UDC 519.633.3

INVESTIGATION OF THE STABILITY OF THE MODIFIED DIFFERENCE COURANT, ISAAKSON AND REES SCHEMES FOR QUASI-LINEAR HYPERBOLIC SYSTEMS

Khudoyberganov M.U., Tulyaganova N.B., Karimov D.K.
mirzoali@mail.ru
National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek,
4, University street, Tashkent, 100174 Uzbekistan.

In the modeling of a number of practical problems, it is brought to the mixed problems imposed on the system of quasi-linear hyperbolic equations. Since there is no exact solution to such problems, they are solved using approximate solution methods. Currently, the theory of differential schemes is widely used in the approximate solution of differential problems. Therefore, the theory of discrete schemes is used to numerically solve the mixed problem presented in this article. To solve any differential problem numerically, it is necessary to prove the correctness of the differential problem under consideration. For this purpose, in the article, an a priori estimate for the solution of the differential problem, with the dissipative condition fulfilled, was obtained for the boundary conditions of the mixed problem placed on the quasi-linear hyperbolic system. After that, in order to construct a discrete analogue of the a priori value obtained for the solution of the differential problem, a differential scheme approximating the quasi-linear hyperbolic system was constructed and the stability of the differential scheme was proved. The stability of the difference scheme approximating the mixed problem set for the differential problem was proved by constructing a discrete analog of the a priori value obtained for the solution of the mixed problem set to the quasi-linear hyperbolic system. A calculation experiment was conducted to numerically solve the model problem with the help of the constructed differential circuit, and the results of the conducted experiment showed the stability of the constructed differential circuit and the obtained solution is close to the exact solution.

Keywords: mixed problems,quasi-linear hyperbolic equations, model problem.

Citation: Khudoyberganov M.U., Tulyaganova N.B., Karimov D.K. 2024. Investigation of the stability of the modified difference Courant, Isaakson and Rees schemes for quasi-linear hyperbolic systems. *Problems of Computational and Applied Mathematics.* 4/1(59): 15-22.

1 Introduction

At present, hydrodynamic models are widely used to describe various physical phenomena. Unfortunately, the equations of hydrodynamics are non-linear. This means that only in rare cases can one find an analytical solution. Thus, using numerical methods in solving problems of hydrodynamics is necessary. There are many schemes for hydrodynamic models (particularly for equations of gas dynamics). Some approaches to the design of different methods are described, for example, in (Blokhin A.M., Alaev R.D., 1993; Kulikovskiy A.G., Pogorelov N.V., Semenov A.Yu., 2001). It also represents one curious approach based on the possibility of writing the system of gas dynamics equations in two versions. Let us first explain this approach's essence at the initial differential level. As noted in (Blokhin A.M., Alaev R.D., 1993), the system of equations of gas dynamics, t-hyperbolic system (according to Friedrichs):

$$A_1\frac{\partial U}{\partial t}+B_1\frac{\partial U}{\partial x}+C_1\frac{\partial U}{\partial y}=0, \tag{1}$$

Where

$$A_1=A_1(U,t,x,y)=A_1^*(U,t,x,y),$$
$$B_1=B_1(U,t,x,y)=B_1^*(U,t,x,y),$$
$$C_1=C_1(U,t,x,y)=C_1^*(U,t,x,y),$$

besides

$$A_1>0.$$

Further, due to a unique selection of the nondegenerate transformation $T=$ $=T(U,t,x,y)$ (Blokhin A.M., Alaev R.D., 1993; Khudoyberganov M., Rikhsiboev D., Rashidov J. 2020), (Aloev R.D., Eshkuvatov Z.K., Khudoyberganov M.U., and Nematova D.E. 2019) on smooth solutions, system (1) can also be rewritten in the following equivalent form:

$$A\frac{\partial W}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial t}(A^TW)+B\frac{\partial W}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}(B^TW)+C\frac{\partial W}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial y}(C^TW)=0. \tag{2}$$

These two equivalent (on smooth solutions) forms of writing the original system of gas dynamics equations allow us to obtain the so-called local a priori estimate for it.

In the region, $II=\{(t,x,y):0\leqslant t\leqslant T;0\leqslant x\leqslant l,-\infty<y<+\infty\}$ consider a quasi-linear system of equations of hyperbolic type (2) with boundary conditions at $x=0$:

$$W^I=SW^{II},\ 0<t\leqslant T; \tag{3}$$

$$W^{II}=RW^I,\ 0<t\leqslant T; \tag{4}$$

and with initial data at $t=0$:

$$W(0,x,y)=W_0(x,y),\ 0\leqslant x\leqslant l. \tag{5}$$

Here

$$A=A(W,t,x,y)>0,$$
$$B=B(W,t,x,y),$$
$$C=C(W,t,x,y),$$

real square matrices of dimension $N\times N$; A^T,B^T,C^T-corresponding transposed matrix; $W_0(x,y)$- given vector-function; $S=S(W,t,y),R=R(W,t,y)$- rectangular mats dimensions $N_0\times N_1$ and $N_1\times N_0$ respectively; $W=\left(W^I,W^{II},W^{III}\right)^T$ -unknown vector-dimension function N, tending to zero at $|y|\to\infty$; $W^I=(w_1,w_2,...,w_N)^T$, $W^{II}=$ $=(w_{N_0+1},w_{N_0+2},...,w_{N_0+N_1})^T$, $W^{III}=(w_{N_0+N_1+1},w_{N_0+N_1+2},...,w_N)^T$, $N=N_0+N_1+$ $+N_2\neq 0$ where $N_i\geqslant 0,i=0,1,2$ - whole numbers, T,l is positive real numbers.Besides, $A>0$ the positive definite matrix (Godunov S.K.,1979) and matrix B has N_0 pieces of positive, N_1 pieces from negative, N_2 and pieces of zero eigenvalues. Positive eigenvalues correspond to the vector W^I, negative-eigenvalues correspond to the vector W^{II}, and zero eigenvalues correspond to the vector W^{III}.

Assuming that the boundary conditions are dissipative, i.e. if for non-zero vectors W satisfying the boundary conditions (3)-(4), the following inequality holds:

$$-(B^TW,W)\big|_{x=0}+(B^TW,W)\big|_{x=l}\geqslant 0.$$

For the mixed problem (2)-(4), one can obtain an a priori estimate of the following form:

$$I(t) \leqslant I(0), \tag{6}$$

where $I(t) = \int\limits_0^t \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (AW, W)dydx$.

Remark. Next, we digress from the gas-dynamic systems (1), (2), and we will assume that the original symmetric-hyperbolic system (1) can be rewritten in the form (2) on smooth solutions of system (1).

2 Modified difference courant-isaacson-rees (cir) schemes

In the domain II, we construct a different grid with steps $\Delta t = \Delta, \Delta x = h_x, \Delta y = h_y$. Let us introduce the following notation:

$$W(m\Delta, ih_x, jh_y = W_{ij}^m = W;$$

$$m = \overline{0, M}; i = \overline{0, n}; |j| = 0, 1, 2, ...;$$

$$M\Delta = T;\ nh_x = l; r_x = \frac{\Delta}{h_x}; r_y = \frac{\Delta}{h_y};$$

Now we formulate the modified new difference scheme of the CIR type for the system (2)-(5):

$$\begin{gathered} V_{i,j}^{m+1} A_{i,j}^{m+1}(W_{i,j}^{m+1} - W_{i,j}^m) + V_{i,j}^m[(A^TW)_{i,j}^{m+1} - (A^TW)_{i,j}^m] + \\ + r_x V_{i-1/2\ ,j}^m B_{i-1/2\ ,j}^m (W_{i+1/2\ ,j}^m - W_{i-1/2\ ,j}^m) + r_x V_{i+1/2\ ,j}^m [(B^TW)_{i+1/2,j}^m - \\ - (B^TW)_{i-1/2,j}^m] + r_y V_{i,j-1/2}^m C_{i,j-1/2}^m (W_{i,j+1/2}^m - W_{i,j-1/2}^m) + \\ + r_y V_{i,j+1/2}^m [(C^TW)_{i,j+1/2}^m - (C^TW)_{i,j-1/2}^m] = 0; \\ m = \overline{0, M-1}; i = \overline{1, n-1}; |j| = 0, 1, 2, ... \end{gathered} \tag{7}$$

$$\begin{gathered} (W^I)_{1/2\ ,j}^m = (SW^{II})_{1/2\ ,j}^m; (W^{II})_{n-1/2\ ,j}^m = (RW^I)_{n-1/2\ ,j}^m; \\ m = \overline{0, M}; |j| = 0, 1, 2, ... \end{gathered} \tag{8}$$

$$W_{i,j}^0 = W(W_0(ih_x, jh_y), 0, ih_x, jh_y); i = \overline{0, n}; |j| = 0, 1, 2, ... \tag{9}$$

$$W_{k+1/2\ ,j}^m = \frac{1}{2}(W_{k,j}^m + W_{k+1,j}^m) + \frac{1}{2} D_{k,j}^m (W_{k,j}^m - W_{k+1,j}^m), k = i, i-1,$$

$$W_{i,k+1/2}^m = \frac{1}{2}(W_{i,k}^m + W_{i,k+1}^m) + \frac{1}{2} E_{i,k}^m (W_{i,k}^m - W_{i,k+1}^m), k = j, j-1,$$

$$D = \Omega_R(B)[sign\lambda_p(B)\delta_{pl}]\Omega_L(B), E = \Omega_R(C)[sign\lambda_p(C)\delta_{pl}]\Omega_L(C),$$

$$V_{i,j}^m = diag((w_1)_{i,j}^m, (w_2)_{i,j}^m, ..., (w_N)_{i,j}^m).$$

Remark. Difference scheme (7) approximates not the original system (2), but its consequence, which is obtained by multiplying on the left by the matrix V equation (2):

$$VA\frac{\partial W}{\partial t} + V\frac{\partial}{\partial t}(A^TW) + VB\frac{\partial W}{\partial x} + V\frac{\partial}{\partial x}(B^TW) + VC\frac{\partial W}{\partial y} + V\frac{\partial}{\partial y}(C^TW) = 0,$$

where $V = diag(w_1,\ w_2, ..., w_N)$.

Theorem. Let on the solutions of the finite difference model (7)-(9) the condition $W_{i,j}^m \to 0$ at $|j| \to \infty$ and the following is unequal

$$-(BW,W)_{1/2\ ,j}^m \geqslant 0,$$
$$(BW,W)_{n-1/2\ ,j}^m \geqslant 0.$$

then the difference model (7)-(9) is stable in the energy norm $\sqrt{J_m}$, where

$$J_m = h_x h_y \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} ((AW)_{i,j}^m, W_{i,j}^m).$$

Proof. We study the difference scheme (7)-(8) for stability by constructing a difference analogue of the dissipative energy integral. For this purpose, multiply system (7) by the scalar vector $(1,1,...,1)^T$ on the right-hand side, we have

$$\begin{gathered}((AW)_{i,j}^{m+1}, W_{i,j}^{m+1}) - (A_{i,j}^{m+1} W_{i,j}^m, W_{i,j}^{m+1}) + (W_{i,j}^{m+1}, A_{i,j}^{m+1} W_{i,j}^m) - \\ -(W_{i,j}^m, (AW)_{i,j}^m) + r_x(B_{i-1/2\ ,j}^m W_{i+1/2\ ,j}^m, W_{i-1/2\ ,j}^m) - \\ -r_x(B_{i-1/2\ ,j}^m W_{i-1/2\ ,j}^m, W_{i-1/2\ ,j}^m) + r_x(B_{i+1/2\ ,j}^m W_{i+1/2\ ,j}^m, W_{i+1/2\ ,j}^m) - \\ -r_x([B^T W]_{i-1/2\ ,j}^m, W_{i+1/2\ ,j}^m) + r_y(C_{i,j-1/2}^m W_{i,j+1/2}^m, W_{i,j-1/2}^m) - \\ -r_y(C_{i,j-1/2}^m W_{i,j-1/2}^m, W_{i,j-1/2}^m) + r_y(C_{i,j+1/2}^m W_{i,j+1/2}^m, W_{i,j+1/2}^m) - \\ -r_y([C^T W]_{i,j-1/2}^m, W_{i,j+1/2}^m) = 0.\end{gathered}$$

As a result, we get the following:

$$\begin{gathered}((AW)_{i,j}^{m+1}, W_{i,j}^{m+1}) - ((AW)_{i,j}^m, W_{i,j}^m) + r_x(B_{i+1/2\ ,j}^m W_{i+1/2\ ,j}^m, W_{i+1/2\ ,j}^m) - \\ -r_x(B_{i-1/2\ ,j}^m W_{i-1/2\ ,j}^m, W_{i-1/2\ ,j}^m) + r_y(C_{i,j+1/2}^m W_{i,j+1/2}^m, W_{i,j+1/2}^m) - \\ -r_y(C_{i,j-1/2}^m W_{i,j-1/2}^m, W_{i,j-1/2}^m) = 0;\end{gathered}$$

Multiplying both parts of the resulting equality by $h_x h_y$ summarising along i from 1 to $n-1$, by j from $-\infty$ to $+\infty$. Then,

$$\begin{gathered}h_x h_y \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} ((AW)_{i,j}^{m+1}, W_{i,j}^{m+1}) - h_x h_y \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} ((AW)_{i,j}^m, W_{i,j}^m) + \\ \Delta h_y \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \{(BW,W)_{i+1/2\ ,j}^m - (BW,W)_{i-1/2\ ,j}^m\} + \\ +\Delta h_x \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \{(CW,W)_{i,j+1/2}^m - (CW,W)_{i,j-1/2}^m\} = 0.\end{gathered}$$

From the condition of tending to zero W functions $|j| \to \infty$, we have

$$\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \{(CW,W)_{i,j+1/2}^m - (CW,W)_{i,j-1/2}^m\} = 0.$$

Taking into account the condition of dissipative of the boundary conditions, we obtain:

$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \{(BW,W)_{i+1/2\ ,j}^m - (BW,W)_{i-1/2\ ,j}^m\} = \\ = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \{(BW,W)_{n-1/2\ ,j}^m - (BW,W)_{1/2\ ,j}^m\} \geqslant 0.\end{gathered}$$

Let us introduce the notation: $J_m = h_x h_y \sum\limits_{i=1}^{n-1} \sum\limits_{j=-\infty}^{+\infty} ((AW)_{i,j}^m, W_{i,j}^m)$ and get the following inequalities:

$$J_{m+1} - J_m \leqslant 0,$$

which means stability of the difference scheme (7)-(9) in the energy norm $\sqrt{J_m}$, the theorem is proven.

3 Numerical results

In this section, we give some numerical results. As an example, consider the following problem:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial (u^2/2\,)}{\partial x} = 0, 0 \leqslant t \leqslant T, -1 < x < 1, \tag{10}$$

$$u(0,x,y) = \begin{cases} 1, -1 < x < \varepsilon \\ \rho(x), -\varepsilon < x < \varepsilon, \\ \delta, \varepsilon < x < a, \end{cases} \tag{11}$$

$$u(t,-1,y) = 1, 0 < t \leqslant T, \tag{12}$$

$$\rho(x) = \frac{1-\delta}{4\varepsilon^3}x^3 - \frac{3}{4}\frac{1-\delta}{\varepsilon}x + \frac{1+\delta}{2},\ \varepsilon > 0,\ \delta(0 < \delta < 1), a > 0.$$

The formulated problem is one of the fundamental problems of mathematical physics, widely used to describe the motion of a continuous medium. Therefore, it is interesting to construct numerical methods for solving this equation's boundary-value problems and systematically study their properties.

The proposed difference scheme for the problem under consideration has the following form:

$$\begin{gathered}(u_i^{m+1} + u_i^m)(u_i^{m+1} - u_i^m) + r_x[u_{i-1/2}^m\,]^2(u_{i+1/2}^m - u_{i-1/2}^m\,) + \\ + r_x u_{i+1/2}^m\,[(u_{i+1/2}^m\,)^2 - (u_{i-1/2}^m\,)^2] = 0.\end{gathered} \tag{13}$$

Where,

$$u_{k+1/2}^m = \frac{1}{2}(u_k^m + u_{k+1}^m) + \frac{1}{2}sign(u_k^m)(u_k^m - u_{k+1}^m),\ k = i, i-1,$$

$$u_i^0 \equiv u(0,x_i) = \begin{cases} 1, -1 < x_i < \varepsilon \\ \rho(x_i), -\varepsilon < x_i < \varepsilon, \quad i = 0..120. \\ \delta, \varepsilon < x_i < a, \end{cases} \tag{14}$$

$$u_0^n \equiv u(t_n,-1) = 1,\ n = 1..400, \tag{15}$$

Numerical experiments were carried out using a computer on Mathcad to show the proposed scheme's efficiency and compare it with known methods such as the Godunov and Lax-Friedrichs scheme.

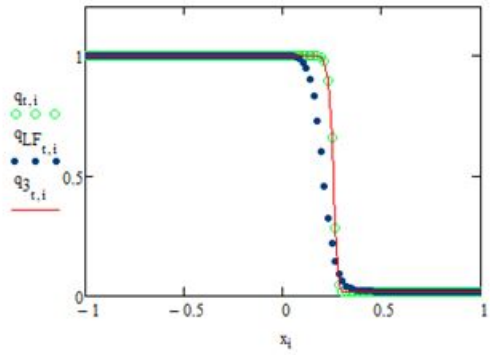

Figure 1 • • • The solution found by the Lax-Friedrichs scheme,– – – the solution found by the Godunov scheme,○ ○ ○ the solution found by the scheme (13).

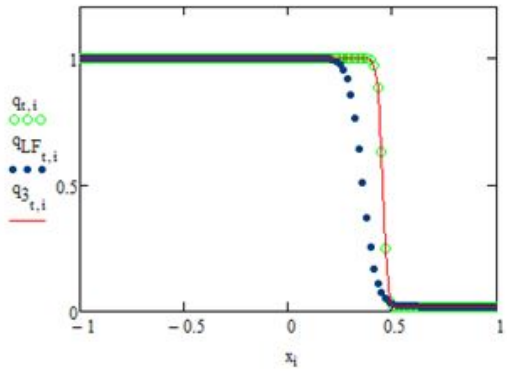

Figure 2 • • • The solution found by the Lax-Friedrichs scheme,– – – the solution found by the Godunov scheme,○ ○ ○ the solution found by the scheme (13).

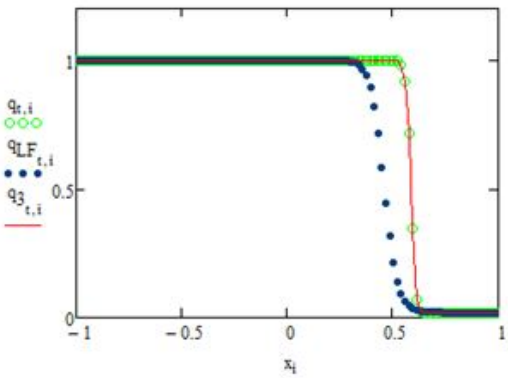

Figure 3 • • • The solution found by the Lax-Friedrichs scheme, – – – the solution found by the Godunov scheme,○ ○ ○ the solution found by the scheme (13).

4 Conclusion

The results of numerical experiments showed that the difference scheme proposed in the article determines discontinuities better than the Lax-Friedrich scheme. And Godunov's method gives better results than schemes (7)-(9) and Lax-Friedrich for the problem under consideration. But the stability of the Godunov and Lax-Friedrichs schemes has not been proved for problems (2)-(5).

The stability of the proposed difference scheme has been proven, and it can be used to solve quasi-linear hyperbolic systems.

References

[1] Blokhin A.M., Alaev R.D. 1993. Energy integrals and their applications to the study of the stability of difference schemes. Novosibirsk: *Publishing House of the Novosibirsk University*, – 224 p. (in Russian).

[2] Godunov S.K. 1979. Equations of mathematical physics. M.: *Nauka*, – 372 p.(in Russian)

[3] Khudoyberganov M. Rikhsiboev D., Rashidov J. 2020. About one difference scheme for quasi-linear hyperbolic system // AIP Conf. Proc. – 2021. – Vol. 2365. – DOI: 10.1063/5.0057131.

[4] Kulikovskii A.G., Pogorelov N.V., Semenov A Yu. Mathematical Aspects of Numerical Solution of Hyperbolic Systems, Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics 188, Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, FL.

[5] Aloev R.D., Eshkuvatov Z.K., Khudoyberganov M.U., and Nematova D.E. 2019. The difference splitting scheme for hyperbolic systems with variable coefficients, Math. Stat. 7(3), – P. 82–89.

[6] Aloev R.D., Khudoyberganov M.U. 2017. Construction and research of adequate computational models for hyperbolic systems // Abstracts, International conference on control, optimization and differential equations. Malaysia, – 12 p.

[7] Aloev R.D., Khudoyberganov M.U. Investigation of implicit difference schemes for hyperbolic systems. Problems of Computational ana Applied Mathematics, 2017. –4(10). – P. 84–92.

[8] Aloev R.D., Khudoyberganov M.U. 2017. Using an a priori estimate for constructing difference schemes for quasilinear hyperbolic systems. Vestnik NUUz. Tashkent, –2/2. – P. 9-21.

[9] Aloev R.D., Khudoyberganov M.U., Blokhin A.M. Construction and research of adequate computational models for quasi-linear hyperbolic systems // AIMS. Numerical Algebra, Control and Optimization. – 2018. – Vol. 8. – P. 287-299.

[10] Khudoyberganov M.U. 2023. Stability of the difference scheme for the shallow water equation // AIP Conf. Proc. – 2023. – Vol. 2781. – DOI: 10.1063/5.0144765.

Received August 08, 2024

УДК 519.633.3

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ МОДИФИЦИРОВАННЫХ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ

КУРАНТА, АЙЗЕКСОНА И РИЗА ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Худойберганов М.У., Туляганова Н.Б., Каримов Д.К.
mirzoali@mail.ru
Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека,
100174, Узбекистан, г. Ташкент, ул. Университетская, д. 4.

При моделировании ряда практических задач речь идет о смешанных задачах, налагаемых на систему квазилинейных гиперболических уравнений. Поскольку точного решения таких задач не существует, их решают методами приближенного решения. В настоящее время теория дифференциальных схем широко используется при приближенном решении дифференциальных задач. Поэтому теория дискретных схем используется для численного решения смешанной задачи, представленной в данной статье. Для численного решения любой дифференциальной задачи необходимо доказать корректность рассматриваемой дифференциальной задачи. Для этого в статье получена априорная оценка решения дифференциальной задачи при выполнении диссипативного условия для граничных условий смешанной задачи, поставленной на квазилинейной гиперболической системе. После этого для построения дискретного аналога полученного априорного значения решения дифференциальной задачи была построена дифференциальная схема, аппроксимирующая квазилинейную гиперболическую систему, и доказана устойчивость дифференциальной схемы. Устойчивость разностной схемы, аппроксимирующей смешанный набор задач для дифференциальной задачи, доказана путем построения дискретного аналога априорного значения, полученного при решении смешанного набора задач для квазилинейной гиперболической системы. Проведен вычислительный эксперимент по численному решению модельной задачи с помощью построенной дифференциальной схемы, результаты проведенного эксперимента показали устойчивость построенной дифференциальной схемы и полученное решение близко к точному решению.

Ключевые слова: смешанные задачи, квазилинейные гиперболические уравнения, модельная задача.

Цитирование: *Худойберганов М.У., Туляганова Н.Б., Каримов Д.К.* Исследование устойчивости модифицированных разностных схем Куранта, Айзексона и Риза для квазилинейных гиперболических систем // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2024. – № 4/1(59). – С. 15-22.

ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

№ 4/1(59) 2024

Журнал основан в 2015 году.
Издается 6 раз в год.

Учредитель:
Научно-исследовательский институт развития цифровых технологий и искусственного интеллекта.

Главный редактор:
Равшанов Н.

Заместители главного редактора:
Азамов А.А., Арипов М.М., Шадиметов Х.М.

Ответственный секретарь:
Ахмедов Д.Д.

Редакционный совет:
Азамова Н.А., Алоев Р.Д., Амиргалиев Е.Н. (Казахстан), Бурнашев В.Ф., Загребина С.А. (Россия), Задорин А.И. (Россия), Игнатьев Н.А., Ильин В.П. (Россия), Исмагилов И.И. (Россия), Кабанихин С.И. (Россия), Карачик В.В. (Россия), Курбонов Н.М., Маматов Н.С., Мирзаев Н.М., Мирзаева Г.Р., Мухамадиев А.Ш., Назирова Э.Ш., Нормуродов Ч.Б., Нуралиев Ф.М., Опанасенко В.Н. (Украина), Расулмухамедов М.М., Расулов А.С., Садуллаева Ш.А., Старовойтов В.В. (Беларусь), Хаётов А.Р., Халджигитов А., Хамдамов Р.Х., Хужаев И.К., Хужаеров Б.Х., Чье Ен Ун (Россия), Шабозов М.Ш. (Таджикистан), Dimov I. (Болгария), Li Y. (США), Mascagni M. (США), Min A. (Германия), Schaumburg H. (Германия), Singh D. (Южная Корея), Singh M. (Южная Корея).

Журнал зарегистрирован в Агентстве информации и массовых коммуникаций при Администрации Президента Республики Узбекистан.
Регистрационное свидетельство №0856 от 5 августа 2015 года.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

При перепечатке материалов ссылка на журнал обязательна.
За точность фактов и достоверность информации ответственность несут авторы.

Адрес редакции:
100125, г. Ташкент, м-в. Буз-2, 17А.
Тел.: +(998) 712-319-253, 712-319-249.
Э-почта: journals@airi.uz.
Веб-сайт: https://journals.airi.uz.

Дизайн и вёрстка:
Шарипов Х.Д.

Отпечатано в типографии НИИ РЦТИИ.
Подписано в печать 05.09.2024 г.
Формат 60x84 1/8. Заказ №5. Тираж 100 экз.

PROBLEMS OF COMPUTATIONAL AND APPLIED MATHEMATICS

No. 4/1(59) 2024

The journal was established in 2015.
6 issues are published per year.

Founder:
Digital Technologies and Artificial Intelligence Development Research Institute.

Editor-in-Chief:
Ravshanov N.

Deputy Editors:
Azamov A.A., Aripov M.M., Shadimetov Kh.M.

Executive Secretary:
Akhmedov D.D.

Editorial Council:
Azamova N.A., Aloev R.D., Amirgaliev E.N. (Kazakhstan), Burnashev V.F., Zagrebina S.A. (Russia), Zadorin A.I. (Russia), Ignatiev N.A., Ilyin V.P. (Russia), Ismagilov I.I. (Russia), Kabanikhin S.I. (Russia), Karachik V.V. (Russia), Kurbonov N.M., Mamatov N.S., Mirzaev N.M., Mirzaeva G.R., Mukhamadiev A.Sh., Nazirova E.Sh., Normurodov Ch.B., Nuraliev F.M., Opanasenko V.N. (Ukraine), Rasulov A.S., Sadullaeva Sh.A., Starovoitov V.V. (Belarus), Khayotov A.R., Khaldjigitov A., Khamdamov R.Kh., Khujaev I.K., Khujayorov B.Kh., Chye En Un (Russia), Shabozov M.Sh. (Tajikistan), Dimov I. (Bulgaria), Li Y. (USA), Mascagni M. (USA), Min A. (Germany), Schaumburg H. (Germany), Singh D. (South Korea), Singh M. (South Korea).

The journal is registered by Agency of Information and Mass Communications under the Administration of the President of the Republic of Uzbekistan.
The registration certificate No. 0856 of 5 August 2015.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

At a reprint of materials the reference to the journal is obligatory.
Authors are responsible for the accuracy of the facts and reliability of the information.

Address:
100125, Tashkent, Buz-2, 17A.
Tel.: +(998) 712-319-253, 712-319-249.
E-mail: journals@airi.uz.
Web-site: https://journals.airi.uz.

Layout design:
Sharipov Kh.D.

DTAIDRI printing office.
Signed for print 05.09.2024
Format 60x84 1/8. Order No. 5. Printed copies 100.

Профессор
ИСРАИЛОВ МАРУФ ИСРАИЛОВИЧ
(к 90-летию со дня рождения)

Маруф Исраилович Исраилов – известный ученый-математик, доктор физико-математических наук, профессор, крупный специалист в области теории чисел и вычислительной математики.

М.И. Исраилов родился 27 апреля 1934 года в городе Самарканде в семье ремесленника. В 1951 году с отличием окончив среднюю школу №16 г. Самарканда, поступил на физико-математический факультет Самаркандского государственного университета, который успешно окончил в 1956 г. С 1958 по 1961 годы проходил обучение в аспирантуре Института математики им. В.И. Романовского под руководством профессора Н.П. Романова. В 1966 году защитил кандидатскую диссертацию на тему «Проблема Тарри для быстрорастущих слагаемых и ее приложение к изучению эргодических сумм». В 1974 году М.И. Исраилову присвоено звание старшего научного сотрудника. В 1986 году М.И. Исраилов защитил докторскую диссертацию на тему «Асимптотические и точные формулы для аддитивных задач с растущим числом слагаемых», а в 1989 году получил звание профессора по специальности «Вычислительная математика».

После окончании аспирантуры М.И. Исраилов работал младшим научным сотрудником в Вычислительном центре Института математики АН РУз, затем с 1966 г. – старшим научным сотрудником. С 1976 года работал на должности заведующего лабораторией «Теория приближенного интегрирования» Института кибернетики с вычислительным центром. С 1984 г. и до 1995 г. – являлся заведующим отделом «Вычислительные методы» Института математики АН РУз. В том же 1995 году М.И. Исраилов приступил к работе в Самаркандском государственном университете в качестве заведующего кафедрой вычислительной математики.

Профессор М.И. Исраилов имел широкий диапазон научных интересов. Его глубокие исследования в областях аддитивных задач, построения общих арифметиче-

ских ортогональных и биортогональных систем в гильбертовых пространствах; нахождения числа решений различных классов диофантовых уравнений, оценке тригонометрических сумм; построения оптимальных квадратурных и кубатурных формул в различных функциональных пространствах, а также приближенного решения регулярных и сингулярных интегральных уравнений внесли существенный вклад в развитие теории чисел и вычислительной математики. Результаты его работ успешно применяются в многочисленных прикладных задачах.

М.И. Исраилов впервые исследовал проблему Тарри для общих числовых последовательностей и применил к изучению эргодических сумм. Здесь он также решил известную проблему венгерского математика П. Эрдеша (об оценке снизу максимума модуля многочленов на единичной окружности) в обобщенной и уточненной постановке. М.И. Исраилову принадлежит всестороннее исследование аддитивных задач с растущим числом слагаемых. Он получил асимптотические разложения в проблеме Варинга с полиномиальными слагаемыми и в диофантовой системе Гильберта-Камке.

Им также найдена точная формула для числа решений линейных диофантовых уравнений общего вида. Эта формула нашла применение в теории инвариантных кубатурных формул академика С.Л.ЁСоболева и позволила сильно упростить исследование и построение таких формул на поверхности многомерных сфер и шаров.

Маруф Исраилович также внес существенный вклад в применение теоретико-числовых методов и методов сплайн-функций в вычислительной математике. Им построены оптимальные квадратурные и кубатурные формулы сингулярных интегралов с ядрами Гильберта и Коши, найдены приближенно-аналитические решения систем одномерных и многомерных интегральных уравнений с ядрами Фредгольма, Гильберта и Коши. Найдены оценки погрешности в различных часто встречающихся пространствах функций. Эти результаты имеют многочисленные применения в прикладных задачах, в частности в аэродинамике и гидродинамике. Характерной особенностью этого цикла исследований является новизна постановок задач и разработка новых методов их решения.

Отдельные результаты исследований М.И. Исраилова по теории дзета-функции Римана и проблеме делителей Дирихле вызвали большой резонанс среди специалистов за пределами нашей страны.

В Маруфе Исраиловиче гармонично сочетались способности крупного ученого, талантливого педагога и умелого руководителя крупных научных исследований. Он успешно сочетал плодотворную научную и научно-организаторскую деятельность с большой педагогической и общественной деятельностью. С 1967 г. М.И. Исраилов читал общие и специальные курсы на факультете прикладной математики Ташкентского государственного университета, а с 1995 по 2003 годы – в Самаркандском государственном университете, где до конца жизни продолжал активную научно-педагогическую деятельность в качестве почетного профессора-консультанта.

М.И. Исраилов с 1972 г. являлся членом двух специализированных советов по защите кандидатских и докторских диссертаций. С 1967 по 1995 годы руководил работой организованного им городского научного семинара «Применение теории чисел в вычислительной математике» при Институте кибернетики АН РУз и Институте математики АН РУз, а с 1995 года руководил научным семинаром «Приближенные методы высшего анализа» в СамГУ.

Работая в крупнейших ВУЗах и НИИ республики, Маруф Исраилович подготовил десятки учеников, успешно работающих в различных сферах экономики республи-

ки, в странах ближнего и дальнего зарубежья. М.И. Исраилов руководил работами магистрантов, аспирантов и докторантов. Под его руководством защищены более 10 кандидатских диссертаций, он способствовал защите трех докторских диссертаций. С 1993 г. М.И. Исраилов со своими докторантами, аспирантами и студентами вёл научные исследования в рамках проектов, имеющих фундаментальное значение и широкое прикладное применение.

Обычно будущих ученых Маруф Исраилович привлекал к науке со студенческой скамьи. Более того, он с аспирантских лет активно участвовал в поиске и формировании юных математических дарований в системе школьного образования. Будучи аспирантом и молодым ученым М.И. Исраилов преподавал в специализированной физико-математической школе №82 города Ташкента, организованной академиком В.К. Кабуловым. Многие ученики М.И. Исраилова из этой школы стали в последующем докторами наук и известными специалистами в своих отраслях. Подготовку математиков со школьной скамьи профессор М.И. Исраилов продолжил в физико-математическом лицее г. Самарканда, учащиеся которого регулярно занимали призовые места на различных международных математических олимпиадах. На протяжении всей педагогической деятельности своими научно-популярными статьями в энциклопедиях, в различных общественных и молодежных изданиях, ряде телепередач М.И. Исраилов умело и выверено формировал математическую культуру мышления у молодежи.

М.И. Исраилов – автор более 160 научных, 40 научно-популярных работ. Около 50 его научных статей опубликованы в авторитетных изданиях ближнего и дальнего зарубежья. Профессор М.И. Исраилов является автором широко известного двухтомного учебника по вычислительной математике «Хисоблаш методлари». Данная книга является единственным учебником подобного типа на узбекском языке и принята в качестве основного в ведущих университетах Узбекистана. Этот учебник написан на основе оригинальных лекций М.И. Исраилова, которые он читал на протяжении 40 лет в Национальном университете Узбекистана, Самаркандском государственном университете, на семинарах в Институте математики АН РУз. Также результатом многолетнего чтения лекций стал учебник по теории чисел «Сонлар назарияси» в соавторстве с профессором А. Солеевым.

М.И. Исраилов и его ученики участвовали с докладами во многих международных научных форумах. Он принимал участие в Международном конгрессе математиков, Всемирном конгрессе общества Бернулли и других. Был одним из активных организаторов всех международных конференций по теории кубатурных формул, проводимых в Узбекистане. Профессор М.И. Исраилов до последних дней оставался активным участником ежегодной Международной научно-практической конференции «Инновация». Являясь одним из бессменных руководителей секции «Математика. Математическое моделирование», М.И. Исраилов поддерживал высокий уровень научных изысканий и докладов конференции. М.И. Исраилов был членом редколлегии сборника «Вопросы вычислительной и прикладной математики», а также ответственным редактором сборников по вычислительной математике, выпускаемых в Институте математики АН РУз. А с 2001 года являлся членом редколлегии сборника научных статей Международной конференции «Инновация». Являлся членом Американского математического общества и экспертом международного журнала «Mathematical Reviews».

Маруфе Исраилович неоднократно награждался почетными грамотами Академии наук Республики Узбекистан.

В знак признания весомого многолетнего вклада профессора М.И. Исраилов в развитие математической науки и подготовку высококвалифицированных кадров в 2009 году Национальным университетом Узбекистана была проведена республиканская научная конференция «Вычислительные технологии и математическое моделирование», посвященная его 75-летию. В 2013 году проведен научный семинар «Профессор М.И. Исраилов и развитие прикладной математики в Узбекистане», в 2014 году состоялась научно-техническая конференция «Прикладная математика и информационная безопасность», посвященная 80-летию учёного. В текущем 2024 году в связи с 90-летием профессора М.И. Исраилова в НУУз организован международный научный семинар «Вычислительные модели и технологии (CMT2024)».

Созданная профессором М.И. Исраиловым научная школа по численным методам и в настоящее время продолжает продуктивно функционировать. Ученики и последователи Маруфа Исраиловича сегодня успешно работают в различных сферах и отраслях экономики нашей республики и за рубежом, продолжая дело своего Устоза-учителя.

Редакционная коллегия журнала «Проблемы вычислительной и прикладной математики» посвящает данный специальный выпуск светлой памяти профессора Маруфа Исраиловича Исраилова – выдающегося учёного, талантливого педагога, заботливого наставника и замечательного человека, который навсегда останется в памяти друзей, коллег и учеников.

Содержание

Солеев А.С., Розет И.Г., Мухтаров Я.
Исследование эколого-медицинских моделей методами бифуркационных параметров в конечно-разностных дискретных системах 9
Худойберганов М.У., Туляганова Н.Б., Каримов Д.К.
Исследование устойчивости модифицированных разностных схем Куранта, Айзексона и Риза для квазилинейных гиперболических систем 15
Эшкуватов З.К., Салимова Н.М., Худойберганов М.О.
Решение системы интегральных уравнений Вольтерра первого рода модифицированным методом разложения Адомиана 23
Олимов Н.Н., Бекмуродова Д.Б.
Оптимальная интерполяционная формула с производными в пространстве Соболева 37
Курбонназаров А.И.
Оптимальная квадратурная формула для вычисления коэффициентов Фурье в гильбертовом пространстве 46
Шадиметов Х.М, Атамурадова Б.М.
Дискретная система типа Винера-Хопфа для коэффициентов интерполяционных формул 64
Шадиметов Х.М., Каримов Р.С.
Система типа Винера–Хопфа для нахождения оптимальных коэффициентов разностных формул в гильбертовом пространстве 74
Расулов А.С., Раимова Г.М.
Применение методов ускорения сходимости к асинхронным итерациям 85
Шадиметов Х.М., Шоназаров С.К.
Об одной явной оптимальной разностной формуле 96
Хаётов А.Р., Нуралиев Ф.А., Абдуллаева Г.Ш.
Построение алгебро-гиперболического интерполяционного натурального сплайна шестого порядка 107
Аллаков И., Эрдонов Б.Х.
Об одновременном представлении трех чисел суммой шести простых чисел . 122
К. Джа, К.Б. Манандхар
Общий результат с фиксированной точкой для совместимых отображений типа (K) в интуиционистском нечетком метрическом пространстве 134
Хаётов А.Р., Хаитов Т.О., Бувашеров Д.С.
Оптимальная формула численного интегрирования дробного интеграла Римана-Лиувилля 142
Шадиметов Х.М., Азамов С.С., Элмуратов Г.Ч.
Минимизация погрешность квадратурной формулы в пространстве Гильберта151

Contents

Soleyev A.S., Rozet I.G., Muxtarov Y.
Research of ecological and medical models using bifurcation parameters methods in finite difference discrete systems 9

Khudoyberganov M.U., Tulyaganova N.B., Karimov D.K.
Investigation of the stability of the modified difference Courant, Isaakson and Rees schemes for quasi-linear hyperbolic systems 15

Eshkuvatov Z.K., Salimova N.M., Khudoyberganov M.O.
Solving system of Volterra integral equations of the first kind by modified Adomian decomposition method 23

Olimov N.N., Bekmurodova D.B.
An optimal interpolation formula with derivatives in Sobolev space 37

Kurbonnazarov A.I.
Optimal quadrature formula for calculating Fourier coefficients in Hilbert space . 46

Shadimetov Kh.M., Atamuradova B.M.
Discrete system of Wiener–Hopf type for coefficients of interpolation formulas . . 64

Shadimetov Kh.M., Karimov R.S.
Wiener–Hopf type system for finding optimal coefficients of difference formulas in the Hilbert space 74

Rasulov A.S., Raimova G.M.
Applications of convergence acceleration methods to asynchronous iterations . . 85

Shadimetov Kh.M., Shonazarov S.K.
On an explicit optimal difference formula 96

Hayotov A.R., Nuraliyev F.A., Abdullayeva G.Sh.
Construction of the sixth order algebraic-hyperbolic interpolation natural spline 107

Allakov I., Erdonov B.Kh.
On the simultaneous representation of three numbers by the sum of six numbers of primes 122

Jha K., Manandhar K.B.
A common fixed point result for compatible mappings of type (K) in intuitionistic fuzzy metric space 134

Hayotov A.R., Khaitov T.O., Buvasherov D.S.
An optimal formula for numerical integration of fractional Riemann-Liouville integral 142

Shadimetov Kh.M., Azamov S.S., Elmuratov G.Ch.
Minimizing the error of a quadrature formula in Hilbert space 151