

УДК 519.65

ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ СПЛАЙНЫ, МИНИМИЗИРУЮЩИЕ ПОЛУНОРМУ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ СОБОЛЕВА*

¹Болтаев А.К., ²Пардаева О.Ф.

a.boltayev@nordicuniversity.org

¹Международный университет Нордик, 100043, Узбекистан, г. Ташкент, ул. Бунёдкор, 8/2;²Институт математики им. В.И. Романовского АН РУз, 100174, Узбекистан, г. Ташкент,
ул. Университетская, 9

Предпосылки. Задача интерполяции принадлежит к числу центральных задач теории приближений. Классическое решение опирается на интерполяционный многочлен, однако полиномиальная аппроксимация малоэффективна для функций конечной и малой гладкости, которые чаще всего встречаются в приложениях. По этой причине используются сплайны, понимаемые в вариационном смысле как элементы гильбертова пространства, доставляющие минимум некоторому функционалу. Для пространств, порождённых линейными дифференциальными операторами с постоянными коэффициентами, такие сплайны строятся методом Соболева, опирающимся на дискретные аналоги дифференциальных операторов.

Цель. Изложить общую конструкцию интерполяционного сплайна, минимизирующего полунорму указанного пространства при произвольном нечётном порядке дифференциального оператора, и показать, что задача, отвечающая первому нечётному порядку, является частным случаем этой конструкции, допускающим полностью явное решение.

Метод. Применяется метод Соболева: вариационная задача сводится к системе линейных уравнений относительно скачков старшей производной сплайна, система переписывается в свёрточной форме на языке функций дискретного аргумента, а её решение восстанавливается свёрткой с дискретным аналогом соответствующего дифференциального оператора чётного порядка.

Результаты. Для первого нечётного порядка дискретный аналог получен в замкнутой трёхточечной форме, не содержащей убывающей геометрической части, что позволяет выписать коэффициенты сплайна в явной элементарной форме. Построенный сплайн точен на показательных функциях, порождающих ядро оператора; значения коэффициентов при внутренних узлах согласуются с известными ранее результатами, тогда как сам сплайн от известного отличается. Вычислительный эксперимент подтверждает точность на указанных функциях и второй порядок сходимости на гладких функциях общего вида.

Значимость. Полученные формулы замыкают семейство экспоненциальных интерполяционных сплайнов на первом нечётном уровне и дают простой в реализации вычислительный алгоритм.

Ключевые слова: интерполяционный сплайн, полунорма, метод Соболева, дискретный аналог оператора, гильбертово пространство

Цитирование: Болтаев А.К., Пардаева О.Ф. Интерполяционные сплайны, минимизирующие полунорму в гильбертовом пространстве Соболева // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2026. – № 4/1(75). – С. 98-115.

DOI: 10.71310/psam.4-1_75.2026.08

*Работа выполнена при поддержке Академии наук Республики Узбекистан.

1 Введение

Одной из центральных задач теории приближений является задача интерполяции: по значениям функции, заданным в конечном наборе точек, требуется построить приближение, пригодное для дальнейших вычислений. Классический подход к её решению состоит в построении интерполяционного многочлена. Известно, однако, что полиномиальная аппроксимация малоэффективна при приближении функций конечной и малой гладкости, которые чаще всего и встречаются в приложениях: с ростом числа узлов интерполяционный многочлен высокой степени теряет устойчивость. По этой причине на практике для приближения функций используются сплайны. Систематическое изложение теории сплайнов и их приложений дано в [1–3]; вопросы численной реализации, алгоритмы построения и аппроксимативные свойства сплайнов рассмотрены в [4] и в монографии [5].

Отдельный интерес представляют сплайны, построенные не на многочленах, а на показательных функциях. Такие сплайны известны в литературе как гиперболические сплайны, или сплайны с натяжением; их привлекательность связана с тем, что они не порождают паразитных осцилляций, характерных для полиномиальных сплайнов высокой степени, и позволяют управлять формой приближения [2]. Рассматриваемая ниже конструкция отвечает варианту такой схемы, в котором параметр натяжения фиксирован; при этом сплайн оказывается точным на тех показательных функциях, из которых он составлен, что бывает существенно при приближении решений линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

В теории сплайнов различают алгебраический и вариационный подходы. При алгебраическом подходе сплайн рассматривается как гладкая кусочно заданная функция, склеенная из элементарных фрагментов; при вариационном подходе сплайн понимается как элемент гильбертова или банахова пространства, доставляющий минимум некоторому функционалу при заданных ограничениях. Второй подход удобен тем, что вопросы существования, единственности и сходимости решаются на основе внутренних свойств пространства, а не свойств конкретного представления. Обобщением полиномиальных сплайнов служат так называемые L -сплайны, отвечающие линейному дифференциальному оператору L : на каждом интервале сетки такой сплайн удовлетворяет однородному уравнению $L^*LS = 0$ и допускает разрыв лишь у старшей производной и только в узлах [1].

Вариационные (оптимальные) квадратурные и интерполяционные формулы, минимизирующие норму функционала погрешности, восходят к работам С. Л. Соболева [6, 7], в которых задача была сведена к системе разностных уравнений типа Винера–Хопфа и доказаны существование и единственность её решения. Метод Соболева существенно опирается на аппарат обобщённых функций [8] и на построение *дискретных аналогов* дифференциальных операторов. Первые дискретные аналоги были получены З. Ж. Жамаловым [9] и З. Ж. Жамаловым совместно с Х. М. Шадиметовым [10]; в дальнейшем метод развивался в [11–13], где построены и исследованы дискретные аналоги дифференциальных операторов высокого порядка, а также в [14–16], посвящённых вычислению коэффициентов оптимальных формул и свойствам этих аналогов.

Интерполяционные сплайны и оптимальные интерполяционные формулы, минимизирующие полунормы в различных гильбертовых пространствах, строились методом Соболева в [17–20]; близкая по технике задача о квадратурных формулах, оптимальных в смысле Сарда, рассмотрена в [21]. Случай, отвечающий оператору

третьего порядка и приводящий к экспоненциально-тригонометрическим сплайнам, исследован в [22]. В последние годы техника дискретных аналогов активно применяется к весовым и осциллирующим задачам: оптимальные формулы в гильбертовом пространстве периодических функций получены в [23], формулы для интегралов от быстро осциллирующих функций — в [24, 25], весовые оптимальные формулы и их приложения — в [26, 27], случай комплекснозначных функций — в [28], а криволинейные интегралы первого рода — в [29]. Предварительные результаты для рассматриваемой здесь задачи анонсированы авторами в [30].

Целью настоящей работы является, во-первых, изложение общей конструкции интерполяционного сплайна, минимизирующего полунорму пространства, порождённого дифференциальным оператором произвольного нечётного порядка m , и, во-вторых, детальный разбор частного случая $m = 1$. Изложение построено так, чтобы отчётливо проявилась связь между общей конструкцией и её реализацией при $m = 1$: общий алгоритм Соболева приводит в этом случае к замкнутому трёхточечному дискретному аналогу и к элементарным явным формулам для коэффициентов сплайна. Работа организована следующим образом. В разделе 2 формулируется вариационная задача, строится представление сплайна через фундаментальное решение и излагается алгоритм Соболева для произвольного нечётного m . В разделе 3 этот алгоритм реализуется при $m = 1$, выводятся явные формулы для коэффициентов, обсуждается их связь с известными результатами и приводится вычислительный эксперимент. В разделе 4 подведены итоги.

2 Постановка задачи и метод

2.1 Пространство и вариационная задача

Пусть m — нечётное натуральное число. Рассмотрим на отрезке $[0, 1]$ линейный дифференциальный оператор $L \equiv L_m$ порядка m с постоянными коэффициентами, обладающий тем свойством, что

$$L^*L = -\left(\frac{d^{2m}}{dx^{2m}} - 1\right), \quad (1)$$

где L^* — формально сопряжённый к L оператор. Обозначим через $W_2^{(m,0)}(0, 1)$ класс функций

$$W_2^{(m,0)}(0, 1) = \left\{ \varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid \varphi^{(m-1)} \text{ абсолютно непрерывна и } \varphi^{(m)} \in L_2(0, 1) \right\}. \quad (2)$$

Класс (2), снабжённый полунормой

$$\|\varphi\|_{W_2^{(m,0)}} = \left(\int_0^1 (L\varphi(x))^2 dx \right)^{1/2}, \quad (3)$$

является гильбертовым пространством при условии отождествления функций, отличающихся на решение уравнения $L\varphi = 0$ [6]. Действительно, величина (3) обращается в нуль в точности на решениях этого уравнения, поэтому она задаёт норму на факторпространстве по ядру оператора L . Ядро $\ker L$ конечномерно и имеет размерность m ; далее его базис обозначаем через $u_0(x), \dots, u_{m-1}(x)$.

Пусть φ — интерполируемая функция и в узлах $x_\beta \in [0, 1]$ заданы её значения

$$y_\beta = \varphi(x_\beta), \quad \beta = 0, 1, \dots, N. \quad (4)$$

Всюду ниже мы пользуемся обозначением (4), то есть символы y_β и $\varphi(x_\beta)$ считаются взаимозаменяемыми; это соглашение позволяет записывать правые части возникающих систем в терминах интерполируемой функции. Рассмотрим следующую вариационную задачу интерполяции.

Задача 1. Среди всех функций из пространства $W_2^{(m,0)}(0,1)$, удовлетворяющих условиям интерполяции

$$S(x_\beta) = y_\beta = \varphi(x_\beta), \quad \beta = 0, 1, \dots, N, \quad (5)$$

найти функцию $S(x)$, доставляющую минимум полунорме (3).

Ниже узлы предполагаются равноотстоящими:

$$x_\beta = h\beta, \quad \beta = 0, 1, \dots, N, \quad h = \frac{1}{N}, \quad N \geq m. \quad (6)$$

Для решения задачи 1 применяется метод С. Л. Соболева [6, 7], состоящий в переходе к функциям дискретного аргумента и построении дискретного аналога оператора $d^{2m}/dx^{2m} - 1$.

2.2 Фундаментальное решение и представление сплайна

Обозначим через $G_m(x)$ фундаментальное решение оператора $d^{2m}/dx^{2m} - 1$, то есть решение уравнения

$$\frac{d^{2m}G_m(x)}{dx^{2m}} - G_m(x) = \delta(x), \quad (7)$$

где $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака. Согласно известному правилу отыскания фундаментального решения линейного дифференциального оператора с постоянными коэффициентами [8], функция $G_m(x)$ строится по корням характеристического многочлена $p^{2m} - 1$, то есть по корням $2m$ -й степени из единицы: каждой простой дроби $(p - \lambda)^{-1}$ в разложении величины $1/(p^{2m} - 1)$ отвечает слагаемое вида $\frac{1}{2} \operatorname{sgn}(x) e^{\lambda x}$, взятое с соответствующим коэффициентом. Функция $G_m(x)$ непрерывна вместе с производными до порядка $2m - 2$, а её производная порядка $2m - 1$ имеет в нуле единичный скачок.

Установим вид решения задачи 1. Пусть S — минимизирующий элемент и пусть функция $\psi \in W_2^{(m,0)}(0,1)$ обращается в нуль во всех узлах (6). Тогда при любом $t \in \mathbb{R}$ функция $S + t\psi$ также удовлетворяет условиям интерполяции (5), а значит, квадратичная по t функция $t \mapsto \|S + t\psi\|_{W_2^{(m,0)}}^2$ достигает минимума при $t = 0$. Приравнивая её производную нулю, получаем необходимое условие

$$\int_0^1 (LS)(x) (L\psi)(x) dx = 0 \quad (8)$$

для всех указанных ψ . Интегрируя (8) по частям и учитывая (1), заключаем, что обобщённая функция $S^{(2m)} - S$ сосредоточена в узлах сетки, то есть

$$S^{(2m)}(x) - S(x) = \sum_{\gamma=0}^N C_\gamma \delta(x - x_\gamma) \quad (9)$$

с некоторыми числами C_γ . Тем самым решение задачи 1 является обобщённым сплайном в смысле [1]: на каждом интервале $(x_\beta, x_{\beta+1})$ оно есть линейная комбинация решений однородного уравнения $S^{(2m)} - S = 0$, а вся негладкость сосредоточена в

узлах. Числа C_γ из (9) имеют наглядный смысл: это скачки старшей производной сплайна,

$$C_\gamma = S^{(2m-1)}(x_\gamma+) - S^{(2m-1)}(x_\gamma-), \quad \gamma = 0, 1, \dots, N, \quad (10)$$

то есть величины, определяющие разрыв производной порядка $2m - 1$ в узлах сетки. Применяя к (9) фундаментальное решение (7), получаем представление сплайна

$$S(x) = \sum_{\gamma=0}^N C_\gamma G_m(x - x_\gamma) + \sum_{s=0}^{m-1} d_s u_s(x), \quad (11)$$

где второе слагаемое — произвольное решение однородного уравнения $L\varphi = 0$, а $d_s \in \mathbb{R}$ — коэффициенты при базисных функциях ядра оператора L .

Вне отрезка $[0, 1]$ правая часть (9) обращается в нуль, поэтому там сплайн удовлетворяет однородному уравнению $S^{(2m)} - S = 0$; пространство решений этого уравнения имеет размерность $2m$ и содержит ядро оператора L в качестве m -мерного подпространства. Согласно характеристике обобщённых сплайнов [1], решение задачи 1 выделяется требованием, чтобы на каждом из лучей $(-\infty, 0)$ и $(1, +\infty)$ функция S совпадала с элементом ядра оператора L , то есть с линейной комбинацией функций $u_0(x), \dots, u_{m-1}(x)$. Это требование равносильно m условиям ортогональности вектора коэффициентов значениям функций ядра в узлах сетки. Вместе с условиями интерполяции (5) оно приводит к системе $N + m + 1$ линейных уравнений

$$\sum_{\gamma=0}^N C_\gamma G_m(x_\beta - x_\gamma) + \sum_{s=0}^{m-1} d_s u_s(x_\beta) = \varphi(x_\beta), \quad \beta = 0, 1, \dots, N, \quad (12)$$

$$\sum_{\gamma=0}^N C_\gamma u_s(x_\gamma) = 0, \quad s = 0, 1, \dots, m-1, \quad x_\gamma = h\gamma, \quad \gamma = 0, 1, \dots, N. \quad (13)$$

Уравнения (12) суть условия интерполяции (5), записанные для представления (11); здесь, в согласии с (4), правая часть записана через значения интерполируемой функции. Уравнения (13) выражают ортогональность вектора коэффициентов $\{C_\gamma\}_{\gamma=0}^N$ значениям функций ядра $u_0, \dots, u_{m-1}$ в узлах сетки и гарантируют, что вне отрезка $[0, 1]$ сплайн совпадает с элементом ядра оператора L . Справедлив следующий результат об однозначной разрешимости задачи [1, 7].

Теорема 1. Пусть $N \geq m$. Тогда решение $S(x)$ вида (11) задачи 1 существует и единственно, а коэффициенты C_γ ($\gamma = 0, 1, \dots, N$) и d_s ($s = 0, 1, \dots, m-1$) однозначно определяются системой (12)–(13).

Непосредственное решение системы (12)–(13) при больших N неудобно: её матрица заполнена, а порядок растёт вместе с числом узлов. Метод Соболева позволяет обойти это затруднение, сведя задачу к свёрточному уравнению с постоянными коэффициентами.

2.3 Функции дискретного аргумента и дискретный аналог оператора

Для решения системы (12)–(13) при равноотстоящих узлах (6) используется аппарат функций дискретного аргумента [6, 9].

Определение 1. Функция $\varphi[\beta]$ называется функцией дискретного аргумента, если она задана на некотором множестве целочисленных значений β .

Определение 2. Скалярным произведением двух дискретных функций $\varphi[\beta]$ и $\psi[\beta]$ называется число

$$[\varphi[\beta], \psi[\beta]] = \sum_{\beta=-\infty}^{\infty} \varphi[\beta] \cdot \psi[\beta],$$

если ряд в правой части абсолютно сходится.

Определение 3. Свёрткой двух дискретных функций $\varphi[\beta]$ и $\psi[\beta]$ называется функция

$$\varphi[\beta] * \psi[\beta] = \sum_{\gamma=-\infty}^{\infty} \varphi[\gamma] \cdot \psi[\beta - \gamma].$$

Пусть $G_m[\beta] = G_m(h\beta)$ — дискретная функция, отвечающая фундаментальному решению (7). Требуется построить дискретную функцию $D_m[\beta]$, удовлетворяющую уравнению

$$D_m[\beta] * G_m[\beta] = \delta[\beta], \quad (14)$$

где $\delta[\beta]$ — дискретная дельта-функция, равная 1 при $\beta = 0$ и 0 при $\beta \neq 0$. Уравнение (14) является дискретным аналогом уравнения (7): функция $D_m[\beta]$ играет для решётчатых функций ту же роль, что оператор $d^{2m}/dx^{2m} - 1$ для функций непрерывного аргумента. Её построение при нечётном m и основные свойства установлены в [12, 13]; приведём соответствующие утверждения.

Теорема 2. Для нечётного m существует единственная дискретная функция $D_m[\beta]$, удовлетворяющая уравнению (14) и убывающая при $|\beta| \rightarrow \infty$. Она имеет вид

$$D_m[\beta] = p \mathcal{K}[\beta] + \sum_{k=1}^{m-1} B_k \lambda_k^{|\beta|}, \quad (15)$$

где $\mathcal{K}[\beta]$ — конечная часть, сосредоточенная в узлах $|\beta| \leq m$, числа λ_k — корни соответствующего характеристического многочлена, лежащие внутри единичного круга, $|\lambda_k| < 1$, а p и B_k — однозначно определяемые постоянные.

Теорема 3. Дискретный аналог $D_m[\beta]$ оператора $d^{2m}/dx^{2m} - 1$ обращает в нуль свёртки с дискретными значениями всех решений однородного уравнения $S^{(2m)} - S = 0$; в частности,

$$D_m[\beta] * u_s[\beta] = 0, \quad s = 0, 1, \dots, m-1,$$

где $u_s[\beta] = u_s(h\beta)$ — дискретные значения базисных функций ядра оператора L .

Доказательства теорем 2 и 3 проводятся методом Соболева: к уравнению (14) применяется преобразование Фурье функций дискретного аргумента, после чего искомая функция восстанавливается разложением получившейся рациональной функции на простейшие дроби; подробное изложение содержится в [12, 13, 15].

2.4 Алгоритм Соболева вычисления коэффициентов

Положим $C[\beta] = 0$ при $\beta < 0$ и $\beta > N$, то есть продолжим набор коэффициентов нулём на всю целочисленную ось. По определению 3 система (12) записывается в свёрточном виде

$$G_m[\beta] * C[\beta] + \sum_{s=0}^{m-1} d_s u_s[\beta] = \varphi[\beta], \quad \beta = 0, 1, \dots, N, \quad (16)$$

где $\varphi[\beta] = \varphi(h\beta)$. Введём вспомогательные функции

$$v[\beta] = G_m[\beta] * C[\beta], \quad u[\beta] = v[\beta] + \sum_{s=0}^{m-1} d_s u_s[\beta]. \quad (17)$$

Применяя к (17) оператор $D_m[\beta]$ и учитывая (14) и теорему 3, получаем формулу восстановления коэффициентов

$$C[\beta] = D_m[\beta] * u[\beta]. \quad (18)$$

В силу (16) имеем $u[\beta] = \varphi[\beta]$ при $0 \leq \beta \leq N$. Таким образом, для вычисления коэффициентов по формуле (18) остаётся определить $u[\beta]$ при $\beta < 0$ и $\beta > N$; это делается с помощью условий (13), после чего значения $u[\beta]$ становятся известными для всех целых β . Тем самым задача 1 сводится к отысканию конечного числа постоянных, входящих в представление $u[\beta]$ вне отрезка $[0, N]$. В следующем разделе этот общий алгоритм реализуется в наиболее простом случае $m = 1$, когда все выкладки удаётся довести до конца в элементарных функциях.

3 Результаты и обсуждение

3.1 Частный случай: постановка и представление сплайна

Положим $m = 1$. Тогда $L \equiv d/dx - 1$, и в силу (1)

$$L^*L = -\left(\frac{d}{dx} + 1\right)\left(\frac{d}{dx} - 1\right) = -\left(\frac{d^2}{dx^2} - 1\right),$$

так что уравнение Эйлера задачи 1 принимает вид $S'' - S = 0$. Пространство $W_2^{(1,0)}(0,1)$ состоит из абсолютно непрерывных функций, у которых $\varphi' \in L_2(0,1)$, а полунорма (3) записывается как

$$\|\varphi\|_{W_2^{(1,0)}} = \left(\int_0^1 (\varphi'(x) - \varphi(x))^2 dx\right)^{1/2}. \quad (19)$$

Ядро оператора L одномерно и порождается функцией $u_0(x) = e^x$, тогда как пространство решений уравнения $S'' - S = 0$ двумерно и натянуто на функции e^x и e^{-x} .

Фундаментальное решение оператора $d^2/dx^2 - 1$, то есть решение уравнения $G''(x) - G(x) = \delta(x)$, имеет вид

$$G(x) = \frac{\operatorname{sgn} x}{2} \sinh x. \quad (20)$$

Действительно, для $P(p) = p^2 - 1 = (p-1)(p+1)$ имеем $1/(p^2 - 1) = \frac{1/2}{p-1} - \frac{1/2}{p+1}$, откуда по указанному в разделе 2 правилу

$$G(x) = \frac{\operatorname{sgn} x}{4} e^x - \frac{\operatorname{sgn} x}{4} e^{-x} = \frac{\operatorname{sgn} x}{2} \sinh x.$$

Непосредственно проверяется, что функция (20) непрерывна, $G'(0+) - G'(0-) = 1$ и $G'' - G = 0$ при $x \neq 0$, то есть (7) выполнено при $m = 1$. Согласно общему представлению (11), сплайн записывается в виде

$$S(x) = \sum_{\gamma=0}^N C_\gamma G(x - x_\gamma) + d_0 e^x, \quad d_0 \in \mathbb{R}, \quad (21)$$

а система (12)–(13) содержит $N + 2$ уравнения:

$$\sum_{\gamma=0}^N C_{\gamma} G(x_{\beta} - x_{\gamma}) + d_0 e^{x_{\beta}} = \varphi(x_{\beta}), \quad \beta = 0, 1, \dots, N, \quad (22)$$

$$\sum_{\gamma=0}^N C_{\gamma} e^{x_{\gamma}} = 0, \quad \gamma = 0, 1, \dots, N, \quad x_{\gamma} = h\gamma \in [0, 1]. \quad (23)$$

Единственное уравнение (23) есть условие (13) при $m = 1$: суммирование в нём ведётся по всем узлам сетки (6), а функция $u_0(x_{\gamma}) = e^{x_{\gamma}}$ есть значение базисной функции ядра оператора L в узле x_{γ} .

Убедимся, что это условие действительно обеспечивает требуемое поведение сплайна вне отрезка $[0, 1]$. Пусть $x < 0$; тогда $\operatorname{sgn}(x - x_{\gamma}) = -1$ для всех $\gamma = 0, 1, \dots, N$, и, раскрывая (20),

$$S(x) = -\frac{e^x}{4} \sum_{\gamma=0}^N C_{\gamma} e^{-x_{\gamma}} + \frac{e^{-x}}{4} \sum_{\gamma=0}^N C_{\gamma} e^{x_{\gamma}} + d_0 e^x = (d_0 - b_0) e^x,$$

где второе слагаемое обращается в нуль в силу (23), а $b_0 = \frac{1}{4} \sum_{\gamma=0}^N C_{\gamma} e^{-x_{\gamma}}$. Аналогично при $x > 1$ имеем $\operatorname{sgn}(x - x_{\gamma}) = +1$ и $S(x) = (d_0 + b_0) e^x$. Таким образом, на каждом из лучей $(-\infty, 0)$ и $(1, +\infty)$ сплайн кратен функции e^x , то есть совпадает с элементом ядра оператора L , как и требует общая конструкция раздела 2.

3.2 Трёхточечный дискретный аналог

В случае $m = 1$ общая формула (15) не содержит геометрической суммы, так как $m - 1 = 0$, и дискретный аналог оказывается сосредоточенным в трёх точках. Именно, справедлива

Теорема 4. Дискретный аналог $D[\beta]$ оператора $d^2/dx^2 - 1$, удовлетворяющий уравнению $D[\beta] * G[\beta] = \delta[\beta]$, имеет вид

$$D[\beta] = \frac{1}{\sinh h} \begin{cases} 0, & |\beta| \geq 2, \\ 1, & |\beta| = 1, \\ -2 \cosh h, & \beta = 0. \end{cases} \quad (24)$$

Кроме того, справедливы равенства $D[\beta] * e^{h\beta} = 0$ и $D[\beta] * e^{-h\beta} = 0$.

Доказательство. Заметим прежде всего, что функция (20) чётна: при $x \neq 0$ $G(-x) = \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(-x) \sinh(-x) = \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(x) \sinh x = G(x)$, а $G(0) = 0$. Поэтому $G[\beta] = \frac{1}{2} \sinh(h|\beta|)$ и, в частности, $G[0] = 0$, $G[-1] = G[1] = \frac{1}{2} \sinh h$.

Пусть $D[\beta]$ задана равенством (24). Поскольку эта функция сосредоточена в трёх точках, свёртка вычисляется непосредственно:

$$(D * G)[\beta] = \frac{1}{\sinh h} (G[\beta - 1] - 2 \cosh(h) G[\beta] + G[\beta + 1]). \quad (25)$$

Рассмотрим три случая.

Пусть $\beta \geq 1$. Тогда $G[\beta \pm 1] = \frac{1}{2} \sinh(h(\beta \pm 1))$ и $G[\beta] = \frac{1}{2} \sinh(h\beta)$, причём при $\beta = 1$ равенство $G[0] = \frac{1}{2} \sinh 0 = 0$ согласовано с общей записью. По формуле суммы синусов гиперболических $\sinh(A - B) + \sinh(A + B) = 2 \sinh A \cosh B$ при $A = h\beta$,

$B = h$ получаем $G[\beta - 1] + G[\beta + 1] = \sinh(h\beta) \cosh h$, откуда выражение в скобках (25) равно $\sinh(h\beta) \cosh h - 2 \cosh h \cdot \frac{1}{2} \sinh(h\beta) = 0$.

Пусть $\beta \leq -1$. В силу чётности G рассуждение дословно повторяет предыдущее с заменой β на $|\beta|$, и скобка вновь обращается в нуль.

Пусть, наконец, $\beta = 0$. Тогда $G[-1] + G[1] - 2 \cosh(h) G[0] = \sinh h$, и правая часть (25) равна единице.

Таким образом, $(D * G)[\beta] = \delta[\beta]$, то есть функция (24) удовлетворяет уравнению (14) при $m = 1$; единственность убывающего решения этого уравнения гарантирована теоремой 2.

Проверим последние два равенства. Для $\varepsilon = \pm 1$ имеем

$$(D * e^{\varepsilon h \beta}) = \frac{e^{\varepsilon h \beta}}{\sinh h} (e^{-\varepsilon h} - 2 \cosh h + e^{\varepsilon h}) = \frac{e^{\varepsilon h \beta}}{\sinh h} (2 \cosh h - 2 \cosh h) = 0,$$

поскольку $e^h + e^{-h} = 2 \cosh h$. Теорема доказана.

Таким образом, при $m = 1$ теоремы 2 и 3 реализуются в замкнутой трёхточечной форме (24). Отсутствие убывающей геометрической части объясняется тем, что соответствующий вспомогательный многочлен не имеет корней внутри единичного круга; это существенно упрощает вычисление коэффициентов и, в отличие от случаев $m \geq 3$ [22], позволяет обойтись без суммирования бесконечных рядов.

3.3 Явные формулы для коэффициентов

Реализуя алгоритм подраздела 4 при $m = 1$, положим $v[\beta] = G[\beta] * C[\beta]$ и $u[\beta] = v[\beta] + d_0 e^{h\beta}$. Пусть $\beta \leq 0$; тогда $\operatorname{sgn}(x_\beta - x_\gamma) = -1$ для всех $\gamma \geq 0$, и с учётом (23)

$$v[\beta] = \sum_{\gamma=0}^N C[\gamma] \cdot \frac{-1}{4} (e^{h\beta-h\gamma} - e^{-h\beta+h\gamma}) = -\frac{1}{4} e^{h\beta} \sum_{\gamma=0}^N C[\gamma] e^{-h\gamma} = -b_0 e^{h\beta},$$

где обозначено $b_0 = \frac{1}{4} \sum_{\gamma=0}^N C[\gamma] e^{-h\gamma}$. Аналогично при $\beta \geq N$ имеем $\operatorname{sgn}(x_\beta - x_\gamma) = +1$ и $v[\beta] = b_0 e^{h\beta}$. Следовательно,

$$u[\beta] = \begin{cases} (d_0 - b_0) e^{h\beta}, & \beta < 0, \\ \varphi(h\beta), & \beta = 0, 1, \dots, N, \\ (d_0 + b_0) e^{h\beta}, & \beta > N. \end{cases} \quad (26)$$

Представление (26) должно быть согласовано в точках $\beta = 0$ и $\beta = N$, где внешние ветви смыкаются со средней. При $\beta = 0$ получаем $d_0 - b_0 = \varphi(0)$, при $\beta = N$ — равенство $(d_0 + b_0)e = \varphi(1)$, поскольку $e^{hN} = e$. Решая эти два уравнения, находим

$$d_0 = \frac{e\varphi(0) + \varphi(1)}{2e}, \quad b_0 = \frac{\varphi(1) - e\varphi(0)}{2e}. \quad (27)$$

Подставляя (26) и (27) в формулу восстановления (18) и пользуясь трёхточечным видом (24), приходим к следующему результату.

Теорема 5. Коэффициенты интерполяционного сплайна (21) с равноотстоящими узлами (6) в пространстве $W_2^{(1,0)}(0, 1)$ имеют вид

$$C[0] = \frac{2e^h}{1 - e^{2h}} [e^h \varphi(0) - \varphi(h)], \quad (28)$$

$$C[\beta] = \frac{2}{1 - e^{2h}} [(1 + e^{2h})\varphi(h\beta) - e^h(\varphi(h\beta - h) + \varphi(h\beta + h))], \quad \beta = \overline{1, N-1}, \quad (29)$$

$$C[N] = \frac{2}{1 - e^{2h}} [\varphi(1) - e^h \varphi(1 - h)], \quad (30)$$

Вход: значения $\varphi(h\beta)$, $\beta = 0, 1, \dots, N$; шаг $h = 1/N$

Выход: коэффициенты $C[\beta]$, $\beta = 0, 1, \dots, N$, и коэффициент d_0

- 1: $q \leftarrow 1 - e^{2h}$;
- 2: $d_0 \leftarrow (e\varphi(0) + \varphi(1))/(2e)$;
- 3: $C[0] \leftarrow \frac{2e^h}{q}(e^h\varphi(0) - \varphi(h))$;
- 4: для $\beta = 1$ до $N - 1$;
- 5: $C[\beta] \leftarrow \frac{2}{q}\left((1 + e^{2h})\varphi(h\beta) - e^h(\varphi(h\beta - h) + \varphi(h\beta + h))\right)$;
- 6: **конец для**
- 7: $C[N] \leftarrow \frac{2}{q}(\varphi(1) - e^h\varphi(1 - h))$;
- 8: **вернуть** $C[0], \dots, C[N]$ и d_0 .

и, кроме того, $d_0 = \frac{e\varphi(0) + \varphi(1)}{2e}$.

Доказательство. Согласно (18) и трёхточечному виду (24), при $\beta = 0, 1, \dots, N$ имеем

$$C[\beta] = D[\beta] * u[\beta] = -\frac{2e^h}{1 - e^{2h}} u[\beta + 1] + \frac{2(e^{2h} + 1)}{1 - e^{2h}} u[\beta] - \frac{2e^h}{1 - e^{2h}} u[\beta - 1],$$

где использовано равенство $1/\sinh h = 2/(e^h - e^{-h})$ и приведение к общему знаменателю. Для внутренних индексов $\beta = 1, 2, \dots, N - 1$ все три значения $u[\beta - 1]$, $u[\beta]$, $u[\beta + 1]$ берутся из средней ветви (26), что немедленно даёт (29). При $\beta = 0$ значение $u[-1]$ берётся из верхней ветви (26); подставляя $u[-1] = (d_0 - b_0)e^{-h} = \varphi(0)e^{-h}$ в силу (27) и упрощая, получаем (28). Аналогично при $\beta = N$ значение $u[N + 1]$ берётся из нижней ветви, $u[N + 1] = (d_0 + b_0)e^{h(N+1)} = \varphi(1)e^h$, что даёт (30). Значение d_0 получено в (27). Теорема доказана.

Отметим, что формулы (28)–(30) не требуют решения линейных систем: каждый коэффициент выражается через значения интерполируемой функции не более чем в трёх соседних узлах, а величина d_0 — через значения на концах отрезка. Вычислительная сложность построения сплайна при этом линейна по числу узлов.

Соответствующая вычислительная процедура записывается следующим образом.

Алгоритм требует $O(N)$ арифметических операций и одного прохода по массиву значений интерполируемой функции; величины e^h и e^{2h} вычисляются однократно. Ни на одном шаге не требуется хранить или обращаться матрицу, что выгодно отличает предлагаемую схему от непосредственного решения системы (22)–(23), имеющей порядок $N + 2$ и заполненную матрицу. Отметим также, что вычисление каждого коэффициента использует значения интерполируемой функции не более чем в трёх соседних узлах, поэтому локальное возмущение исходных данных влияет лишь на три соседних коэффициента и не распространяется вдоль всей сетки.

3.4 Свойства построенного сплайна

Соберём вместе структурные свойства полученного сплайна.

Утверждение 1. Интерполяционный сплайн (21) с коэффициентами из теоремы 5 обладает следующими свойствами:

1. на каждом интервале $(x_\beta, x_{\beta+1})$, $\beta = 0, 1, \dots, N - 1$, он является линейной комбинацией функций e^x и e^{-x} ;

2. на каждом из лучей $(-\infty, 0)$ и $(1, +\infty)$ он кратен функции e^x , то есть совпадает с элементом ядра оператора L ;
3. он непрерывен на всей числовой оси, а его первая производная терпит в узле x_γ скачок, равный C_γ ;
4. выполнены условия интерполяции $S(x_\beta) = \varphi(x_\beta)$, $\beta = 0, 1, \dots, N$.

Свойство 1 следует из того, что вне узлов S удовлетворяет уравнению $S'' - S = 0$; свойство 2 доказано в конце подраздела 1; свойство 3 вытекает из непрерывности функции (20) и единичного скачка её производной в нуле, а свойство 4 обеспечено построением. Отметим, что при $m = 1$ число $2(m - 1)$ естественных краевых условий равно нулю, поэтому никаких дополнительных условий на концах отрезка не возникает: их роль полностью берёт на себя единственное условие (23).

Пример 1. Пусть $N = 2$, то есть $h = 1/2$, $e^h = \sqrt{e}$ и $e^{2h} = e$. Тогда формулы (28)–(30) принимают вид

$$C[0] = \frac{2\sqrt{e}}{1-e} \left[\sqrt{e} \varphi(0) - \varphi\left(\frac{1}{2}\right) \right], \quad C[2] = \frac{2}{1-e} \left[\varphi(1) - \sqrt{e} \varphi\left(\frac{1}{2}\right) \right],$$

$$C[1] = \frac{2}{1-e} \left[(1+e) \varphi\left(\frac{1}{2}\right) - \sqrt{e} (\varphi(0) + \varphi(1)) \right], \quad d_0 = \frac{e \varphi(0) + \varphi(1)}{2e},$$

после чего сплайн выписывается по формуле (21). Никаких дополнительных вычислений, в частности решения линейных систем, при этом не требуется.

Замечание 1. На каждом отрезке $[x_\beta, x_{\beta+1}]$ сплайн (21) является линейной комбинацией функций e^x и e^{-x} , порождающих пространство решений уравнения $S'' - S = 0$, и совпадает с интерполируемой функцией в концах этого отрезка. Следовательно, построенный сплайн точен на функциях e^x и e^{-x} : если интерполируемая функция сама является их линейной комбинацией, то сплайн совпадает с ней тождественно. Это согласуется с общим свойством, выраженным теоремой 3 при $m = 1$.

Замечание 2. В работе [17] рассматривается пространство, снабжённое полунормой $(\int_0^1 (\varphi'(x) + \varphi(x))^2 dx)^{1/2}$, и соответствующий интерполяционный сплайн строится на основе того же фундаментального решения (20) оператора $d^2/dx^2 - 1$, но с функцией e^{-x} вместо e^x . В настоящей работе используется полунорма (19), поэтому построенный здесь сплайн отличается от сплайна из [17]: две соответствующие задачи переходят одна в другую при обращении нумерации узлов $\beta \mapsto N - \beta$. Прямое сравнение формул показывает, что коэффициенты при внутренних узлах $\beta = 1, 2, \dots, N - 1$ в обоих случаях совпадают в точности, тогда как граничные коэффициенты $C[0]$, $C[N]$ и коэффициент при функции ядра различны. Совпадение внутренних коэффициентов, полученных здесь независимым путём, служит дополнительной проверкой формул теоремы 5.

3.5 Вычислительный эксперимент

Проиллюстрируем полученные результаты. Коэффициенты сплайна (21) вычисляются по явным формулам (28)–(30) теоремы 5, после чего сплайн находится по формуле (21). Точность интерполяции для заданной функции f измеряется абсолютной погрешностью и её максимумом

$$e_N(x) = |S(x) - f(x)|, \quad \|e_N\|_\infty = \max_{0 \leq x \leq 1} |S(x) - f(x)|, \quad (31)$$

где максимум берётся по мелкой вспомогательной сетке отрезка $[0, 1]$, а эмпирический порядок сходимости определяется равенством

$$\rho_N = \log_2 \frac{\|e_N\|_\infty}{\|e_{2N}\|_\infty}. \quad (32)$$

Все вычисления выполнены с двойной точностью; максимум в (31) вычислялся по равномерной вспомогательной сетке из 4001 точки отрезка $[0, 1]$, которая заведомо мельче любой из рассматриваемых сеток интерполяции, так что значение $\|e_N\|_\infty$ практически не зависит от выбора вспомогательной сетки. Значения функции в узлах брались точными, поэтому наблюдаемая погрешность отражает только свойства самой интерполяционной формулы.

3.6 Точность на функциях, порождающих ядро оператора

Согласно замечанию 1, сплайн точен на функциях e^x и e^{-x} . Возьмём последовательно $f(x) = e^x$ и $f(x) = e^{-x}$ и вычислим $\|e_N\|_\infty$ при $N = 10$ и $N = 100$. Результаты приведены в таблице 1: в обоих случаях погрешность остаётся на уровне машинного округления, что подтверждает точное воспроизведение этих функций.

Таблица 1 Максимальная абсолютная погрешность для функций, порождающих пространство решений уравнения $S'' - S = 0$.

$f(x)$	$\ e_N\ _\infty$ при $N = 10$	$\ e_N\ _\infty$ при $N = 100$
e^x	$2,0 \cdot 10^{-14}$	$7,9 \cdot 10^{-13}$
e^{-x}	$4,5 \cdot 10^{-15}$	$3,8 \cdot 10^{-13}$

Абсолютные погрешности для этих функций изображены на рис. 1 и 2. На всём отрезке $[0, 1]$ погрешность не превосходит величины порядка 10^{-13} и практически не зависит от числа узлов, что и означает точность сплайна на указанных функциях; наблюдаемый уровень определяется исключительно накоплением ошибок округления.

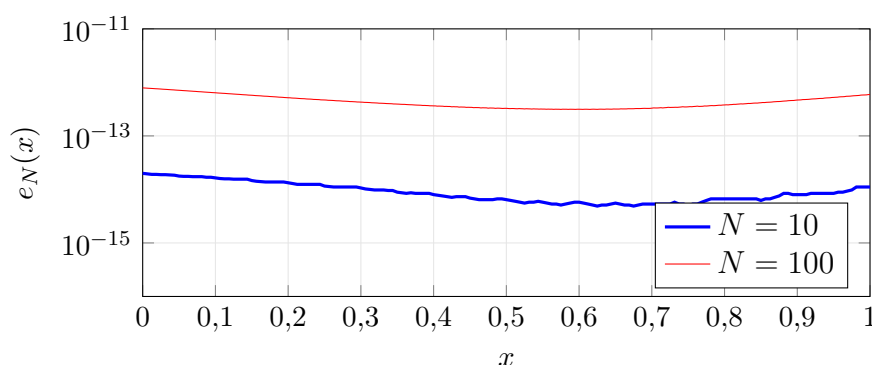


Рис. 1 Абсолютная погрешность интерполяционного сплайна (21) для функции $f(x) = e^x$ при $N = 10$ (синяя линия) и $N = 100$ (красная линия); логарифмическая шкала по оси ординат.

3.7 Сходимость на функциях общего вида

Чтобы оценить погрешность для функций, не принадлежащих линейной оболочке функций e^x и e^{-x} , рассмотрим две тестовые функции: алгебраическую (многочлен)

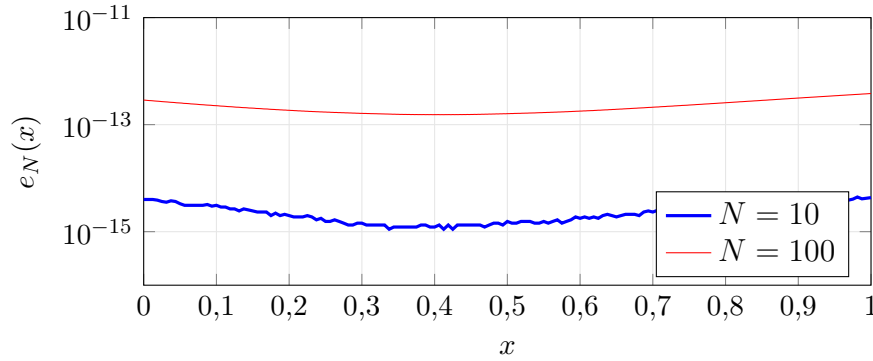


Рис. 2 Абсолютная погрешность интерполяционного сплайна (21) для функции $f(x) = e^{-x}$ при $N = 10$ (синяя линия) и $N = 100$ (красная линия); логарифмическая шкала по оси ординат.

$f_1(x) = x^2$ и тригонометрическую $f_2(x) = \sin x$. Для каждой из них вычислим величину $\|e_N\|_\infty$ на сетках с $N = 10, 20, 40, 80, 160$ и эмпирический порядок ρ_N по формуле (32). Результаты приведены в таблице 2, где для обеих тестовых функций использованы одинаковые обозначения столбцов.

Таблица 2 Максимальная абсолютная погрешность и эмпирический порядок сходимости для многочлена и тригонометрической функции.

N	$f_1(x) = x^2$		$f_2(x) = \sin x$	
	$\ e_N\ _\infty$	ρ_N	$\ e_N\ _\infty$	ρ_N
10	$2,494 \cdot 10^{-3}$	—	$2,031 \cdot 10^{-3}$	—
20	$6,246 \cdot 10^{-4}$	2,00	$5,172 \cdot 10^{-4}$	1,97
40	$1,562 \cdot 10^{-4}$	2,00	$1,304 \cdot 10^{-4}$	1,99
80	$3,906 \cdot 10^{-5}$	2,00	$3,274 \cdot 10^{-5}$	1,99
160	$9,750 \cdot 10^{-6}$	2,00	$8,188 \cdot 10^{-6}$	2,00

При измельчении сетки эмпирический порядок ρ_N стремится к 2 для обеих тестовых функций, то есть интерполяционная формула сходится с порядком $O(h^2)$. Этот результат согласуется со структурой сплайна: при $m = 1$ функция $S(x)$ лишь непрерывна и имеет скачки первой производной в узлах, а на каждом частичном отрезке совпадает с двухточечным интерполянтом в линейной оболочке функций e^x и e^{-x} , что и обеспечивает квадратичный порядок приближения. Для сравнения отметим, что в случае $m = 3$, рассмотренном в [22], сплайн принадлежит классу непрерывно дифференцируемых функций более высокого порядка гладкости, и наблюдаемый порядок сходимости выше.

Замечание 3. Наблюдаемый порядок $O(h^2)$ объясняется структурой построенного сплайна. При $m = 1$ функция S лишь непрерывна, а её первая производная терпит разрывы в узлах; поэтому на каждом частичном отрезке $[x_\beta, x_{\beta+1}]$ сплайн есть единственный элемент линейной оболочки функций e^x и e^{-x} , принимающий в концах этого отрезка значения интерполируемой функции. Пара функций $\{e^x, e^{-x}\}$ образует на отрезке чебышевскую систему, а погрешность двухточечной интерполяции по чебышевской системе из двух функций на дважды непрерывно дифференцируемой функции есть величина порядка квадрата длины отрезка. Так как это верно равно-

мерно по β , для всего отрезка $[0, 1]$ получаем порядок $O(h^2)$, что и подтверждается таблицей 2.

Абсолютные погрешности для f_1 и f_2 при $N = 10$ и $N = 100$ изображены на рис. 3 и 4. Погрешность обращается в нуль в узлах интерполяции, что согласуется с условиями (5), а при увеличении числа узлов в десять раз максимальная погрешность уменьшается примерно на два порядка, что вновь подтверждает порядок $O(h^2)$, полученный в таблице 2.

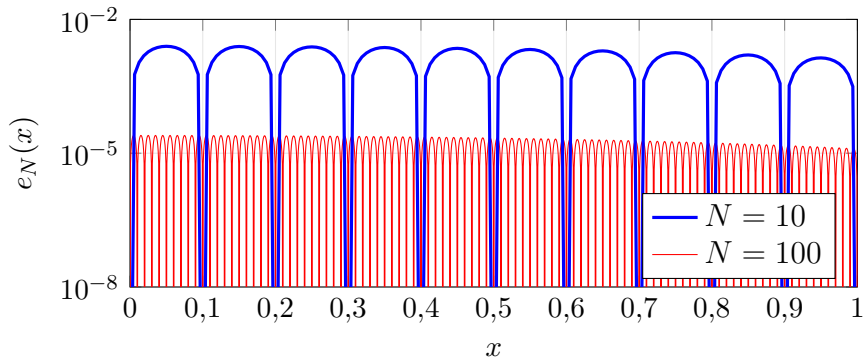


Рис. 3 Абсолютная погрешность интерполяционного сплайна (21) для многочлена $f_1(x) = x^2$ при $N = 10$ (синяя линия) и $N = 100$ (красная линия); логарифмическая шкала по оси ординат.

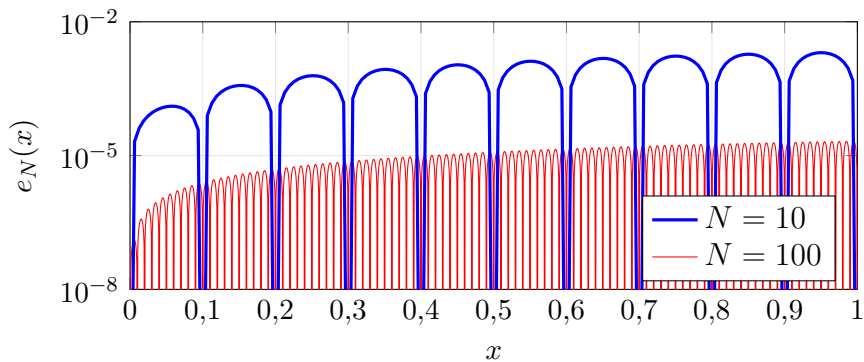


Рис. 4 Абсолютная погрешность интерполяционного сплайна (21) для тригонометрической функции $f_2(x) = \sin x$ при $N = 10$ (синяя линия) и $N = 100$ (красная линия); логарифмическая шкала по оси ординат.

Приведённые эксперименты подтверждают все установленные выше свойства: сплайн удовлетворяет условиям интерполяции в узлах, точен на функциях e^x и e^{-x} , порождающих ядро оператора L^*L , и сходится с порядком $O(h^2)$ на гладких функциях общего вида. Вычисления по формулам (28)–(30) не требуют обращения матриц, поэтому построение сплайна при больших N остаётся устойчивым и экономичным.

3.8 Обсуждение

Сопоставим полученные результаты с общей конструкцией раздела 2 и с известными случаями. Основное отличие случая $m = 1$ состоит в структуре дискретного аналога. Согласно теореме 2, при произвольном нечётном m функция $D_m[\beta]$ складывается из конечной части и суммы $m - 1$ убывающих геометрических прогрессий с

показателями λ_k , лежащими внутри единичного круга. Отыскание этих показателей требует решения алгебраического уравнения высокой степени, а вычисление коэффициентов сплайна — суммирования рядов, сходящихся тем медленнее, чем ближе $|\lambda_k|$ к единице. При $m = 1$ число таких показателей равно нулю, поэтому дискретный аналог сводится к трёхточечному шаблону (24), а все выкладки замыкаются в элементарных функциях. Именно это обстоятельство позволяет получить формулы (28)–(30) в законченном виде, тогда как уже при $m = 3$ соответствующие выражения [22] содержат геометрические суммы и решаются относительно нескольких вспомогательных постоянных.

С вычислительной точки зрения полученная схема обладает тремя свойствами, существенными для приложений. Во-первых, её сложность линейна по числу узлов и не требует хранения матриц, что позволяет обрабатывать подробные сетки. Во-вторых, формулы локальны: коэффициент, отвечающий узлу, определяется значениями интерполируемой функции не более чем в трёх соседних узлах, поэтому локальное изменение данных не перестраивает всю картину. В-третьих, сплайн точен на функциях e^x и e^{-x} , то есть на решениях того однородного уравнения, которое порождает пространство; это делает схему предпочтительной там, где приближаемая функция близка к решению линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.

Отметим также методическую связь рассматриваемой задачи с теорией оптимальных квадратурных формул. Дискретные аналоги дифференциальных операторов, играющие здесь ключевую роль, были введены именно для вычисления коэффициентов оптимальных квадратурных формул [7, 11], и та же техника применяется в задачах о весовых формулах и формулах для осциллирующих интегралов [23–26]. Тем самым построенный сплайн естественно вписывается в общую схему, в которой интерполяционные и квадратурные задачи решаются единым методом.

Ограничения предлагаемого подхода также очевидны. Формулы теоремы 5 выведены для равномерной сетки: именно постоянство шага позволяет перейти к свёрточной форме и воспользоваться дискретным аналогом. Кроме того, порядок сходимости $O(h^2)$, установленный экспериментально и объяснённый в замечании 3, ниже, чем у сплайнов, отвечающих большим значениям m , что естественно, поскольку при $m = 1$ сплайн обладает наименьшей возможной гладкостью.

4 Заключение

В работе методом С. Л. Соболева изложена общая конструкция интерполяционных сплайнов, минимизирующих полунорму гильбертова пространства $W_2^{(m,0)}(0, 1)$, связанного с оператором $d^{2m}/dx^{2m} - 1$ при произвольном нечётном m . Приведены представление сплайна через фундаментальное решение этого оператора, система линейных уравнений для его коэффициентов, теорема существования и единственности, а также дискретный аналог оператора и алгоритм Соболева вычисления коэффициентов.

Показано, что задача при $m = 1$ является частным случаем общей конструкции: общий алгоритм приводит в этом случае к замкнутому трёхточечному дискретному аналогу оператора $d^2/dx^2 - 1$, не содержащему убывающей геометрической части, а коэффициенты интерполяционного сплайна выписываются в явной элементарной форме (28)–(30). Установлено, что построенный сплайн точен на показательных функциях e^x и e^{-x} , а его коэффициенты при внутренних узлах согласуются с известными ранее результатами при отличии самого сплайна. Вычислительный экс-

перимент подтверждает второй порядок сходимости на гладких функциях общего вида.

Открытым остаётся вопрос о точных оценках погрешности построенного сплайна в норме рассматриваемого пространства и о переносе полученных явных формул на случай неравномерных сеток; эти задачи авторы предполагают рассмотреть отдельно.

Декларации

Финансирование. Исследование выполнено при поддержке Академии наук Республики Узбекистан.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Вклад авторов. Болтаев А.К. — постановка задачи, общая конструкция для произвольного нечётного порядка и доказательство основной теоремы; Пардаева О.Ф. — вывод явных формул для коэффициентов, вычислительный эксперимент и оформление результатов.

Доступность данных. Все числовые данные, приведённые в работе, получены по выписанным в ней формулам; программная реализация доступна у авторов по обоснованному запросу.

Литература

- [1] *Ahlberg J. H., Nilson E. N., Walsh J. L.* The theory of splines and their applications. — New York: Academic Press, 1967. — 284 p.
- [2] *Schumaker L. L.* Spline functions: basic theory. — 3rd ed. — Cambridge: Cambridge University Press, 2007. — 582 p.
- [3] *Stechkin S. B., Subbotin Yu. N.* Splines in computational mathematics. — Moscow: Nauka, 1976. — 248 p.
- [4] *Vasilenko V. A.* Spline functions: theory, algorithms, programs. — Novosibirsk: Nauka, 1983. — 215 p.
- [5] *Laurent P.-J.* Approximation and optimization. — Moscow: Mir, 1975. — 496 p.
- [6] *Sobolev S. L.* Introduction to the theory of cubature formulas. — Moscow: Nauka, 1974. — 808 p.
- [7] *Sobolev S. L.* Coefficients of optimal quadrature formulas // *Doklady Akademii Nauk SSSR.* — 1977. — Vol. 235, № 1. — P. 34–37.
- [8] *Vladimirov V. S.* Generalized functions in mathematical physics. — Moscow: Nauka, 1979. — 320 p.
- [9] *Jamalov Z. Zh.* On a difference analogue of an operator and its construction // *Direct and Inverse Problems for Partial Differential Equations and Their Applications.* — Tashkent: Fan, 1978. — P. 97–108.
- [10] *Jamalov Z. Zh., Shadimetov Kh. M.* On optimal quadrature formulas // *Doklady Akademii Nauk UzSSR.* — 1980. — № 7. — P. 3–5.
- [11] *Shadimetov Kh. M.* The discrete analogue of an operator and its construction // *Problems of Computational and Applied Mathematics.* — 1985. — № 79. — P. 22–35.
- [12] *Shadimetov Kh. M., Hayotov A. R.* Construction of the discrete analogue of a differential operator // *Uzbek Mathematical Journal.* — 2004. — № 2. — P. 85–95.
- [13] *Shadimetov Kh. M., Hayotov A. R.* Properties of the discrete analogue of a differential operator // *Uzbek Mathematical Journal.* — 2004. — № 4. — P. 72–83.
- [14] *Shadimetov Kh. M., Hayotov A. R.* Computation of the coefficients of optimal quadrature formulas in the Sobolev space // *Uzbek Mathematical Journal.* — 2004. — № 3. — P. 67–82.

- [15] *Hayotov A. R.* Construction of the discrete analogue of a differential operator and its properties // Uzbek Mathematical Journal. — 2009. — № 3. — P. 81–88.
- [16] *Hayotov A. R.* Discrete analogues of some differential operators // Uzbek Mathematical Journal. — 2012. — № 1. — P. 151–155.
- [17] *Shadimetov Kh. M., Hayotov A. R.* Construction of interpolation splines minimizing semi-norm in $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ space // BIT Numerical Mathematics. — 2013. — Vol. 53, № 2. — P. 545–563. — doi: <https://doi.org/10.1007/s10543-012-0407-z>.
- [18] *Hayotov A. R., Milovanović G. V., Shadimetov Kh. M.* Interpolation splines minimizing a semi-norm // Calcolo. — 2014. — Vol. 51, № 2. — P. 245–260. — doi: <https://doi.org/10.1007/s10092-013-0080-x>.
- [19] *Babaev S. S., Hayotov A. R.* Optimal interpolation formulas in the space $W_2^{(m,m-1)}$ // Calcolo. — 2019. — Vol. 56, № 3. — Art. 23. — doi: <https://doi.org/10.1007/s10092-019-0320-9>.
- [20] *Hayotov A. R., Milovanović G. V., Shadimetov Kh. M.* Optimal quadrature formulas and interpolation splines minimizing the semi-norm in the Hilbert space $K_2(P_2)$ // Analytic Number Theory, Approximation Theory, and Special Functions / ed. by G. V. Milovanović, M. Th. Rassias. — New York: Springer, 2014. — P. 573–611. — doi: https://doi.org/10.1007/978-1-4939-0258-3_22.
- [21] *Shadimetov Kh. M., Hayotov A. R.* Optimal quadrature formulas in the sense of Sard in $W_2^{(m,m-1)}$ space // Calcolo. — 2014. — Vol. 51, № 2. — P. 211–243. — doi: <https://doi.org/10.1007/s10092-013-0076-6>.
- [22] *Shadimetov Kh. M., Boltaev A. K.* An exponential-trigonometric spline minimizing a seminorm in a Hilbert space // Advances in Difference Equations. — 2020. — Vol. 2020. — Art. 352. — doi: <https://doi.org/10.1186/s13662-020-02805-8>.
- [23] *Shadimetov Kh. M., Hayotov A. R., Abdikayimov B.* On an optimal quadrature formula in a Hilbert space of periodic functions // Algorithms. — 2022. — Vol. 15, № 10. — Art. 344. — doi: <https://doi.org/10.3390/a15100344>.
- [24] *Shadimetov Kh. M., Gulomov O.* Optimal quadrature formulas for calculating integrals of rapidly oscillating functions // Journal of Mathematical Sciences. — 2023. — Vol. 277, № 3. — P. 446–457. — doi: <https://doi.org/10.1007/s10958-023-06848-6>.
- [25] *Shadimetov Kh. M., Hayotov A. R., Khayriev U.* Optimal quadrature formulas for approximating strongly oscillating integrals in the Hilbert space $\widetilde{W}_2^{(m,m-1)}$ of periodic functions // Journal of Computational and Applied Mathematics. — 2025. — Vol. 453. — Art. 116133. — doi: <https://doi.org/10.1016/j.cam.2024.116133>.
- [26] *Shadimetov Kh. M., Usmanov Kh.* Weighted optimal quadrature formulas in Sobolev space and their applications // Algorithms. — 2025. — Vol. 18, № 7. — Art. 374. — doi: <https://doi.org/10.3390/a18070374>.
- [27] *Babaev S. S.* The weighted optimal quadrature formula with derivatives in the Hilbert space // Problems of Computational and Applied Mathematics. — 2024. — № 4/2(60). — P. 99–107.
- [28] *Shadimetov Kh. M., Tursunmuradov S. T.* Optimal quadrature formulas in the Sobolev space of complex-valued functions // Uzbek Mathematical Journal. — 2025. — Vol. 69, № 4. — P. 194–200. — doi: <https://doi.org/10.29229/uzmj.2025-4-19>.
- [29] *Vaskevich V. L., Turgunov I. M.* Optimal quadrature formulas for curvilinear integrals of the first kind // Siberian Advances in Mathematics. — 2024. — Vol. 34, № 1. — P. 80–90. — doi: <https://doi.org/10.1134/S1055134424010048>.

- [30] *Boltaev A.K., Pardaeva O.F.* An approach to computing optimal coefficients of an interpolation spline // Scientific Reports of Bukhara State University. — 2026. — № 5. — P. 228–231.

UDC 519.65

INTERPOLATION SPLINES MINIMIZING A SEMI-NORM IN A SOBOLEV HILBERT SPACE*

¹*Boltaev A.K.*, ²*Pardaeva O.F.*

a.boltayev@nordicuniversity.org

¹Nordic International University, 8/2, Bunyodkor str., Tashkent, 100043 Uzbekistan;

²V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics of the Uzbekistan Academy of Sciences, 9, University str., Tashkent, 100174 Uzbekistan

Background: The interpolation problem is one of the central problems of approximation theory. Its classical solution relies on the interpolation polynomial; however, polynomial approximation is inefficient for functions of finite and low smoothness, which occur most often in applications. Splines are therefore used, understood in the variational sense as elements of a Hilbert space that minimize a certain functional. For spaces generated by linear differential operators with constant coefficients such splines are constructed by Sobolev's method, which rests upon discrete analogues of differential operators.

Purpose: To present the general construction of the interpolation spline minimizing the semi-norm of the space in question for an arbitrary odd order of the differential operator, and to show that the problem corresponding to the first odd order is a particular case of this construction admitting a fully explicit solution.

Method: The variational problem is reduced to a system of linear equations for the jumps of the highest derivative of the spline; the system is rewritten in convolution form in terms of discrete argument functions, and its solution is recovered by convolution with the discrete analogue of the corresponding differential operator of even order.

Results: For the first odd order the discrete analogue is obtained in a closed three-point form containing no decaying geometric part, which makes it possible to write the coefficients of the spline in explicit elementary form. The spline is exact on the exponential functions spanning the kernel of the operator; its coefficients at the interior nodes agree with previously known results, whereas the spline itself differs from the known one. Numerical experiments confirm this exactness and the second order of convergence on smooth functions of general form.

Implication: The formulas complete the family of exponential interpolation splines at the first odd level and yield an algorithm that is simple to implement.

Keywords: interpolation spline, semi-norm, Sobolev method, discrete analogue of operator, Hilbert space

Citation: Boltaev A.K., Pardaeva O.F. 2026. Interpolation splines minimizing a semi-norm in a Sobolev Hilbert space. *Problems of Computational and Applied Mathematics*. 4/1(75):98-115.

DOI: 10.71310/pcam.4-1_75.2026.08

*The research was supported by the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan.

HISOBLASH VA AMALIY MATEMATIKA MUAMMOLARI

ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ
И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
PROBLEMS OF COMPUTATIONAL
AND APPLIED MATHEMATICS

ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

№ 4/1(75) 2026

Журнал основан в 2015 году.

Издается 6 раз в год.

Учредитель:

Научно-исследовательский институт развития цифровых технологий и
искусственного интеллекта.

Главный редактор:

Равшанов Н.

Заместители главного редактора:

Арипов М.М., Шадиметов Х.М., Ахмедов Д.Д.

Ответственный секретарь:

Убайдуллаев М.Ш.

Редакционный совет:

Азамов А.А., Алоев Р.Д., Амиргалиев Е.Н. (Казахстан), Арушанов М.Л.,
Боборахимов Б.И., Бурнашев В.Ф., Джумаёзов У.З., Загребина С.А. (Россия),
Задорин А.И. (Россия), Игнатъев Н.А., Ильин В.П. (Россия),
Иманкулов Т.С. (Казахстан), Исмагилов И.И. (Россия), Кабанихин С.И. (Россия),
Курбонов Н.М., Маматов Н.С., Мирзаев Н.М., Мурадов Ф.А., Назирова Э.Ш.,
Нормуродов Ч.Б., Нуралиев Ф.А., Нуралиев Ф.М., Опанасенко В.Н. (Украина),
Расулмухамедов М.М., Садуллаева Ш.А., Старовойтов В.В. (Беларусь),
Хаётов А.Р., Халджигитов А., Хамдамов Р.Х., Хужаев И.К., Хужаеров Б.Х.,
Эшмаматова Д.Б., Дустмуродова Ш.Ж., Чье Ен Ун (Россия),
Шабозов М.Ш. (Таджикистан), Dimov I. (Болгария), Li Y. (США),
Mascagni M. (США), Min A. (Германия), Singh M. (Южная Корея).

Журнал зарегистрирован в Агентстве информации и массовых коммуникаций при
Администрации Президента Республики Узбекистан.

Свидетельство №0856 от 5 августа 2015 года.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

При перепечатке материалов ссылка на журнал обязательна.

За точность фактов и достоверность информации ответственность несут авторы.

Адрес редакции:

100125, г. Ташкент, м-в. Буз-2, 17А.

Тел.: +(998) 71 263-41-98.

Э-почта: journals@airi.uz.

Веб-сайт: <https://journals.airi.uz>.

Дизайн и вёрстка:

Шарипов Х.Д.

Отпечатано в типографии НИИ РЦТТИ.

Подписано в печать 05.10.2026 г.

Формат 60x84 1/8. Заказ № 5. Тираж 100 экз.

PROBLEMS OF COMPUTATIONAL AND APPLIED MATHEMATICS

No. 4/1(75) 2026

The journal was established in 2015.
6 issues are published per year.

Founder:

Digital Technologies and Artificial Intelligence Development Research Institute.

Editor-in-Chief:

Ravshanov N.

Deputy Editors:

Aripov M.M., Shadimetov Kh.M., Akhmedov D.D.

Executive Secretary:

Ubaydullaev M.Sh.

Editorial Council:

Azamov A.A., Aloev R.D., Amirgaliev E.N. (Kazakhstan), Arushanov M.L.,
Boborakhimov B.I., Burnashev V.F., Djumayozov U.Z., Zagrebina S.A. (Russia),
Zadorin A.I. (Russia), Ignatiev N.A., Ilyin V.P. (Russia), Imankulov T.S. (Kazakhstan),
Ismagilov I.I. (Russia), Kabanikhin S.I. (Russia), Kurbonov N.M., Mamatov N.S.,
Mirzaev N.M., Muradov F.A., Nazirova E.Sh., Normurodov Ch.B., Nuraliev F.A.,
Nuraliev F.M., Opanasenko V.N. (Ukraine), Sadullaeva Sh.A.,
Starovoitov V.V. (Belarus), Khayotov A.R., Khaldjigitov A., Khamdamov R.Kh.,
Khujaev I.K., Khujayorov B.Kh., Eshmamatova D.B., Dustmurodova Sh.J.,
Chye En Un (Russia), Shabozov M.Sh. (Tajikistan), Dimov I. (Bulgaria), Li Y. (USA),
Mascagni M. (USA), Min A. (Germany), Singh M. (South Korea).

The journal is registered by Agency of Information and Mass Communications under the
Administration of the President of the Republic of Uzbekistan.

Certificate of Registration No. 0856 of 5 August 2015.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

At a reprint of materials the reference to the journal is obligatory.
Authors are responsible for the accuracy of the facts and reliability of the information.

Address:

100125, Tashkent, Buz-2, 17A.

Tel.: +(998) 71 263-41-98.

E-mail: journals@airi.uz.

Web-site: <https://journals.airi.uz>.

Layout design:

Sharipov Kh.D.

DTAIRI printing office.

Signed for print 05.10.2026

Format 60x84 1/8. Order No. 5. Print run of 100 copies.

Содержание

Хаётов А.Р., Мухторова М.М.

Функции гистосплайна при восстановлении функций по интегральным значениям 5

Олимов Н.Н.

Численное решение линейных интегральных уравнений Фредгольма второго рода на основе оптимальных интерполяционных формул с производными . . 16

Бабаев С.С., Элмуродова С.С.

Численное приближение дробных интегралов: оптимальный квадратурный подход, основанный на фи-функциях 29

Кулдошев Х.М.

Выражения для коэффициентов оптимальных квадратурных формул с параметром 41

Хаётов А.Р., Хусаинов А.

Альтернативный вывод и численный анализ оптимальной интерполяционной формулы в гильбертовом пространстве 61

Хаитов Т.О.

Оптимальные методы численного интегрирования, основанные на алгебраических и тригонометрических функциях 72

Шадиметов Х.М., Нафасов А.Ю.

Квадрат нормы функционала погрешности интерполяционной формулы с третьей производной в гильбертовом пространстве 85

Болтаев А.К., Пардаева О.Ф.

Интерполяционные сплайны, минимизирующие полунорму в гильбертовом пространстве Соболева 98

Бердимуродова У.А.

Явные коэффициенты и оценка погрешности оптимальной квадратурной формулы 116

Полвонов С.З.

Оптимальная квадратурная формула с кратными узлами в гильбертовом пространстве 127

Барраева С.Ш.

Оптимальные квадратурные формулы с тригонометрическими весами в пространстве Соболева 141

Нуралиев Ф.А., Абдуллаева Г.Ш.

Сравнительный анализ алгебраико-гиперболических натуральных сплайнов шестого порядка и интегральных квазиинтерполяционных сплайнов 153

Ахмедов Д.М., Шомаликова М.Ш.

Оптимальная квадратурная формула типа Эрмита со слабосингулярным весом методом РН-функций 167

Хаётов А.Р., Пирнапасов С.О.

Приближённое вычисление дробной производной Капуто 180

Буваширов Д.С., Алиев Ш.Е.

Оптимальные квадратурные формулы для интегралов типа Коши с тригонометрическими весами 190

Насруллаев П.А., Джурабоева О.С., Саманова Г.Б.

Консервативная модель переноса примесей в атмосфере над сложным рельефом 201

Contents

<i>Hayotov A.R., Mukhtorova M.M.</i>	
Histospline functions in reconstructing functions using integral values	5
<i>Olimov N.N.</i>	
Numerical solution of linear Fredholm integral equations of the second kind based on optimal interpolation formulas with derivatives	16
<i>Babaev S.S., Elmurodova S.S.</i>	
Numerical approximation of fractional integrals: an optimal quadrature approach based on phi-functions	29
<i>Kuldoshev Kh.M.</i>	
Expressions for the coefficients of optimal quadrature formulas with a parameter	41
<i>Hayotov A.R., Husainov A.</i>	
Alternative derivation and numerical analysis of an optimal interpolation formula in the Hilbert space	61
<i>Khaitov T.O.</i>	
Optimal numerical integration rules based on algebraic and trigonometric functions	72
<i>Shadimetov Kh.M., Nafasov A.Y.</i>	
The squared norm of the error functional for a third-derivative interpolation formula in a Hilbert space	85
<i>Boltaev A.K., Pardaeva O.F.</i>	
Interpolation splines minimizing a semi-norm in a Sobolev Hilbert space	98
<i>Berdimuradova U.A.</i>	
Explicit coefficients and error estimate for an optimal quadrature formula	116
<i>Polvonov S.Z.</i>	
Optimal quadrature formula with multiple nodes in a Hilbert space	127
<i>Barraeva S.Sh.</i>	
Optimal quadrature formulas with trigonometric weights in a Sobolev space	141
<i>Nuraliev F.A., Abdullaeva G.Sh.</i>	
A comparative analysis of sixth-order algebraic-hyperbolic natural splines and integral quasi-interpolating splines	153
<i>Akhmedov D.M., Shomalikova M.Sh.</i>	
Optimal Hermite-type quadrature with weakly singular weight via PHI-functions	167
<i>Hayotov A.R., Pirnapasov S.O.</i>	
Approximate calculation of the Caputo fractional-order derivative	180
<i>Buvasharov D.S., Aliev Sh.E.</i>	
Optimal quadrature formulas for highly oscillatory Cauchy-type integrals	190
<i>Nasrullayev P.A., Juraboyeva O.S., Samanova G.B.</i>	
A mass-conserving model of pollutant transport in the atmosphere over complex terrain	201