

УДК 532.546

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДВУХФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ С УЧЕТОМ ЕЕ ДЕФОРМАЦИИ

*Бурнашев В.Ф., *Кайтаров З.Д.*

**z.qaytarov@gmail.com*

Самаркандский государственный университет,
140104, Узбекистан, г. Самарканд, бул. Университетский, 15.

В работе рассмотрен процесс фильтрации водной и нефтяной фаз с учетом деформации пористой среды, вскрытым системой добывающих скважин. Скважины сгруппированы в ряды. Предполагаем, что нефть и вода несжимаемы и в нефтяной скважине устанавливалось постоянное давление. Предложена квазиодномерная математическая модель процесса. В модели использовался закон Дарси для определения скорости фильтрации, случаи, когда изменение пористости линейно, а изменение проницаемости линейно от пластового давления, а также рассмотрены законы экспоненциальной зависимости и законы зависимости пористости. Дебиты жидкости, нефти и воды, а также нефтяные доли рассчитаны для различных законов изменения проницаемости пласта. С помощью предложенной модели проанализировано влияние деформации среды на гидродинамические параметры. Задача решалась численно методом крупных частиц. Ввиду нелинейности модели при ее аппроксимации использовалась линеаризация. На основании полученных результатов изучено влияние деформации пористой среды на пластовое давление, пористость, проницаемость, нефтенасыщенность и добычу нефти. Согласно полученным результатам, увеличение сжимаемости среды приводит к резкому снижению пористости и проницаемости в призабойной зоне. Это замедляет процесс снижения пластового давления. По мере увеличения сжимаемости среды нефтенасыщенность увеличивается. При относительно низких значениях сжимаемости среды его уменьшение сначала приводит к незначительному увеличению добычи нефти, а затем к ее резкому снижению, тогда как при относительно высоких значениях добыча увеличивается равномерно. Установлено, что доли нефти в добываемых жидкостях снижается с увеличением сжимаемости среды. По мере снижения давления на забое скважины снижается проницаемость и пористость среды, увеличивается нефтенасыщенность и доли нефти в добываемых флюидах.

Ключевые слова: деформация, проницаемость, пористость, дебет нефти, нефтенасыщенность, пластовое давление.

Цитирование: *Бурнашев В.Ф., Кайтаров З.Д.* Математическая модель двухфазной фильтрации в пористой среде с учетом ее деформации // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2024. – № 1(55). – С. 62-80.

1 Введение

Моделирование течения жидкости с учетом деформации среды является одной из актуальных прикладных задач механики жидкости и газа. В частности, определение деформационного состояния фильтрации жидкости в скважины в неоднородной среде [1]. Совместное рассмотрение течения жидкости и деформации пористых сред очень важно для биомедицины [4], нефтяной промышленности [3], нефтеперерабатывающей промышленности [4], геотехнологии [5], водоочистки [2, 4] и технологии новой

энергетики [2], зависящие от крупномасштабных геологических и биологических процессов. Кроме того, существуют экологические проблемы, в том числе загрязнение подземных вод в результате развития нефтяной промышленности. Это загрязнение очень трудно обнаружить. Для его определения необходимо моделировать фильтрацию многофазных жидкостей в пористых средах вместе с деформацией среды [3].

Несмотря на интенсивные попытки многофазного моделирования с учетом деформации среды, многие фундаментальные физические, математические и вычислительные проблемы до сих пор остаются нерешенными [6]. Задачи такого типа моделируются с помощью системы дифференциальных уравнений, включающей уравнение баланса сил и законы сохранения массы. Из-за сложности этих систем уравнений аналитических решений нет; поэтому в большинстве случаев используются численные методы [7–9].

В [10] процесс трехфазного течения двух сжимаемых жидкостей в деформируемой пористой среде моделируется с помощью симметричной гиперболической термодинамически совместимой (ВТСС) системы.

Модель процесса двухфазного течения в гибридных системах, содержащих области, свободные от твердой фазы, и деформируемую пористую матрицу рассматривалась в [11].

В [12] предложена нелинейная модель течения смеси сжимаемых жидкостей в пористых средах с конечными деформациями и тепловыми эффектами. В [1] процесс фильтрации жидкости в трансверсально-изотропной деформируемой среде моделируется методом конечных элементов. При этом анализировалось влияние пластового давления на изменение проницаемости среды. В [13] предложен новый метод оценки изменения проницаемости пористой среды в результате изменения пластового давления с использованием аналитического и численного моделирования. В ней аналитическим методом изучено влияние изменения давления на проницаемость среды, затем численными методами определены диагностические признаки изменения проницаемости в результате изменения давления пластовой зоны и проверены оценки, полученные в результате решения обратной задачи.

Обратные задачи для уравнений упругопластической фильтрации жидкостей в режимах снижения и восстановления давления в пористой среде решались методом идентификации параметров и детерминированных моментов [14]. В [15] процесс многофазного течения моделировался с учетом деформации среды.

В [16] рассмотрена математическая модель процесса многофазной фильтрации в деформируемых пористых средах без учета внешнего воздействия. Данная задача решена с использованием метода крупных частиц и полученные результаты подвергнуты численному анализу.

В данной работе моделировался процесс фильтрации нефтяной и водной фаз в деформируемой пористой среде с учетом внешнего воздействия. Для решения использовался метод крупных частиц. Изучена зависимость свойств пористой среды от пластового давления, влияние деформации среды на процесс двухфазной фильтрации, влияние деформации среды и изменения пластового давления на добычу нефти.

2 Постановка задачи

Рассмотрим фильтрацию нефти и воды в элементе однородного деформируемого нефтяного пласта, вскрытым системой добывающих скважин. Скважины сгруппированы в ряды. Предполагаем, что нефть и вода несжимаемы. Квазиодномерную

математическую модель процесса фильтрации в этой системе можно представить следующим образом

$$A \frac{\partial}{\partial t} (m \rho_o s_o) + \frac{\partial (A \rho_o u_o)}{\partial x} = A \sum_{k=1}^n Q_{ok} \delta_k; \quad (1)$$

$$A \frac{\partial}{\partial t} (m \rho_w S_w) + \frac{\partial (A \rho_w u_w)}{\partial x} = A \sum_{k=1}^n Q_{wk} \delta_k, \quad (2)$$

где s_o – насыщенность порового пространства нефтью; ρ_o – плотность нефти; m – пористость; u_o – скорость нефтяной фазы; s_w – насыщенность порового пространства водой; ρ_w – плотность воды; u_w – фазовая скорость воды; $A = b(x) \cdot H(x)$ – сечение элемента; $b(x)$ – ширина элемента; $H(x)$ – мощность коллектора; $\delta_k = \delta(x - x_k)$ – дельта-функция Дирака; $Q_{ok} = \frac{q_{ok}}{V}$ и $Q_{wk} = \frac{q_{wk}}{V}$; q_{ok}, q_{wk} – дебиты нефти и воды, приведенные к стандартным условиям ряда k ; $V = A \cdot L$ – объем элемента; L – расстояние элемента; k – номер ряда скважины; n – количество рядов.

Скорость фильтрации определяется по закону Дарси [17]

$$u_o = - \frac{K k_o}{\mu_o} \frac{\partial p}{\partial x}; \quad (3)$$

$$u_w = - \frac{K k_w}{\mu_w} \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (4)$$

Пористость изменяется согласно следующему закону [18]

$$m = m_0 + \beta_m (p - p_0). \quad (5)$$

Зависимость абсолютной проницаемости от пористости аналогично [18]:

$$K = K_0 \left(\frac{m}{m_0} \right)^d. \quad (6)$$

Зависимость абсолютной проницаемости от давления может быть выражена с помощью следующих соотношений [17]

$$K = K_0 [1 - a_K (p_0 - p)] \quad (7)$$

или

$$K = K_0 e^{a_K (p_0 - p)}. \quad (8)$$

Относительные проницаемости для нефтяной и водной фаз [15]

$$k_o = \begin{cases} \left(\frac{1-s_w}{1-s_{wE}} \right), & s_w > s_{wE}; \\ 1, & s_w \leq s_{wE}; \end{cases} \quad (9)$$

$$k_w = \begin{cases} \left(\frac{s_w - s_{wE}}{1 - s_{wE}} \right), & s_w > s_{wE}; \\ 0, & s_w \leq s_{wE}. \end{cases} \quad (10)$$

Очевидное равенство для насыщенностей

$$S_o + S_w = 1, \quad (11)$$

где p – пластовое давление; K – абсолютная проницаемость; a_K – коэффициент изменения проницаемости; k_o, k_w – относительные фазовые проницаемости, μ_o, μ_w – вязкости нефти и воды; m_0 – пористость при $p = p_0$; β_m – коэффициент упругости пласта; p_0 – начальное давление пласта; d – константа; K_0 – начальная абсолютная проницаемость; s_{wE} – остаточная водонасыщенность.

Дебеты фаз определяются по следующим формулам

$$q_{ok} = q_k \varphi_{ok}; \quad (12)$$

$$q_{wk} = q_k \varphi_{wk}, \quad (13)$$

где q_k – дебет добывающей скважины k -го ряда

$$q_k = \frac{2\pi \Delta z_k}{\ln \frac{r_{ck}}{r_{kk}}} \left[\bar{k}_w \int_{p_{kK}}^{p_{ck}} \frac{K_k(p)}{\mu_w} dp + \bar{k}_o \int_{p_{kK}}^{p_{ck}} \frac{K_k(p)}{\mu_o} dp \right]; \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \varphi_{ok} &= \frac{k_o}{\mu_o} \left[\frac{k_o}{\mu_o} + \frac{k_w}{\mu_w} \right]^{-1}; \\ \varphi_{wk} &= 1 - \varphi_{ok}; \end{aligned} \quad (15)$$

$\varphi_{ok}, \varphi_{wk}$ – доли фаз; $K_k, \Delta z_k$ – проницаемость и толщина внутренней области k -го ряда; \bar{k}_o и \bar{k}_w – усредненные относительные проницаемости; p_{kk} – давление на контуре; p_{ck} – давление на скважине; r_{ck} и r_{kk} – радиусы скважины и контура питания.

Начальные условия

$$p(x, 0) = p_0, \quad s_o(x, 0) = \bar{s}_o, \quad s_w(x, 0) = \bar{s}_w; \quad (16)$$

граничные условия на добывающих скважинах

$$p(x_k, t) = \bar{p}_k(t); \quad (17)$$

граничные условия на границе

$$\frac{\partial p(0, t)}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial p(L, t)}{\partial x} = 0. \quad (18)$$

Из (14) при (6) получим

$$\begin{aligned} \bar{k}_\alpha \int_{p_{kk}}^{p_{ck}} \frac{K_k(p)}{\mu_\alpha} dp &= \frac{\bar{k}_\alpha}{\mu_\alpha} \int_{p_{kk}}^{p_{ck}} (K_k)_0 \left(\frac{m}{m_0} \right)^d dp = \\ &= \frac{(K_k)_0 \bar{k}_\alpha}{\mu_\alpha (m_0)^d} \int_{p_{kk}}^{p_{ck}} (m_0 + \beta_m (p - p_0))^d dp = \\ &= - \frac{(K_k)_0 \bar{k}_\alpha}{\mu_\alpha (m_0)^d} \int_{p_{ck}}^{p_{kk}} (m_0 + \beta_m (p - p_0))^d dp = \\ &= - \frac{(K_k)_0 \bar{k}_\alpha}{(d+1) \cdot \beta_m \mu_\alpha (m_0)^d} \left[(m_0 + \beta_m (p - p_0))^{d+1} \Big|_{p=p_{ck}}^{p=p_{kk}} = \right. \\ &\left. - \frac{(K_k)_0 \bar{k}_\alpha}{(d+1) \cdot \beta_m \mu_\alpha (m_0)^d} \left[(m_0 + \beta_m (p_{kk} - p_0))^{d+1} - (m_0 + \beta_m (p_{ck} - p_0))^{d+1} \right] \right] \end{aligned}$$

отсюда

$$\begin{aligned}
q_k = & -\frac{2\pi\Delta z_k}{\ln \frac{r_{ck}}{r_{kK}}} \left[\frac{\bar{k}_w (K_k)_0}{(d+1) \cdot \beta_m \mu_w (m_0)^d} \times \right. \\
& \times \left[(m_0 + \beta_m (p_{kk} - p_0))^{d+1} - (m_0 + \beta_m (p_{ck} - p_0))^{d+1} \right] + \\
& \left. + \frac{\bar{k}_o (K_k)_0}{(d+1) \cdot \beta_m \mu_o (m_0)^d} \left[(m_0 + \beta_m (p_{kk} - p_0))^{d+1} - (m_0 + \beta_m (p_{ck} - p_0))^{d+1} \right] \right]. \quad (19)
\end{aligned}$$

При использовании (7) из (14) получим

$$\begin{aligned}
\int_{p_{kk}}^{p_{ck}} K_k(p) dp &= \int_{p_{kk}}^{p_{ck}} (K_k)_0 [1 - a_K (p_0 - p)] dp = (K_k)_0 \int_{p_{kk}}^{p_{ck}} (1 - a_K p_0 + a_K p) dp = \\
&= (K_k)_0 \left(p - a_K p_0 p + a_K \frac{p^2}{2} \right) \Big|_{p_{kk}}^{p_{ck}} = - (K_k)_0 \left(p - a_K p_0 p + a_K \frac{p^2}{2} \right) \Big|_{p_{ck}}^{p_{kk}} = \\
&= - (K_k)_0 \left[\left(p_{kk} - a_K p_0 p_{kk} + a_K \frac{p_{kk}^2}{2} \right) - \left(p_{ck} - a_K p_0 p_{ck} + a_K \frac{p_{ck}^2}{2} \right) \right] = \\
&= - (K_k)_0 \left[(p_{kk} - p_{ck}) - a_K p_0 (p_{kk} - p_{ck}) + \frac{a_K}{2} (p_{kk}^2 - p_{ck}^2) \right] = \\
&= - (K_k)_0 \left[(p_{kk} - p_{ck}) \left(1 - a_K p_0 + \frac{a_K}{2} (p_{kk} + p_{ck}) \right) \right] = \\
&= (K_k)_0 \left[(p_{ck} - p_{kk}) \left(1 - a_K p_0 + \frac{a_K}{2} (p_{kk} + p_{ck}) \right) \right]; \\
q_k^n &= \frac{2\pi\Delta z_k}{\ln \frac{r_{ck}}{r_{kk}}} \left[\bar{k}_w \int_{p_{kk}}^{p_{cc}} \frac{K_k(p)}{\mu_w} dp + \bar{k}_o \int_{p_{kk}}^{p_{ck}} \frac{K_k(p)}{\mu_o} dp \right] = \\
&= \frac{2\pi\Delta z_k}{\ln \frac{r_{ck}}{r_{kK}}} \left[\frac{\bar{k}_w (K_k)_0}{\mu_w} \cdot (p_{ck} - p_{kk}) \left(1 - a_K p_0 + \frac{a_K}{2} (p_{kk} + p_{ck}) \right) + \right. \\
& \quad \left. + \frac{\bar{k}_o (K_k)_0}{\mu_o} (p_{ck} - p_{kk}) \left(1 - a_K p_0 + \frac{a_K}{2} (p_{kk} + p_{ck}) \right) \right]. \quad (20)
\end{aligned}$$

При использовании (8) из (14) получим

$$\begin{aligned}
\int_{p_{kk}}^{p_{ck}} K_k(p) dp &= \int_{p_{kk}}^{p_{ck}} (K_k)_0 e^{a_K(p_0-p)} dp = (K_k)_0 \int_{p_{kk}}^{p_{ck}} e^{a_K(p_0-p)} dp = \\
&= - \frac{(K_k)_0}{a_K} \left(e^{a_K(p_0-p)} \right) \Big|_{p_{kk}}^{p_{ck}} = \frac{(K_k)_0}{a_K} \left(e^{a_K(p_0-p)} \right) \Big|_{p_{ck}}^{p_{kk}} = \\
&= \frac{(K_k)_0}{a_K} \left(e^{a_K(p_0-p_{kk})} - e^{a_K(p_0-p_{ck})} \right).
\end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned}
q_k^n &= \frac{2\pi\Delta z_k}{\ln \frac{r_{ck}}{r_{kk}}} \left[\bar{k}_w \int_{p_{kk}}^{p_{ck}} \frac{K_k(p)}{\mu_w} dp + \bar{k}_o \int_{p_{kk}}^{p_{ck}} \frac{K_k(p)}{\mu_o} dp \right] = \\
&= \frac{2\pi\Delta z_k}{\ln \frac{r_{ck}}{r_{kK}}} \left[\frac{\bar{k}_w (K_k)_0}{\mu_w \cdot a_K} \left(e^{a_K(p_0-p_{kk})} - e^{a_K(p_0-p_{ck})} \right) + \right. \\
& \quad \left. + \frac{\bar{k}_o (K_k)_0}{\mu_o \cdot a_K} \left(e^{a_K(p_0-p_{kk})} - e^{a_K(p_0-p_{ck})} \right) \right]. \quad (21)
\end{aligned}$$

Полагаем $\rho_o = const$ и $\rho_w = const$, тогда уравнение (1) и (2) примут вид

$$A \frac{\partial}{\partial t} (ms_o) + \frac{\partial (Au_o)}{\partial x} = \frac{A}{\rho_o} \sum_{k=1}^n q_{ok} \delta_k; \quad (22)$$

$$A \frac{\partial}{\partial t} (ms_w) + \frac{\partial (Au_w)}{\partial x} = \frac{A}{\rho_w} \sum_{k=1}^n q_{wk} \delta_k. \quad (23)$$

Сложив уравнения (22) и (23), получим следующее

$$A \frac{\partial}{\partial t} (ms_o + ms_w) + \frac{\partial}{\partial x} [A(u_o + u_w)] = \left(\frac{A}{\rho_o} + \frac{A}{\rho_w} \right) \sum_{k=1}^n q_k \delta_k, \quad (24)$$

где $q_k = q_{ok} + q_{wk}$.

В соответствии с равенством (9), (24) примет вид

$$A \frac{\partial m}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (A(u_o + u_w)) = \left(\frac{A}{\rho_o} + \frac{A}{\rho_w} \right) \sum_{k=1}^n (q_k) \delta_k. \quad (25)$$

Согласно (4) и (5), (25) примет вид

$$A\beta_M \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left[AK \left(\frac{k_o}{\mu_o} + \frac{k_w}{\mu_w} \right) \frac{\partial p}{\partial x} \right] = \left(\frac{A}{\rho_o} + \frac{A}{\rho_w} \right) \sum_{k=1}^n (q_k) \delta_k. \quad (26)$$

Полагая $A = const$, запишем (26) в следующем виде

$$\beta_M \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left[K \left(\frac{k_o}{\mu_o} + \frac{k_w}{\mu_w} \right) \frac{\partial p}{\partial x} \right] = \left(\frac{1}{\rho_o} + \frac{1}{\rho_w} \right) \sum_{k=1}^n (q_k) \delta_k. \quad (27)$$

Для решения уравнения (27) используем начальные и граничные условия

$$p(x, 0) = p_0, \quad s_o(x, 0) = s_o^*, \quad s_w(x, 0) = s_w^*; \quad (28)$$

$$\frac{\partial p(0, t)}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial p(L, t)}{\partial x} = 0; \quad (29)$$

$$p(x_k, t) = p_k^*(t). \quad (30)$$

3 Метод решения

Для решения задачи (1)-(18) воспользуемся методом крупных частиц [20]. Для этого введем эйлерову сетку

$$\Omega_{th} = \left\{ t_{j+1} = t_j + \tau, j = \overline{0, M-1}; j = \frac{T}{M}; x_{i+1} = x_i + h, i = \overline{0, N-1}, i = \frac{L}{N} \right\}. \quad (31)$$

где h – шаг сетки по пространству; τ – шаг сетки во времени; N – количество узлов по пространству; M – количество узлов во времени; L – расстояние в пространстве; T – максимальное рассматриваемое время.

Алгоритм метода разделен на три этапа.

Этап 1. Аппроксимируем уравнение (27)

$$\begin{aligned} \beta_m \frac{p_i^{\sim} - p_i^j}{\tau} &= \frac{1}{h^2} \left\{ \left[K \left(\frac{k_0}{\mu_0} + \frac{k_w}{\mu_w} \right) \right]_{i+\frac{1}{2}}^j \cdot p_{i+1}^{\sim} - \right. \\ &- \left. \left\{ \left[K \left(\frac{k_0}{\mu_0} + \frac{k_w}{\mu_w} \right) \right]_{i+\frac{1}{2}} + \left[K \left(\frac{k_0}{\mu_0} + \frac{k_w}{\mu_w} \right) \right]_{i-\frac{1}{2}} \right\} \cdot p_i^{\sim} + \right. \\ &+ \left. \left[K \left(\frac{k_0}{\mu_0} + \frac{k_w}{\mu_w} \right) \right]_{i-\frac{1}{2}}^j \cdot p_{i-1}^{\sim} \right\} + \left(\frac{1}{\rho_o} + \frac{1}{\rho_w} \right) \sum_{k=1}^n (q_k)^j \delta_k. \end{aligned} \quad (32)$$

Запишем систему линейных алгебраических уравнений (32) в следующем виде

$$B_i \cdot p_{i-1}^{\sim} - C_i \cdot p_i^{\sim} + D_i \cdot p_{i+1}^{\sim} = -F_i; \quad (33)$$

где

$$\begin{aligned} B_i &= \frac{\tau}{\beta_m h^2} \left[K \left(\frac{k_0}{\mu_0} + \frac{k_w}{\mu_w} \right) \right]_{i-\frac{1}{2}}^j; \\ C_i &= 1 + \frac{\tau}{\beta_m h^2} \left\{ \left[K \left(\frac{k_0}{\mu_0} + \frac{k_w}{\mu_w} \right) \right]_{i-\frac{1}{2}}^j + \left[K \left(\frac{k_0}{\mu_0} + \frac{k_w}{\mu_w} \right) \right]_{i+\frac{1}{2}}^j \right\}; \\ D_i &= \frac{\tau}{\beta_m h^2} \left[K \left(\frac{k_0}{\mu_0} + \frac{k_w}{\mu_w} \right) \right]_{i+\frac{1}{2}}^k; \\ F_i &= p_i^j - \left(\frac{1}{\rho_o} + \frac{1}{\rho_w} \right) \left(\sum_{k=1}^n (q_k) \delta_k \right)_i. \end{aligned}$$

Систему трехдиагональных линейных уравнений (31) решаем методом прогонки [20]. Прогоночные коэффициенты определяются следующей образом

$$\begin{cases} \alpha_{i+1} = \frac{C_i}{B_i - A_i \alpha_i}, & i = \overline{1, N}; \\ \beta_{i+1} = \frac{F_i + A_i \beta_i}{B_i - A_i \alpha_i}, & i = \overline{1, N}. \end{cases} \quad (34)$$

Определяем давление с помощью найденных коэффициентов следующим образом

$$p_i^{\sim} = \alpha_{i+1} \cdot p_{i+1}^{\sim} + \beta_{i+1}. \quad (35)$$

Из граничных условий находим

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 1; \quad \beta_1 = 0; \\ p_N^{\sim} &= \frac{\beta_N}{1 - \alpha_N}; \\ p_{L_k}^j &= p_k^*. \end{aligned}$$

Скорости фильтрации фаз определяются выражений следующим образом

$$(u_o)_{i+\frac{1}{2}}^{\sim} = - \left(\frac{K k_o}{\mu_o} \right)_i^{\sim} \frac{p_i^{\sim} - p_{i+1}^{\sim}}{h}; \quad (u_w)_{i+\frac{1}{2}}^{\sim} = - \left(\frac{K k_w}{\mu_w} \right)_i^{\sim} \frac{p_i^{\sim} - p_{i+1}^{\sim}}{h}. \quad (36)$$

Этап 2. Находятся значения пористости и насыщенности фаз на текущем временном слое.

$$m_i^{j+1} = m_0 + \beta_m (p_i^{\sim} - p_0); \quad (37)$$

$$(s_o)_i^{j+1} = \frac{1}{m_i^{j+1}} \left[m_i^{j+1} (s_o)_i^j + \frac{(u_o)_{i-1/2}^{\sim} - (u_o)_{i+1/2}^{\sim}}{h} \tau + \tau \cdot \left(\frac{1}{\rho_o} + \frac{1}{\rho_w} \right) \sum_{k=1}^n (q_{ok})^j \delta_k \right]; \quad (38)$$

$$(s_w)_i^{j+1} = \frac{1}{m_i^{j+1}} \left[m_i^{j+1} (s_w)_i^j + \frac{(u_w)_{i-1/2}^{\sim} - (u_w)_{i+1/2}^{\sim}}{h} \tau + \tau \cdot \left(\frac{1}{\rho_o} + \frac{1}{\rho_w} \right) \sum_{k=1}^n (q_{wk})^j \delta_k \right]; \quad (39)$$

$$(k_o)_i^{j+1} = \begin{cases} \left(\frac{1 - (s_w)_i^{j+1}}{1 - s_{wE}} \right), & s_w > s_{wE}; \\ 1, & s_w \leq s_{wE}; \end{cases} \quad (40)$$

$$(k_w)_i^{j+1} = \begin{cases} \left(\frac{(s_w)_i^{j+1} - s_{wE}}{1 - s_{wE}} \right), & s_w > s_{wE}; \\ 0, & s_w \leq s_{wE}. \end{cases} \quad (41)$$

Этап 3. На этом этапе рассчитываем проницаемость пласта и дебет. Различные зависимости для абсолютной проницаемости

$$K_i^{j+1} = K_0 \left(\frac{m_i^{j+1}}{m_0} \right)^d; \quad (42)$$

$$K_i^{j+1} = K_0 [1 - a_K (p_0 - p_i^{j+1})]; \quad (43)$$

$$K_i^{j+1} = K_0 e^{a_K (p_0 - p_i^{j+1})}. \quad (44)$$

Аппроксимируем соотношения (12)-(15)

– дебет нефтяной фазы

$$(q_o)_k^{j+1} = q_k^{j+1} (\varphi_o)_k^{j+1};$$

– дебет водной фазы

$$(q_w)_k^{j+1} = q_k^{j+1} (\varphi_w)_k^{j+1};$$

– дебет добывающей скважины k -го ряда

$$q_k^{j+1} = -\frac{2\pi \Delta z_k}{\ln \frac{r_{ck}}{r_{kK}}} \left[\frac{\bar{k}_w K_0}{(d+1) \cdot \beta_m \mu_w (m_0)^d} \left[(m_0 + \beta_m (p_{kk}^{j+1} - p_0))^{d+1} - (m_0 + \beta_m (p_{ck}^{j+1} - p_0))^{d+1} \right] + \frac{\bar{k}_o K_0}{(d+1) \cdot \beta_m \mu_o (m_0)^d} \left[(m_0 + \beta_m (p_{kk}^{j+1} - p_0))^{d+1} - (m_0 + \beta_m (p_{ck}^{j+1} - p_0))^{d+1} \right] \right], \quad k = 1, 2;$$

$$q_k^{j+1} = \frac{2\pi\Delta z_k}{\ln \frac{r_{ck}}{r_{kK}}} \left[\frac{\bar{k}_w (K_k)_0}{\mu_w} \cdot (p_{ck}^{j+1} - p_{kk}^{j+1}) \left(1 - a_K p_0 + \frac{a_K}{2} (p_{kk}^{j+1} + p_{ck}^{j+1}) \right) + \frac{\bar{k}_o (K_k)_0}{\mu_o} (p_{ck}^{j+1} - p_{kk}^{j+1}) \left(1 - a_K p_0 + \frac{a_K}{2} (p_{kk}^{j+1} + p_{ck}^{j+1}) \right) \right]$$

или

$$q_k^{j+1} = \frac{2\pi\Delta z_k}{\ln \frac{r_{cK}}{r_{kK}}} \times \left[\frac{\bar{k}_w (K_k)_0}{\mu_w \cdot a_K} \cdot \left(e^{a_K(p_0 - p_{kk}^{j+1})} - e^{a_K(p_0 - p_{ck}^{j+1})} \right) + \frac{\bar{k}_o (K_k)_0}{\mu_o \cdot a_K} \left(e^{a_K(p_0 - p_{kk}^{j+1})} - e^{a_K(p_0 - p_{ck}^{j+1})} \right) \right];$$

– доля нефтяной фазы в потоке

$$(\varphi_o)_k^{j+1} = \frac{(k_o)_k^{j+1}}{\mu_o} \left[\frac{(k_o)_k^{j+1}}{\mu_o} + \frac{(k_w)_k^{j+1}}{\mu_w} \right]^{-1};$$

– доля водной фазы в потоке

$$(\varphi_w)_k^{j+1} = 1 - (\varphi_o)_k^{j+1}.$$

После получения значений необходимых параметров переходим к следующему временному слою и так далее.

4 Результаты и обсуждение

Для исследования напряженно-деформированного состояния насыщенной пористой среды были проведены вычислительные эксперименты при следующих значениях параметров:

$$m_0 = 0,3; K_0 = 4,8 \cdot 10^{-15} \text{ м}^2; (s_o)_0 = 0,6; (s_w)_0 = 0,4; p_0 = 10^6 \text{ Па}; p^0 = 10^6 \text{ Па}; p_k^* = 9 \cdot 10^5 \text{ Па}; \mu_o = 1,3 \cdot 10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с}; \mu_w = 1,768 \cdot 10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с}; \beta_m = 10^{-8} \text{ Па}^{-1}; x_k = 90(2k - 1); \Delta z_k = 10 \text{ м}; r_{ck} = 0,1 \text{ м}; r_{kk} = 90 \text{ м}; n = 2; k = 1, 2.$$

На рис. 1 представлены профили распределения давления для различных значений коэффициента сжимаемости среды. Из графиков видно, что с уменьшением значения β_m пластовое давление снижается быстрее.

На рис. 2 представлено влияние изменения коэффициента сжимаемости среды на пористость пласта. По результатам было замечено, что увеличение значения β_m приводит к резкому снижению пористости в призабойной зоне. Из рис. 3 видно, что изменение коэффициента сжимаемости среды оказывает существенное влияние на абсолютную проницаемость пласта, причем в призабойной зоне проницаемость резко снижается при больших значениях β_m .

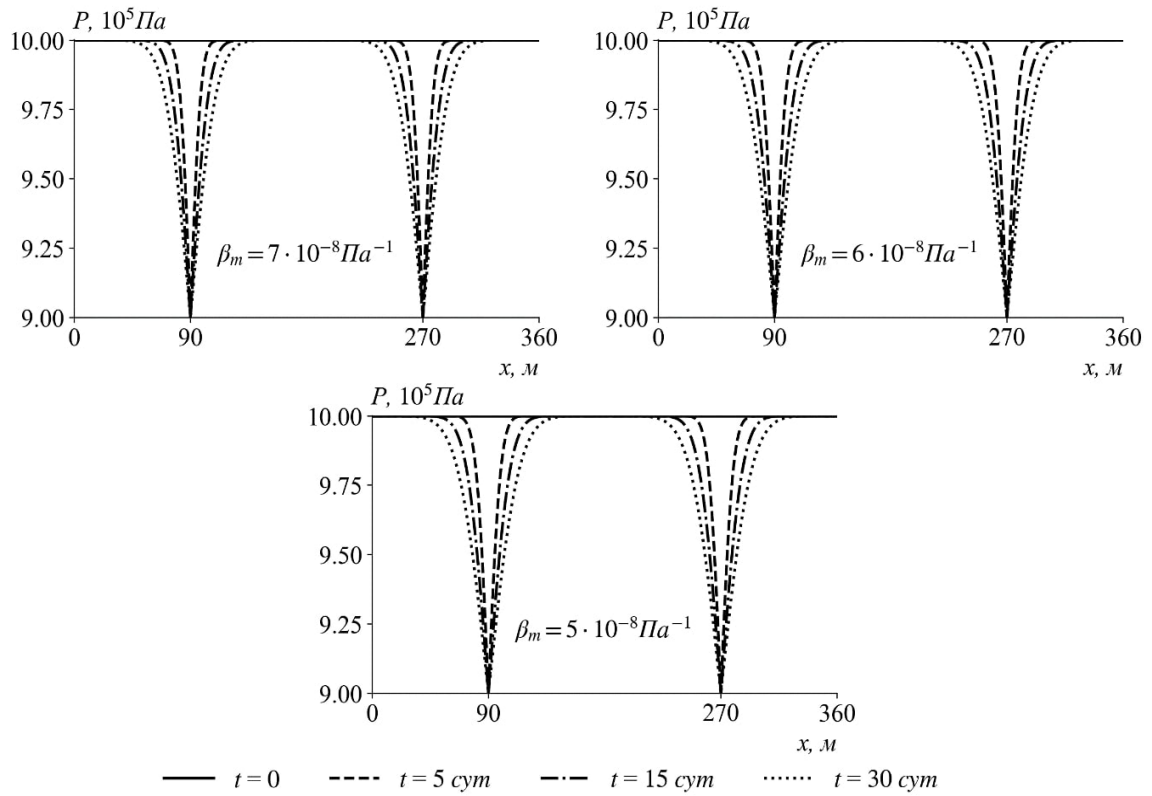


Рис. 1 Влияние сжимаемости среды на распределение давления

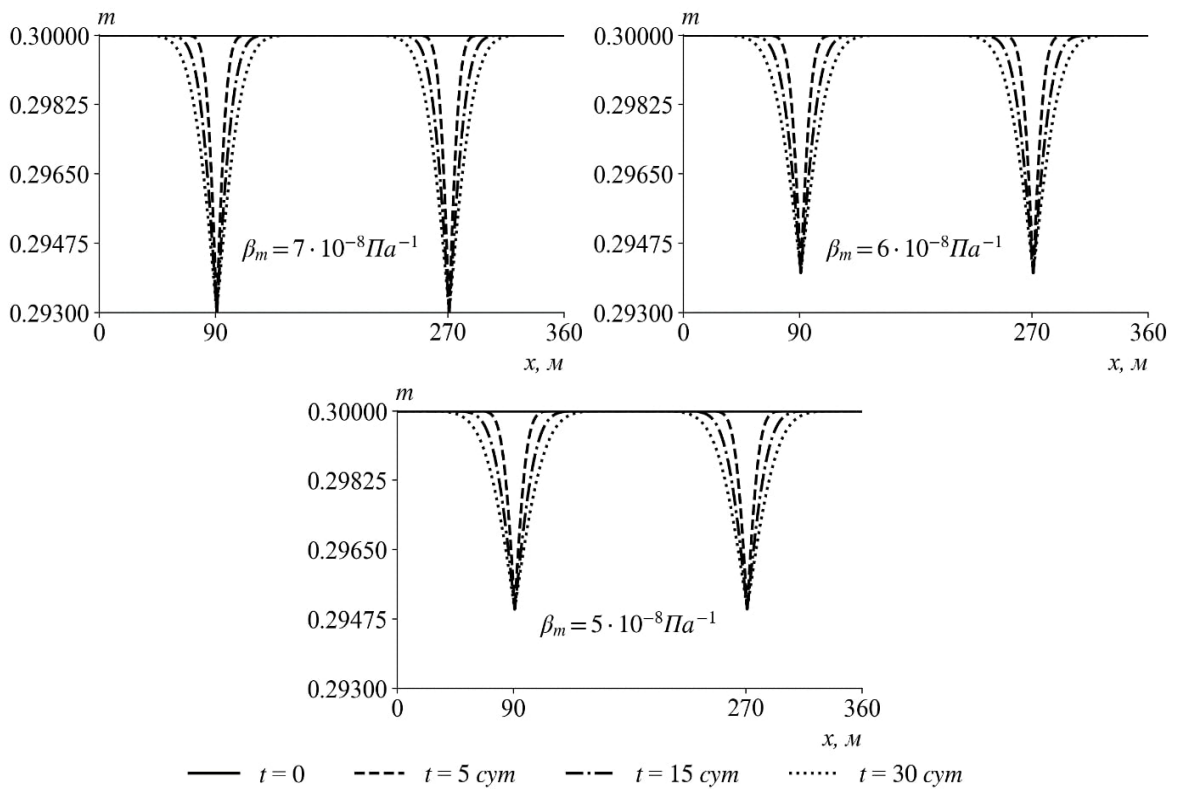


Рис. 2 Влияние коэффициента сжимаемости на пористость среды

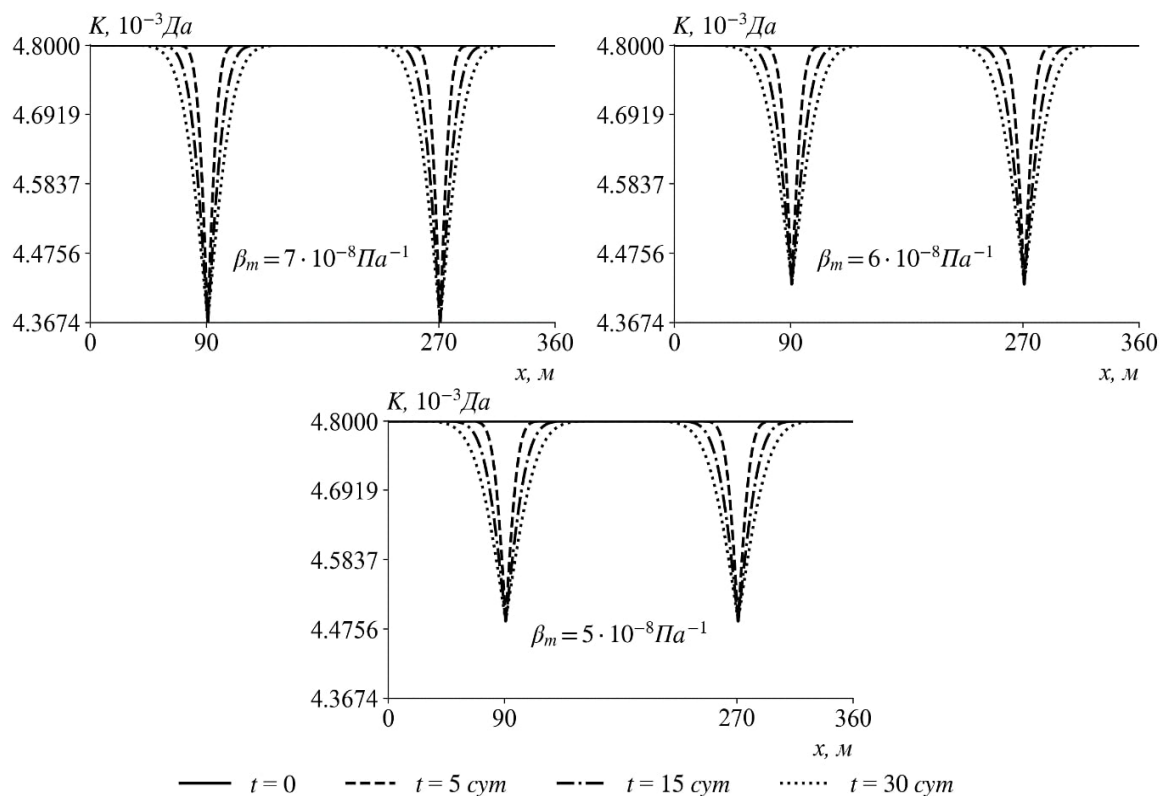


Рис. 3 Влияние изменения коэффициента сжимаемости на проницаемость

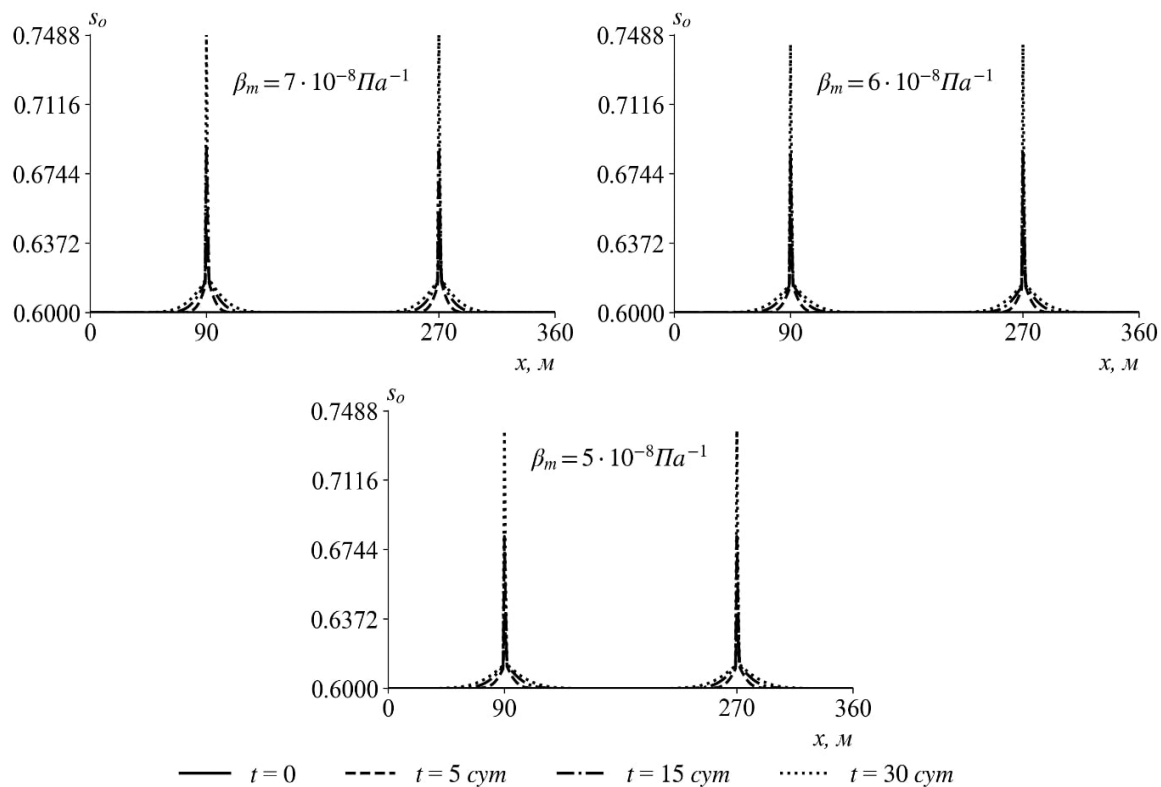


Рис. 4 Влияние сжимаемости среды на нефтенасыщенность

На рис. 4 показана нефтенасыщенность для различных значений коэффициента сжимаемости среды. Замечено, что увеличение значения коэффициента сжимаемости приводит к значительному увеличению нефтенасыщенности призабойной зоны.

На рис. 5 представлена динамика дебета нефтяных скважин, дебетов по нефти и воде, а также доли нефтяной фазы при различных значениях β_m .

Из полученных результатов можно сделать вывод, что с уменьшением сжимаемости коэффициента, наблюдалось, что дебет нефтяных скважин, дебет воды и нефти увеличивались. По мере увеличения значения β_m доля нефти в среде увеличивается.

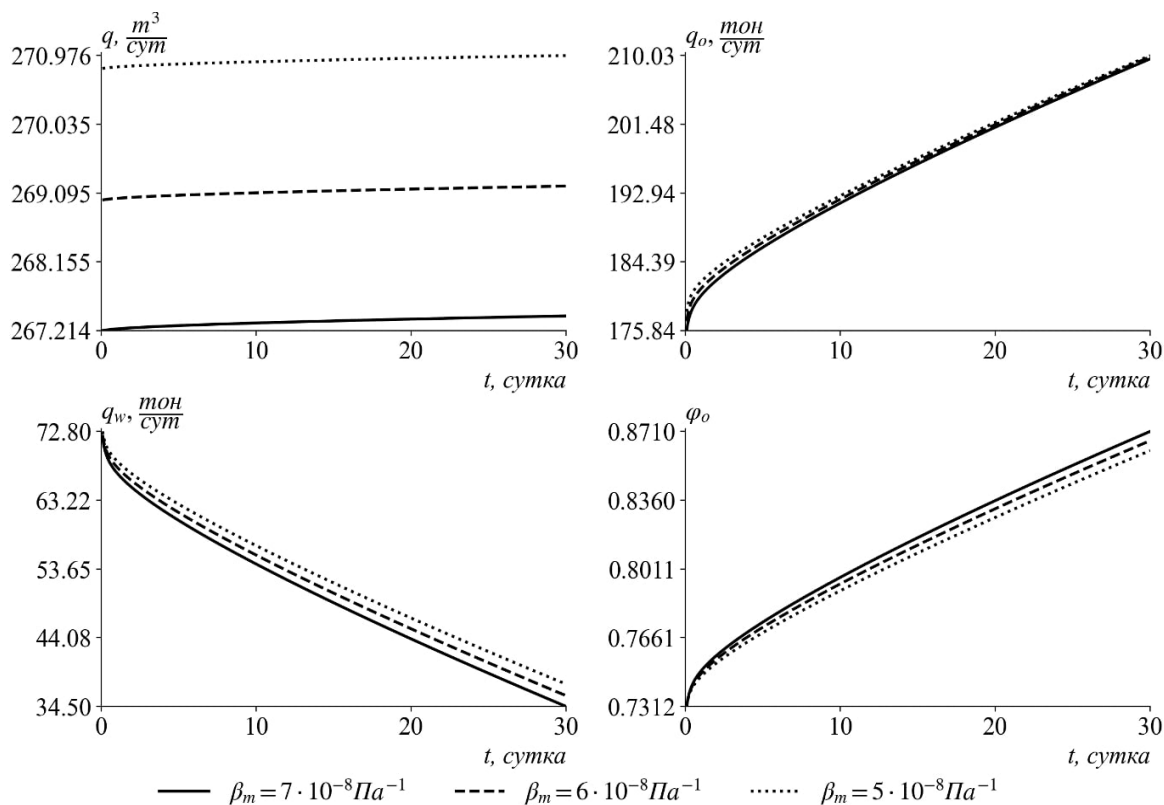


Рис. 5 Влияние сжимаемости среды на дебет жидкостей и долю нефтяной фазы

На рис. 6, в отличие от рис. 5, динамика дебета нефтяных скважин, дебета нефти и воды, доли нефтяной фазы в среде представлена при разных значениях β_m . В результате дебет нефтяных скважин увеличится. незначительно в течение рассматриваемых 30 дней.

Поскольку доля нефти сначала резко возросла, а затем этот рост замедлился, то мы можем наблюдать тот же процесс и по дебету нефти. Напротив, дебет воды сначала резко снижается, а затем это снижение замедляется.

В отличие от результатов, представленных на рис. 5, количество добываемой жидкости увеличивается по мере уменьшения значения β_m при уменьшении доли нефти.

На рисунках 7-10 показаны профили пористости, проницаемости и нефтенасыщенности при различных забойных давлениях. При снижении забойного давления наблюдалось значительное снижение пористости и проницаемости, при этом нефтенасыщенность значительно возрастала. Эти изменения особенно заметны в призабойной зоне.

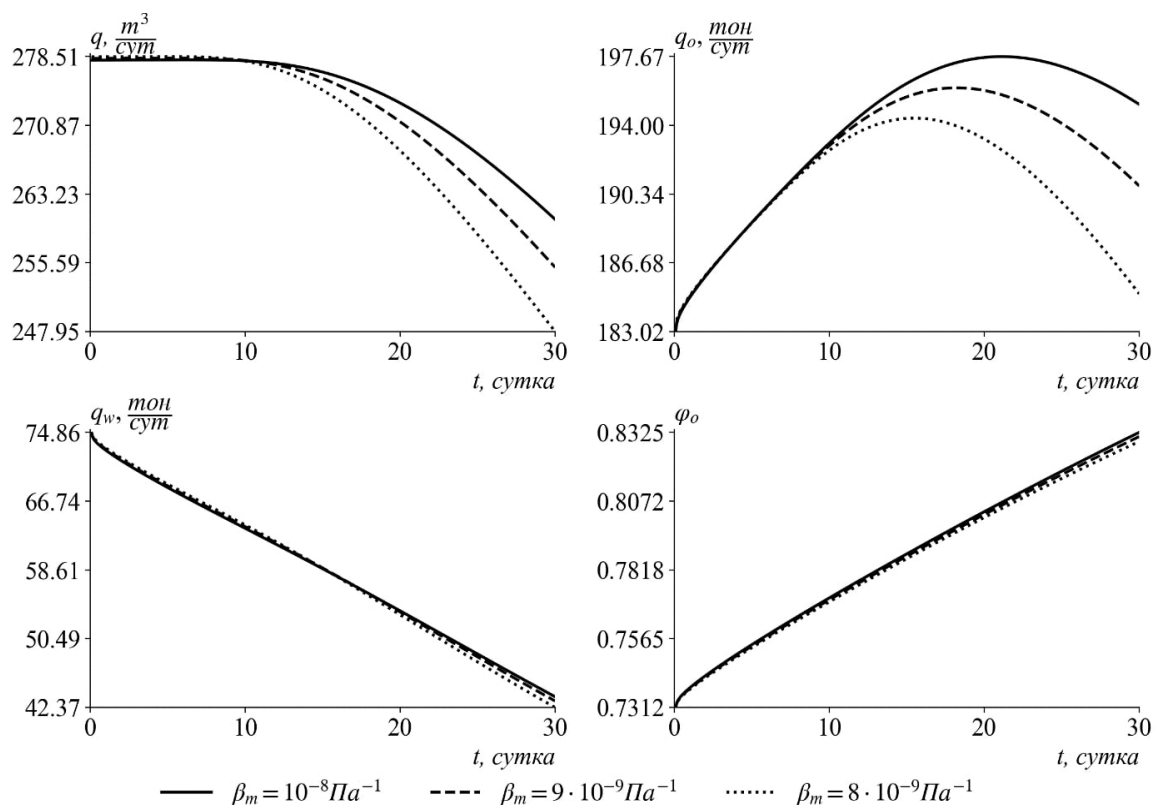


Рис. 6 Влияние сжимаемости среды на дебет жидкостей и долю нефтяной фазы

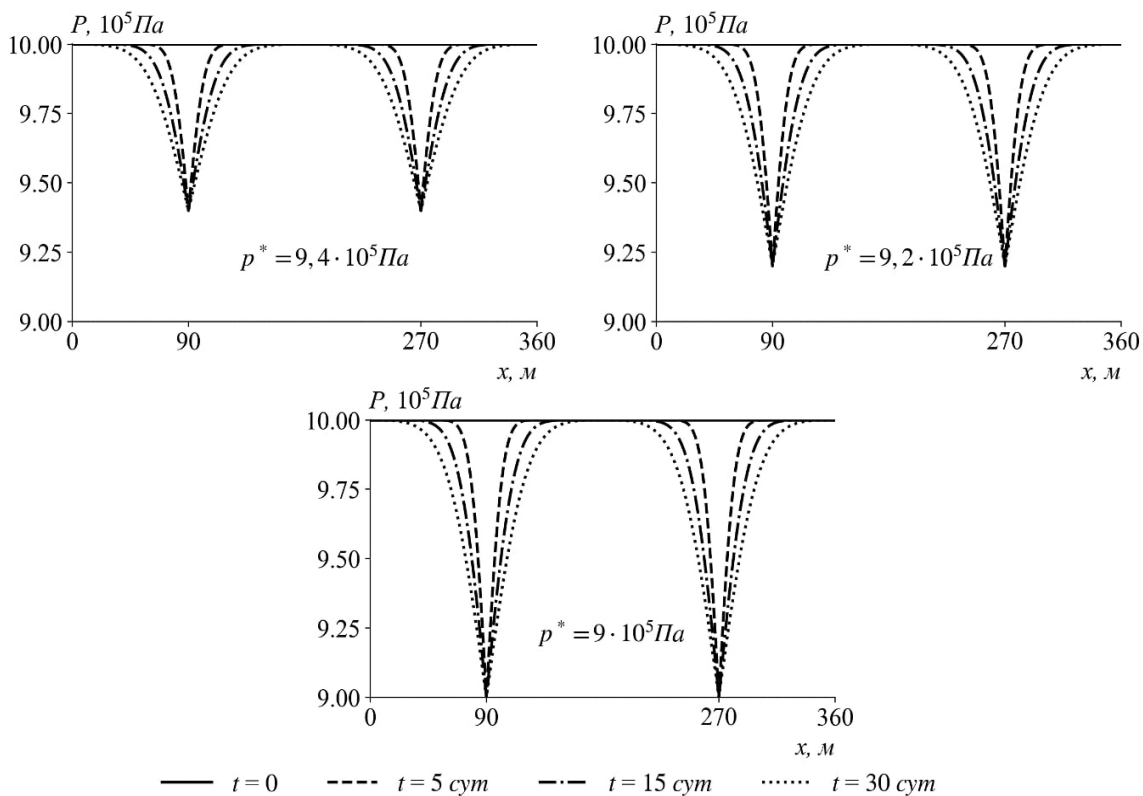


Рис. 7 Влияние изменения забойного давления на пластовое давление

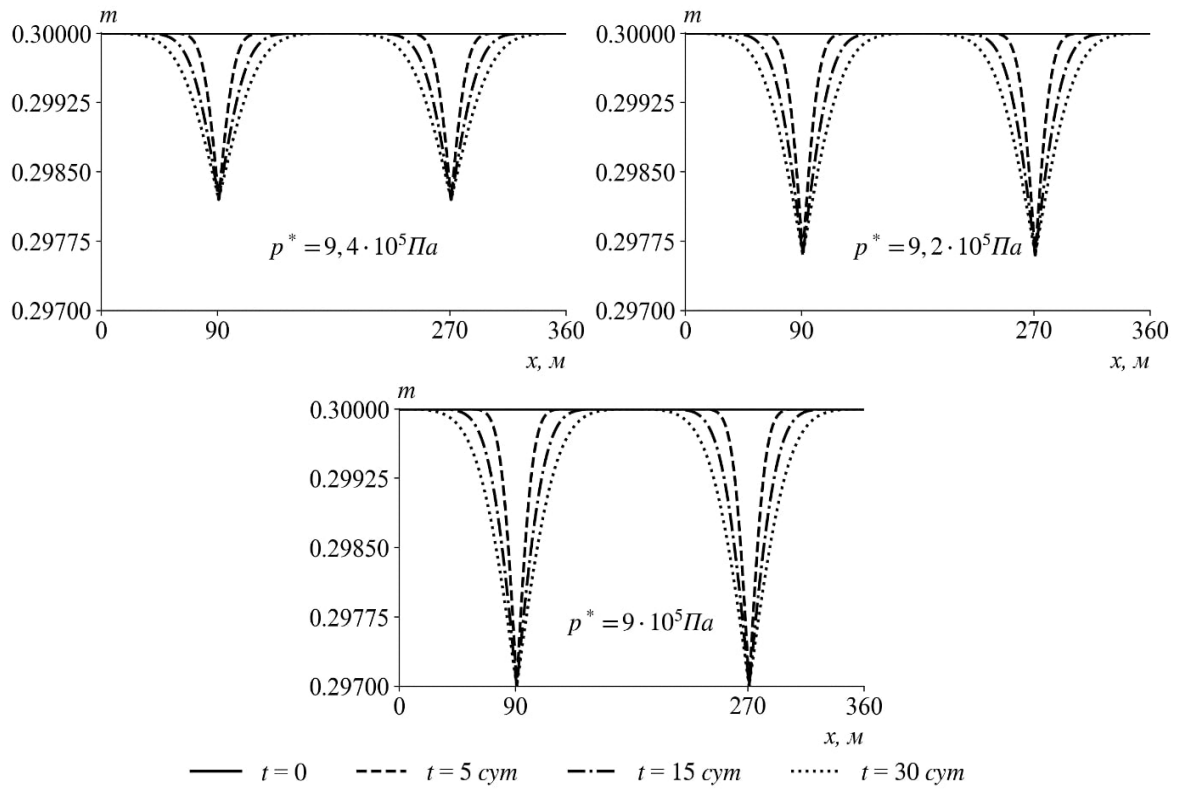


Рис. 8 Влияние изменения забойного давления на пористость

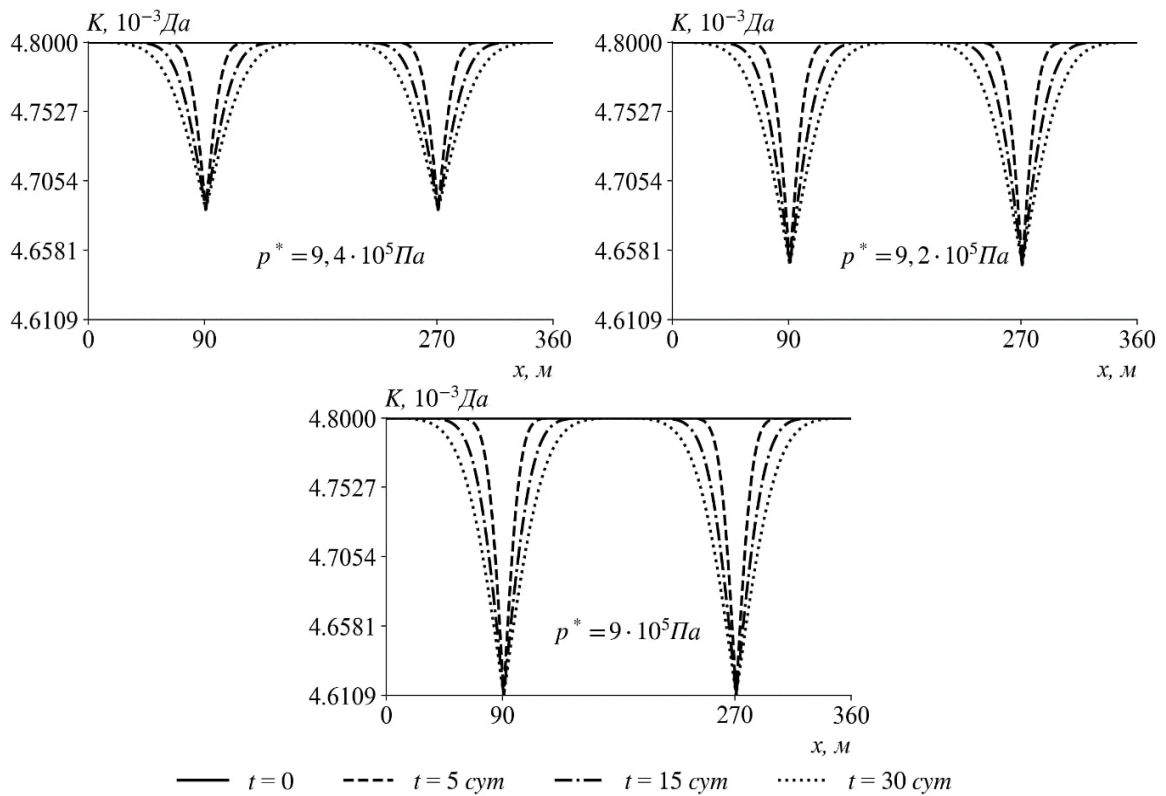


Рис. 9 Влияние изменения забойного давления на проницаемость среды

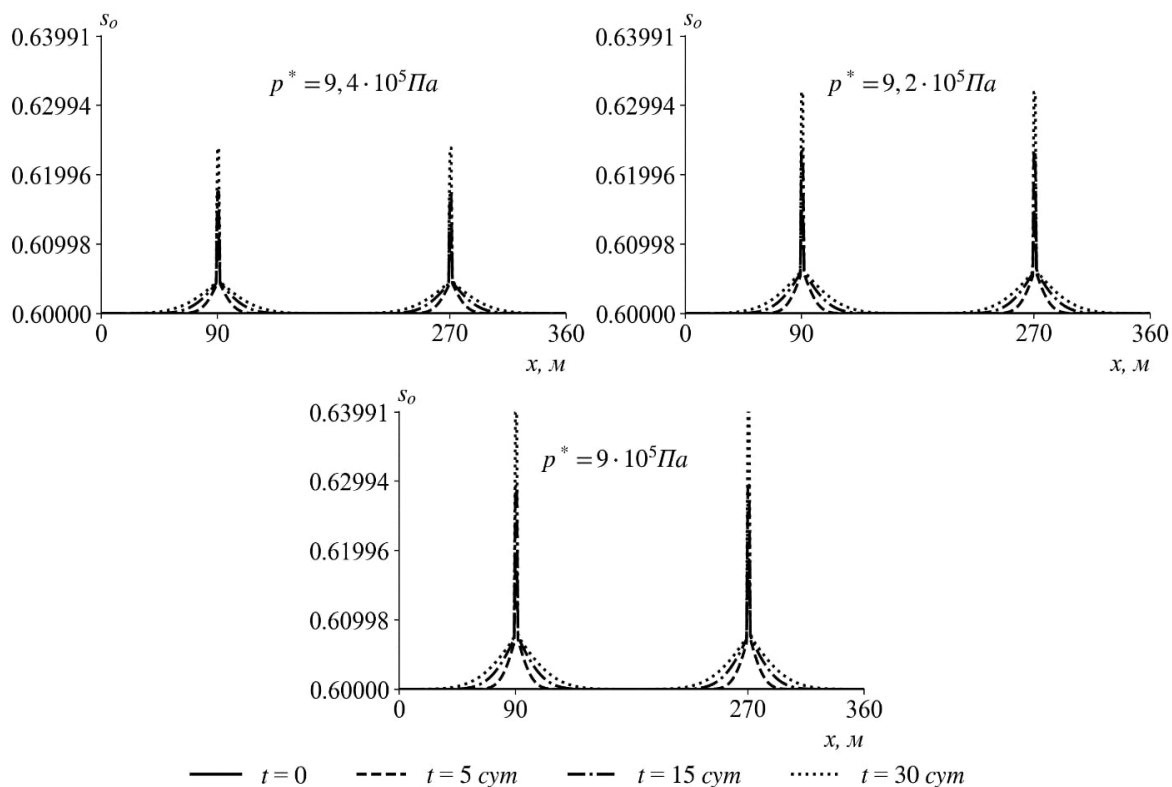


Рис. 10 Влияние изменения забойного давления на нефтенасыщенность

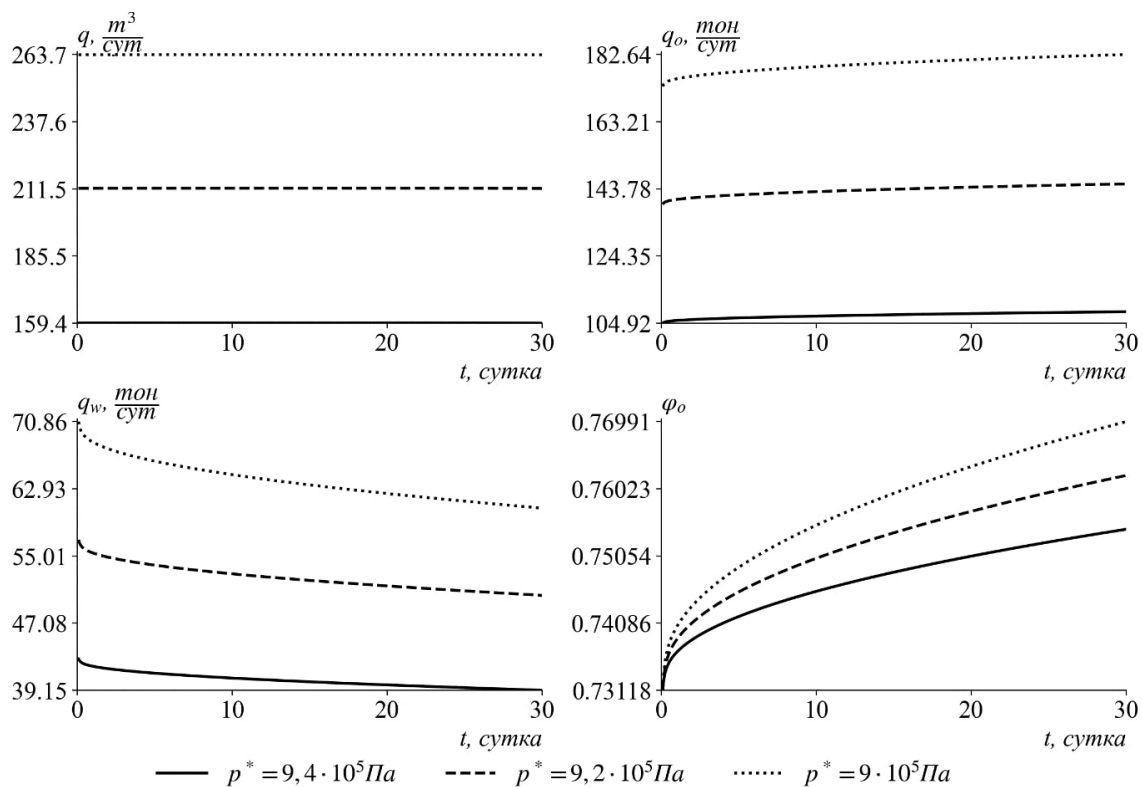


Рис. 11 Влияние изменения забойного давления на дебет жидкостей и долю нефтяной фазы ($\beta_m = 5 \cdot 10^{-8}$)

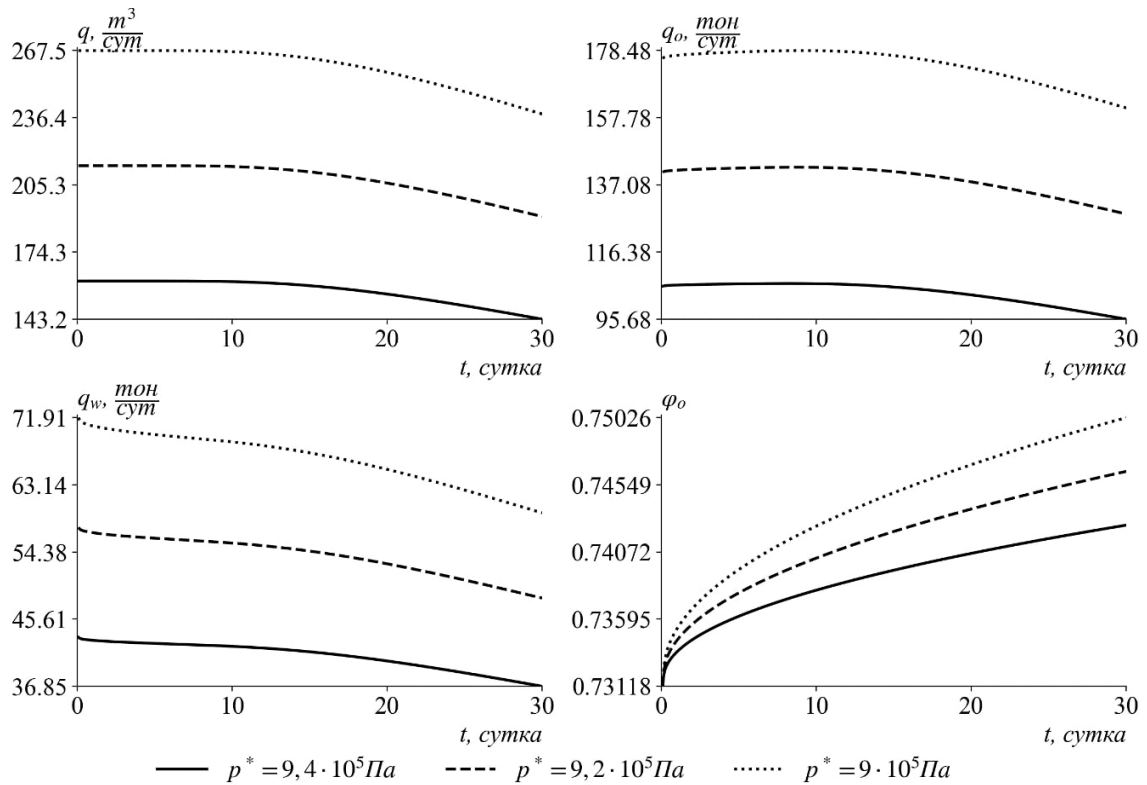


Рис. 12 Влияние изменения забойного давления на дебет жидкостей и долю нефтяной фазы ($\beta_m = 8 \cdot 10^{-9}$).

На рис. 11 представлены графики изменения дебета жидкости, нефти, воды и доли нефти при различных забойных давлениях и при $\beta_m = 5 \cdot 10^{-8} \text{ Па}^{-1}$. Согласно полученным результатам, по мере снижения пластового давления дебет жидкости, нефти и воды увеличивается, а также увеличивается доля нефти. При $\beta_m = 5 \cdot 10^{-8} \text{ Па}^{-1}$ наблюдалось увеличение дебета жидкости и нефти, а дебет воды снизился.

На рис. 12 представлены графики изменения дебета жидкости, нефти, воды и доли нефти при различных забойных давлениях при $\beta_m = 8 \cdot 10^{-9} \text{ Па}^{-1}$. Согласно полученным результатам, по мере снижения пластового давления дебет жидкости, нефти и воды увеличивается, а также по времени увеличивается доли нефти. При $\beta_m = 8 \cdot 10^{-9} \text{ Па}^{-1}$ наблюдалось, что при полученных значениях пластового давления дебет жидкости и нефти сначала увеличивался, а затем уменьшался, а дебет воды за рассматриваемый период снижался.

5 Заключение

В данной работе математически смоделирован процесс двухфазной фильтрации в деформируемой пористой среде. Задача решалась численно методом крупных частиц. На основании полученных результатов изучено влияние сжимаемости среды на пластовое давление, пористость, проницаемость, нефтенасыщенность и добычу нефти.

Согласно полученным результатам, увеличение сжимаемости среды приводит к резкому снижению пористости и проницаемости среды в призабойной зоне. В результате процесс снижения пластового давления замедляется. Нефтенасыщенность увеличивается с увеличением сжимаемости среды. При относительно низких значениях коэффициента сжимаемости среды при его уменьшении наблюдалось, что

добыча нефти сначала незначительно увеличивались, а затем резко снижались, а при относительно больших значениях увеличивались равномерно.

Выявлено, что доля нефти в добываемых жидкостях уменьшалась с увеличением сжимаемости среды. С уменьшением забойного давления проницаемость и пористость среды снижались, а нефтенасыщенность и доля нефти в добываемых жидкостях увеличивались.

Литература

- [1] *Azhikhanov N. et al.* Finite element modeling of fluid filtration in a deformable porous medium // IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series. – 2020. – 012137.
- [2] (*Francisco J.C.* Modeling Multiphase Flow Through and Around Multiscale Deformable Porous Materials : a dissertation of PhD. – Princeton, 2021.
- [3] *Samimi S., Pak A.* A three-dimensional mesh-free model for analyzing multi-phase flow in deforming porous media // Meccanica. – 2015. – Vol. 51. – P. 517-536. – doi: <http://dx.doi.org/10.1007/s11012-015-0231-z>.
- [4] *Lo W., Sposito G., Majer E.* Immiscible two-phase fluid flows in deformable porous media // Advances in Water Resources. – 2002. – Vol. 25. – P. 1105-1117.
- [5] *Sciarra G.* Formulation of a phase field model of multiphase flow in deformable porous media // E3S Web of Conferences. – 2016. – 16006.
- [6] *Romenski E., Belozеров A.A., Peshkov I.M.* Conservative formulation for compressible multiphase flows // Quarterly of Applied Mathematics. – 2015. – Vol. 74. – P. 113-136. – doi: <http://dx.doi.org/10.1090/qam/1409>.
- [7] *Ehlers W., Graf T., Ammann M.* Deformation and localization analysis of partially saturated soil // Comput Methods Appl Mech Eng. – 2004. – Vol. 193. – P. 2885-2910.
- [8] *Lewis RW., Sukirman Y.* Finite element modeling of three-phase flow in deforming saturated oil reservoirs // Int J Numer Anal Methods Geomech. – 1993. – Vol. 17. – P. 577-598.
- [9] *Khoei AR., Mohammadnejad T.* Numerical modeling of multiphase fluid flow in deforming porous media: a comparison between two- and three-phase models for seismic analysis of earth and rockfill dams // Comput Geotech. – 2011. – Vol. 38. – 142166.
- [10] *Romenski E., Reshetova G., Peshkov I.* Computational Model for Compressible Two-Phase Flow in Deformed Porous Medium // Computational Science and Its Applications (ICCSA). – Cagliari, 2021.
- [11] *Carrillo F.J., Bourg I.C.* Modeling multiphase flow within and around deformable porous materials: A Darcy-Brinkman-Biot approach // Water Resources Research. – 2021. – Vol. 57. – e2020WR028734.
- [12] *Perepechko L. et al.* Modeling the multiphase flows in deformable porous media // MATEC Web of Conferences. – 2017. – Vol. 115. – 05004.
- [13] *Shchipanov A.A.* Pressure Transient Analysis of Deformable Reservoirs // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. – 2010. – Vol. 83. – P. 250-262.
- [14] *Khuzhayorov B.Kh., Kholiyarov E.Ch.* Inverse Problems of Elastoplastic Filtration of Liquid in A Porous Medium // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. – 2007. – Vol. 80. – P. 517-525.
- [15] *Burnashev V.F., Kaytarov Z.D., Akramov Sh.B.* Modeling of Two-Phase Filtration in Deformable Porous Media // International Journal of Applied Mathematics. – 2023. – Vol. 36. – P. 555-568.
- [16] *Burnashev V.F., Viswanathan K.K., Kaytarov Z.D.* Mathematical Modeling of Multi-Phase Filtration in a Deformable Porous Medium // Computation. – 2023. – Vol. 112. – doi: <http://dx.doi.org/10.3390/computation11060112>.

- [17] *Басниев К.С., Кочина И.Н., Максимов В.М.* Подземная гидромеханика. – М.: Недра, 1993. – 416 с.
- [18] *Азиз Х., Сеттари Э.* Математическое моделирование пластовых систем. – 2-е изд. – М.: АНО ИКИ, 2004. – 416 с.
- [19] *Булгакова Г.Т., Байзитова А.В., Шарифуллин А.Р.* Модель матричной кислотной обработки карбонатов: влияние осадка на процесс растворения // Вестник УГАТУ. – 2009. – Т. 13, №2. – С. 256-264.
- [20] *Белоцерковский О.М., Давыдов Ю.М.* Метод крупных частиц в газовой динамике. – М.: Наука, 1982. – 392 с.
- [21] *Makhmudov J.M., Usmonov A.I. and Kuljanov J.B.* The problem of filtration and solute transport in a two-zone porous medium // AIP Conference Proceedings. – 2022. – Vol. 2637. – 040020.

Поступила в редакцию 05.02.2024

UDC 532.546

MATHEMATICAL MODEL OF TWO-PHASE FILTRATION IN A POROUS MEDIUM TAKEN INTO ACCOUNT OF ITS DEFORMATION

*Burnashev V.F., *Kaytarov Z.D.*

**z.qaytarov@gmail.com*

Samarkand state university,

15, University blvd., Samarkand, 140104 Uzbekistan.

The work considers the process of filtration of water and oil phases, taking into account the deformation of the porous medium, opened by a system of production wells. The wells are grouped in rows. We assume that oil and water are incompressible and constant pressure was established in the oil well. A quasi-one-dimensional mathematical model of the process is proposed. The model used Darcy's law to determine the filtration velocity, cases where the change in porosity is linear and the change in permeability is linear with reservoir pressure, and also considered the laws of exponential dependence and the laws of porosity dependence. Liquid, oil and water flow rates, as well as oil fractions, are calculated for various laws of changes in formation permeability. Using the proposed model, the influence of medium deformation on hydrodynamic parameters was analyzed. The problem was solved numerically using the large particle method. Due to the nonlinearity of the model, linearization was used in its approximation. Based on the results obtained, the effect of deformation of a porous medium on reservoir pressure, porosity, permeability, oil saturation and oil production was studied. According to the results obtained, an increase in the compressibility of the medium leads to a sharp decrease in porosity and permeability in the bottomhole zone. This slows down the process of reducing reservoir pressure. As the compressibility of the medium increases, oil saturation increases. At relatively low values of medium compressibility, its decrease first leads to a slight increase in oil production, and then to its sharp decrease, while at relatively high values, production increases evenly. It has been established that the share of oil in produced fluids decreases with increasing compressibility of the medium. As the pressure at the bottomhole zone decreases, the permeability and porosity of the medium decreases, the oil saturation and the proportion of oil in the produced fluids increase.

Keywords: deformation, permeability, porosity, oil debet, oil saturation, reservoir pressure.

Citation: Burnashev V.F., Kaytarov Z.D. 2024. Mathematical model of two-phase filtration in a porous medium taken into account of its deformation. *Problems of Computational and Applied Mathematics*. 1(55):62-80.

ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

№ 1(55) 2024

Журнал основан в 2015 году.

Издается 6 раз в год.

Учредитель:

Научно-исследовательский институт развития цифровых технологий и
искусственного интеллекта.

Главный редактор:

Равшанов Н.

Заместители главного редактора:

Азамов А.А., Арипов М.М., Шадиметов Х.М.

Ответственный секретарь:

Ахмедов Д.Д.

Редакционный совет:

Азамова Н.А., Алоев Р.Д., Бурнашев В.Ф., Загребина С.А. (Россия),
Задорин А.И. (Россия), Игнатъев Н.А., Ильин В.П. (Россия),
Исмагилов И.И. (Россия), Кабанихин С.И. (Россия), Карачик В.В. (Россия),
Курбонов Н.М., Маматов Н.С., Мирзаев Н.М., Мухамадиев А.Ш.,
Мухамедиева Д.Т., Назирова Э.Ш., Нормуродов Ч.Б., Нуралиев Ф.М.,
Опанасенко В.Н. (Украина), Раджабов С.С., Расулов А.С., Садуллаева Ш.А.,
Старовойтов В.В. (Беларусь), Хаётов А.Р., Халджигитов А., Хамдамов Р.Х.,
Хужаев И.К., Хужаеров Б.Х., Чье Ен Ун (Россия), Шабозов М.Ш. (Таджикистан),
Dimov I. (Болгария), Li Y. (США), Mascagni M. (США), Min A. (Германия),
Schaumburg H. (Германия), Singh D. (Южная Корея), Singh M. (Южная Корея).

Журнал зарегистрирован в Агентстве информации и массовых коммуникаций при
Администрации Президента Республики Узбекистан.

Регистрационное свидетельство №0856 от 5 августа 2015 года.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

При перепечатке материалов ссылка на журнал обязательна.

За точность фактов и достоверность информации ответственность несут авторы.

Адрес редакции:

100125, г. Ташкент, м-в. Буз-2, 17А.

Тел.: +(99871) 231-92-45.

E-mail: journals@airi.uz.

Сайт: www.pvpm.uz (journals.airi.uz).

Дизайн и компьютерная вёрстка:

Шарипов Х.Д.

Отпечатано в типографии НИИ РЦТИИ.

Подписано в печать 29.02.2024 г.

Формат 60x84 1/8. Заказ №1. Тираж 100 экз.

Содержание

| | |
|---|-----|
| <i>Равшанов Н., Боборахимов Б.И., Журабоева О.С.</i> Численное моделирование турбулентного потока и распространения примеси в условиях уличного каньона | 8 |
| <i>Ахмедов Д.Д., Убайдуллаев М.Ш., Насруллаев П.А.</i> Простая лагранжева модель распространения радиоактивных частиц в ат- мосфере | 26 |
| <i>Мурадов Ф.А., Тахтемирова Н.Н., Эшбоева Н.Ф., Гозиев Х.И.</i> Численное моделирование трехмерного поля скорости ветра в атмосфере . . | 48 |
| <i>Бурнашев В.Ф., Кайтаров З.Д.</i> Математическая модель двухфазной фильтрации в пористой среде с учетом ее деформации | 62 |
| <i>Хужаёров Б.Х., Файзиев Б.М., Холияров Э.Ч.</i> Параллельный алгоритм идентификации параметров модели фильтрации суспензии в пористой среде | 81 |
| <i>Назирова Э., Шукурова М.</i> Численная модель и вычислительный алгоритм решения задачи фильтрации безнапорных грунтовых вод | 98 |
| <i>Юсупов М., Каршиев Д.К., Шарипова У.Б.</i> Численное моделирование нелинейных задач динамики вязкоупругих систем с конечными числами степеней свободы | 111 |
| <i>Алов Р.Д., Бердышев А., Алимова В.</i> Исследование экспоненциальной устойчивости численного решения гипербо- лического уравнения с отрицательными нелокальными характеристически- ми скоростями и погрешностью измерения | 122 |
| <i>Шадиметов Х.М., Усманов Х.И.</i> Приближенное решение линейных интегральных уравнений Фредгольма второго рода методом оптимальных квадратур | 140 |