИУВ) первого рода. Сначала с помощью дифференцирования произвели преобразование системы ИУВ первого рода в уравнение второго рода, затем для поиска полуаналитического решения был использован стандартный метод разложения Адомиана (МРА) и модифицированный МРА (ММРА). Метод разложения Адомиана преобразует интегральные уравнения Вольтерра второго рода в определение вычисляемых компонентов итерационных интегральных уравнений. В работе доказана единственность решения системы нелинейных ИУВ второго рода и показан выбор исходных данных. Практически показано, что полученные методом ММРА ряды очень быстро сходятся к точному решению. Наконец, были проиллюстрированы четыре примера, показывающие обоснованность и применимость этого подхода. Примеры взяты из работ, упомянутых в ссылках.

Ключевые слова: интегральное уравнение Вольтерра, метод разложения Адомиана, полуаналитическое решение.

Цитирование: *Эшкуватов З.К., Салимова Н.М., Худойбергганов М.О.* Решение системы интегральных уравнений Вольтерра первого рода модифицированным методом разложения Адомиана // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2024. – № 4/1(59). – С. 23-36.

ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

№ 4/1(59) 2024

Журнал основан в 2015 году.

Издается 6 раз в год.

Учредитель:

Научно-исследовательский институт развития цифровых технологий и
искусственного интеллекта.

Главный редактор:

Равшанов Н.

Заместители главного редактора:

Азамов А.А., Арипов М.М., Шадиметов Х.М.

Ответственный секретарь:

Ахмедов Д.Д.

Редакционный совет:

Азамова Н.А., Алоев Р.Д., Амиргалиев Е.Н. (Казахстан), Бурнашев В.Ф.,
Загребина С.А. (Россия), Задорин А.И. (Россия), Игнатъев Н.А.,
Ильин В.П. (Россия), Исмагилов И.И. (Россия), Кабанихин С.И. (Россия),
Карачик В.В. (Россия), Курбонов Н.М., Маматов Н.С., Мирзаев Н.М.,
Мирзаева Г.Р., Мухамадиев А.Ш., Назирова Э.Ш., Нормуродов Ч.Б.,
Нуралиев Ф.М., Опанасенко В.Н. (Украина), Расулмухамедов М.М., Расулов А.С.,
Садуллаева Ш.А., Старовойтов В.В. (Беларусь), Хаётов А.Р., Халджигитов А.,
Хамдамов Р.Х., Хужаев И.К., Хужаеров Б.Х., Чье Ен Ун (Россия),
Шабозов М.Ш. (Таджикистан), Dimov I. (Болгария), Li Y. (США),
Mascagni M. (США), Min A. (Германия), Schaumburg H. (Германия),
Singh D. (Южная Корея), Singh M. (Южная Корея).

Журнал зарегистрирован в Агентстве информации и массовых коммуникаций при
Администрации Президента Республики Узбекистан.

Регистрационное свидетельство №0856 от 5 августа 2015 года.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

При перепечатке материалов ссылка на журнал обязательна.

За точность фактов и достоверность информации ответственность несут авторы.

Адрес редакции:

100125, г. Ташкент, м-в. Буз-2, 17А.

Тел.: +(998) 712-319-253, 712-319-249.

Э-почта: journals@airi.uz.

Веб-сайт: <https://journals.airi.uz>.

Дизайн и вёрстка:

Шарипов Х.Д.

Отпечатано в типографии НИИ РЦТИИ.

Подписано в печать 05.09.2024 г.

Формат 60x84 1/8. Заказ №5. Тираж 100 экз.

PROBLEMS OF COMPUTATIONAL AND APPLIED MATHEMATICS

No. 4/1(59) 2024

The journal was established in 2015.
6 issues are published per year.

Founder:

Digital Technologies and Artificial Intelligence Development Research Institute.

Editor-in-Chief:

Ravshanov N.

Deputy Editors:

Azamov A.A., Aripov M.M., Shadimetov Kh.M.

Executive Secretary:

Akhmedov D.D.

Editorial Council:

Azamova N.A., Alov R.D., Amirgaliev E.N. (Kazakhstan), Burnashev V.F.,
Zagrebina S.A. (Russia), Zadorin A.I. (Russia), Ignatiev N.A., Ilyin V.P. (Russia),
Ismagilov I.I. (Russia), Kabanikhin S.I. (Russia), Karachik V.V. (Russia), Kurbonov
N.M., Mamatov N.S., Mirzaev N.M., Mirzaeva G.R., Mukhamadiev A.Sh., Nazirova
E.Sh., Normurodov Ch.B., Nuraliev F.M., Opanasenko V.N. (Ukraine), Rasulov A.S.,
Sadullaeva Sh.A., Starovoitov V.V. (Belarus), Khayotov A.R., Khaldjigitov A.,
Khamdamov R.Kh., Khujaev I.K., Khujayorov B.Kh., Chye En Un (Russia),
Shabozov M.Sh. (Tajikistan), Dimov I. (Bulgaria), Li Y. (USA), Mascagni M. (USA),
Min A. (Germany), Schaumburg H. (Germany), Singh D. (South Korea),
Singh M. (South Korea).

The journal is registered by Agency of Information and Mass Communications under the
Administration of the President of the Republic of Uzbekistan.

The registration certificate No. 0856 of 5 August 2015.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

At a reprint of materials the reference to the journal is obligatory.
Authors are responsible for the accuracy of the facts and reliability of the information.

Address:

100125, Tashkent, Buz-2, 17A.

Tel.: +(998) 712-319-253, 712-319-249.

E-mail: journals@airi.uz.

Web-site: <https://journals.airi.uz>.

Layout design:

Sharipov Kh.D.

DTAIDRI printing office.

Signed for print 05.09.2024

Format 60x84 1/8. Order No. 5. Printed copies 100.



**Профессор
ИСРАИЛОВ МАРУФ ИСРАИЛОВИЧ**
(к 90-летию со дня рождения)

Маруф Исраилович Исраилов – известный ученый-математик, доктор физико-математических наук, профессор, крупный специалист в области теории чисел и вычислительной математики.

М.И. Исраилов родился 27 апреля 1934 года в городе Самарканде в семье ремесленника. В 1951 году с отличием окончив среднюю школу №16 г. Самарканда, поступил на физико-математический факультет Самаркандского государственного университета, который успешно окончил в 1956 г. С 1958 по 1961 годы проходил обучение в аспирантуре Института математики им. В.И. Романовского под руководством профессора Н.П. Романова. В 1966 году защитил кандидатскую диссертацию на тему «Проблема Тарри для быстрорастущих слагаемых и ее приложение к изучению эргодических сумм». В 1974 году М.И. Исраилову присвоено звание старшего научного сотрудника. В 1986 году М.И. Исраилов защитил докторскую диссертацию на тему «Асимптотические и точные формулы для аддитивных задач с растущим числом слагаемых», а в 1989 году получил звание профессора по специальности «Вычислительная математика».

После окончания аспирантуры М.И. Исраилов работал младшим научным сотрудником в Вычислительном центре Института математики АН РУз, затем с 1966 г. – старшим научным сотрудником. С 1976 года работал на должности заведующего лабораторией «Теория приближенного интегрирования» Института кибернетики с вычислительным центром. С 1984 г. и до 1995 г. – являлся заведующим отделом «Вычислительные методы» Института математики АН РУз. В том же 1995 году М.И. Исраилов приступил к работе в Самаркандском государственном университете в качестве заведующего кафедрой вычислительной математики.

Профессор М.И. Исраилов имел широкий диапазон научных интересов. Его глубокие исследования в областях аддитивных задач, построения общих арифметиче-

ских ортогональных и биортогональных систем в гильбертовых пространствах; нахождения числа решений различных классов диофантовых уравнений, оценке тригонометрических сумм; построения оптимальных квадратурных и кубатурных формул в различных функциональных пространствах, а также приближенного решения регулярных и сингулярных интегральных уравнений внесли существенный вклад в развитие теории чисел и вычислительной математики. Результаты его работ успешно применяются в многочисленных прикладных задачах.

М.И. Исраилов впервые исследовал проблему Тарри для общих числовых последовательностей и применил к изучению эргодических сумм. Здесь он также решил известную проблему венгерского математика П. Эрдеша (об оценке снизу максимума модуля многочленов на единичной окружности) в обобщенной и уточненной постановке. М.И. Исраилову принадлежит всестороннее исследование аддитивных задач с растущим числом слагаемых. Он получил асимптотические разложения в проблеме Варинга с полиномиальными слагаемыми и в диофантовой системе Гильберта-Камке.

Им также найдена точная формула для числа решений линейных диофантовых уравнений общего вида. Эта формула нашла применение в теории инвариантных кубатурных формул академика С.Л.Ёсоболева и позволила сильно упростить исследование и построение таких формул на поверхности многомерных сфер и шаров.

Маруф Исраилович также внес существенный вклад в применение теоретико-числовых методов и методов сплайн-функций в вычислительной математике. Им построены оптимальные квадратурные и кубатурные формулы сингулярных интегралов с ядрами Гильберта и Коши, найдены приближенно-аналитические решения систем одномерных и многомерных интегральных уравнений с ядрами Фредгольма, Гильберта и Коши. Найдены оценки погрешности в различных часто встречающихся пространствах функций. Эти результаты имеют многочисленные применения в прикладных задачах, в частности в аэродинамике и гидродинамике. Характерной особенностью этого цикла исследований является новизна постановок задач и разработка новых методов их решения.

Отдельные результаты исследований М.И. Исраилова по теории дзета-функции Римана и проблеме делителей Дирихле вызвали большой резонанс среди специалистов за пределами нашей страны.

В Маруфе Исраиловиче гармонично сочетались способности крупного ученого, талантливого педагога и умелого руководителя крупных научных исследований. Он успешно сочетал плодотворную научную и научно-организаторскую деятельность с большой педагогической и общественной деятельностью. С 1967 г. М.И. Исраилов читал общие и специальные курсы на факультете прикладной математики Ташкентского государственного университета, а с 1995 по 2003 годы – в Самаркандском государственном университете, где до конца жизни продолжал активную научно-педагогическую деятельность в качестве почетного профессора-консультанта.

М.И. Исраилов с 1972 г. являлся членом двух специализированных советов по защите кандидатских и докторских диссертаций. С 1967 по 1995 годы руководил работой организованного им городского научного семинара «Применение теории чисел в вычислительной математике» при Институте кибернетики АН РУз и Институте математики АН РУз, а с 1995 года руководил научным семинаром «Приближенные методы высшего анализа» в СамГУ.

Работая в крупнейших ВУЗах и НИИ республики, Маруф Исраилович подготовил десятки учеников, успешно работающих в различных сферах экономики республи-

ки, в странах ближнего и дальнего зарубежья. М.И. Исраилов руководил работами магистрантов, аспирантов и докторантов. Под его руководством защищены более 10 кандидатских диссертаций, он способствовал защите трех докторских диссертаций. С 1993 г. М.И. Исраилов со своими докторантами, аспирантами и студентами вел научные исследования в рамках проектов, имеющих фундаментальное значение и широкое прикладное применение.

Обычно будущих ученых Маруф Исраилович привлекал к науке со студенческой скамьи. Более того, он с аспирантских лет активно участвовал в поиске и формировании юных математических дарований в системе школьного образования. Будучи аспирантом и молодым ученым М.И. Исраилов преподавал в специализированной физико-математической школе №82 города Ташкента, организованной академиком В.К. Кабуловым. Многие ученики М.И. Исраилова из этой школы стали в последующем докторами наук и известными специалистами в своих отраслях. Подготовку математиков со школьной скамьи профессор М.И. Исраилов продолжил в физико-математическом лицее г. Самарканда, учащиеся которого регулярно занимали призовые места на различных международных математических олимпиадах. На протяжении всей педагогической деятельности своими научно-популярными статьями в энциклопедиях, в различных общественных и молодежных изданиях, ряде телепередач М.И. Исраилов умело и выверено формировал математическую культуру мышления у молодежи.

М.И. Исраилов – автор более 160 научных, 40 научно-популярных работ. Около 50 его научных статей опубликованы в авторитетных изданиях ближнего и дальнего зарубежья. Профессор М.И. Исраилов является автором широко известного двухтомного учебника по вычислительной математике «Хисоблаш методлари». Данная книга является единственным учебником подобного типа на узбекском языке и принята в качестве основного в ведущих университетах Узбекистана. Этот учебник написан на основе оригинальных лекций М.И. Исраилова, которые он читал на протяжении 40 лет в Национальном университете Узбекистана, Самаркандском государственном университете, на семинарах в Институте математики АН РУз. Также результатом многолетнего чтения лекций стал учебник по теории чисел «Сонлар назарияси» в соавторстве с профессором А. Солеевым.

М.И. Исраилов и его ученики участвовали с докладами во многих международных научных форумах. Он принимал участие в Международном конгрессе математиков, Всемирном конгрессе общества Бернулли и других. Был одним из активных организаторов всех международных конференций по теории кубатурных формул, проводимых в Узбекистане. Профессор М.И. Исраилов до последних дней оставался активным участником ежегодной Международной научно-практической конференции «Инновация». Являясь одним из бессменных руководителей секции «Математика. Математическое моделирование», М.И. Исраилов поддерживал высокий уровень научных изысканий и докладов конференции. М.И. Исраилов был членом редколлегии сборника «Вопросы вычислительной и прикладной математики», а также ответственным редактором сборников по вычислительной математике, выпускаемых в Институте математики АН РУз. А с 2001 года являлся членом редколлегии сборника научных статей Международной конференции «Инновация». Являлся членом Американского математического общества и экспертом международного журнала «Mathematical Reviews».

Маруфе Исраилович неоднократно награждался почетными грамотами Академии наук Республики Узбекистан.

В знак признания весомого многолетнего вклада профессора М.И. Исраилов в развитие математической науки и подготовку высококвалифицированных кадров в 2009 году Национальным университетом Узбекистана была проведена республиканская научная конференция «Вычислительные технологии и математическое моделирование», посвященная его 75-летию. В 2013 году проведен научный семинар «Профессор М.И. Исраилов и развитие прикладной математики в Узбекистане», в 2014 году состоялась научно-техническая конференция «Прикладная математика и информационная безопасность», посвященная 80-летию учёного. В текущем 2024 году в связи с 90-летием профессора М.И. Исраилова в НУУз организован международный научный семинар «Вычислительные модели и технологии (СМТ2024)».

Созданная профессором М.И. Исраиловым научная школа по численным методам и в настоящее время продолжает продуктивно функционировать. Ученики и последователи Маруфа Исраиловича сегодня успешно работают в различных сферах и отраслях экономики нашей республики и за рубежом, продолжая дело своего Устога-учителя.

Редакционная коллегия журнала «Проблемы вычислительной и прикладной математики» посвящает данный специальный выпуск светлой памяти профессора Маруфа Исраиловича Исраилова – выдающегося учёного, талантливого педагога, заботливого наставника и замечательного человека, который навсегда останется в памяти друзей, коллег и учеников.

Содержание

Солеев А.С., Розет И.Г., Мухтаров Я.

Исследование эколого-медицинских моделей методами бифуркационных параметров в конечно-разностных дискретных системах 9

Худойбергганов М.У., Туляганова Н.Б., Каримов Д.К.

Исследование устойчивости модифицированных разностных схем Куранта, Айзексона и Риза для квазилинейных гиперболических систем 15

Эшкuvatов З.К., Салимова Н.М., Худойбергганов М.О.

Решение системы интегральных уравнений Вольтерра первого рода модифицированным методом разложения Адомиана 23

Олимов Н.Н., Бекмуродова Д.Б.

Оптимальная интерполяционная формула с производными в пространстве Соболева 37

Курбонназаров А.И.

Оптимальная квадратурная формула для вычисления коэффициентов Фурье в гильбертовом пространстве 46

Шадиметов Х.М., Атамуродова Б.М.

Дискретная система типа Винера-Хопфа для коэффициентов интерполяционных формул 64

Шадиметов Х.М., Каримов Р.С.

Система типа Винера-Хопфа для нахождения оптимальных коэффициентов разностных формул в гильбертовом пространстве 74

Расулов А.С., Раимова Г.М.

Применение методов ускорения сходимости к асинхронным итерациям 85

Шадиметов Х.М., Шоназаров С.К.

Об одной явной оптимальной разностной формуле 96

Хаётов А.Р., Нуралиев Ф.А., Абдуллаева Г.Ш.

Построение алгебро-гиперболического интерполяционного натурального сплайна шестого порядка 107

Аллаков И., Эрдонов Б.Х.

Об одновременном представлении трех чисел суммой шести простых чисел . 122

К. Джа, К.Б. Манандхар

Общий результат с фиксированной точкой для совместимых отображений типа (K) в интуиционистском нечетком метрическом пространстве 134

Хаётов А.Р., Хаитов Т.О., Буваширов Д.С.

Оптимальная формула численного интегрирования дробного интеграла Римана-Лиувилля 142

Шадиметов Х.М., Азамов С.С., Элмуратов Г.Ч.

Минимизация погрешность квадратурной формулы в пространстве Гильберта 151

Contents

<i>Soleyev A.S., Rozet I.G., Muxtarov Y.</i>	
Research of ecological and medical models using bifurcation parameters methods in finite difference discrete systems	9
<i>Khudoyberganov M.U., Tulyaganova N.B., Karimov D.K.</i>	
Investigation of the stability of the modified difference Courant, Isaakson and Rees schemes for quasi-linear hyperbolic systems	15
<i>Eshkuvatov Z.K., Salimova N.M., Khudoyberganov M.O.</i>	
Solving system of Volterra integral equations of the first kind by modified Adomian decomposition method	23
<i>Olimov N.N., Bekmurodova D.B.</i>	
An optimal interpolation formula with derivatives in Sobolev space	37
<i>Kurbonnazarov A.I.</i>	
Optimal quadrature formula for calculating Fourier coefficients in Hilbert space .	46
<i>Shadimetov Kh.M., Atamuradova B.M.</i>	
Discrete system of Wiener–Hopf type for coefficients of interpolation formulas . .	64
<i>Shadimetov Kh.M., Karimov R.S.</i>	
Wiener–Hopf type system for finding optimal coefficients of difference formulas in the Hilbert space	74
<i>Rasulov A.S., Raimova G.M.</i>	
Applications of convergence acceleration methods to asynchronous iterations . .	85
<i>Shadimetov Kh.M., Shonazarov S.K.</i>	
On an explicit optimal difference formula	96
<i>Hayotov A.R., Nuraliyev F.A., Abdullayeva G.Sh.</i>	
Construction of the sixth order algebraic-hyperbolic interpolation natural spline	107
<i>Allakov I., Erdonov B.Kh.</i>	
On the simultaneous representation of three numbers by the sum of six numbers of primes	122
<i>Jha K., Manandhar K.B.</i>	
A common fixed point result for compatible mappings of type (K) in intuitionistic fuzzy metric space	134
<i>Hayotov A.R., Khaitov T.O., Buvasharov D.S.</i>	
An optimal formula for numerical integration of fractional Riemann-Liouville integral	142
<i>Shadimetov Kh.M., Azamov S.S., Elmuratov G.Ch.</i>	
Minimizing the error of a quadrature formula in Hilbert space	151