УДК 539.3:519.63

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ТРЁХМЕРНОЙ СВЯЗАННОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕРМОУПРУГОСТИ В ДЕФОРМАЦИЯХ

[1*]***Джумаёзов У.З.,*** [1] ***Абдирахмонова М.Н.,*** [2] ***Усмонов Л.С.***

[*]djumayozov@bk.ru

[1]Самаркандский государственный университет имени Шарофа Рашидова, 140104, Узбекистан, г. Самарканд, Университетский бульвар, 15;

[2]Научно-исследовательский институт развития цифровых технологий и искусственного интеллекта, 100125, Узбекистан, г. Ташкент, м-в Буз-2, 17А

Рассматривается трёхмерная связанная динамическая задача термоупругости для однородного изотропного параллелепипеда. Основными неизвестными являются шесть независимых компонентов тензора деформаций и температура. На основе уравнений движения, соотношений Дюамеля–Неймана и кинематических соотношений Коши получена система динамических уравнений в деформациях, дополненная уравнением теплопроводности. Температурное воздействие учитывается в механических уравнениях, а обратная связь определяется скоростью объёмной деформации. Такая постановка позволяет вычислять деформации непосредственно, без восстановления по производным перемещений. Для численного решения построены явная и неявная конечно-разностные схемы на прямоугольной пространственной сетке. Численный пример рассматривает синусоидальное начальное температурное поле при нулевых начальных деформациях и скоростях их изменения. Выполнено сопоставление температуры и нормальной деформации в различных сечениях параллелепипеда. Сравнение проведено при одинаковых исходных данных в фиксированный момент расчётного времени. Обе схемы воспроизводят близкие пространственные распределения и одинаковое положение центрального максимума. По табличным данным максимальное абсолютное расхождение температуры составляет 0,002, или 0,0108 % от максимума неявного решения. Для нормальной деформации максимальное расхождение равно 0,001, а максимальное значение 0,046 совпадает в обеих реализациях. Полученные результаты подтверждают внутреннюю согласованность алгоритмов при совместном определении температурного и деформационного полей.

Ключевые слова: связанная термоупругость, трёхмерная динамическая задача, постановка в деформациях, метод конечных разностей, явная и неявная схемы, метод переменных направлений

Цитирование: *Джумаёзов У.З., Абдирахмонова М.Н., Усмонов Л.С.* Численное решение трёхмерной связанной динамической задачи термоупругости в деформациях // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2026. – №5(76). – С. 119-136.

DOI: 10.71310/pcam.5_76.2026.08

1 Введение

Исследование динамического взаимодействия температурных и механических полей необходимо при расчёте элементов конструкций, работающих в условиях нестационарного нагрева. Изменение температуры вызывает тепловое расширение и неоднородное деформирование тела, а возникающие деформации, в свою очередь, могут

влиять на развитие температурного поля. При быстром изменении тепловой нагрузки существенную роль играют инерционные эффекты, поэтому описание процесса требует совместного рассмотрения уравнений движения и теплопроводности. В трёхмерных задачах такое взаимодействие сопровождается пространственным перераспределением нормальных и сдвиговых деформаций, которое не всегда может быть воспроизведено в рамках плоских или одномерных моделей.

Выбор основных неизвестных определяет как структуру математической модели, так и способ её численной реализации. В традиционной постановке механическое состояние тела описывается компонентами вектора перемещений, после определения которых деформации вычисляются с помощью кинематических соотношений. Вместе с тем для ряда задач непосредственный интерес представляет именно деформированное состояние: распределение нормальных и сдвиговых компонентов, их изменение во времени и связь с температурным полем. Это делает целесообразным рассмотрение альтернативной постановки, в которой компоненты тензора деформаций выступают основными механическими неизвестными. При таком переходе необходимо сохранить согласованность уравнений движения, определяющих соотношений и условий совместности, а также корректно сформулировать начальные и граничные условия.

Современные исследования связанной термоупругости развиваются в нескольких направлениях. Одно из них связано с совершенствованием пространственной аппроксимации и алгоритмов совместного определения температурных и механических полей. В работе Suljević, Ibrahimbegovic и Dolarević [1] рассматриваются регуляризованная вариационная постановка и трёхмерная дискретная аппроксимация задач термоупругости и термоповреждаемости. Tan и соавторы [2] применяют метод дифференцирования по элементам к динамическим задачам связанной термоупругости. В основе их подхода лежит совместное решение уравнений динамики и нестационарной теплопроводности, позволяющее учитывать взаимное влияние температурного поля и движения тела.

При расчёте волновых процессов особое значение имеет описание взаимодействия расчётной области с окружающей средой. Eberle [3] исследует сочетание методов конечных и граничных элементов для трёхмерного термоупругого волнового уравнения с прозрачными граничными условиями. Другой подход к организации связанного расчёта представлен в работе Ahn и соавторов [4], посвящённой разделённой симметричной формулировке и алгоритму решения задач термоупругого взаимодействия. Эти исследования показывают, что построение численной модели определяется не только выбором пространственной аппроксимации, но и способом согласования механической и тепловой частей задачи.

Наряду с сеточными методами развиваются бессеточные способы решения. Reséndiz-Flores и соавторы [5] рассматривают полностью связанную численную постановку статической линейной термоупругости на основе метода конечных точек. В дальнейшем Saucedo-Zendejo и Reséndiz-Flores [6] используют этот подход для нестационарной линейной термоупругости с двусторонней связью температурного и механического полей. Таким образом, взаимное влияние теплопереноса и деформирования учитывается и в вычислительных моделях, не использующих стандартную конечно-элементную сетку. Для тел с изменяющимися свойствами материала также предложены специализированные численные подходы. В частности, спектральный метод дифференцирования по элементам применяется к термомеханическим задачам функционально-градиентных материалов [8]. Отдельное направление исследований связано с изменением формы основных уравнений. Knyazeva, Akhmetshin и

Smolin [9] рассматривают решение плоских задач термоупругости на основе новой системы уравнений. Такая постановка представляет интерес с точки зрения выбора переменных, через которые описывается термомеханическое состояние тела. Более общий вариационный подход к связанным процессам предложен Junker и Wick [10], которые рассматривают пространственно-временное моделирование, в том числе для термомеханически связанного распространения волн. Развитие этих направлений свидетельствует о том, что наряду с совершенствованием численных методов сохраняется интерес к самой структуре математической постановки и способу представления механических неизвестных [11].

В последние годы для решения задач термоупругости используются и вычислительные подходы, объединяющие физические уравнения с нейросетевой аппроксимацией. Работы Abueidda и Mobasher [12, 13] посвящены применению временных свёрточных сетей в рамках интегрированного конечно-элементного подхода I-FENN. Подобные исследования расширяют набор вычислительных средств для связанных задач. Вместе с тем при разработке альтернативной постановки в деформациях самостоятельное значение сохраняют традиционные разностные методы, поскольку они позволяют явно проследить переход от дифференциальных уравнений к дискретной системе и сопоставить различные способы её решения. Существенная часть современной литературы посвящена обобщённым моделям теплопереноса. Bazarra, Fernández и Quintanilla исследуют задачи термоупругости в рамках модели Moore–Gibson–Thompson [14, 15] и модели Green–Lindsay [16]; дальнейшее расширение связано с учётом микротемператур [17]. Рассматриваются также обратные задачи определения нестационарного источника тепла [18], нелокальные термоупругие модели [19] и вопросы построения обобщённых моделей теплопроводности и термомеханической связи [20]. Эти работы относятся к различным физическим предположениям о теплопереносе, поэтому их результаты следует разграничивать с постановками, основанными на классическом законе Фурье. В настоящем исследовании используется классическая связанная модель, а основное внимание уделяется переходу к механическим неизвестным в виде компонентов тензора деформаций.

Прикладные исследования охватывают тела различной геометрии и материалы с неоднородными либо направленно зависимыми свойствами. Нестационарное термомеханическое поведение толстостенного цилиндра рассматривается в [21], модели динамической термоупругости микропериодических цилиндрических оболочек в [22–24]. В работах [25, 26] исследуются термоупругие взаимодействия при переменной теплопроводности, а в [28, 29] температурные воздействия на пластинчатые конструкции. Динамический отклик на движущийся источник тепла рассматривается в [30], моделирование термоупругой связи для описания демпфирования в [31]. Метод конечных разностей применяется и к обобщённой термоупругости функционально-градиентного полого цилиндра [32]. Разнообразие таких постановок подчёркивает необходимость согласования математической модели с геометрией тела, свойствами материала и характером теплового воздействия.

В рассмотренных исследованиях значительное внимание уделяется физическим моделям теплопереноса, пространственной аппроксимации и алгоритмам решения связанных систем. Для настоящей работы определяющим является другой вопрос: построение трёхмерной динамической постановки, позволяющей совместно определять температуру и шесть независимых компонентов тензора деформаций. Такой переход требует получения уравнений относительно деформаций из исходных соотношений термоупругости и согласования полученной системы с уравнением теп-

лопроводности. Не менее важна её численная реализация, поскольку механическая часть содержит вторые производные по времени, тогда как температурная часть описывается уравнением первого порядка по времени.

Цель настоящей работы — построение математической постановки трёхмерной связанной динамической задачи термоупругости в деформациях и разработка конечно-разностных алгоритмов её решения для изотропного параллелепипеда.

Основной вклад работы состоит в получении системы уравнений относительно компонентов тензора деформаций и температуры на основе уравнений движения, соотношений Дюамеля–Неймана и кинематических соотношений Коши. В этой постановке механические неизвестные определяются непосредственно из уравнений в деформациях, а связь с температурным полем сохраняется в обеих частях системы. Для рассматриваемого тела задаются начальные условия, температурные граничные условия и условия на механически свободной поверхности.

Для численного решения строятся явная и неявная конечно-разностные схемы одной и той же задачи. В явной схеме значения искомых функций на очередном временном слое определяются по рекуррентным соотношениям. Неявная реализация использует метод переменных направлений со сведением промежуточных вычислений к решению трёхдиагональных систем методом прогонки. Численный пример позволяет сопоставить распределения, полученные двумя алгоритмами при одинаковых исходных данных, и исследовать изменение температурного и деформированного состояния параллелепипеда. Близость результатов рассматривается как проверка согласованности двух реализаций принятой модели; сама по себе она не заменяет независимую оценку точности и исследование сходимости.

2 Постановка трёхмерной связанной динамической задачи термоупругости в деформациях

Рассматривается однородное изотропное упругое тело, занимающее область прямоугольного параллелепипеда

$$\Omega = \{(x, y, z) :\ 0 < x < l_1,\ 0 < y < l_2,\ 0 < z < l_3\}.$$

Процесс описывается в рамках линейной термоупругости при малых деформациях. Учитываются инерционные эффекты и взаимное влияние температурного и механического полей. Параметры материала принимаются постоянными.

Исходная математическая модель включает уравнения движения

$$\sigma_{ij,j} + \rho X_i = \rho \ddot{u}_i, \qquad i, j = 1, 2, 3, \tag{1}$$

соотношения Дюамеля–Неймана

$$\sigma_{ij} = \lambda\theta\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} - (3\lambda + 2\mu)\alpha(T - T_0)\delta_{ij}, \tag{2}$$

кинематические соотношения Коши

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\,(u_{i,j} + u_{j,i}), \tag{3}$$

и уравнение теплопроводности

$$\lambda_0 T_{,ii} - C_\varepsilon \dot{T} - T_0\gamma\dot{\varepsilon}_{ii} = -w, \qquad \gamma = (3\lambda + 2\mu)\alpha. \tag{4}$$

Здесь σ_{ij} и ε_{ij} — компоненты тензоров напряжений и малых деформаций; u_i — компоненты вектора перемещений; ρ — плотность материала; X_i — компоненты объёмной силы, отнесённой к единице массы; λ, μ — параметры Ламе; α — коэффициент линейного теплового расширения; T — температура; T_0 — постоянная отсчётная температура; λ_0 — коэффициент теплопроводности; C_ε — объёмная теплоёмкость при постоянной деформации; w — объёмная мощность источника тепла; δ_{ij} — символ Кронекера. Объёмная деформация определяется выражением $\theta = \varepsilon_{kk} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$.

Запятая в индексе обозначает дифференцирование по соответствующей пространственной координате, точка — дифференцирование по времени. По повторяющимся индексам выполняется суммирование.

Для исходной постановки задаются начальные условия

$$u_i\big|_{t=0} = \varphi_i, \qquad \frac{\partial u_i}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi_i, \qquad T\big|_{t=0} = T^0, \tag{5}$$

и граничные условия

$$u_i\big|_{\Sigma_1} = u_i^0, \qquad \sigma_{ij}n_j\big|_{\Sigma_2} = S_i, \qquad T\big|_{\Sigma} = T_b. \tag{6}$$

Здесь $\Sigma = \partial\Omega$, а Σ_1 и Σ_2 — участки поверхности, на которых задаются перемещения и поверхностные усилия соответственно; n_j — компоненты единичной внешней нормали; S_i — компоненты поверхностной нагрузки; T_b — заданная граничная температура. Обозначение T_b позволяет отличить граничные данные от начальной температуры T^0.

Подстановка соотношений (2) и (3) в уравнения движения (1) приводит к уравнениям динамической термоупругости в перемещениях:

$$\mu\Delta u_i + (\lambda+\mu)\theta_{,i} - (3\lambda+2\mu)\alpha\frac{\partial T}{\partial x_i} + \rho X_i = \rho\ddot{u}_i. \tag{7}$$

Здесь $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ — оператор Лапласа. Поскольку T_0 постоянно, пространственные производные $T - T_0$ совпадают с производными T.

Для перехода к деформационным переменным продифференцируем уравнение (7) по координате x_j:

$$\mu\Delta u_{i,j} + (\lambda+\mu)\theta_{,ij} - (3\lambda+2\mu)\alpha T_{,ij} + \rho X_{i,j} = \rho\ddot{u}_{i,j}. \tag{8}$$

Перестановка индексов i и j даёт

$$\mu\Delta u_{j,i} + (\lambda+\mu)\theta_{,ji} - (3\lambda+2\mu)\alpha T_{,ji} + \rho X_{j,i} = \rho\ddot{u}_{j,i}. \tag{9}$$

Сложим уравнения (8), (9) и разделим полученное выражение на два. Используя соотношения (3) и равенство смешанных производных, получим

$$\mu\Delta\varepsilon_{ij} + (\lambda+\mu)\theta_{,ij} - (3\lambda+2\mu)\alpha T_{,ij} + \frac{\rho}{2}\left(X_{i,j} + X_{j,i}\right) = \rho\ddot{\varepsilon}_{ij}. \tag{10}$$

В силу симметрии тензора деформаций система (10) содержит шесть независимых уравнений. Они описывают изменение нормальных и сдвиговых деформаций с учётом инерции, температурного воздействия и пространственного изменения объёмных сил.

При отсутствии объёмных сил система принимает вид

$$\mu\Delta\varepsilon_{ij} + (\lambda+\mu)\theta_{,ij} - \gamma T_{,ij} = \rho\ddot{\varepsilon}_{ij}. \tag{11}$$

Уравнения (10), (11) получены непосредственно из уравнений движения и кинематических соотношений. При использовании деформаций в качестве основных неизвестных начальные и граничные данные должны быть согласованы с условиями совместности Сен-Венана.

Механическая система дополняется уравнением теплопроводности

$$\lambda_0\Delta T - C_\varepsilon\dot{T} - \gamma T_0\dot{\theta} = -w. \tag{12}$$

Температурный член в (11) определяет влияние нагрева на деформирование тела, а член $\gamma T_0\dot{\theta}$ в (12) учитывает обратное влияние изменения объёмной деформации на температурное поле.

Для последующего численного решения рассматривается случай $X_i = 0$, $w = 0$. В пространственных координатах x, y, z система (11), (12) записывается следующим образом:

$$\begin{aligned}
&(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2\varepsilon_{11}}{\partial x^2} + (\lambda+\mu)\Big(\frac{\partial^2\varepsilon_{22}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varepsilon_{33}}{\partial x^2}\Big) + \mu\Big(\frac{\partial^2\varepsilon_{11}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varepsilon_{11}}{\partial z^2}\Big) \\
&\qquad - \gamma\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \rho\frac{\partial^2\varepsilon_{11}}{\partial t^2}, \\
&(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2\varepsilon_{22}}{\partial y^2} + (\lambda+\mu)\Big(\frac{\partial^2\varepsilon_{11}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varepsilon_{33}}{\partial y^2}\Big) + \mu\Big(\frac{\partial^2\varepsilon_{22}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varepsilon_{22}}{\partial z^2}\Big) \\
&\qquad - \gamma\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \rho\frac{\partial^2\varepsilon_{22}}{\partial t^2}, \\
&(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2\varepsilon_{33}}{\partial z^2} + (\lambda+\mu)\Big(\frac{\partial^2\varepsilon_{11}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\varepsilon_{22}}{\partial z^2}\Big) + \mu\Big(\frac{\partial^2\varepsilon_{33}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varepsilon_{33}}{\partial y^2}\Big) \\
&\qquad - \gamma\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \rho\frac{\partial^2\varepsilon_{33}}{\partial t^2}, \\
&\mu\Big(\frac{\partial^2\varepsilon_{12}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varepsilon_{12}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varepsilon_{12}}{\partial z^2}\Big) + (\lambda+\mu)\Big(\frac{\partial^2\varepsilon_{11}}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2\varepsilon_{22}}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2\varepsilon_{33}}{\partial x\partial y}\Big) \\
&\qquad - \gamma\frac{\partial^2 T}{\partial x\partial y} = \rho\frac{\partial^2\varepsilon_{12}}{\partial t^2}, \\
&\mu\Big(\frac{\partial^2\varepsilon_{13}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varepsilon_{13}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varepsilon_{13}}{\partial z^2}\Big) + (\lambda+\mu)\Big(\frac{\partial^2\varepsilon_{11}}{\partial x\partial z} + \frac{\partial^2\varepsilon_{22}}{\partial x\partial z} + \frac{\partial^2\varepsilon_{33}}{\partial x\partial z}\Big) \\
&\qquad - \gamma\frac{\partial^2 T}{\partial x\partial z} = \rho\frac{\partial^2\varepsilon_{13}}{\partial t^2}, \\
&\mu\Big(\frac{\partial^2\varepsilon_{23}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varepsilon_{23}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varepsilon_{23}}{\partial z^2}\Big) + (\lambda+\mu)\Big(\frac{\partial^2\varepsilon_{11}}{\partial y\partial z} + \frac{\partial^2\varepsilon_{22}}{\partial y\partial z} + \frac{\partial^2\varepsilon_{33}}{\partial y\partial z}\Big) \\
&\qquad - \gamma\frac{\partial^2 T}{\partial y\partial z} = \rho\frac{\partial^2\varepsilon_{23}}{\partial t^2}, \\
&\lambda_0\Big(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\Big) - C_\varepsilon\frac{\partial T}{\partial t} - \gamma T_0\frac{\partial(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33})}{\partial t} = 0.
\end{aligned} \tag{13}$$

Основными неизвестными являются шесть независимых компонентов тензора деформаций и температура. Нормальные деформации входят в тепловое уравнение через

их сумму. Сдвиговые деформации связаны с нормальными компонентами и температурой посредством смешанных пространственных производных.

Для системы (13) задаются начальная температура, начальные деформации и скорости их изменения. При выборе начального момента $t = 0$ условия имеют вид

$$\begin{gathered} T\big|_{t=0} = \tilde{T}_i, \quad \varepsilon_{11}\big|_{t=0} = \xi_i, \quad \varepsilon_{22}\big|_{t=0} = \psi_i, \quad \varepsilon_{33}\big|_{t=0} = \zeta_i, \\ \varepsilon_{12}\big|_{t=0} = \vartheta_i, \quad \varepsilon_{13}\big|_{t=0} = \omega_i, \quad \varepsilon_{23}\big|_{t=0} = \varsigma_i, \\ \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial t}\Big|_{t=0} = \xi_i^1, \quad \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi_i^1, \quad \frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial t}\Big|_{t=0} = \zeta_i^1, \\ \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial t}\Big|_{t=0} = \upsilon_i^1, \quad \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial t}\Big|_{t=0} = \omega_i^1, \quad \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial t}\Big|_{t=0} = \varsigma_i^1, \end{gathered} \tag{14}$$

где все функции рассматриваются в точках $(x, y, z) \in \Omega$.

Температура на шести гранях параллелепипеда задаётся условиями

$$T\big|_{x=0} = T_1, \quad T\big|_{x=l_1} = T_2, \quad T\big|_{y=0} = T_3, \quad T\big|_{y=l_2} = T_4, \quad T\big|_{z=0} = T_5, \quad T\big|_{z=l_3} = T_6. \tag{15}$$

Значения $T_1, \ldots, T_6$ представляют собой заданные температурные данные на соответствующих гранях. При необходимости они могут зависеть от времени и координат поверхности.

В рассматриваемой численной постановке сохраняются заданные в исходной работе однородные условия для компонентов деформаций:

$$\varepsilon_{ab}\big|_{x=0,\,l_1} = 0, \qquad \varepsilon_{ab}\big|_{y=0,\,l_2} = 0, \qquad \varepsilon_{ab}\big|_{z=0,\,l_3} = 0, \qquad a, b = 1, 2, 3. \tag{16}$$

Условия (16) задают нулевые значения деформаций на поверхности и рассматриваются как условия Дирихле для деформационных переменных. Их нельзя отождествлять с условием механически свободной поверхности при произвольном температурном поле. Действительно, при нулевых деформациях соотношение (2) даёт $\sigma_{ij} n_j = -\gamma(T - T_0) n_i$, поэтому поверхностные усилия в общем случае не равны нулю. Для свободной поверхности необходимо отдельно задавать условие $\sigma_{ij} n_j = 0$, выраженное через деформации и температуру. Система (13) с условиями (14)–(16) составляет рассматриваемую начально-краевую постановку в деформационных переменных. При её механической интерпретации необходимо учитывать совместность деформационного поля и согласованность заданных данных. После определения деформаций и температуры напряжения вычисляются непосредственно по соотношениям Дюамеля–Неймана (2). Далее для данной системы строятся явная и неявная конечно-разностные схемы.

3 Численный метод решения

Для решения начально-краевой задачи (13)–(16) используется метод конечных разностей. Пространственные производные аппроксимируются на прямоугольной сетке, согласованной с геометрией параллелепипеда. Рассматриваются два способа перехода между временными слоями: явный, основанный на рекуррентном вычислении искомых функций, и неявный, требующий решения системы сеточных уравнений.

3.1 Расчётная сетка и разностные операторы

В области Ω вводится равномерная пространственная сетка

$$x_i = ih_1, \qquad y_j = jh_2, \qquad z_k = kh_3, \qquad h_1 = \frac{l_1}{N_1}, \quad h_2 = \frac{l_2}{N_2}, \quad h_3 = \frac{l_3}{N_3}.$$

Временные слои задаются значениями $t_n = n\tau$, где τ — шаг по времени. Сеточные значения деформаций и температуры обозначаются через

$$E^n_{ab,i,j,k} \approx \varepsilon_{ab}(x_i, y_j, z_k, t_n), \qquad T^n_{i,j,k} \approx T(x_i, y_j, z_k, t_n).$$

Индексы $a, b = 1, 2, 3$ обозначают компоненты тензора, а i, j, k — положение узла сетки. Такое разграничение исключает смешение тензорных и сеточных индексов.

Для произвольной сеточной функции v используются центральные разности

$$\delta_{xx} v_{i,j,k} = \frac{v_{i+1,j,k} - 2v_{i,j,k} + v_{i-1,j,k}}{h_1^2}, \qquad \delta_{yy} v_{i,j,k} = \frac{v_{i,j+1,k} - 2v_{i,j,k} + v_{i,j-1,k}}{h_2^2},$$
$$\delta_{zz} v_{i,j,k} = \frac{v_{i,j,k+1} - 2v_{i,j,k} + v_{i,j,k-1}}{h_3^2}.$$

Разностный оператор Лапласа имеет вид $\Delta_h v = \delta_{xx} v + \delta_{yy} v + \delta_{zz} v$. Смешанная производная по координатам x, y аппроксимируется выражением

$$\delta_{xy} v_{i,j,k} = \frac{v_{i+1,j+1,k} - v_{i+1,j-1,k} - v_{i-1,j+1,k} + v_{i-1,j-1,k}}{4h_1 h_2}.$$

Операторы δ_{xz} и δ_{yz} определяются аналогично. Для достаточно гладких функций указанные операторы имеют второй порядок пространственной аппроксимации. Введём сеточную объёмную деформацию

$$\Theta^n = E^n_{11} + E^n_{22} + E^n_{33}.$$

Для компактной записи механических уравнений определим оператор

$$\mathcal{L}_{ab,h}(E, T) = \mu \Delta_h E_{ab} + (\lambda + \mu)\delta_{ab}\Theta - \gamma \delta_{ab} T,$$

где $\delta_{11} = \delta_{xx}$, $\delta_{22} = \delta_{yy}$, $\delta_{33} = \delta_{zz}$, а δ_{12}, δ_{13}, δ_{23} — соответствующие смешанные разностные операторы.

3.2 Явная конечно-разностная схема

В механической части вторая производная по времени заменяется центральной разностью. Пространственные производные вычисляются на известном слое t_n. Получаем

$$\begin{aligned} \rho \frac{E^{n+1}_{ab} - 2E^n_{ab} + E^{n-1}_{ab}}{\tau^2} &= \mathcal{L}_{ab,h}(E^n, T^n), \\ C_\varepsilon \frac{T^{n+1} - T^n}{\tau} &= \lambda_0 \Delta_h T^n - \gamma T_0 \frac{\Theta^n - \Theta^{n-1}}{\tau}. \end{aligned} \tag{17}$$

Здесь и далее равенства записываются для внутренних узлов сетки. В температурном уравнении скорость объёмной деформации вычисляется по двум известным слоям, поэтому схема остаётся явной.

Например, уравнение для нормальной деформации E_{11} имеет вид

$$\rho \frac{E^{n+1}_{11} - 2E^n_{11} + E^{n-1}_{11}}{\tau^2} = (\lambda+2\mu)\delta_{xx} E^n_{11} + (\lambda+\mu)\delta_{xx}(E^n_{22} + E^n_{33}) + \mu(\delta_{yy} + \delta_{zz}) E^n_{11} - \gamma \delta_{xx} T^n.$$

Для сдвиговой деформации E_{12} получаем

$$\rho \frac{E^{n+1}_{12} - 2E^n_{12} + E^{n-1}_{12}}{\tau^2} = \mu \Delta_h E^n_{12} + (\lambda + \mu)\delta_{xy}\Theta^n - \gamma \delta_{xy} T^n.$$

Остальные компоненты вычисляются по аналогичным выражениям. Разрешая систему (17) относительно значений на новом временном слое, находим рекуррентные соотношения

$$\begin{aligned} E_{ab}^{n+1} &= 2E_{ab}^{n} - E_{ab}^{n-1} + \frac{\tau^2}{\rho}\,\mathcal{L}_{ab,h}(E^n, T^n), \\ T^{n+1} &= T^n + \frac{\lambda_0 \tau}{C_\varepsilon}\,\Delta_h T^n - \frac{\gamma T_0}{C_\varepsilon}\,(\Theta^n - \Theta^{n-1}). \end{aligned} \tag{18}$$

В первом соотношении (18) множитель при пространственном операторе равен τ^2/ρ. Наличие квадрата временного шага следует непосредственно из аппроксимации второй производной по времени. Начальные значения E^0, скорости $V^0 = \partial_t E|_{t=0}$ и температура T^0 задаются условиями (14). Первый механический слой вычисляется с помощью разложения Тейлора

$$E_{ab}^{1} = E_{ab}^{0} + \tau V_{ab}^{0} + \frac{\tau^2}{2\rho}\,\mathcal{L}_{ab,h}(E^0, T^0).$$

Для температуры используется

$$T^1 = T^0 + \frac{\tau}{C_\varepsilon}\Big[\lambda_0 \Delta_h T^0 - \gamma T_0\big(V_{11}^0 + V_{22}^0 + V_{33}^0\big)\Big].$$

После этого расчёт продолжается по формулам (18). На каждом временном слое граничные значения устанавливаются согласно условиям (15), (16). Механическая часть схемы имеет локальную погрешность аппроксимации $O(h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 + \tau^2)$, а температурная часть — $O(h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 + \tau)$.

3.3 Неявная схема

В неявной реализации пространственные операторы и термомеханические члены вычисляются на новом временном слое:

$$\begin{aligned} \rho\,\frac{E_{ab}^{n+1} - 2E_{ab}^{n} + E_{ab}^{n-1}}{\tau^2} &= \mathcal{L}_{ab,h}(E^{n+1}, T^{n+1}), \\ C_\varepsilon\,\frac{T^{n+1} - T^n}{\tau} &= \lambda_0 \Delta_h T^{n+1} - \gamma T_0\,\frac{\Theta^{n+1} - \Theta^n}{\tau}. \end{aligned} \tag{19}$$

Все неизвестные нового слоя образуют связанную линейную систему. В отличие от явной схемы, их нельзя определить независимыми рекуррентными вычислениями.

Для её решения используется последовательная обработка координатных направлений. На каждом проходе неизвестные вдоль выбранной сеточной линии определяются из трёхдиагональной системы. Влияние других направлений и компонентов включается в правую часть по текущим итерационным значениям.

Для прохода вдоль оси x уравнение для E_{11} записывается в форме

$$a_x E_{11,i+1,j,k}^{n+1} + b_x E_{11,i,j,k}^{n+1} + c_x E_{11,i-1,j,k}^{n+1} = f_{11,i,j,k}, \tag{20}$$

где

$$a_x = c_x = -\frac{\lambda + 2\mu}{h_1^2}, \qquad b_x = \frac{\rho}{\tau^2} + \frac{2(\lambda + 2\mu)}{h_1^2}.$$

При таком выделении оператора по x правая часть содержит известные временные слои и текущие оценки остальных членов:

$$f_{11} = \frac{\rho}{\tau^2}\,(2E_{11}^{n} - E_{11}^{n-1}) + \mu(\delta_{yy} + \delta_{zz})E_{11}^{n+1} + (\lambda + \mu)\delta_{xx}(E_{22}^{n+1} + E_{33}^{n+1}) - \gamma \delta_{xx} T^{n+1}.$$

Аналогичные системы строятся для остальных деформаций и температуры:

$$a_{ab}^{(d)} E_{ab,m+1}^{n+1} + b_{ab}^{(d)} E_{ab,m}^{n+1} + c_{ab}^{(d)} E_{ab,m-1}^{n+1} = f_{ab,m}^{(d)}, \qquad A^{(d)} T_{m+1}^{n+1} + B^{(d)} T_{m}^{n+1} + C^{(d)} T_{m-1}^{n+1} = F_{m}^{(d)}. \tag{21}$$

Здесь $d \in \{x, y, z\}$, а m — индекс вдоль соответствующей линии. Для температурного прохода по x

$$A^{(x)} = C^{(x)} = -\frac{\lambda_0}{h_1^2}, \qquad B^{(x)} = \frac{C_\varepsilon}{\tau} + \frac{2\lambda_0}{h_1^2}.$$

Правая часть включает

$$F^{(x)} = \frac{C_\varepsilon}{\tau} T^n + \lambda_0(\delta_{yy} + \delta_{zz}) T^{n+1} - \frac{\gamma T_0}{\tau} (\Theta^{n+1} - \Theta^n).$$

Трёхдиагональные системы решаются методом прогонки. Проходы по x, y, z повторяются с обновлением связанных членов до достижения заданной точности.

4 Численные результаты

Для сопоставления явной и неявной конечно-разностных реализаций рассматривается задача о нестационарном термоупругом деформировании прямоугольного параллелепипеда. В начальный момент в теле задаётся неоднородное температурное поле, тогда как деформации и скорости их изменения равны нулю. Последующее изменение механического состояния обусловлено температурным воздействием и его взаимодействием с процессом теплопроводности.

4.1 Начальные условия и параметры расчёта

Начальные условия принимаются в виде

$$T\big|_{t=0} = T_0 \sin\frac{\pi x}{l_1} \sin\frac{\pi y}{l_2} \sin\frac{\pi z}{l_3}, \qquad \varepsilon_{ab}\big|_{t=0} = 0, \qquad \frac{\partial \varepsilon_{ab}}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0, \qquad a, b = 1, 2, 3. \tag{22}$$

Синусоидальное распределение задаёт гладкое температурное поле с максимумом в центре области и нулевыми значениями на её гранях. Такая форма начальных данных удобна для сравнения численных реализаций, поскольку позволяет проследить сохранение пространственной симметрии и изменение амплитуды температурного поля.

Приведённые в исходном численном примере граничные условия имеют вид

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{12} = 0, \quad T = 0 \qquad \text{при} \quad x = 0,\ x = l_1,\ y = 0,\ y = l_2. \tag{23}$$

В исходном расчёте используются следующие значения параметров:

$$T_0 = 20, \quad \lambda = 0{,}78, \quad \lambda_0 = 0{,}06, \quad \alpha = 0{,}05, \quad \mu = 0{,}5,$$
$$\rho = 0{,}86, \quad C_\varepsilon = 3{,}5, \quad h_1 = h_2 = 0{,}1, \quad l_1 = l_2 = 1.$$

Соответствующий коэффициент термомеханической связи равен $\gamma = (3\lambda + 2\mu)\alpha = 0{,}167$.

Ниже рассматриваются результаты при $t = 0{,}05$. Температура представлена в сечении $z = 0{,}4$, а нормальная деформация ε_{11} — в сечении $z = 0{,}5$.

4.2 Распределение температуры

В табл. 1 и 2 приведены значения температуры, полученные соответственно явной и неявной схемами.

Таблица 1 Распределение температуры $T(x, y, z, t)$ при $t = 0{,}05$, $z = 0{,}4$ (явная схема)

$y\backslash x$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,1	0,000	1,770	3,365	4,630	5,441	5,720	5,441	4,630	3,365	1,770	0,000
0,2	0,000	3,365	6,395	8,795	10,333	10,863	10,333	8,795	6,395	3,365	0,000
0,3	0,000	4,630	8,795	12,092	14,205	14,933	14,205	12,092	8,795	4,630	0,000
0,4	0,000	5,441	10,333	14,205	16,686	17,539	16,686	14,205	10,333	5,441	0,000
0,5	0,000	5,720	10,863	14,933	17,539	18,437	17,539	14,933	10,863	5,720	0,000
0,6	0,000	5,441	10,333	14,205	16,686	17,539	16,686	14,205	10,333	5,441	0,000
0,7	0,000	4,630	8,795	12,092	14,205	14,933	14,205	12,092	8,795	4,630	0,000
0,8	0,000	3,365	6,395	8,795	10,333	10,863	10,333	8,795	6,395	3,365	0,000
0,9	0,000	1,770	3,365	4,630	5,441	5,720	5,441	4,630	3,365	1,770	0,000
1	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000

Таблица 2 Распределение температуры $T(x, y, z, t)$ при $t = 0{,}05$, $z = 0{,}4$ (неявная схема)

$y\backslash x$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,1	0,000	1,770	3,365	4,630	5,441	5,721	5,441	4,630	3,365	1,770	0,000
0,2	0,000	3,365	6,395	8,795	10,334	10,864	10,334	8,795	6,395	3,365	0,000
0,3	0,000	4,630	8,795	12,092	14,206	14,933	14,206	12,092	8,795	4,630	0,000
0,4	0,000	5,441	10,334	14,206	16,687	17,541	16,687	14,206	10,334	5,441	0,000
0,5	0,000	5,720	10,864	14,933	17,541	18,438	17,541	14,933	10,864	5,720	0,000
0,6	0,000	5,441	10,334	14,206	16,687	17,541	16,687	14,206	10,334	5,441	0,000
0,7	0,000	4,630	8,795	12,092	14,206	14,933	14,206	12,092	8,795	4,630	0,000
0,8	0,000	3,365	6,395	8,795	10,334	10,864	10,334	8,795	6,395	3,365	0,000
0,9	0,000	1,770	3,365	4,630	5,441	5,721	5,441	4,630	3,365	1,770	0,000
1	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000

Оба расчёта воспроизводят распределение с наибольшими значениями в центральной части сечения и уменьшением температуры к его границам. На линиях $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$ температура равна нулю, что соответствует заданным граничным условиям. В центральном узле $x = y = 0{,}5$ получены значения $T_{\text{явная}} = 18{,}437$, $T_{\text{неявная}} = 18{,}438$. В узле $x = y = 0{,}4$ соответствующие значения составляют 16,686 и 16,687. Таким образом, различия между двумя реализациями малы по сравнению с амплитудой температурного поля.

Для количественного сопоставления введём максимальное абсолютное расхождение и его нормированное значение

$$D_\infty(v) = \max_{i,j} \left| v_{\text{явная},i,j} - v_{\text{неявная},i,j} \right|, \qquad d_\infty(v) = \frac{D_\infty(v)}{\max\limits_{i,j} |v_{\text{неявная},i,j}|} \cdot 100\,\%.$$

По табличным значениям температуры получаем $D_\infty(T) = 0{,}002$, $d_\infty(T) \approx 0{,}0108\,\%$.

4.3 Распределение нормальной деформации

Таблицы 3 и 4 содержат значения компоненты ε_{11}, вычисленные двумя разностными схемами.

В представленных данных деформация положительна во внутренних узлах и достигает наибольшего значения в центре сечения. При приближении к границам её величина уменьшается до нуля. Обе реализации дают одинаковое центральное значение: $\varepsilon_{11,\text{явная}}(0{,}5; 0{,}5; 0{,}5; 0{,}05) = \varepsilon_{11,\text{неявная}}(0{,}5; 0{,}5; 0{,}5; 0{,}05) = 0{,}046$.

Таблица 3 Распределение нормальной деформации $\varepsilon_{11}(x, y, z, t)$ при $t = 0{,}05$, $z = 0{,}5$ (явная схема)

$y\backslash x$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,1	0,000	0,004	0,008	0,012	0,014	0,014	0,014	0,012	0,008	0,004	0,000
0,2	0,000	0,008	0,016	0,022	0,026	0,027	0,026	0,022	0,016	0,008	0,000
0,3	0,000	0,012	0,022	0,030	0,036	0,038	0,036	0,030	0,022	0,012	0,000
0,4	0,000	0,014	0,026	0,036	0,042	0,044	0,042	0,036	0,026	0,014	0,000
0,5	0,000	0,014	0,027	0,038	0,044	0,046	0,044	0,038	0,027	0,014	0,000
0,6	0,000	0,014	0,026	0,036	0,042	0,044	0,042	0,036	0,026	0,014	0,000
0,7	0,000	0,012	0,022	0,030	0,036	0,038	0,036	0,030	0,022	0,012	0,000
0,8	0,000	0,008	0,016	0,022	0,026	0,027	0,026	0,022	0,016	0,008	0,000
0,9	0,000	0,004	0,008	0,012	0,014	0,014	0,014	0,012	0,008	0,004	0,000
1	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000

Таблица 4 Распределение нормальной деформации $\varepsilon_{11}(x, y, z, t)$ при $t = 0{,}05$, $z = 0{,}5$ (неявная схема)

$y\backslash x$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,1	0,000	0,004	0,008	0,012	0,014	0,014	0,014	0,012	0,008	0,004	0,000
0,2	0,000	0,008	0,016	0,022	0,026	0,027	0,026	0,022	0,016	0,008	0,000
0,3	0,000	0,012	0,022	0,030	0,036	0,037	0,036	0,030	0,022	0,012	0,000
0,4	0,000	0,014	0,026	0,036	0,042	0,044	0,042	0,036	0,026	0,014	0,000
0,5	0,000	0,014	0,027	0,037	0,044	0,046	0,044	0,037	0,027	0,014	0,000
0,6	0,000	0,014	0,026	0,036	0,042	0,044	0,042	0,036	0,026	0,014	0,000
0,7	0,000	0,012	0,022	0,030	0,036	0,037	0,036	0,030	0,022	0,012	0,000
0,8	0,000	0,008	0,016	0,022	0,026	0,027	0,026	0,022	0,016	0,008	0,000
0,9	0,000	0,004	0,008	0,012	0,014	0,014	0,014	0,012	0,008	0,004	0,000
1	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000

Различия наблюдаются в отдельных внутренних узлах. Например, при $x = 0{,}5$, $y = 0{,}3$ явная схема даёт 0,038, а неявная — 0,037. По приведённым таблицам максимальное абсолютное расхождение составляет $D_\infty(\varepsilon_{11}) = 0{,}001$, а нормированное расхождение $d_\infty(\varepsilon_{11}) \approx 2{,}17\,\%$.

Таблица 5 Максимальные значения температуры и нормальной деформации ε_{11} и расхождения между явным и неявным решениями при $t = 0{,}05$

Величина	Сечение	Максимум, явная схема	Максимум, неявная схема	D_∞	d_∞, %
T	$z = 0{,}4$	18,437	18,438	0,002	0,0108
ε_{11}	$z = 0{,}5$	0,046	0,046	0,001	2,17

Результаты, представленные в табл. 5, показывают хорошую согласованность двух конечно-разностных реализаций. Максимальные значения температуры составляют 18,437 и 18,438, а наибольшее расхождение, нормированное на максимум неявного решения, не превышает 0,0108 %. Для нормальной деформации ε_{11} обе схемы дают одинаковое максимальное значение 0,046; максимальное абсолютное расхождение составляет 0,001. Полученное согласие подтверждает, что оба алгоритма воспроизводят близкий термомеханический отклик рассматриваемой модели. Это является

положительным результатом внутренней проверки численной реализации и показывает согласованность вычисления температурного и деформационного полей двумя различными способами временной дискретизации.

4.4 Графическое представление и оценка результатов

На рис. 1 показана поверхность температурного распределения, полученная по явной схеме.

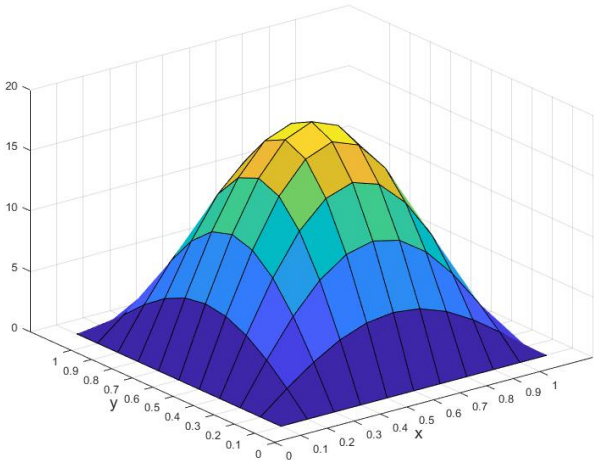


Рис. 1 Распределение температуры $T(x, y, z, t)$ в сечении $z = 0{,}5$ при $t = 0{,}05$, полученное по явной конечно-разностной схеме

На рис. 2 представлены распределения температуры вдоль координаты x в трёх сечениях параллелепипеда. Сплошные линии соответствуют явной конечно-разностной схеме, а круглые маркеры — неявной. Одинаковый масштаб осей позволяет непосредственно сопоставить амплитуды температурных профилей и оценить изменение поля при переходе от периферийной области к центру.

В сечении $y = 0{,}1$, расположенном вблизи грани с заданной нулевой температурой, максимальное значение составляет 5,720 по явной схеме и 5,721 по неявной. При переходе к $y = 0{,}3$ максимум возрастает до 14,933 в обеих реализациях. Наибольшие значения наблюдаются в центральном сечении $y = 0{,}5$: 18,437 и 18,438 соответственно.

Все три профиля сохраняют симметрию относительно $x = 0{,}5$. Температура возрастает от нулевого значения на границе $x = 0$ до максимума в середине и затем уменьшается к границе $x = 1$. Такая форма согласуется с симметричным начальным температурным распределением и одинаковыми температурными условиями на противоположных гранях. При изменении положения сечения меняется прежде всего амплитуда профиля, тогда как положение максимума и общий характер распределения сохраняются.

Маркеры неявного решения практически располагаются на линиях явного решения во всех рассмотренных сечениях. Согласие наблюдается не только в точках максимума, но и на участках возрастания и убывания температуры. Это показывает, что обе реализации воспроизводят близкое пространственное распределение температурного поля.

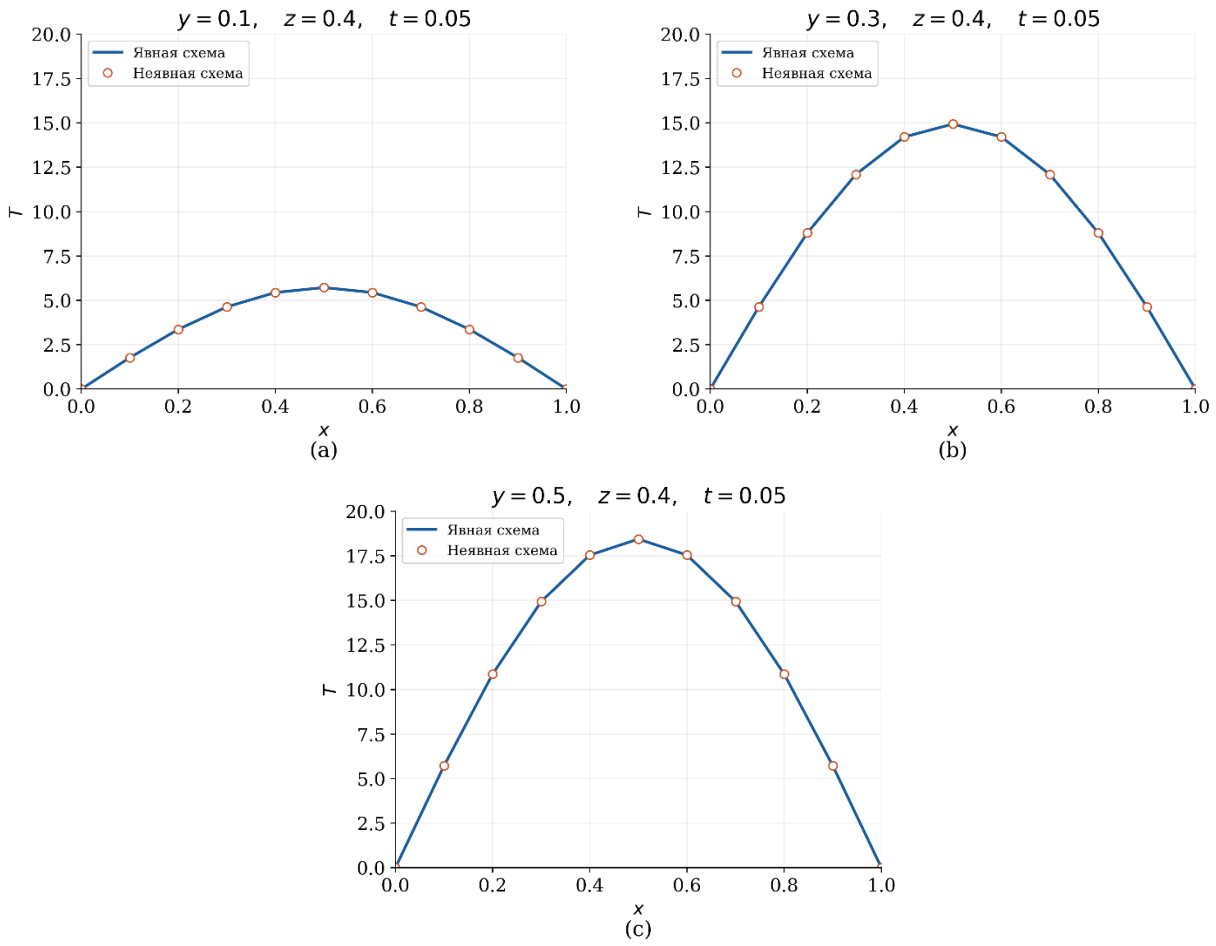


Рис. 2 Температурные профили при $t = 0{,}05$, $z = 0{,}4$: (a) $y = 0{,}1$; (b) $y = 0{,}3$; (c) $y = 0{,}5$

5 Заключение

В работе представлена постановка трёхмерной связанной динамической задачи термоупругости, в которой основными механическими неизвестными являются шесть независимых компонентов тензора деформаций. На основе уравнений движения, соотношений Дюамеля–Неймана и кинематических соотношений Коши получена система, позволяющая совместно определять деформационное и температурное поля. Особенность подхода состоит в непосредственном вычислении деформаций без их последующего восстановления по производным численного решения в перемещениях.

Для рассматриваемой задачи построены явная и неявная конечно-разностные реализации. Явный алгоритм использует рекуррентные соотношения, а неявный предусматривает решение трёхдиагональных систем при последовательной обработке координатных направлений. Рассмотрены порядок аппроксимации, ограничения временного шага для явной схемы и особенности проверки устойчивости связанной системы.

Численный пример выявил близость результатов двух реализаций. Максимальное абсолютное расхождение температуры по представленным таблицам составляет 0,002, что соответствует 0,0108 % от максимума неявного решения. Для нормальной деформации ε_{11} обе схемы дают одинаковое максимальное значение 0,046, а наибольшее абсолютное расхождение составляет 0,001. Сопоставление профилей в различных сечениях показало сохранение симметрии распределений и согласованное воспроиз-

ведение области наибольших значений. Эти результаты подтверждают внутреннюю согласованность вычислительных реализаций.

Научная значимость работы заключается в развитии деформационной постановки для трёхмерных нестационарных термоупругих процессов и её реализации методом конечных разностей. Представленный подход позволяет исследовать пространственное распределение деформаций и температуры в рамках единой связанной модели, а напряжения определять непосредственно по соотношениям Дюамеля–Неймана. Дальнейшее развитие исследования связано с независимой проверкой точности, установлением сеточной сходимости и рассмотрением более сложных условий термомеханического нагружения.

Декларации

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Доступность данных. Результаты расчётов доступны у авторов по обоснованному запросу.

Литература

[1] *Suljević S., Ibrahimbegovic A., Dolarević S.* Regularized variational formulation and 3D discrete approximation with enhanced performance in thermo-elasticity and thermo-damage // Computational Mechanics. — 2025. — Vol. 76. — P. 1183–1210. — doi: https://doi.org/10.1007/s00466-025-02645-x.

[2] *Tan C.-H., Xu B.-B., Zheng Y.-T., Zhang S.-Q., Jiang W.-W., Yang K., Gao X.-W.* Analysis of dynamic coupled thermoelasticity problems based on element differential method // International Journal of Heat and Mass Transfer. — 2024. — Vol. 222. — Art. 125216. — doi: https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2024.125216.

[3] *Eberle S.* FEM–BEM coupling for the thermoelastic wave equation with transparent boundary conditions in 3D // Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik. — 2022. — Vol. 73. — Art. 163. — doi: https://doi.org/10.1007/s00033-022-01720-0.

[4] *Ahn C., Cortiella A., Kim J.-G., Park K. C.* Partitioned symmetric formulation and solution algorithm of thermoelastic interaction problems // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. — 2022. — Vol. 400. — Art. 115529. — doi: https://doi.org/10.1016/j.cma.2022.115529.

[5] *Reséndiz-Flores E. O., Saucedo-Zendejo F. R., Jiménez-Villalpando A. V.* Fully coupled meshfree numerical approach based on the finite pointset method for static linear thermoelasticity problems // Computational Particle Mechanics. — 2022. — Vol. 9. — P. 237–250. — doi: https://doi.org/10.1007/s40571-021-00406-0.

[6] *Saucedo-Zendejo F. R., Reséndiz-Flores E. O.* Meshfree numerical approach based on the finite pointset method for two-way coupled transient linear thermoelasticity // Computational Particle Mechanics. — 2023. — Vol. 10. — P. 289–302. — doi: https://doi.org/10.1007/s40571-022-00496-4.

[7] *Elfar M., Sedaghati R., Abdelsalam O. R.* Transient coupled thermo-elasticity analysis of a temperature-dependent thick-walled cylinder under cyclic thermo-mechanical loads // SN Applied Sciences. — 2023. — Vol. 5. — Art. 9. — doi: https://doi.org/10.1007/s42452-022-05228-0.

[8] *Xu B.-B., Gao X.-W., Cui M.* High precision simulation of thermal-mechanical problems in functionally graded materials by spectral element differential method // Composite Structures. — 2021. — Vol. 270. — Art. 114084. — doi: https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2021.114084.

[9] *Knyazeva A. G., Akhmetshin L. R., Smolin I. Yu.* Solution of the plane thermoelasticity problems based on a new set of equations // Applied Mathematical Modelling. — 2025. — Vol. 137. — Art. 115652. — doi: https://doi.org/10.1016/j.apm.2024.115652.

[10] *Junker P., Wick T.* Space-time variational material modeling: a new paradigm demonstrated for thermo-mechanically coupled wave propagation, visco-elasticity, elasto-plasticity with hardening, and gradient-enhanced damage // Computational Mechanics. — 2024. — Vol. 73. — P. 365–402. — doi: https://doi.org/10.1007/s00466-023-02371-2.

[11] *Abdalla M., Elbakly M., Shabana A. A.* Computational algorithm for the solution of coupled thermomechanical large-displacement problems // Acta Mechanica. — 2025. — Online first. — doi: https://doi.org/10.1007/s00707-025-04479-3.

[12] *Abueidda D. W., Mobasher M. E.* I-FENN for thermoelasticity based on physics-informed temporal convolutional network (PI-TCN) // Computational Mechanics. — 2024. — Vol. 74. — P. 1229–1259. — doi: https://doi.org/10.1007/s00466-024-02475-3.

[13] *Abueidda D. W., Mobasher M. E.* Variational temporal convolutional networks for I-FENN thermoelasticity // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. — 2024. — Vol. 429. — Art. 117122. — doi: https://doi.org/10.1016/j.cma.2024.117122.

[14] *Bazarra N., Fernández J. R., Quintanilla R.* Analysis of a Moore–Gibson–Thompson thermoelastic problem // Journal of Computational and Applied Mathematics. — 2021. — Vol. 382. — Art. 113058. — doi: https://doi.org/10.1016/j.cam.2020.113058.

[15] *Bazarra N., Fernández J. R., Quintanilla R.* A MGT thermoelastic problem with two relaxation parameters // Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik. — 2023. — Vol. 74. — Art. 197. — doi: https://doi.org/10.1007/s00033-023-02080-z.

[16] *Bazarra N., Fernández J. R., Quintanilla R.* Analysis of two thermoelastic problems with the Green–Lindsay model // Computational and Applied Mathematics. — 2023. — Vol. 42. — Art. 196. — doi: https://doi.org/10.1007/s40314-023-02335-5.

[17] *Bazarra N., Fernández J. R., Liverani L., Quintanilla R.* Analysis of a thermoelastic problem with the Moore–Gibson–Thompson microtemperatures // Journal of Computational and Applied Mathematics. — 2024. — Vol. 438. — Art. 115571. — doi: https://doi.org/10.1016/j.cam.2023.115571.

[18] *Van Bockstal K., Marin L.* Finite element method for the reconstruction of a time-dependent heat source in isotropic thermoelasticity systems of type-III // Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik. — 2022. — Vol. 73. — Art. 113. — doi: https://doi.org/10.1007/s00033-022-01750-8.

[19] *Bazarra N., Fernández J. R., Quintanilla R.* Analysis of a one-dimensional nonlocal thermoelastic problem // Electronic Transactions on Numerical Analysis. — 2024. — Vol. 60. — P. 405–420. — doi: https://doi.org/10.1553/etna_vol60s405.

[20] *Huang Y., Yan L., Wu H., Yu Y.* New insights on generalized heat conduction and thermoelastic coupling models // Applied Mathematics and Mechanics (English Edition). — 2025. — Vol. 46. — P. 1533–1550. — doi: https://doi.org/10.1007/s10483-025-3280-7.

[21] *Ismail M. F., Ahmed H. M., Rabie W. B.* Construction of exact wave solutions for coupled thermoelasticity theory with temperature dependence using improved modified extended tanh-function method // Continuum Mechanics and Thermodynamics. — 2025. — Vol. 37. — Art. 77. — doi: https://doi.org/10.1007/s00161-025-01408-6.

[22] *Tomczyk B., Gołąbczak M., Gołąbczak A.* A new combined asymptotic-tolerance model of thermoelasticity problems for thin uniperiodic cylindrical shells // Continuum Mechanics and Thermodynamics. — 2024. — Vol. 36. — P. 1–26. — doi: https://doi.org/10.1007/s00161-023-01254-4.

[23] *Tomczyk B., Gołąbczak M.* Tolerance and asymptotic modelling of dynamic thermoelasticity problems for thin micro-periodic cylindrical shells // Meccanica. — 2020. — Vol. 55. — P. 2391–2411. — doi: https://doi.org/10.1007/s11012-020-01184-4.

[24] *Tomczyk B., Bagdasaryan V., Gołąbczak M., Litawska A.* A new combined asymptotic-tolerance model of thermoelasticity problems for thin biperiodic cylindrical shells // Composite Structures. — 2023. — Vol. 309. — Art. 116708. — doi: https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2023.116708.

[25] *Hobiny A., Abbas I.* Generalized Thermoelastic Interaction in Orthotropic Media under Variable Thermal Conductivity Using the Finite Element Method // Mathematics. — 2023. — Vol. 11, № 4. — Art. 955. — doi: https://doi.org/10.3390/math11040955.

[26] *Hobiny A., Abbas I.* The Effects of Variable Thermal Conductivity in Thermoelastic Interactions in an Infinite Material with and without Kirchhoff's Transformation // Mathematics. — 2022. — Vol. 10, № 22. — Art. 4176. — doi: https://doi.org/10.3390/math10224176.

[27] *Saeed T.* Hybrid Finite Element Method to Thermo-Elastic Interactions in a Piezo-Thermo-Elastic Medium under a Fractional Time Derivative Model // Mathematics. — 2022. — Vol. 10, № 4. — Art. 650. — doi: https://doi.org/10.3390/math10040650.

[28] *Zhang Z., Sun Y., Xiang Z., Qian W., Shao X.* Transient Thermoelastic Analysis of Rectangular Plates with Time-Dependent Convection and Radiation Boundaries // Buildings. — 2023. — Vol. 13, № 9. — Art. 2174. — doi: https://doi.org/10.3390/buildings13092174.

[29] *Feri M., Krommer M., Alibeigloo A.* Three-Dimensional Thermoelasticity Analysis of Viscoelastic FGM Plate Embedded in Piezoelectric Layers under Thermal Load // Applied Sciences. — 2023. — Vol. 13, № 1. — Art. 353. — doi: https://doi.org/10.3390/app13010353.

[30] *Liu F., Shi P., Guo Y.* The Thermoelastic Dynamic Response of a Rod Due to a Moving Heat Source under the Fractional-Order Thermoelasticity Theory // Symmetry. — 2024. — Vol. 16, № 6. — Art. 666. — doi: https://doi.org/10.3390/sym16060666.

[31] *Zacharias C., Könke C., Guist C.* A New Efficient Approach to Simulate Material Damping in Metals by Modeling Thermoelastic Coupling // Materials. — 2022. — Vol. 15, № 5. — Art. 1706. — doi: https://doi.org/10.3390/ma15051706.

[32] *Homayouni M., Shariyat M., Rahmani O.* Thermally nonlinear generalized thermoelasticity investigation of a functionally graded thick hollow cylinder based on the finite difference method // Thin-Walled Structures. — 2022. — Vol. 177. — Art. 109359. — doi: https://doi.org/10.1016/j.tws.2022.109359.

UDC 539.3:519.63

NUMERICAL SOLUTION OF A THREE-DIMENSIONAL COUPLED DYNAMIC THERMOELASTICITY PROBLEM IN TERMS OF STRAINS

[1*]***Djumayozov U.Z.***, [1]***Abdirakhmonova M.N.***, [2]***Usmonov L.S.***

[*]djumayozov@bk.ru

[1]Samarkand State University named after Sharof Rashidov, 15, University blvd., Samarkand, 140104 Uzbekistan;

[2]Research Institute for the Development of Digital Technologies and Artificial Intelligence, 17A, Buz-2, Tashkent, 100125 Uzbekistan

A three-dimensional coupled dynamic thermoelasticity problem is considered for a homogeneous isotropic parallelepiped. The primary unknowns are the six independent components of the strain tensor and temperature. Based on the equations of motion, the Duhamel–Neumann relations, and the Cauchy kinematic relations, a system of dynamic equations in terms of strains is derived and supplemented by the heat-conduction equation. Thermal effects are incorporated into the mechanical equations, while the reverse coupling is determined by the volumetric strain rate. This formulation allows strains to be computed directly without recovery from displacement derivatives. Explicit and implicit finite-difference schemes on a rectangular spatial grid are constructed for the numerical solution. The numerical example considers a sinusoidal initial temperature field with zero initial strains and strain rates. Temperature and normal strain are compared in different cross-sections of the parallelepiped. The comparison is performed using identical input data at a fixed computational time. Both schemes reproduce similar spatial distributions and the same location of the central maximum. According to the tabulated data, the maximum absolute temperature difference is 0.002, or 0.0108 percent of the maximum implicit solution value. For normal strain, the maximum difference is 0.001, while the maximum value of 0.046 is identical in both implementations. The results confirm the internal consistency of the algorithms in jointly determining the temperature and strain fields.

Keywords: coupled thermoelasticity, three-dimensional dynamic problem, strain-based formulation, finite-difference method, explicit and implicit schemes, alternating-direction method

Citation: Djumayozov U.Z., Abdirakhmonova M.N., Usmonov L.S. 2026. Numerical solution of a three-dimensional coupled dynamic thermoelasticity problem in terms of strains. *Problems of Computational and Applied Mathematics.* 5(76): 119-136.

DOI: 10.71310/pcam.5_76.2026.08

№ 5(76) 2026

ISSN 2181-8460

HISOBLASH VA AMALIY MATEMATIKA MUAMMOLARI

ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

PROBLEMS OF COMPUTATIONAL AND APPLIED MATHEMATICS

AiRI
RAQAMLI TEXNOLOGIYALAR VA SUN'IY INTELLEKTNI RIVOJLANTIRISH ILMIY-TADQIQOT INSTITUTI

ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

№ 5(76) 2026

Журнал основан в 2015 году.
Издается 6 раз в год.

Учредитель:
Научно-исследовательский институт развития цифровых технологий и искусственного интеллекта.

Главный редактор:
Равшанов Н.

Заместители главного редактора:
Арипов М.М., Шадиметов Х.М., Ахмедов Д.Д.

Ответственный секретарь:
Убайдуллаев М.Ш.

Редакционный совет:
Азамов А.А., Алоев Р.Д., Амиргалиев Е.Н. (Казахстан), Арушанов М.Л., Абдуллозода С.Ф. (Таджикистан), Боборахимов Б.И., Бурнашев В.Ф., Джумаёзов У.З., Загребина С.А. (Россия), Задорин А.И. (Россия), Игнатьев Н.А., Ильин В.П. (Россия), Иманкулов Т.С. (Казахстан), Исмагилов И.И. (Россия), Кабанихин С.И. (Россия), Курбонов Н.М., Маматов Н.С., Мирзаев Н.М., Мурадов Ф.А., Назирова Э.Ш., Нормуродов Ч.Б., Нуралиев Ф.А., Нуралиев Ф.М., Опанасенко В.Н. (Украина), Расулмухамедов М.М., Садуллаева Ш.А., Старовойтов В.В. (Беларусь), Хаётов А.Р., Халджигитов А., Хамдамов Р.Х., Хужаев И.К., Хужаеров Б.Х., Эшмаматова Д.Б., Дустмуродова Ш.Ж., Чье Ен Ун (Россия), Шабозов М.Ш. (Таджикистан), Dimov I. (Болгария), Li Y. (США), Mascagni M. (США), Min A. (Германия), Singh M. (Южная Корея).

Журнал зарегистрирован в Агентстве информации и массовых коммуникаций при Администрации Президента Республики Узбекистан.
Свидетельство №0856 от 5 августа 2015 года.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

При перепечатке материалов ссылка на журнал обязательна.
За точность фактов и достоверность информации ответственность несут авторы.

Адрес редакции:
100125, г. Ташкент, м-в. Буз-2, 17А.
Тел.: +(998) 71 263-41-98.
Э-почта: journals@airi.uz.
Веб-сайт: https://journals.airi.uz.

Дизайн и вёрстка:
Шарипов Х.Д.

Отпечатано в типографии НИИ РЦТИИ.
Подписано в печать 28.10.2026 г.
Формат 60x84 1/8. Заказ № 6. Тираж 100 экз.

PROBLEMS OF COMPUTATIONAL AND APPLIED MATHEMATICS

No. 5(76) 2026

The journal was established in 2015.
6 issues are published per year.

Founder:
Digital Technologies and Artificial Intelligence Development Research Institute.

Editor-in-Chief:
Ravshanov N.

Deputy Editors:
Aripov M.M., Shadimetov Kh.M., Akhmedov D.D.

Executive Secretary:
Ubaydullaev M.Sh.

Editorial Council:
Azamov A.A., Aloev R.D., Amirgaliev E.N. (Kazakhstan), Arushanov M.L., Abdullozoda S.F. (Tajikistan), Boborakhimov B.I., Burnashev V.F., Djumayozov U.Z., Zagrebina S.A. (Russia), Zadorin A.I. (Russia), Ignatiev N.A., Ilyin V.P. (Russia), Imankulov T.S. (Kazakhstan), Ismagilov I.I. (Russia), Kabanikhin S.I. (Russia), Kurbonov N.M., Mamatov N.S., Mirzaev N.M., Muradov F.A., Nazirova E.Sh., Normurodov Ch.B., Nuraliev F.A., Nuraliev F.M., Opanasenko V.N. (Ukraine), Sadullaeva Sh.A., Starovoitov V.V. (Belarus), Khayotov A.R., Khaldjigitov A., Khamdamov R.Kh., Khujaev I.K., Khujayorov B.Kh., Eshmamatova D.B., Dustmurodova Sh.J., Chye En Un (Russia), Shabozov M.Sh. (Tajikistan), Dimov I. (Bulgaria), Li Y. (USA), Mascagni M. (USA), Min A. (Germany), Singh M. (South Korea).

The journal is registered by Agency of Information and Mass Communications under the Administration of the President of the Republic of Uzbekistan.
Certificate of Registration No. 0856 of 5 August 2015.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

At a reprint of materials the reference to the journal is obligatory.
Authors are responsible for the accuracy of the facts and reliability of the information.

Address:
100125, Tashkent, Buz-2, 17A.
Tel.: +(998) 71 263-41-98.
E-mail: journals@airi.uz.
Web-site: https://journals.airi.uz.

Layout design:
Sharipov Kh.D.

DTAIRI printing office.
Signed for print 28.10.2026
Format 60x84 1/8. Order No. 6. Print run of 100 copies.

Содержание

Расулов А.С., Раимова Г.М., Рахматов М.Й.
Метод Монте-Карло для решения нелинейного кинетического уравнения Больцмана 8

Эшкулов М.У., Хамдамов Р.Х.
Многокритериальная оптимизация системы подъёма воды с использованием солнечных фотоэлектрических панелей 22

Абдуллаев К.Д.
Принцип разделения классов и зависимость результатов кластеризации от меры расстояния 33

Рамазонов Ш.Ш.
Селекция объектов по отношениям с ближайшими объектами противоположного класса и сохранение локальной структуры обучающей выборки . . 46

Исомиддинов А.И., Акбарова А.А., Акбаров Б.Х.
Марковская переключающаяся векторная авторегрессия для скрытых гликемических режимов в реальных данных самоконтроля диабета: оценка на отложенной выборке 60

Ким К.К.
Сравнительный анализ XAI-подходов для обнаружения синтетической речи 72

Эшмаматова Д.Б., Солижанова К.А.
Пфаффианова структура и спектральная динамика дискретного оператора Лотки–Вольтерры: подход к интеграции геологических данных 95

Джумаёзов У.З., Абдирахмонова М.Н., Усмонов Л.С.
Численное решение трёхмерной связанной динамической задачи термоупругости в деформациях 119

Бакаев И.И., Ахмеджанова Д.А.
α-справедливая оптимизационная модель и численные алгоритмы выбора общей лексической нормы тюркских языков 137

Равшанов Н., Камолиддинова Ф., Lu Y.
Моделирование переноса и диффузии загрязняющих веществ в пограничном слое атмосферы с учётом орографии местности и метеорологических факторов 148

Contents

Rasulov A.S., Raimova G.M., Rakhmatov M.Y.
Monte Carlo solution of the nonlinear kinetic Boltzmann equation 8
Eshkulov M.U., Khamdamov R.Kh.
Multi-criteria optimization of solar photovoltaic-based water lifting systems . . . 22
Abdullaev K.D.
The principle of class separation and the dependence of clustering results on the distance measure 33
Ramazonov Sh.Sh.
Instance selection based on nearest-enemy relations and preservation of the local structure of a training sample 46
Isomiddinov A.I., Akbarova A.A., Akbarov B.X.
Markov-switching vector autoregression for latent glycaemic regimes in real-world diabetes self-monitoring data: an out-of-sample evaluation 60
Kim K.K.
Comparative analysis of XAI approaches for synthetic speech detection 72
Eshmamatova D.B., Solijanova K.A.
Pfaffian structure and spectral dynamics of a discrete Lotka–Volterra operator: a framework for geological evidence integration 95
Djumayozov U.Z., Abdirakhmonova M.N., Usmonov L.S.
Numerical solution of a three-dimensional coupled dynamic thermoelasticity problem in terms of strains 119
Bakayev I.I., Akhmedjanova D.A.
An α-fair optimization model and numerical algorithms for selecting a common lexical norm of Turkic languages 137
Ravshanov N., Kamoliddinova F., Lu Y.
Modeling pollutant transport and diffusion in the atmospheric boundary layer considering terrain orography and meteorological factors 148