

УДК 519.6+004.9:504.064

## СОПРЯЖЕННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОПТИМАЛЬНОГО РАЗМЕЩЕНИЯ ПРОМЫШЛЕННЫХ ОБЪЕКТОВ

<sup>1\*</sup> *Равшанов Н.*, <sup>1</sup> *Набиева И.*, <sup>2</sup> *Жапаров Б.Т.*

\*ravshanzade-09@mail.ru

<sup>1</sup> Научно-исследовательский институт развития цифровых технологий и искусственного интеллекта,  
100125, Узбекистан, Ташкент, м-в. Буз-2, 17А;<sup>2</sup> Наманганский инженерно-строительный институт,  
160103, Узбекистан, Наманган, ул. Ислама Каримова, 12.

Связанная сопряженная задача заключается в том, чтобы обеспечить оптимальное размещение промышленных объектов по всему региону с учетом глобальных и локальных санитарных норм. Основными параметрами распространения вредных веществ являются эрозия почвы, физические и механические свойства выброшенных загрязнителей из промышленных объектов и климатические условия региона в целом. При решении задач, связанных с санитарно-гигиеническими нормами, оптимальное размещение промышленных объектов может быть реализовано путем интеграции сопряженных задач, преимущество которых заключается в экономии вычислительного ресурса и времени расчетов. Для решения этой задачи был разработан консервативный математический алгоритм высокого уровня точности по временным и пространственным переменным.

**Ключевые слова:** математическая модель, конечно-разностный метод, атмосфера, распространение вредных выбросов.

**Цитирование:** *Равшанов Н., Набиева И., Жапаров Б.Т.* Сопряженная задача для оптимального размещения промышленных объектов // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2024. – № 3(57). – С. 91-105.

### 1 Введение

Проблема загрязнения атмосферы становится все более актуальной в современном мире. Предлагаемые адекватные математические модели объекта исследования имеют решающее значение для прогнозирования и контроля распространения опасных веществ в атмосфере. В нынешнее время они являются эффективным инструментом для анализа, мониторинга и прогнозирования концентрации вредных веществ в атмосфере который существенно влияют на здоровье человека и флору-фауну окружающей среды и она является настоящим временем актуальной проблемой, источником которой являются объектов производства (заводы, фабрики, нефти и газодобывающие объекты, транспортные системы, тепловые станции и т.д.).

Анализ полученных данных показал, что на загрязнение воздуха в Среднеазиатских регионах в основном влияют экстремальные погодные условия, которые за собой влекут эрозию и засоление почвы в следствия чего образуется пыльные бури.

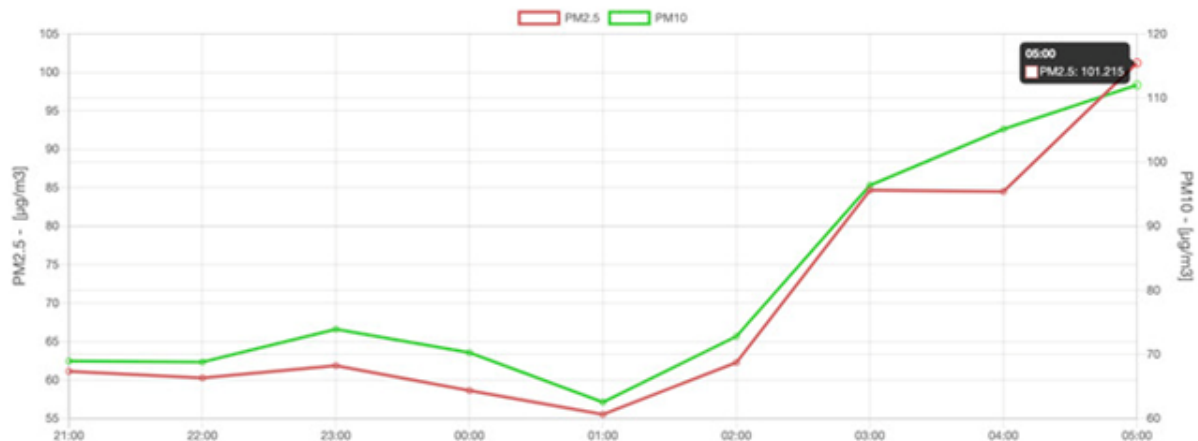
К причинам загрязнения воздуха в Ташкенте относятся:

- потеря зелени – беспорядочная вырубка деревьев и кустарников местами вызывает экологический дисбаланс. Например, за время объявленного моратория из-за незаконной вырубки около 49 тысяч, в том числе около 10,5 тысяч ценных деревьев, природе был нанесен ущерб на сумму около 45 миллиардов сумов. Также низким остается процент озеленения автомагистралей и городских территорий, жилых массивов;

- хаос в строительстве – строительные работы ведутся быстрыми темпами без утверждения генеральных планов развития города и не проводится экологическая экспертиза и строительство высотных зданий без соблюдения расстояния между ними блокирует циркуляцию ветра, и в воздух выбрасывается больше бытовых отходов;
- роста объема углекислых газов, выбрасываемые транспортными системами в следствии использования не качественных горючих топлив и роста средств передвижения. В 2021 году автомобилей было 3,14 млн., а в 2023 году их количество составило 4,6 млн, рост на 32%. В среднем по городу Ташкенту за один день передвигается 730 000 автомобилей, кроме того, из регионов въезжает от 160 000 до 300 000 автомобилей;
- неразвитость общественного транспорта и отсутствие инфраструктуры – не сократилось количество пересечений транспортных и пешеходных потоков в городах, не снизился уровень загрузки автомобильных дорог, не сократился цикл регулирования транспортных потоков. В результате количество загрязняющих веществ, выбрасываемых автомобилями, увеличивается;
- увеличение количества бытовых отходов в промышленности – экологический контроль на заводах, цехах и аналогичных производственных предприятиях неудовлетворительный, количество токсичных веществ, выбрасываемых в атмосферу в результате применения старых и неэффективных технологий, достигло опасного уровня;
- увеличение использования угля – в стране наблюдается тенденция к увеличению использования углеводородов, в том числе угля. В частности, в 2019 году было использовано 3,9 млн тонн угольного топлива, в 2022 году – 5,3 млн тонн, по итогам текущего года – 6,7 млн тонн. Это, в свою очередь, загрязняет окружающую среду, в том числе атмосферный воздух, почву и водные ресурсы, в процессе добычи, транспортировки и использования угольного топлива, где при сжигании 10 т угля в атмосферном воздухе образуется 220 кг сажи, 360 кг оксида серы II, 64 кг оксида углерода, 16 кг оксида азота II и 2 т зольных отходов;
- увеличение использования мазута – использование мазута в качестве дополнительного топлива существующими тепловыми пунктами для централизованного теплоснабжения населения в осенне-зимний период также приводит к сильному загрязнению атмосферного воздуха. Только в декабре в 9 котельных действующих 6 теплоцентров Ташкента было использовано 3 тыс. тонн мазута;
- отсутствие контроля в охране природы – участились случаи бесконтрольного и бессистемного выпаса скота на охраняемых природных территориях, ненаучное использование подземных вод приводит к разрушению экосистем, усилению деградации больших земельных площадей, их опустыниванию, как следствие, воздействию изменения климата нарастают, возникает опасность для жизни и здоровья людей;
- метеорологические причины – направление и скорость ветра, температура воздуха, солнечная радиация, количество и продолжительность атмосферных осадков, температурные инверсии (слой теплого воздуха, препятствующий вертикальному рассеиванию смешанных частиц) и т. д.;
- географическая причина – особенности местности города Ташкента, т.е. столица окружена горами и расположена глубоко. Из-за того, что ветер не циркулирует, запыленный поток воздуха остается в городе, увлажняется и не уходит естественным путем.

Также в целях снижения негативного воздействия на атмосферу предлагается строго запретить использование угля и мазута, которые являются одними из основных факторов, загрязняющих атмосферу в городах и жилых районах.

По данным IQAir 17 января [1] в этом году по загрязнению атмосферы показывают следующий показатель. Из сообщения Узгидромет следует, что загрязнение воздуха в Ташкенте утром в среду снова достигло «вредного» уровня: на 9:00 содержание мелкодисперсных частиц PM<sub>2,5</sub> в воздухе составило в среднем по городу 119 мкг./м<sup>3</sup>, что превышает рекомендации Всемирной организации здравоохранения в 23,8 раза (5 мкг./м<sup>3</sup>).



**Рис. 1** Данные автоматической станции мониторинга качества воздуха на территории Узгидромета в Юнусабадском районе



**Рис. 2** Данные станции на площади Дружбы народов в Чиланзарском районе

Компьютерная гидродинамика — это инструмент, который помогает нам понять и получить количественную информацию о многих сложных потоках в окружающей среде [2]. В статье в первую очередь представлен обзор предыдущих исследований Set в потоках окружающей среды, включающих как водные, так и воздушные системы. Как отмечают авторы статьи при моделировании процесса переноса и диффузии вредных веществ в атмосфере основными факторами являются скорости переноса воздушной массы атмосферы в приземном слое. Для турбулентного распространения

аэрозольных частиц в атмосфере существенным фактором является число Шмита, где он входит при вычислении турбулентного движение атмосферы.

Для оценки загрязнения атмосферного воздуха традиционно используются данные о высотах труб, температуре, скорости, объеме и специфических свойствах выбрасываемого аэрозоля, а также поправки на преобладающее направление ветра и другие изменения. Это, как правило, средние метеоусловия и один источник, что делает эту методику очень эффективной. Распространение загрязняющих веществ (ЗВ) зависит от условий эмиссии, переноса и турбулентного смешивания. Как было сказано в работе [3] модель Эйлера была использована для имитации начальной стадии формирования и подъема пылевых облаков, а модель Навье-Стокса использовалась для имитации теплового подъема и смешивания с окружающим воздухом для вычисления рассеяния пыли в ветровом потоке.

В статье [4] компьютерное моделирование гидродинамики с тремя моделями изотропной турбулентности — стандартной  $k-\varepsilon$ , реализуемой  $k-\varepsilon$  и  $k-\omega$  — моделями — было выполнено для исследования взаимосвязи между теплопередачей и поведением турбулентности после однотрубного смоделированного сепаратора. Количественно предсказанный коэффициент теплопередачи, интенсивность вторичного потока и интенсивность турбулентности с помощью модели  $k-\omega$  показали лучшее согласие с экспериментальными данными из предыдущих исследований.

В работе [5] анализ загрязнения атмосферы при пылении хвостохранилища АНОФ-2 (Мурманская область, г. Апатиты) проведен с привлечением модели вычислительной гидродинамики (CFD, computational fluid dynamics) — моделирования, выполненного с помощью программы Comsol. Для вычисления аэродинамических характеристик применялось приближение несжимаемой жидкости с привлечением стандартной  $(k-\varepsilon)$  — модели турбулентности. Процесс распространения мелкодисперсной пыли промоделирован посредством численного решения конвективно-диффузионного уравнения переноса примеси с учетом скорости оседания. Численные эксперименты выполнены при вариации скорости ветрового потока 5–23 м/с и площади пыления от 2 до 10 га при случайном выборе из 20 дискретных участков.

Получены распределения динамической скорости для конкретных участков пыления, поинтервальные и суммарные пространственные распределения пылевых загрязнений (частицы пыли диаметром 0–70 мкм с шагом 10 мкм). Отмечены особенности влияния на уровни загрязнения атмосферы конкретных районов г. Апатиты в зависимости от размещения пылящих участков по поверхности пляжа хвостохранилища. Проанализированы и обобщены до функциональных зависимостей расчетные уровни загрязнения атмосферы в центре г. Апатиты, осредненные по количеству сочетаний участков пыления. Обобщенная функциональная зависимость позволяет прогнозировать концентрацию пыли в г. Апатиты в зависимости от площади пыления случайным образом выбранных дискретных участков на поверхности хвостохранилища и скорости ветрового потока, а также определять критическую площадь пыления, при которой уровень загрязнения атмосферы достигает предельно допустимых концентраций в зависимости от скорости ветрового потока.

В работе [6] была разработана CFD модель для описания рассеивания пыли, образующейся при взрывных работах в известняковых карьерах. Это сложное явление, которое было изучено с использованием нескольких цифровых видеозаписей взрывов и полевых измерений концентрации пыли с помощью пылеуловителей, рассеивающих свет. В статье представлены результаты, полученные с помощью модельного моделирования, при котором физические барьеры устанавливаются вблизи места проведе-

ния взрывных работ с целью уменьшения рассеивания пылевого облака и связанного с этим воздействия на окружающую среду.

Как сказано в статье [7] загрязнение приземного воздуха вблизи карьеров можно объяснить несколькими факторами. Одним из них является выбросы пылевых частиц в атмосферу в результате разрушения горных пород при производстве взрывных работ на карьерах по добыче руды. Чтобы рассчитать рассеяние пыли в ветровом потоке, необходимо получить данные о концентрации пыли в облаке. Эти данные крайне сложно получить экспериментально в результате крупномасштабных взрывов. В работе использовали модель Эйлера для имитации начальной стадии формирования и подъема пылевых облаков, а также модель Навье-Стокса для имитации теплового подъема и смешивания с окружающим воздухом.

В работе [8] используют дифференциальные уравнения в частных производных и соответствующие им начальные и граничные условия для описания математической модели распространения вредных веществ в пограничном слое атмосферы, учитываются расчеты давления, теплового потока и движения газа и конденсата. Гидродинамические уравнения Навье-Стокса использованы для определения скоростей воздушных масс в атмосфере в трех направлениях  $u$ ,  $v$  и  $w$ , а для определения плотности веществ, выбрасываемых в атмосферу использован закон сохранения массы.

В статье [9] при исследовании переноса загрязняющих веществ в атмосфере используется численное моделирование. Основной целью данного исследования была разработка алгоритма математической модели, основанной на уравнении распределения примесей в турбулентной среде. Уникальной особенностью исследования является использование метода покоординатного расщепления с нормализацией и параметризацией условий. Нахождение подынтегральных функций в алгоритме расчета позволяет получить устойчивый вычислительный алгоритм решения задачи распространения мелкодисперсных взвешенных частиц. Модель оснащена удобным программным обеспечением, обеспечивающим время расчета и графических визуализации – до 20 минут на компьютерах средней мощности. Полученная математическая модель может быть использована в системах прогнозирования техногенной нагрузки на окружающую среду для оперативного решения экологических проблем.

В статье [10] рассчитаны выбросы CO, NO, NO<sub>2</sub>, SO<sub>2</sub> и PM<sub>10</sub> от городских источников, а также их пространственное распределение и временные изменения, согласно многолетним наблюдениям со станций сети Мосэкомониторинга. Таким образом, матрица выбросов была использована для оценки качества воздуха в мегаполисе Москва с помощью модели химического транспорта SILAM.

В исследовании [11] рассмотрены влияние глобального источника пыли с помощью модели Годдард, используется 8-километровый нормализованный разностный индекс растительности, наблюдаемый с помощью усовершенствованного спутника-радиометра очень высокого разрешения, чтобы определить голость поверхности. Результаты используются для изучения изменений оголенности поверхности в 22 регионах по всему миру с источниками пыли в течение определенного периода времени.

В работе [12] предлагается метод, основанный на вычислительную гидродинамику, для определения распределения загрязняющих веществ в приземном слое атмосферы. В качестве примера расчета распространения загрязняющих веществ в работе рассмотрен расчет выбросов ацетона из отдельно стоящего источника, расположенного в непосредственной близости от здания. Результаты расчетов наглядно демонстрируют сложность распределения полей концентраций в непосредственной близости от зданий и в условиях плотной застройки и сложного рельефа местности.

В статье [13] модели воздушного потока и поведение реактивных загрязняющих веществ в течение более 24 часов в реалистичном городском каньоне в городе Осака, Япония, были проведены с использованием модели вычислительной гидродинамики (CFD computational fluid dynamics) в сочетании с моделью химической реакции (CBM-IV chemical reaction model), где показала, что концентрация загрязняющих веществ в городском каньоне в значительной степени зависит от придорожных выбросов и структуры воздушного потока, которые, в свою очередь, на это сильно влияет неоднородность городской планировки.

В статье [14] представлен новый метод разработки математической модели и наблюдения за загрязнением приземного слоя атмосферы горнопромышленного региона. Предложенная модельная система, адаптируемая к различным пространственным масштабам, позволяет исследовать влияние различных переменных, влияющие на движение воздуха и уровни загрязняющих веществ в атмосфере на персональных ЭВМ.

В статье [15] представлена комбинированная упрощенная модель, была разработана для описания распространения вредных примесей и сточных вод при одновременных прорывах промышленных плотин. Новизна модели заключается в том, что она может учитывать влияние как ортотропий среды, в которой фильтруются сточные воды, так и местоположения прорыва в теле плотины на изменчивость релаксации концентрации примесей в системе водохранилищ после прорыва плотины. Численный эксперимент показал, что разработанная модель, позволяющая наблюдать временную динамику и снижение загрязнения в системе резервуаров во время сброса сточных вод, хорошо адаптирована.

Эффективный инструмент для преобразования результатов, полученных с использованием комплексного подхода вычислительной гидродинамики и вычислительной динамики реакций, был разработан в статье авторов [16–18]. Инструмент преобразования и визуализация Google Planet Earth пересматривают и интегрируют наиболее популярные методы визуализации. Смог, вызванный выбросом тяжелых транспортных средств в Роттердаме, Нидерланды, показывает потенциальные возможности этого инструмента.

Результаты показали, что Google Earth может предоставлять удобное для пользователя и эффективное с точки зрения вычислений представление данных. Функция, разработанная авторами, может быть чрезвычайно полезна для отображения загрязнения на уровне улиц, что особенно важно для жителей городов.

В статьях [19, 20] предлагается динамическая математическая модель трехмерного тепломассопереноса в производственной среде с активной вентиляцией и источниками загрязнения, что в отличие от существующих моделей распространения производственных вредностей позволяет учитывать колебания газо-воздушных потоков.

На основе анализа выше указанных литературных источников основной целью статьи является использование математического инструмента (модель, численный алгоритм, программное средство), решение задачи оптимального размещения промышленных объектов в регионе, где будут учитываться погодноклиматические факторы рассматриваемого региона, коэффициент диффузии и турбулентное перемешивание по вертикали, коэффициент взаимодействия с поверхностью земли, коэффициент характеризующий захват частиц элементами растительности и других сопутствующих факторов.

## 2 Постановка задачи

Сопряженная задача переноса и диффузии субстанции в атмосфере по отношению к основной описывается с помощью следующего дифференциального уравнения в частных производных с соответствующими начальным и граничными условиями [21, 22]:

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial \theta^*(x, y, z, t)}{\partial t} - u \frac{\partial \theta^*(x, y, z, t)}{\partial x} - v \frac{\partial \theta^*(x, y, z, t)}{\partial y} - \\ & - (w - w_g) \frac{\partial \theta^*(x, y, z, t)}{\partial z} + \theta^*(\sigma + \alpha) = \\ & = \frac{\partial}{\partial z} \left( \varkappa \frac{\partial \theta^*(x, y, z, t)}{\partial z} \right) + \mu \left( \frac{\partial^2 \theta^*(x, y, z, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta^*(x, y, z, t)}{\partial y^2} \right) + P(x, y, z, t); \end{aligned} \quad (1)$$

$$\theta^*(x, y, z, t) = \theta_T^*(x, y, z, ); \quad (2)$$

$$-\mu \frac{\partial \theta^*}{\partial x} \Big|_{x=0} = \gamma (\theta_t - \theta^*); \quad \mu \frac{\partial \theta^*}{\partial x} \Big|_{x=L_x} = \gamma (\theta_t - \theta^*); \quad (3)$$

$$-\mu \frac{\partial \theta^*}{\partial y} \Big|_{y=0} = \gamma (\theta_t - \theta^*); \quad \mu \frac{\partial \theta^*}{\partial y} \Big|_{y=L_y} = \lambda (\theta_t - \theta^*); \quad (4)$$

$$\varkappa \frac{\partial \theta^*}{\partial z} \Big|_{z=0} = \beta \cdot \theta^* - F_0(x, y, z); \quad \varkappa \frac{\partial \theta^*}{\partial z} \Big|_{z=H_z} = \gamma (\theta_t - \theta^*). \quad (5)$$

Здесь  $\theta^*$  – концентрация вредных веществ в атмосфере;  $t$  – время;  $x, y, z$  – система координат;  $\sigma$  – коэффициент поглощения вредных веществ в атмосфере;  $\alpha$  – коэффициент, характеризующий захват частиц элементами растительности;  $\beta$  – коэффициент взаимодействия частиц с подстилающей поверхностью;  $\delta$  – функция Дирака;  $\gamma$  – коэффициент массообмена через границы расчета;  $\mu, \varkappa$  – коэффициенты диффузии и турбулентности;  $P$  – мощность источника;

Решение задачи (1) - (5) в принципе не отличается от решения основной задачи, однако время берется в обратном направлении. Начальное значение времени начиная с  $t = T$  и продолжается в сторону убывания  $t$ . Задачу (1) - (5) можно свести к виду, свойственному основным уравнениям, заменой независимой переменной  $t$  на  $\tau = T - t$  и  $u' = -u, v' = -v, w'_\varphi = -(w - w_g)$ , тогда она примет следующий вид:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \theta^*(x, y, z, \tau)}{\partial \tau} + u' \frac{\partial \theta^*(x, y, z, \tau)}{\partial x} + v' \frac{\partial \theta^*(x, y, z, \tau)}{\partial y} + \\ & + w'_\varphi \frac{\partial \theta^*(x, y, z, \tau)}{\partial z} + \theta^*(\sigma + \alpha) = \frac{\partial}{\partial z} \left( \varkappa \frac{\partial \theta^*(x, y, z, \tau)}{\partial z} \right) + \\ & + \mu \left( \frac{\partial^2 \theta^*(x, y, z, \tau)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta^*(x, y, z, \tau)}{\partial y^2} \right) + P(x, y, z, \tau); \end{aligned} \quad (6)$$

$$\theta^*(x, y, z, \tau) = g^*(x, y, z, 0); \quad \text{при } \tau = 0; \quad (7)$$

$$-\mu \frac{\partial \theta^*}{\partial x} \Big|_{x=0} = \gamma (\theta_\tau - \theta^*); \quad \mu \frac{\partial \theta^*}{\partial x} \Big|_{x=L_x} = \gamma (\theta_\tau - \theta^*); \quad (8)$$

$$-\mu \frac{\partial \theta^*}{\partial y} \Big|_{y=0} = \gamma (\theta_\tau - \theta^*); \quad \mu \frac{\partial \theta^*}{\partial y} \Big|_{y=L_y} = \gamma (\theta_\tau - \theta^*); \quad (9)$$

$$-\varkappa \frac{\partial \theta^*}{\partial z} \Big|_{z=0} = (\beta \cdot \theta^* - F_0(x, y, z)); \varkappa \frac{\partial \theta^*}{\partial z} \Big|_{z=H_z} = \gamma (\theta_\tau - \theta^*). \quad (10)$$

Используя решение основной задачи в работе [23, 24]  $\theta$  и полученные численные решение задача (6)-(10) можно вычислить требуемый функционал  $J_\xi$ , связанный с оптимизационной задачей по размещением и проектированием промышленных объектов производства в мегаполисах и в промышленных регионах.

Рассмотрим функционал в виде

$$J_\xi = \int_0^T dt \int_{\Omega_\xi} P_\xi \theta d\Omega,$$

который характеризует дозу вредных вещества, выпавшего на поверхность земли ( $z = 0$ ) в области экологической зоны  $\Omega_\xi$ .

По заданной  $P(x, y, z, t)$  и  $\theta(x, y, z, t)$  можно вычислить количества выпавшего аэрозоля на поверхности земли или в области  $\Omega_\xi$ .

Задача состоит не только в определении выпавшего вредного вещества на поверхности земли, а найти такую совокупность планируемых выбросов  $F_i$ , которую обеспечивало бы среднегодовые предельно допустимые дозы аэрозольного загрязнения

$$J_\xi \prec C_\xi \xi = 1, 2, 3, \dots, N.$$

При минимальных экономических затратах на технологическую реконструкцию предприятий, обеспечивающую установленный объем выпуска продукции при данном уменьшении выбросов.

В данной постановке кроме условия на ограничение функционала необходимо ввести в рассмотрение минимизирующий функционал в виде

$$I = \sum_{i=1}^N \varsigma_i (\bar{F}_i - F_i),$$

где  $\bar{F}_i$  – исходная,  $F_i$  – планируемая мощность выбросов,  $\varsigma_i$  – коэффициент определяющий капитальные вложения в технологию, обеспечивающую выпуск того же объема продукции выбросов. Тогда функционал представляет полные затраты, необходимые для улучшения технологии всех предприятий при переходе от выбросов  $\bar{F}_i$  к планируемым выбросом  $F_i$ .

В результате приходим к задаче о нахождении таких выбросов  $F_i$ , что бы выполнялись условия

$$I = \sum_{i=1}^N \varsigma_i (\bar{F}_i - F_i) = \min,$$

$$J_\xi \leq C_\xi, \xi = 1, 2, 3, \dots, N.$$

Из постановки задачи видно, что в отличии от работы Г.И. Марчука [25] здесь во-первых рассматривается трехмерная постановка, поглощение частиц в зеленом покрове, а также осуществляется учет притока и оттока субстанции через границы рассматриваемой области; во-вторых источниками выброса вредных веществ в атмосфере являются промышленные объекты производства, а кроме того при неустойчивой стратификации ветра и низкой влажности подстилающая поверхность земли также становится источником выброса частиц.

### 3 Метод решения

Теперь будем останавливаться на методы решения поставленной сопряженной задачи (6)-(10). В связи с тем, что дифференциальные уравнения в частных производных также используются для описания новой задачи (6) - (10), получить аналитическое решение этой задачи представляет собой большую проблему. Чтобы решить эту задачу, используя конечно-разностный метод, мы заменяем  $D = (0 < x < a, 0 < y < b, 0 < z < H)$  непрерывные изменения ожидаемых прогнозируемых переменных на сеточную сетку, в которой  $x, y$  являются равномерными сетками, а по  $z$  - неравномерными сетками.

Для решения задачи (6) - (10) применяем конечно-разностный метод, заменяя дифференциальные операторы на разностные следующем виде, сначала по оси

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{\theta_{i,j,k}^{n+1/3} - \theta_{i,j,k}^n}{\Delta\tau/3} + \frac{1}{2} \frac{\theta_{i+1,j,k}^{n+1/3} - \theta_{i+1,j,k}^n}{\Delta\tau/3} + \left( \frac{u' - |u'|}{4} \right) \frac{\theta_{i+1,j,k}^{n+1/3} - \theta_{i,j,k}^{n+1/3}}{\Delta x} + \\
& + \left( \frac{u' - |u'|}{4} \right) \frac{\theta_{i+1,j,k}^n - \theta_{i,j,k}^n}{\Delta x} + \left( \frac{u' + |u'|}{4} \right) \frac{\theta_{i,j,k}^{n+1/3} - \theta_{i-1,j,k}^{n+1/3}}{\Delta x} + \\
& + \left( \frac{u' + |u'|}{4} \right) \frac{\theta_{i,j,k}^n - \theta_{i-1,j,k}^n}{\Delta x} + \left( \frac{v' - |v'|}{2} \right) \frac{\theta_{i,j+1,k}^n - \theta_{i,j,k}^n}{\Delta y} + \\
& + \left( \frac{v' + |v'|}{2} \right) \frac{\theta_{i,j,k}^n - \theta_{i,j-1,k}^n}{\Delta y} + \left( \frac{w'_\varphi - |w'_\varphi|}{2} \right) \frac{\theta_{i,j,k+1}^n - \theta_{i,j,k}^n}{\Delta z} + \\
& + \left( \frac{w'_\varphi + |w'_\varphi|}{2} \right) \frac{\theta_{i,j,k}^n - \theta_{i,j,k-1}^n}{\Delta z} + \sigma\theta_{i,j,k}^{n+1/3} + \alpha\theta_{i,j,k}^{n+1/3} - \\
& - \frac{\mu}{\Delta x^2} \left( \theta_{i+1,j,k}^{n+1/3} - 2\theta_{i,j,k}^{n+1/3} + \theta_{i-1,j,k}^{n+1/3} \right) - \frac{\mu}{\Delta y^2} \left( \theta_{i,j+1,k}^n - 2\theta_{i,j,k}^n + \theta_{i,j-1,k}^n \right) + \\
& - \frac{1}{\Delta z^2} \left( \varkappa_{k+0,5}\theta_{i,j,k+1}^n - (\varkappa_{k+0,5} + \varkappa_{k-0,5})\theta_{i,j,k}^n + \varkappa_{k-0,5}\theta_{i,j,k-1}^n \right) = \frac{1}{3}P
\end{aligned} \tag{11}$$

или

$$\begin{aligned}
& \frac{3}{2\Delta\tau}\theta_{i,j,k}^{n+1/3} - \frac{3}{2\Delta\tau}\theta_{i,j,k}^n + \frac{3}{2\Delta\tau}\theta_{i+1,j,k}^{n+1/3} - \frac{3}{2\Delta\tau}\theta_{i+1,j,k}^n + \\
& + \frac{u' - |u'|}{4\Delta x}\theta_{i+1,j,k}^{n+1/3} - \frac{u' - |u'|}{4\Delta x}\theta_{i,j,k}^{n+1/3} + \frac{u' - |u'|}{4\Delta x}\theta_{i+1,j,k}^n - \frac{u' - |u'|}{4\Delta x}\theta_{i,j,k}^n + \\
& + \frac{u' + |u'|}{4\Delta x}\theta_{i,j,k}^{n+1/3} - \frac{u' + |u'|}{4\Delta x}\theta_{i-1,j,k}^{n+1/3} + \frac{u' + |u'|}{4\Delta x}\theta_{i,j,k}^n - \frac{u' + |u'|}{4\Delta x}\theta_{i-1,j,k}^n + \\
& + \frac{v' - |v'|}{2\Delta y}\theta_{i,j+1,k}^n - \frac{v' - |v'|}{2\Delta y}\theta_{i,j,k}^n + \frac{v' + |v'|}{2\Delta y}\theta_{i,j,k}^n - \frac{v' + |v'|}{2\Delta y}\theta_{i,j-1,k}^n + \\
& + \frac{w'_\varphi - |w'_\varphi|}{2\Delta z}\theta_{i,j,k+1}^n - \frac{w'_\varphi - |w'_\varphi|}{2\Delta z}\theta_{i,j,k}^n + \\
& + \frac{w'_\varphi + |w'_\varphi|}{2\Delta z}\theta_{i,j,k}^n - \frac{w'_\varphi + |w'_\varphi|}{2\Delta z}\theta_{i,j,k-1}^n + \sigma\theta_{i,j,k}^{n+1/3} + \alpha\theta_{i,j,k}^{n+1/3} = \\
& = \frac{\mu}{\Delta x^2}\theta_{i+1,j,k}^{n+1/3} - \frac{2\mu}{\Delta x^2}\theta_{i,j,k}^{n+1/3} + \frac{\mu}{\Delta x^2}\theta_{i-1,j,k}^{n+1/3} + \frac{\mu}{\Delta y^2}\theta_{i,j+1,k}^n - \frac{2\mu}{\Delta y^2}\theta_{i,j,k}^n + \\
& + \frac{\mu}{\Delta y^2}\theta_{i,j-1,k}^n + \frac{\varkappa_{k+0,5}}{\Delta z^2}\theta_{i,j,k+1}^n - \frac{\varkappa_{k+0,5} + \varkappa_{k-0,5}}{\Delta z^2}\theta_{i,j,k}^n + \frac{\varkappa_{k-0,5}}{\Delta z^2}\theta_{i,j,k-1}^n + \frac{1}{3}P.
\end{aligned} \tag{12}$$

Группируя члены уравнения (12) получим:

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{\mu}{\Delta x^2} + \frac{u' + |u'|}{4\Delta x} \right) \theta_{i-1,j,k}^{n+1/3} - \left( \frac{2\mu}{\Delta x^2} + \frac{|u'|}{2\Delta x} + \frac{3}{2\Delta\tau} + \sigma + \alpha \right) \theta_{i,j,k}^{n+1/3} + \\
& \quad + \left( \frac{\mu}{\Delta x^2} - \frac{u' - |u'|}{4\Delta x} - \frac{3}{2\Delta\tau} \right) \theta_{i+1,j,k}^{n+1/3} = \\
& = - \left( \left( \frac{3}{2\Delta\tau} - \frac{2\mu}{\Delta y^2} - \frac{\varkappa_{k+0,5} + \varkappa_{k-0,5}}{\Delta z^2} - \frac{|u'|}{2\Delta x} - \frac{|v'|}{\Delta y} - \frac{|w'_\varphi|}{\Delta z} \right) \theta_{i,j,k}^n + \right. \\
& \quad \left. + \left( \frac{3}{2\Delta\tau} - \frac{u' - |u'|}{4\Delta x} \right) \theta_{i+1,j,k}^n + \right. \\
& + \frac{u' + |u'|}{4\Delta x} \theta_{1,i-1,j,k}^n + \left( \frac{\mu}{\Delta y^2} + \frac{v' + |v'|}{2\Delta y} \right) \theta_{i,j-1,k}^n + \left( \frac{\mu}{\Delta y^2} - \frac{v' - |v'|}{2\Delta y} \right) \theta_{i,j+1,k}^n + \\
& \quad \left. + \left( \frac{w'_\varphi + |w'_\varphi|}{2\Delta z} + \frac{\varkappa_{k-0,5}}{\Delta z^2} \right) \theta_{i,j,k-1}^n + \left( \frac{\varkappa_{k+0,5}}{\Delta z^2} - \frac{w'_\varphi - |w'_\varphi|}{2\Delta z} \right) \theta_{i,j,k+1}^n + \frac{1}{3}P \right). \tag{13}
\end{aligned}$$

Затем для выражений в скобках введем обозначения и получим трёх диагональное алгебраическое уравнение

$$a_{i,j,k} \theta_{i-1,j,k}^{n+1/3} - b_{i,j,k} \theta_{i,j,k}^{n+1/3} + c_{i,j,k} \theta_{i+1,j,k}^{n+1/3} = -d_{i,j,k}, \tag{14}$$

где

$$\begin{aligned}
a_{i,j,j} &= \frac{\mu}{\Delta x^2} + \frac{u' + |u'|}{4\Delta x}; \\
b_{i,j,j} &= \frac{2\mu}{\Delta x^2} + \frac{|u'|}{2\Delta x} + \frac{3}{2\Delta\tau} + \sigma + \alpha; \quad c_{i,j,j} = \frac{\mu}{\Delta x^2} - \frac{u' - |u'|}{4\Delta x} - \frac{3}{2\Delta\tau}; \\
d_{i,j,j} &= \left( \frac{3}{2\Delta\tau} - \frac{2\mu}{\Delta y^2} - \frac{\varkappa_{k+0,5} + \varkappa_{k-0,5}}{\Delta z^2} - \frac{|u'|}{2\Delta x} - \frac{|v'|}{\Delta y} - \frac{|w'_\varphi|}{\Delta z} \right) \theta_{i,j,k}^n + \\
& \quad + \left( \frac{3}{2\Delta\tau} - \frac{u' - |u'|}{4\Delta x} \right) \theta_{i+1,j,k}^n + \\
& + \frac{u' + |u'|}{4\Delta x} \theta_{1,i-1,j,k}^n + \left( \frac{\mu}{\Delta y^2} + \frac{v' + |v'|}{2\Delta y} \right) \theta_{i,j-1,k}^n + \left( \frac{\mu}{\Delta y^2} - \frac{v' - |v'|}{2\Delta y} \right) \theta_{i,j+1,k}^n + \\
& \quad + \left( \frac{w'_\varphi + |w'_\varphi|}{2\Delta z} + \frac{\varkappa_{k-0,5}}{\Delta z^2} \right) \theta_{i,j,k-1}^n + \left( \frac{\varkappa_{k+0,5}}{\Delta z^2} - \frac{w'_\varphi - |w'_\varphi|}{2\Delta z} \right) \theta_{i,j,k+1}^n + \frac{1}{3}P.
\end{aligned}$$

Далее, граничное условие (8) при  $x = 0$  аппроксимируем по  $Ox$  со вторым порядком точности и получим

$$-\mu \frac{-3\theta_{0,j,k}^{*n+1/3} + 4\theta_{1,j,k}^{*n+1/3} - \theta_{2,j,k}^{*n+1/3}}{2\Delta x} = \gamma\theta_\tau - \gamma\theta_{0,j,k}^{*n+1/3}. \tag{15}$$

Из соотношения (15) воспользовавшись методом прогонки находим значения коэффициентов прогонки  $\alpha_{0,j,k}$  и  $\beta_{0,j,k}$  следующим способом:

$$\alpha_{0,j,k} = \frac{(4c_{1,j,k} - b_{1,j,k})\mu}{(3c_{1,j,k} - a_{1,j,k})\mu + 2\Delta x\gamma}; \quad \beta_{0,j,k} = \frac{d_{1,j,k}\mu + 2\Delta x\gamma c_{1,j,k}\theta_t}{(3c_{1,j,k} - a_{1,j,k})\mu + 2\Delta x\gamma}.$$

Аналогично, аппроксимируем граничное условие (8) по направлению  $Ox$  при  $x = L_x$  на конечно-разностную имеем

$$\mu \frac{\theta_{N-2,j,k}^{*n+1/3} - 4\theta_{N-1,j,k}^{*n+1/3} + 3\theta_{N,j,k}^{*n+1/3}}{2\Delta x} = \gamma\theta_t - \gamma\theta_{N,j,k}^{*n+1/3}$$

и находим значение концентрации на границе оси  $Ox$  при  $i = N$ :

$$\theta_{N,j,k}^{*n+1/3} = \frac{2\Delta x \gamma \theta_t^* - (\beta_{N-2,j,k} + \alpha_{N-2,j,k} \beta_{N-1,j,k} - 4\beta_{N-1,j,k}) \mu}{2\Delta x \gamma + (\alpha_{N-2,j,k} \alpha_{N-1,j,k} - 4\alpha_{N-1,j,k} + 3) \mu}.$$

Значения последовательности концентрации  $\theta_{N-1,j,k}^{*n+1/3}, \theta_{N-1,j,k}^{*n+1/3}, \dots, \theta_{0,j,k}^{*n+1/3}$  определяются методом обратной прогонки по уменьшению  $i$ -й последовательности:

$$\theta_{i,j,k}^{*n+1/3} = \alpha_{i,j,k} \theta_{i+1,j,k}^{*n+1/3} + \beta_{i,j,k}; \quad i = \overline{N-1, 0}, \quad j = \overline{1, M-1}, \quad k = \overline{1, L-1}.$$

Аналогично аппроксимируем по оси  $OY$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{\theta_{i,j,k}^{n+2/3} - \theta_{i,j,k}^{n+1/3}}{\Delta \tau / 3} + \frac{1}{2} \frac{\theta_{i,j+1,k}^{n+2/3} - \theta_{i,j+1,k}^{n+1/3}}{\Delta \tau / 3} + \left( \frac{u' - |u'|}{2} \right) \frac{\theta_{i+1,j,k}^{n+1/3} - \theta_{i,j,k}^{n+1/3}}{\Delta x} + \\ & + \left( \frac{u' + |u'|}{2} \right) \frac{\theta_{i,j,k}^{n+1/3} - \theta_{i-1,j,k}^{n+1/3}}{\Delta x} + \left( \frac{v' - |v'|}{4} \right) \frac{\theta_{i,j+1,k}^{n+2/3} - \theta_{i,j,k}^{n+2/3}}{\Delta y} + \\ & + \left( \frac{v' + |v'|}{4} \right) \frac{\theta_{i,j+1,k}^{n+1/3} - \theta_{i,j,k}^{n+1/3}}{\Delta y} + \left( \frac{v' - |v'|}{4} \right) \frac{\theta_{i,j,k}^{n+2/3} - \theta_{i,j-1,k}^{n+2/3}}{\Delta y} + \\ & + \left( \frac{v' + |v'|}{4} \right) \frac{\theta_{i,j,k}^{n+1/3} - \theta_{i,j-1,k}^{n+1/3}}{\Delta y} + \left( \frac{w'_{\varphi} - |w'_{\varphi}|}{2} \right) \frac{\theta_{i,j,k+1}^{n+1/3} - \theta_{i,j,k}^{n+1/3}}{\Delta z} + \\ & + \left( \frac{w'_{\varphi} + |w'_{\varphi}|}{2} \right) \frac{\theta_{i,j,k}^{n+1/3} - \theta_{i,j,k-1}^{n+1/3}}{\Delta z} + \sigma \theta_{i,j,k}^{n+1/3} + \alpha \theta_{i,j,k}^{n+1/3} - \frac{\mu}{\Delta x^2} (\theta_{i+1,j,k}^{n+1/3} - \\ & 2\theta_{i,j,k}^{n+1/3} + \theta_{i-1,j,k}^{n+1/3}) - \frac{\mu}{\Delta y^2} (\theta_{i,j+1,k}^{n+2/3} - 2\theta_{i,j,k}^{n+2/3} + \theta_{i,j-1,k}^{n+2/3}) - \\ & - \frac{1}{\Delta z^2} (\varkappa_{k+0,5} \theta_{i,j,k+1}^{n+1/3} - (\varkappa_{k+0,5} + \varkappa_{k-0,5}) \theta_{i,j,k}^{n+1/3} + \varkappa_{k-0,5} \theta_{i,j,k-1}^{n+1/3}) = \frac{1}{3} P. \end{aligned} \quad (16)$$

Группируя все схожие члены уравнения (16) получим

$$a_{i,j,k} \theta_{i,j-1,k}^{n+2/3} - b_{i,j,k} \theta_{i,j,k}^{n+2/3} + c_{i,j,k} \theta_{i,j+1,k}^{n+2/3} = -d_{i,j,k}, \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} a_{i,j,j} &= \frac{\mu}{\Delta y^2} + \frac{v' + |v'|}{4\Delta y}; \quad b_{i,j,j} = \\ &= \frac{2\mu}{\Delta y^2} + \frac{|v'|}{2\Delta y} + \frac{3}{2\Delta \tau} + \sigma + \alpha; \quad c_{i,j,j} = \frac{\mu}{\Delta y^2} - \frac{v' - |v'|}{4\Delta y} - \frac{3}{2\Delta \tau}; \\ d_{i,j,j} &= \left( \frac{\mu}{\Delta^2} + \frac{u' + |u'|}{2\Delta} \right) \theta_{i-1,j,k}^{n+1/3} + \left( \frac{\mu}{\Delta^2} - \frac{u' - |u'|}{2\Delta} \right) \theta_{i+1,j,k}^{n+1/3} + \frac{v' + |v'|}{4\Delta y} \theta_{i,j-1,k}^{n+1/3} + \\ &+ \left( \frac{3}{2\Delta \tau} - \frac{2\mu}{\Delta^2} - \frac{\varkappa_{k+0,5} + \varkappa_{k-0,5}}{\Delta z^2} - \frac{|u'|}{\Delta x} - \frac{|v'|}{2\Delta y} - \frac{|w'_{\varphi}|}{\Delta z} \right) \theta_{i,j,k}^{n+1/3} + \\ &+ \left( \frac{3}{2\Delta \tau} - \frac{v' - |v'|}{4\Delta y} \right) \theta_{i,j+1,k}^{n+1/3} + \\ &+ \left( \frac{w'_{\varphi} + |w'_{\varphi}|}{2\Delta z} + \frac{\varkappa_{k-0,5}}{\Delta z^2} \right) \theta_{i,j,k-1}^{n+1/3} + \left( \frac{\varkappa_{k+0,5}}{\Delta z^2} - \frac{w'_{\varphi} - |w'_{\varphi}|}{2\Delta z} \right) \theta_{i,j,k+1}^{n+1/3} + \frac{1}{3} P. \end{aligned}$$

Для граничного условия (9) при  $y = 0$   $\bar{\alpha}_{i,0,k}$  и  $\bar{\beta}_{i,0,k}$  находим следующим образом

$$\bar{\alpha}_{i,j,0} = \frac{(4\bar{c}_{i,j,1} - \bar{b}_{i,j,1}) \varkappa}{(3\bar{c}_{i,j,1} - \bar{a}_{i,j,1}) \varkappa - 2\Delta z \bar{\beta}_{i,j,1}};$$

$$\bar{\beta}_{i,j,0} = \frac{\bar{d}_{i,j,1} \varkappa + 2\Delta \bar{z} \bar{c}_{i,j,1} F_0}{(3\bar{c}_{i,j,1} - \bar{a}_{i,j,1}) \varkappa - 2\Delta z \bar{\beta}_{i,j,1}}.$$

Аналогично, аппроксимируя граничное условие (9) по  $Oy$  при  $y = L_y$  имеем и находим значения концентрации на границе по оси  $Oy$  при:

$$\theta_{i,M,k}^{n+2/3} = \frac{2\Delta y \mu \theta_t - (\bar{\beta}_{i,M-2,k} + \bar{\alpha}_{i,M-2,k} \bar{\beta}_{i,M-1,k} - 4\bar{\beta}_{i,M-1,k}) \mu}{2\Delta y \mu + (\bar{\alpha}_{i,M-2,k} \bar{\alpha}_{i,M-1,k} - 4\bar{\alpha}_{i,M-1,k} + 3) \mu}.$$

Аналогично аппроксимируем по оси  $OZ$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{\theta_{i,j,k}^{n+1} - \theta_{i,j,k}^{n+2/3}}{\Delta \tau / 3} + \frac{1}{2} \frac{\theta_{i,j,k+1}^{n+1} - \theta_{i,j,k+1}^{n+2/3}}{\Delta \tau / 3} + \left( \frac{u' - |u'|}{2} \right) \frac{\theta_{i+1,j,k}^{n+2/3} - \theta_{i,j,k}^{n+2/3}}{\Delta x} + \\ & \quad + \left( \frac{u' + |u'|}{2} \right) \frac{\theta_{i,j,k}^{n+2/3} - \theta_{i-1,j,k}^{n+2/3}}{\Delta x} + \\ & \quad + \left( \frac{v' - |v'|}{2} \right) \frac{\theta_{i,j+1,k}^{n+2/3} - \theta_{i,j,k}^{n+2/3}}{\Delta y} + \left( \frac{v' + |v'|}{2} \right) \frac{\theta_{i,j,k}^{n+2/3} - \theta_{i,j-1,k}^{n+2/3}}{\Delta y} + \\ & \quad + \left( \frac{w'_\varphi - |w'_\varphi|}{4} \right) \frac{\theta_{i,j,k+1}^{n+1} - \theta_{i,j,k}^{n+1}}{\Delta z} + \\ & \quad + \left( \frac{w'_\varphi + |w'_\varphi|}{4} \right) \frac{\theta_{i,j,k+1}^{n+2/3} - \theta_{i,j,k}^{n+2/3}}{\Delta z} + \left( \frac{w'_\varphi + |w'_\varphi|}{4} \right) \frac{\theta_{i,j,k}^{n+1} - \theta_{i,j,k-1}^{n+1}}{\Delta z} + \\ & \quad + \left( \frac{w' + |w'|}{4} \right) \frac{\theta_{i,j,k}^{n+2/3} - \theta_{i,j,k-1}^{n+2/3}}{\Delta z} + \sigma \theta_{i,j,k}^{n+1/3} + \\ & \quad + \alpha \theta_{i,j,k}^{n+1/3} - \frac{\mu}{\Delta x^2} \left( \theta_{i+1,j,k}^{n+2/3} - 2\theta_{i,j,k}^{n+2/3} + \theta_{i-1,j,k}^{n+2/3} \right) - \\ & \quad - \left( \frac{w' + |w'|}{4} \right) \frac{\theta_{i,j,k}^{n+2/3} - \theta_{i,j,k-1}^{n+2/3}}{\Delta z} + \sigma \theta_{i,j,k}^{n+1/3} + \\ & \quad + \alpha \theta_{i,j,k}^{n+1/3} - \frac{\mu}{\Delta x^2} \left( \theta_{i+1,j,k}^{n+2/3} - 2\theta_{i,j,k}^{n+2/3} + \theta_{i-1,j,k}^{n+2/3} \right). \end{aligned} \quad (18)$$

$$a_{i,j,k} \theta_{i,j,k-1}^{n+1} - b_{i,j,k} \theta_{i,j,k}^{n+1} + c_{i,j,k} \theta_{i,j,k-1}^{n+1} = -d_{i,j,k}, \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned} a_{i,j,j} &= \frac{w'_\varphi + |w'_\varphi|}{4\Delta z} + \frac{\varkappa_{k-0,5}}{\Delta z^2}; \quad b_{i,j,j} = \frac{\varkappa_{k+0,5} + \varkappa_{k-0,5}}{\Delta z^2} + \frac{|w'_\varphi|}{2\Delta z} + \frac{3}{2\Delta t} + \sigma; \\ c_{i,j,j} &= \frac{\varkappa_{k+0,5}}{\Delta z^2} - \frac{w'_\varphi - |w'_\varphi|}{2\Delta z} - \frac{3}{2\Delta t}; \\ d_{i,j,j} &= \left( \left( \frac{3}{2\Delta t} - \frac{2\mu}{\Delta x^2} - \frac{2\mu}{\Delta y^2} - \frac{|u'|}{\Delta x} - \frac{|v'|}{\Delta y} - \frac{|w'_\varphi|}{2\Delta z} \right) \theta_{i,j,k}^{n+2/3} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left( \frac{\mu}{\Delta x^2} - \frac{u' - |u'|}{2\Delta x} \right) \theta_{i+1,j,k}^{n+2/3} + \\
& + \left( \frac{\mu}{\Delta x^2} + \frac{u' + |u'|}{2\Delta x} \right) \theta_{i-1,j,k}^{n+2/3} + \left( \frac{\mu}{\Delta y^2} - \frac{v' - |v'|}{2\Delta y} \right) \theta_{i,j+1,k}^{n+2/3} \\
& + \left( \frac{\mu}{\Delta y^2} + \frac{v' + |v'|}{2\Delta y} \right) \theta_{i,j-1,k}^{n+2/3} + \\
& + \left( \frac{3}{2\Delta t} - \frac{w'_\varphi - |w'_\varphi|}{4\Delta z} \right) \theta_{i,j,k+1}^{n+2/3} + \left( \frac{w'_\varphi + |w'_\varphi|}{4\Delta z} \right) \theta_{i,j,k-1}^{n+2/3} + \frac{1}{3}P.
\end{aligned}$$

Получим систему трех диагональных алгебраических уравнений относительно искомым переменных.

Для граничного условия (10) при  $z = 0$   $\bar{\alpha}_{i,j,0}$  и  $\bar{\beta}_{i,j,0}$  находим следующим образом

$$\bar{\alpha}_{i,j,0} = \frac{(4\bar{c}_{i,j,1} - \bar{b}_{i,j,1}) \varkappa}{(3\bar{c}_{i,j,1} - \bar{a}_{i,j,1}) \varkappa - 2\Delta z \bar{\beta}_{i,j,1}}; \quad \bar{\beta}_{i,j,0} = \frac{\bar{d}_{i,j,1} \varkappa + 2\Delta z \bar{c}_{i,j,1} F_0}{(3\bar{c}_{i,j,1} - \bar{a}_{i,j,1}) \varkappa - 2\Delta z \bar{\beta}_{i,j,1}}.$$

Аппроксимируем по  $Oz$  при  $z = L_z$  и находим значения концентрации на границе оси  $Oz$  при:

$$\theta_{i,j,L}^{n+1} = \frac{2\Delta z \lambda \theta_E - (\bar{\beta}_{i,j,L-2} + \bar{\alpha}_{i,j,L-2} \bar{\beta}_{i,j,L-1} - 4\bar{\beta}_{i,j,L-1}) \varkappa}{2\Delta z \lambda + (\bar{\alpha}_{i,j,L-2} \bar{\alpha}_{i,j,L-1} - 4\bar{\alpha}_{i,j,L-1} + 3) \varkappa}.$$

## 4 Заключение

Для мониторинга и прогнозирования экологического состояния воздушных бассейнов промышленных регионов и оптимального размещения производственных объектов разработана сопряженная математическая модель объекта исследования. Одним из основных факторов загрязнения атмосферного бассейна рассматриваемого региона, может выступать подстилающая поверхность земли за счет ветровой эрозии почвы.

Получено дифференциальное уравнение, в ходе решения которого можно вычислить количество выброса вредных веществ в зависимости от погодных-климатических факторов. С целью обеспечения санитарных норм в промышленных регионах с высокой экологической нагрузкой ставится сопряженная задача, решая которую можно определить координаты источников вредных веществ в зависимости от их мощностей и текущих погодных-климатических факторов.

## Литература

- [1] Воздух в Ташкенте снова «вредного» уровня // Газета.uz. – 2024. – Режим доступа: <https://www.gazeta.uz/ru/2024/01/17/air> (дата обращения: 03.04.2024).
- [2] *Gualtieri C. et al.* On the Values for the Turbulent Schmidt Number in Environmental Flows // *Fluids*. – 2017. – Vol. 2, Issue 17. – doi: <http://dx.doi.org/10.3390/fluids2020017>.
- [3] *Khazins V.M., Shuvalov V.V., Soloviev S.P.* Numerical Modeling of Formation and Rise of Gas and Dust Cloud from Large Scale Commercial Blasting // *Atmosphere*. – 2020. – Vol. 11. – doi: <http://dx.doi.org/10.3390/atmos11101112>.
- [4] *Abe S. et al.* A numerical investigation on the heat transfer and turbulence production characteristics induced by a swirl spacer in a single-tube geometry under single-phase flow condition // *Annals of Nuclear Energy*. – 2021. – Vol. 159. – doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.anucene.2021.108321>.

- [5] *Амосов П.В. и др.* Численное моделирование загрязнения атмосферы в подходах случайного выбора дискретных участков пыления и поинтервального распределения размера пыли // Вестник МГТУ. – 2022. – Т. 25, № 1. – С. 61-73.
- [6] *Torno S. et al.* CFD simulation of blasting dust for the design of physical barriers // Environ. Earth Sci. – 2011. – Vol. 64. – P. 73-83.
- [7] *Khazins V.M., Shuvalov V.V., Soloviev S.P.* Numerical Modeling of Formation and Rise of Gas and Dust Cloud from Large Scale Commercial Blasting // Atmosphere. – 2020. – Vol. 11. – doi: <http://dx.doi.org/10.3390/atmos11101112>.
- [8] *Ravshanov N., Sharipov D.* Advanced mathematical model of transfer and diffusion process of harmful substances in the atmospheric boundary layer // Journal of Advance Research in Computer Science Engineering. – 2016. – Vol.2, Issue 3. – P. 19-28.
- [9] *Kozii I. et al.* Development of the Turbulent Diffusion Model of Fine Suspended Substances in the Lower Atmosphere Layer // MATERIALS SCIENCE (MEDŽIAGOTYRA). – 2022. – Vol. 28, No. 4. – doi: <http://dx.doi.org/10.5755/j02.ms.30223>.
- [10] *Ponomareva N.A. et al.* Application of Atmospheric Chemical Transport Models to Validation of Pollutant Emissions in Moscow // Atmospheric and Oceanic Optics. – 2020. – Vol. 33, No. 4. – P. 362-371.
- [11] *Kim D. et al.* The effect of the dynamic surface bareness on dust source function, emission, and distribution // Journal of geophysical research: atmospheres. – 2013. – Vol. 118. – P. 871-886.
- [12] *Седяров О.И., Бородина Е.С.* Моделирование распространения загрязняющих веществ в приземном слое атмосферы с учетом влияния застройки и рельефа местности // Промышленные процессы и технологии. – 2022. – Т. 2, №2(4). – doi: [http://dx.doi.org/10.37816/2713-0789-2022-2-2\(4\)-8-25](http://dx.doi.org/10.37816/2713-0789-2022-2-2(4)-8-25).
- [13] *Olivardia F.G. et al.* Analysis of Pollutant Dispersion in a Realistic Urban Street Canyon Using Coupled CFD and Chemical Reaction Modeling // Atmosphere. – 2019. – Vol. 479. – doi: <http://dx.doi.org/DOI:10.3390/atmos10090479>.
- [14] *Тимофеева С.С. и др.* Математическая модель и мониторинг загрязнения приземного слоя атмосферы горнопромышленного региона // Journal of Advances in Engineering Technology. – 2021. – Vol. 2(4).
- [15] *Kurakbayeva S. et al.* Mathematical Modeling the Relaxation Impact of Water Pollutions in the System of Reservoirs under the One-time Emissions through a Broken Dam // Chemical engineering transactions. – 2020. – Vol. 82. – P. 355-360.
- [16] *Liu D., Kenjeres S.* Google Earth based visualizations for environmental flows and pollutant dispersion in urban areas // Int. J. Environ. Res. Public Health. – 2017. – doi: <http://dx.doi.org/DOI:10.3390/ijerph14030247>.
- [17] *Thabet S., Thabit T.H.* Computational Fluid Dynamics: Science of the Future // International Journal of Research and Engineering. – 2018. – Vol. 5, No. 6. – P. 430-433.
- [18] *Laganà A., Riganelli A.* Computational Reaction and Molecular Dynamics: from Simple Systems and Rigorous Methods to Large Systems and Approximate Methods // Reaction and Molecular Dynamics. – 2000. – P. 1-12.
- [19] *Соловьев Ю.И., Булыгин Ю.И., Корончик Д.А.* Конечно-элементное моделирование процессов массопереноса загрязнений в производственной среде с учетом завихрений воздушных потоков // Вестник ДГТУ. – 2012. – № 6.
- [20] *Месхи Б.Ч. и др.* Математическое и экспериментальное моделирование процессов распространения оксидов углерода и избытков теплоты в газовой среде помещения // Вестник ДГТУ. – 2011. – Т. 11, № 6. – С. 862-874.

- [21] *Ravshanov N., Muradov F., Akhmedov D.* Mathematical software to study the harmful substances diffusion in the atmosphere // *Ponte*. – 2018. – Vol. 74, No. 8/1. – P. 171-179.
- [22] *Равшанов Н., Шафиев Т., Таитемирова Н.* Нелинейная математическая модель для мониторинга и прогнозирования процесса распространения аэрозольных частиц в атмосфере // *Вестник ТУИТ*. – 2019. – №2(50). – С. 45-60.
- [23] *Shafiev T., Nazarov Sh.* Studies of the influence of vegetation cover on the process of transfer and diffusion of harmful substances in the atmosphere // *E3S Web of Conferences*. – 2023. – Vol. 431. – doi: <http://dx.doi.org/10.1051/e3sconf/202343101059>.
- [24] *Назаров Ш.Э., Журабоева О.С.* Математическая модель и эффективный численный алгоритм для мониторинга и прогнозирования концентрации вредных веществ в атмосфере с учётом захвата частиц растительности // *Проблемы вычислительной и прикладной математики*. – 2022. – №5(43). – С. 72-84.
- [25] *Марчук Г.И.* Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. – М.: Наука, 1982. – 310 с.

*Поступила в редакцию 13.04.2024*

UDC 519.6+004.9:504.064

## CONJUGATE PROBLEM FOR OPTIMAL PLACEMENT OF INDUSTRIAL PRODUCTION FACILITIES

<sup>1\*</sup>*Ravshanov N., <sup>1</sup>Nabieva I., <sup>2</sup>Japarov B.T.*

*\*ravshanzade-09@mail.ru*

<sup>1</sup>Digital Technologies and Artificial Intelligence Development Research Institute,  
17A, Buz-2, Tashkent, 100124 Uzbekistan;

<sup>2</sup>Namangan Engineering-Construction Institute,  
12, Islam Karimov str., Namangan, 160103 Uzbekistan.

A related conjugate problem is to ensure that industrial facilities are optimally located throughout a region, taking into account global and local sanitary standards. The main parameters for the spread of harmful substances are soil erosion, physical and mechanical properties of the released pollutants from industrial facilities, and climatic conditions of the region as a whole. When solving problems related to sanitary-hygienic norms, the optimal placement of industrial facilities can be realized by integrating coupled problems, the advantage of which is to save computational resource and calculation time. To solve this problem, a conservative mathematical algorithm of a high level of accuracy on temporal and spatial variables has been developed.

**Keywords:** mathematical model, finite-difference method, atmosphere, propagation of harmful emissions.

**Citation:** Ravshanov N., Nabieva I., Japarov B.T. 2024. Conjugate problem for optimal placement of industrial production facilities. *Problems of Computational and Applied Mathematics*. 3(57):91-105.

# HISOBLASH VA AMALIY МАТЕМАТИКА MUAMMOLARI

ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ  
И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

PROBLEMS OF COMPUTATIONAL  
AND APPLIED MATHEMATICS



# ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

№ 3(57) 2024

Журнал основан в 2015 году.

Издается 6 раз в год.

**Учредитель:**

Научно-исследовательский институт развития цифровых технологий и  
искусственного интеллекта.

**Главный редактор:**

Равшанов Н.

**Заместители главного редактора:**

Азамов А.А., Арипов М.М., Шадиметов Х.М.

**Ответственный секретарь:**

Ахмедов Д.Д.

**Редакционный совет:**

Азамова Н.А., Алоев Р.Д., Амиргалиев Е.Н. (Казахстан), Бурнашев В.Ф.,  
Загребина С.А. (Россия), Задорин А.И. (Россия), Игнатъев Н.А.,  
Ильин В.П. (Россия), Исмагилов И.И. (Россия), Кабанихин С.И. (Россия),  
Карачик В.В. (Россия), Курбонов Н.М., Маматов Н.С., Мирзаев Н.М.,  
Мирзаева Г.Р., Мухамадиев А.Ш., Назирова Э.Ш., Нормуродов Ч.Б.,  
Нуралиев Ф.М., Опанасенко В.Н. (Украина), Расулмухамедов М.М., Расулов А.С.,  
Садуллаева Ш.А., Старовойтов В.В. (Беларусь), Хаётов А.Р., Халджигитов А.,  
Хамдамов Р.Х., Хужаев И.К., Хужаеров Б.Х., Чье Ен Ун (Россия),  
Шабозов М.Ш. (Таджикистан), Dimov I. (Болгария), Li Y. (США),  
Mascagni M. (США), Min A. (Германия), Schaumburg H. (Германия),  
Singh D. (Южная Корея), Singh M. (Южная Корея).

Журнал зарегистрирован в Агентстве информации и массовых коммуникаций при  
Администрации Президента Республики Узбекистан.

Регистрационное свидетельство №0856 от 5 августа 2015 года.

**ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X**

При перепечатке материалов ссылка на журнал обязательна.

За точность фактов и достоверность информации ответственность несут авторы.

**Адрес редакции:**

100125, г. Ташкент, м-в. Буз-2, 17А.

Тел.: +(998) 712-319-253, 712-319-249.

Э-почта: journals@airi.uz.

Веб-сайт: <https://journals.airi.uz>.

**Дизайн и вёрстка:**

Шарипов Х.Д.

Отпечатано в типографии НИИ РЦТИИ.

Подписано в печать 28.06.2024 г.

Формат 60x84 1/8. Заказ №3. Тираж 100 экз.

# Содержание

<i>Равшанов Н., Ахмедов Д., Убайдуллаев М., Насруллаев П.</i> Лагранжева модель движения дисперсной фазы в турбулентной атмосфере . . . . .	5
<i>Маликов З.М., Назаров Ф.Х., Абдухамидов С.К.</i> Численный расчет турбулентного течения в канале с препятствием на основе программы Comsol Multiphysics . . . . .	26
<i>Холияров Э.Ч., Тураев Д.Ш., Буриев Ж.Н.</i> Численное решение граничной обратной задачи для уравнения релаксационной фильтрации . . . . .	36
<i>Равшанов Н., Муродуллаев Б.Т., Боборахимов Б.И.</i> Численное моделирование фильтрации подземных вод на орошаемых территориях . . . . .	47
<i>Анарова Ш.А., Шокиров Д.А.</i> Вычислительный алгоритм расчета трёхслойных стержней при пространственных нагрузках . . . . .	57
<i>Хусаинова Б.Б., Хусаинов С.Б., Хусаинов Р.Б.</i> Колебания систем, состоящих из подземных трубопроводов и колодцев, при действии сейсмической волны . . . . .	77
<i>Равшанов Н., Набиева И., Жапаров Б.Т.</i> Сопряженная задача для оптимального размещения промышленных объектов	91
<i>Юсупов М.</i> Математическое моделирование нелинейных колебаний виброзащитных устройств лежащих на вязкоупругом слое . . . . .	106
<i>Рахмонов З.Р., Урунбаев Ж.Э.</i> Численное решение задачи кросс диффузии с нелинейными граничными условиями и источником . . . . .	114
<i>Юсупов Ф.А.</i> Моделирование динамики распространения компьютерных вирусов с помощью композиций отображений Лотки – Вольтерры . . . . .	122