

УДК 519.63

ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ОПТИМАЛЬНЫХ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛ С ПАРАМЕТРОМ

^{1,2} *Кулдошев Х.М.*

hakimkhm1971@gmail.com

¹Институт математики имени В. И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан, 100174, Узбекистан, г. Ташкент, ул. Университетская, 9;²Ташкентский международный университет, 100084, Узбекистан, г. Ташкент, ул. Кичик халка йули, 7

Предпосылки. Приближенное интегрирование функций со специфическими свойствами гладкости требует применения особых математических подходов, среди которых выделяется алгоритм оптимизации квадратур в смысле Сарда. Существующие вычислительные методы преимущественно ориентированы на классические банаховы или гильбертовы пространства. Однако современные прикладные задачи часто оперируют функциями из более сложных функциональных классов, учитывающих дополнительные дифференциальные характеристики и специализированные параметры. Использование традиционных алгоритмов для таких классов существенно ограничивает точность вычислений, что обуславливает острую необходимость в разработке новых, адаптированных вычислительных схем.

Цель. Разработка и теоретическое обоснование аналитического метода построения оптимальных квадратурных формул для специализированного функционального пространства. Основное внимание уделяется минимизации погрешности интегрирования путем нахождения точных значений весовых коэффициентов для заданного класса подынтегральных функций.

Метод. Предлагаемый подход базируется на нахождении экстремальной функции функционала погрешности рассматриваемой квадратуры. Эта задача решается путем построения обобщенного решения линейного дифференциального уравнения, дополненного соответствующими граничными условиями. Основная новизна заключается в аналитическом вычислении квадрата нормы функционала погрешности, что позволяет свести исходную проблему к системе линейных алгебраических уравнений относительно искомых весов. Для ее точного решения применяется специально построенный дискретный аналог дифференциального оператора, строго учитывающий внутреннюю специфику исследуемого пространства.

Результаты. В ходе математического анализа получены явные аналитические выражения для оптимальных коэффициентов квадратурных формул. Найденные точные соотношения значительно упрощают практическую реализацию алгоритма и позволяют полностью избежать вычислительной неустойчивости, неизбежно возникающей при численном обращении матриц большой размерности. Вычисленный квадрат нормы функционала подтверждает высокую надежность метода и гарантирует достижение минимально возможной погрешности интегрирования для всего рассматриваемого класса функций.

Значимость. Полученные результаты существенно расширяют существующую теорию кубатурных формул. Доказано, что при соответствующем предельном переходе по весовому параметру пространства предложенные аналитические формулы строго преобразуются в известные фундаментальные результаты Соболева, Шади-метова и Кохлера, полученные ранее для классических пространств.

Ключевые слова: оптимальные квадратурные формулы, функционал погрешности, экстремальная функция, оптимальные коэффициенты, гильбертово пространство, функции дискретного аргумента

Цитирование: Кулдошев Х.М. Выражения для коэффициентов оптимальных квадратурных формул с параметром // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2026. – № 4/1(75). – С. 41-60.

DOI: 10.71310/psam.4-1_75.2026.04

1 Введение

Численное интегрирование остается важным инструментом современной прикладной математики, физики, инженерного анализа и науки о данных. В ситуациях, когда подынтегральная функция не имеет первообразной в элементарных функциях или задана дискретным набором данных, численные методы становятся единственным решением.

Несмотря на рост вычислительных мощностей, сложность решаемых задач увеличивается ещё быстрее. Актуальность алгоритмов интегрирования сегодня диктуется несколькими ключевыми факторами:

- Большая размерность: В квантовой механике, финансовой математике и машинном обучении приходится вычислять интегралы по пространствам с десятками или сотнями измерений. Классические методы здесь страдают от «проклятия размерности».
- Сложное поведение функций: Решение инженерных задач (например, радиолокация, акустика) требует интегрирования быстроосциллирующих, осциллирующих со степенными или интегральными особенностями функций.
- Ограниченность ресурсов: В системах реального времени (автопилоты, робототехника) вычисление функции может быть дорогостоящим по времени или вычислительным ресурсам. Требуется минимальное число узлов для достижения заданной точности.
- Анализ данных и дифференциальные уравнения: Метод конечных и граничных элементов (МКЭ/МГЭ), а также машинное обучение постоянно используют численные интегралы внутри итерационных циклов оптимизации.

В традиционном (алгебраическом) подходе квадратурная формула типа:

$$\int_a^b f(x) dx \cong \sum_{k=1}^N C_k f(x_k),$$

строится так, чтобы быть точной для всех многочленов до определенной степени n (например, формулы Гаусса).

Функциональный (вариационный) подход: Подход, заложенный А. Сардом, С.М. Никольским и С.Л. Соболевым, рассматривает погрешность квадратурной формулы как *линейный непрерывный функционал* $\ell(x)$ над функциональным пространством B (обычно гильбертово или банахово пространство, такое как пространство Соболева $W_2^{(m)}$).

Задача построения *оптимальной квадратурной формулы* заключается в **минимизации нормы функционала погрешности** по коэффициентам C_k и/или узлам x_k

$$\|\ell\|_{B^*} \rightarrow \min.$$

Сард предложил фиксировать узлы (например, равноотстоящие) и находить весовые коэффициенты C_k минимизирующие норму погрешности. Это приводит к системам линейных алгебраических уравнений с матрицами специального вида.

С. Л. Соболев применил аппарат теории функций и дифференциальных уравнений в частных производных для анализа функционала погрешности. В этом подходе экстремальная функция погрешности выражается через фундаментальное решение некоторого оператора (например, полигармонического уравнения), что позволяет находить оптимальные коэффициенты в явном аналитическом виде для различных классов пространств.

В области оптимальных квадратурных формул имеются следующие современные направления:

- а) *Интегралы от быстроосциллирующих функций*: Для вычисления интегралов вида $\int a(x)e^{i\omega x}dx$ стандартные методы Гаусса требуют огромного числа узлов при $\omega \gg 1$. Построение оптимальных квадратурных формул в пространствах Соболева с учетом весовых осциллирующих множителей позволяет получать точные результаты при минимальном N независимо от величины ω .
- б) *Сингулярные и дробные интегралы*: Активно развиваются оптимальные квадратурные формулы для функций со степенными и логарифмическими особенностями, а также для операторов дробного интегрирования.
- в) *Оптимальные формулы типа Эрмита*: Формулы, использующие не только значения самой функции $f(x_k)$, но и значения ее производных, обеспечивают более высокую скорость сходимости при меньшем числе узлов.
- г) *Аппроксимация коэффициентов Фурье*: Строятся специальные оптимальные квадратурные формулы для пространства периодических и непериодических функций, позволяющие вычислять преобразования Фурье и Бесселя с высокой точностью.

Следует отметить, что переход от стандартных квадратурных формул к оптимальным на основе функционального анализа позволяет существенно снизить объемы вычислений без потери точности. Это делает теорию оптимального интегрирования фундаментальной базой для современного научного программного обеспечения, решающего задачи математической физики и обработки данных.

По оптимальным формулам численного интегрирования основными монографиями являются работы С. Л. Соболева [1], С. М. Никольского [2], А. Сарда [3], а также С. Л. Соболева и В. Л. Васкевича [4].

По оптимальным квадратурным формулам в последнее время получено много новых научных результатов. Из них можно отметить следующие.

В обзорной статье [5] исследована оптимальность некоторых классов квадратурных формул в смысле Никольского с использованием метода φ -функций. Установлено взаимно однозначное соответствие между φ -функциями и квадратурными формулами. Кроме того, приводится ряд примеров квадратурных формул, оптимальных в смысле Никольского по погрешности. В работе [6] получены оптимальные квадратурные формулы с положительными коэффициентами в пространстве Соболева $L_2^{(m)}(0, 1)$.

Работы [7, 8] посвящены получению оптимальных квадратурных формул для приближенного вычисления коэффициентов Фурье в пространствах Соболева периодических, комплекснозначных функций. Работа [9] посвящена вариационному методу построения оптимальных квадратурных формул в смысле Сарда в гильбертовом пространстве $\widetilde{W}_2^{(m, m-1)}$ комплекснозначных и периодических функций. При этом коэф-

коэффициенты оптимальной квадратурной формулы находятся отдельно в случае, когда ωh является целым числом, и в случае, когда ωh не является целым числом.

В работе [10] авторами найдена экстремальная функция функционала погрешности весовых квадратурных формул в пространстве Соболева комплекснозначных функций. Используя полученную экстремальную функцию, они вычислили квадрат нормы функционала погрешности. Путем минимизации квадрата нормы функционала погрешности по коэффициентам квадратурных формул получили систему для определения оптимальных коэффициентов рассматриваемой квадратурной формулы в пространстве Соболева. Кроме того, доказывали аналог теоремы Иво Бабушки. А в работе [11] исследована задача построения весовых оптимальных квадратурных формул с производными в пространстве Соболева $L_2^{(m)}$. Доказаны существование и единственность таких оптимальных формул. Предложен и применен алгоритм для нахождения оптимальных коэффициентов. В конце представлены численные результаты.

В [12] авторы рассматривали задачу об оптимальных квадратурных формулах для криволинейных интегралов первого рода, которые являются точными для постоянных функций. Эта задача сводится к задаче минимизации для квадратичной формы от многих переменных, матрица которой симметрична и положительно определена. Они доказали, что целевая квадратичная функция достигает своего минимума в одной точке соответствующего многомерного пространства. Следовательно, для заданного множества узлов существует единственная оптимальная квадратурная формула на замкнутом гладком контуре.

В статье [13] автор рассматривал проблему построения оптимальной квадратурной формулы в смысле Сарда для численного интегрирования весовых интегралов в гильбертовом пространстве $W_2^{(m, m-1)}$ вещественнозначных функций. Им разработан алгоритм для построения таких оптимальных квадратурных формул.

Отдельное направление составляют работы, посвящённые численному вычислению интегралов в смысле главного значения по Коши от осциллирующих функций. В [14] построены квадратурные формулы для интегралов в смысле главного значения по Коши осциллирующего типа. В [15] исследованы квадратурные формулы для таких интегралов от осциллирующих функций. В работе [16] предложены равномерные аппроксимации интегралов в смысле главного значения по Коши от осциллирующих функций, а в [17] разработан усовершенствованный алгоритм их вычисления и рассмотрены его приложения.

Надо отметить, что результаты данной работы тесно связаны с результатами работ С. Л. Соболева [18], Х. М. Шадиметова [19] и П. Кохлера [20] об оптимальных квадратурных формулах в пространстве Соболева $L_2^{(m)}$, а также с результатом работы Х. М. Шадиметова и А. Р. Хаетова [21]. Из результатов настоящей работы при $\sigma \rightarrow 0$ мы получаем результат Соболева–Шадиметова–Кохлера [18–20], а при $\sigma = 1$ имеем результат Шадиметова–Хаетова [21]. Таким образом, в данной работе обсуждается задача построения оптимальных квадратурных формул в более общем пространстве.

2 Постановка задачи

Мы рассматриваем задачу оптимального приближения интеграла

$$I(f) = \int_0^1 f(x) dx, \quad (1)$$

для функций из пространства $W_{2,\sigma}^{(m,m-1)}(0,1)$. Здесь векторное пространство $W_{2,\sigma}^{(m,m-1)}(0,1)$ представляет собой гильбертово пространство вещественнозначных функций, производная m -го порядка которых интегрируема с квадратом. В этом пространстве скалярное произведение элементов f и g задается формулой

$$\langle f, g \rangle_W = \int_0^1 (f^{(m)}(x) + \sigma f^{(m-1)}(x)) (g^{(m)}(x) + \sigma g^{(m-1)}(x)) dx, \quad \sigma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \quad (2)$$

Данное пространство снабжено следующей нормой, соответствующей скалярному произведению (2)

$$\|f\|_W = \sqrt{\int_0^1 (f^{(m)}(x) + \sigma f^{(m-1)}(x))^2 dx}. \quad (3)$$

Основная цель настоящей работы — получить наилучшее приближение (в некотором смысле) интеграла (1) с помощью линейной комбинации

$$A(f) = \sum_{\beta=0}^N A_\beta f(x_\beta), \quad (4)$$

заданных значений функции $f(x_\beta)$, в узлах x_β , $\beta = 0, 1, \dots, N$, расположенных следующим образом

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N = 1,$$

для функций f из пространства $W_{2,\sigma}^{(m,m-1)}(0,1)$.

Таким образом, нам необходимо изучить задачу наилучшего приближения для следующей квадратурной формулы

$$I(f) \cong A(f). \quad (5)$$

Для достижения указанной цели мы должны оценить погрешность

$$\ell(f) = I(f) - A(f), \quad (6)$$

квадратурной формулы (5) в данном пространстве.

Разность (6) определяет линейный непрерывный функционал

$$\ell(x) = \varepsilon_{[0,1]}(x) - \sum_{\beta=0}^N A_\beta \delta(x - x_\beta), \quad (7)$$

который отображает элементы пространства $W_{2,\sigma}^{(m,m-1)}$ во множество $\mathbb{R}$ вещественных чисел. Функционал ℓ называется *функционалом погрешности* квадратурной формулы (5). Этот функционал является ограниченным, непрерывным и его норма в сопряженном пространстве $W_{2,\sigma}^{(m,m-1)*}$ определяется следующим образом

$$\|\ell\|_{W^*} = \sup_{f, \|f\|_W \neq 0} \frac{|\ell(f)|}{\|f\|_W}. \quad (8)$$

Отсюда мы получаем следующую оценку для погрешности (6) квадратурной формулы (5)

$$|\ell(f)| \leq \|\ell\|_{W^*} \cdot \|f\|_W. \quad (9)$$

Из этого неравенства легко видеть, что ядром функционала погрешности ℓ является подпространство

$$\text{span}\{1, x, \dots, x^{m-2}, e^{-\sigma x}\}, \quad (10)$$

гильбертова пространства $W_{2,\sigma}^{(m,m-1)}$, натянутое на функции $1, x, \dots, x^{m-2}$ и $e^{-\sigma x}$. Следовательно, в свою очередь, мы получаем точность квадратурных формул вида (5) для всех элементов множества (10). Это дает для функционала погрешности ℓ следующие необходимые условия

$$\ell(x^n) = 0, \quad n = 0, 1, \dots, m-2, \quad (11)$$

и

$$\ell(e^{-\sigma x}) = 0. \quad (12)$$

Из последних уравнений для коэффициентов квадратурной формулы (5) мы получаем следующую систему уравнений

$$\sum_{\beta=0}^N A_{\beta} x_{\beta}^n = \int_0^1 x^n dx, \quad n = 0, 1, \dots, m-2, \quad (13)$$

и

$$\sum_{\beta=0}^N A_{\beta} e^{-\sigma x_{\beta}} = \int_0^1 e^{-\sigma x} dx. \quad (14)$$

Отметим, что для существования решения этой системы (13) и (14) необходимо, чтобы выполнялось условие $N+1 \geq m$. Тогда мы получаем следующее утверждение.

Утверждение 1. Для функций гильбертова пространства $W_{2,\sigma}^{(m,m-1)}$ для существования оптимальной квадратурной формулы вида (5), точной для всех функций множества (10), необходимо, чтобы выполнялось условие $N+1 \geq m$.

Теперь обратим внимание на неравенство (9). Ввиду того, что норма $\|f\|_W$ функций f из пространства $W_{2,\sigma}^{(m,m-1)}$ ограничена, погрешность (6) квадратурной формулы (5) оценивается сверху с нормой $\|\ell\|_{W^*}$ функционала погрешности ℓ в сопряженном пространстве $W_{2,\sigma}^{(m,m-1)*}$. Отсюда получаем задачу оптимальных квадратурных формул в пространстве $W_{2,\sigma}^{(m,m-1)}$. Здесь мы рассмотрим оптимальность квадратурных формул вида (5) в пространстве $W_{2,\sigma}^{(m,m-1)}$ в смысле Сарда.

Таким образом, задача построения оптимальных квадратурных формул вида (5) в смысле Сарда в пространстве $W_{2,\sigma}^{(m,m-1)}$ состоит в нахождении коэффициентов A_{β}^* , $\beta = 0, 1, \dots, N$, дающих наименьшее значение

$$\inf_{A_{\beta}} \|\ell\|_{W^*}$$

норме функционала погрешности ℓ при фиксированных узлах x_{β} , $\beta = 0, 1, \dots, N$. При этом коэффициенты A_{β}^* называются *оптимальными коэффициентами*. А квадратурная формула вида (5) с коэффициентами A_{β}^* называется *оптимальной квадратурной формулой*.

В настоящей работе мы решаем следующую оптимизационную задачу.

Задача 1. Найти выражения для коэффициентов A_{β}^* квадратурных формул вида (5), доставляющие минимум норме функционала погрешности (7) при равноотстоящих узлах $x_{\beta} = h\beta$ в гильбертовом пространстве $W_{2,\sigma}^{(m,m-1)}(0, 1)$.

Далее, остальная часть статьи организована следующим образом.

- В параграфе 3 найдена экстремальная функция функционала погрешности ℓ квадратурной формулы (5). Для этого найдено обобщенное решение одного линейного дифференциального уравнения с граничными условиями в пространстве $W_{2,\sigma}^{(m,m-1)}$.
- Параграф 4 посвящен вычислению нормы функционала погрешности ℓ . При этом, на основе теоремы Рисса, получен квадрат нормы функционала погрешности как скалярное произведение функционала погрешности и экстремальной функции. Таким образом, получена верхняя оценка погрешности квадратурной формулы (5).
- В параграфе 5 получена система линейных алгебраических уравнений для коэффициентов оптимальных квадратурных формул вида (5) в пространстве $W_{2,\sigma}^{(m,m-1)}$. Для этого, чтобы найти условный минимум нормы функционала погрешности использован метод Лагранжа неопределенных множителей.
- Наконец, в параграфе 6, используя дискретный аналог дифференциального оператора $d^{2m}/dx^{2m} - \sigma^2 d^{2m-2}/dx^{2m-2}$, получены явные выражения для оптимальных коэффициентов.

3 Экстремальная функция для квадратурной формулы

Для решения задачи 1 мы сначала вычислим норму функционала погрешности (7). Для вычисления этой нормы мы используем понятие экстремальной функции квадратурной формулы [1].

Экстремальной функцией для функционала ℓ называется функция u_ℓ гильбертова пространства $W_{2,\sigma}^{(m,m-1)}$, удовлетворяющая следующему равенству

$$\ell(u_\ell) = \|\ell\|_{W^*} \|u_\ell\|_W. \quad (15)$$

С другой стороны, известно, что в гильбертовом пространстве $W_{2,\sigma}^{(m,m-1)}$ существует функция такая, что для линейного непрерывного функционала ℓ выполняется следующее соотношение (теорема Рисса о представлении линейно непрерывного функционала)

$$\ell(f) = \langle u_\ell, f \rangle_W \text{ для всех } f \in W_{2,\sigma}^{(m,m-1)}, \quad (16)$$

где $\langle u_\ell, f \rangle_W$ — скалярное произведение функций u_ℓ и f .

В данном параграфе, решая уравнение (16) для функций f пространства $W_{2,\sigma}^{(m,m-1)}$, мы находим функцию u_ℓ в $W_{2,\sigma}^{(m,m-1)}$. Мы делаем это в два этапа.

- Во-первых, мы решаем уравнение (16) для функций f в пространстве $C_0^\infty(0, 1)$.
- Затем, на втором этапе, используя плотность пространства $C_0^\infty(0, 1)$ в пространстве $W_{2,\sigma}^{(m,m-1)}$, мы решаем уравнение (16) для функций пространства $W_{2,\sigma}^{(m,m-1)}$.

3.1 Решение уравнения (16) в пространстве $C_0^\infty(0, 1)$

Известно, что $C_0^\infty(0, 1)$ — это пространство функций, финитных и бесконечно дифференцируемых на $[0, 1]$. Для функций этого пространства выполняется следующее условие

$$f^{(\alpha)}(0) = f^{(\alpha)}(1) = 0, \quad \alpha = 0, 1, 2, \dots \quad (17)$$

Здесь мы естественным образом находим слабое решение уравнения (16). Для этого мы используем равенство линейно-непрерывных функционалов, определенных на банаховом пространстве.

Определение 1. *Линейные, непрерывные функционалы ℓ_1 и ℓ_2 , определенные в банаховом пространстве B , называются равными, если для любого $f \in B$ выполняется следующее равенство*

$$\ell_1(f) = \ell_2(f). \quad (18)$$

Теперь мы рассмотрим правую часть уравнения (16) отдельно для функций f из пространства $C_0^\infty(0, 1)$. Тогда, интегрируя по частям и принимая во внимание (18), имеем

$$\langle u_\ell, f \rangle_W = (-1)^m \int_0^1 \left(u_\ell^{(2m)}(x) - \sigma^2 u_\ell^{(2m-2)}(x) \right) f(x) dx.$$

Теперь, подставляя последнее выражение в правую часть (16) и учитывая, что $f \in C_0^\infty(0, 1)$, получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \ell(x) f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} (-1)^m \left(u_\ell^{(2m)} - \sigma^2 u_\ell^{(2m-2)} \right) f(x) dx. \quad (19)$$

Из последнего интегрального уравнения для $f \in C_0^\infty(0, 1)$ мы приходим к следующему дифференциальному уравнению

$$u_\ell^{(2m)} - \sigma^2 u_\ell^{(2m-2)} = (-1)^m \ell(x). \quad (20)$$

Таким образом, искомая неизвестная функция u_ℓ является обобщенным решением уравнения (20).

Следовательно, справедливо следующее утверждение.

Утверждение 2. *Для функций пространства $C_0^\infty(0, 1)$ решение функционального уравнения (16) является обобщенным решением уравнения (20).*

3.2 Решение уравнения (16) в пространстве $W_2^{(m, m-1)}(0, 1)$

Теперь мы решим уравнение (16) для функций f из пространства $W_2^{(m, m-1)}(0, 1)$. Тогда, интегрируя по частям несколько раз правую часть уравнения (16), мы получаем следующее уравнение

$$\begin{aligned} \ell(f) = & \sum_{\alpha=0}^{m-2} (-1)^\alpha \left(u_\ell^{(m+\alpha)} + \sigma u_\ell^{(m+\alpha-1)} \right) \left(f^{(m-\alpha-1)} + \sigma f^{(m-\alpha-2)} \right) \Big|_{x=0}^{x=1} + \\ & + (-1)^{m-1} \left(u_\ell^{(2m-1)} + \sigma u_\ell^{(2m-2)} \right) f(x) \Big|_{x=0}^{x=1} + \\ & + (-1)^m \int_0^1 \left(u_\ell^{(2m)} - \sigma^2 u_\ell^{(2m-2)} \right) f(x) dx. \end{aligned} \quad (21)$$

Здесь, учитывая, что пространство $C_0^\infty(0, 1)$ плотно в пространстве $W_{2,\sigma}^{(m, m-1)}(0, 1)$, уравнение (21) должно быть справедливо в предельном состоянии для каждого элемента f в пространстве $W_{2,\sigma}^{(m, m-1)}$, поэтому мы приходим к следующей краевой задаче в пространстве $W_{2,\sigma}^{(m, m-1)}(0, 1)$.

Утверждение 3. *Решение функционального уравнения (16) является решением уравнения (20) на элементах f пространства $W_{2,\sigma}^{(m, m-1)}$ при следующих граничных условиях*

$$u_\ell^{(m+\alpha)}(0) + \sigma u_\ell^{(m+\alpha-1)}(0) = 0, \quad \alpha = 0, 1, \dots, m-1, \quad (22)$$

$$u_\ell^{(m+\alpha)}(1) + \sigma u_\ell^{(m+\alpha-1)}(1) = 0, \quad \alpha = 0, 1, \dots, m-1. \quad (23)$$

Следует отметить, что решение $u_\ell(x)$ уравнения (20), принадлежащее пространству $W_{2,\sigma}^{(m,m-1)}$ и удовлетворяющее условиям (22)–(23), определяется единственным образом. Эта функция $u_\ell(x)$ является экстремальной функцией для функционала погрешности ℓ , и для нее справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. В пространстве $W_{2,\sigma}^{(m,m-1)}$ решение уравнения (20), удовлетворяющее условиям (22)–(23), является экстремальной функцией u_ℓ , соответствующей функционалу погрешности ℓ , и имеет следующий вид

$$u_\ell(x) = (-1)^m \ell(x) * G_m(x) + P_{m-2}(x) + de^{-\sigma x}, \quad (24)$$

где

$$G_m(x) = \frac{\operatorname{sgn} x}{2\sigma^{2m-1}} \left(\frac{e^{\sigma x} - e^{-\sigma x}}{2} - \sum_{k=1}^{m-1} \frac{(\sigma x)^{2k-1}}{(2k-1)!} \right), \quad (25)$$

и $G_m(x)$ является фундаментальным решением оператора $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}} - \sigma^2 \frac{d^{2m-2}}{dx^{2m-2}}$, $P_{m-2}(x)$ — любой многочлен степени $(m-2)$, d — константа.

Доказательство. Здесь мы приводим краткое описание доказательства теоремы.

Во-первых, рассмотрим следующее однородное уравнение, соответствующее уравнению (20)

$$u_\ell^{(2m)}(x) - \sigma^2 u_\ell^{(2m-2)}(x) = 0.$$

Общее решение последнего уравнения имеет вид

$$u_\ell^h(x) = P_{2m-3}(x) + d_1 e^{\sigma x} + d_2 e^{-\sigma x}, \quad (26)$$

где $P_{2m-3}(x)$ — любой многочлен степени $(2m-3)$, d_1 и d_2 — константы.

Далее мы находим частное решение уравнения (20). Легко проверить, что следующая функция является частным решением этого уравнения

$$u_\ell^p(x) = (-1)^m \ell(x) * G_m(x), \quad (27)$$

где G_m определяется уравнением (25).

Тогда, принимая во внимание (26) и (27), мы имеем общее решение уравнения (20)

$$u_\ell(x) = u_\ell^p(x) + u_\ell^h(x).$$

От этого общего решения мы приходим к решению (24), удовлетворяющему условиям (22) и (23). Эта функция является элементом пространства $W_{2,\sigma}^{(m,m-1)}$, и она определена с точностью до многочленов степени $(m-2)$ и $de^{-\sigma x}$. То есть этот элемент представляет собой класс эквивалентных функций, которые отличаются друг от друга на линейные комбинации многочленов степени $(m-2)$ и $de^{-\sigma x}$.

Теорема 1 доказана.

4 Оценка погрешности квадратурной формулы (5) сверху

В данном параграфе мы получаем точную оценку сверху для погрешности квадратурной формулы (5) на функциях пространства $W_{2,\sigma}^{(m,m-1)}$. Для этого мы используем теорему Рисса о представлении общего вида линейного, непрерывного функционала, заданного в гильбертовом пространстве. Действительно, поскольку пространство $W_{2,\sigma}^{(m,m-1)}$ является гильбертовым пространством, уравнение (16) справедливо для функционала погрешности ℓ , и выполняется следующее соотношение

$$\|\ell\|_{W^*} = \|u_\ell\|_W. \quad (28)$$

Тогда, в частности, для $f = u_\ell$ из равенства (16) получаем

$$\ell(u_\ell) = \langle u_\ell, u_\ell \rangle_W = \|u_\ell\|_W^2.$$

Отсюда, на основании (28), мы приходим к следующему соотношению

$$\ell(u_\ell) = \|\ell\|_{W^*}^2. \quad (29)$$

Следовательно, вычисление нормы функционала погрешности ℓ с использованием (29) дает нам оценку сверху для погрешности квадратурной формулы (5) на основе неравенства (9). Таким образом, достаточно вычислить значение функционала ℓ на экстремальной функции u_ℓ . Тогда, используя (7) и (24), из (29) получаем

$$\begin{aligned} \|\ell\|_{W^*}^2 = (-1)^m & \left[\sum_{\beta=0}^N \sum_{\gamma=0}^N A_\beta A_\gamma G_m(x_\beta - x_\gamma) - \right. \\ & \left. - 2 \sum_{\beta=0}^N A_\beta \int_0^1 G_m(x - x_\beta) dx + \int_0^1 \int_0^1 G_m(x - y) dx dy \right]. \quad (30) \end{aligned}$$

Теперь для достижения поставленной цели мы находим минимальное значение выражения (30) по коэффициентам A_β при условиях (11) и (12). Для наглядности перепишем уравнения (11) и (12) в следующих удобных формах:

$$\int_0^1 x^n dx - \sum_{\beta=0}^N A_\beta x_\beta^n = 0, \quad n = 0, 1, \dots, m-2, \quad (31)$$

и

$$\int_0^1 e^{-\sigma x} dx - \sum_{\beta=0}^N A_\beta e^{-\sigma x_\beta} = 0. \quad (32)$$

Таким образом, в следующем параграфе мы обсудим задачу нахождения минимального значения выражения (30) при условиях (31) и (32).

5 Стационарная точка нормы функционала погрешности квадратурной формулы

Следует отметить, что выражение (30) является квадратичной функцией многих переменных относительно коэффициентов A_β . Для нахождения условного экстремума этой функции при условиях (31) и (32) мы используем метод неопределенных множителей Лагранжа. Для этого рассмотрим следующую функцию:

$$\begin{aligned} \Lambda(A_0, A_1, \dots, A_N, p_0, p_1, \dots, p_{m-2}, d) = \\ = \|\ell\|_{W^*}^2 - 2(-1)^m \sum_{n=0}^{m-2} p_n \ell(x^n) - 2(-1)^m d \ell(e^{-\sigma x}). \quad (33) \end{aligned}$$

Тогда стационарная точка функции Λ удовлетворяет следующей системе линейных алгебраических уравнений, которая получается путем взятия частных производных:

$$\sum_{\gamma=0}^N A_{\gamma} G_m(x_{\beta} - x_{\gamma}) + d e^{-\sigma x_{\beta}} + \sum_{n=0}^{m-2} p_n x_{\beta}^n = g_m(h\beta), \quad \beta = 0, 1, \dots, N, \quad (34)$$

$$\sum_{\gamma=0}^N A_{\gamma} e^{-\sigma x_{\gamma}} = g_e, \quad (35)$$

$$\sum_{\gamma=0}^N A_{\gamma} x_{\gamma}^n = g_n, \quad n = 0, 1, \dots, m-2, \quad (36)$$

где

$$g_m(h\beta) = \int_0^1 G_m(x - x_{\beta}) dx, \quad (37)$$

$$g_e = \int_0^1 e^{-\sigma x} dx, \quad (38)$$

$$g_n = \int_0^1 x^n dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots, m-2. \quad (39)$$

Эта система линейных алгебраических уравнений с $(N + m + 1)$ уравнениями и $(N + m + 1)$ неизвестными.

Заметим, что эта система имеет единственное решение при $N + 1 \geq m$. Решение этой системы является стационарной точкой функции (33) и обеспечивает минимум выражения (30). Соответствующие коэффициенты $A_0, A_1, \dots, A_N$ являются искомыми оптимальными коэффициентами.

Перед решением системы (34)–(36) вычислим интегралы в её правой части. Прямые вычисления дают следующее:

$$g_m(h\beta) = \frac{1}{\sigma^{2m}} \left[\frac{e^{\sigma(1-h\beta)} + e^{-\sigma(1-h\beta)} + e^{-\sigma h\beta} + e^{\sigma h\beta}}{4} - \sum_{k=1}^{m-1} \frac{(\sigma h\beta)^{2k} + (\sigma(1-h\beta))^{2k}}{2(2k)!} - 1 \right], \quad (40)$$

$$g_e = \frac{1 - e^{-\sigma}}{\sigma}, \quad (41)$$

$$g_n = \frac{1}{n+1}, \quad n = 0, 1, \dots, m-2. \quad (42)$$

В следующем параграфе найдем выражения для оптимальных коэффициентов, удовлетворяющих системе (34)–(36).

6 Коэффициенты оптимальных квадратурных формул вида (5)

В этом параграфе мы находим аналитическое решение системы (34)–(36). Для этого мы используем теорию функций дискретного аргумента, операции над ними [1], [4], дискретный аналог дифференциального оператора $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}} - \sigma^2 \frac{d^{2m-2}}{dx^{2m-2}}$ и его свойства.

Таким образом, в первом пункте мы приводим необходимые определения и теоремы, а затем, во втором пункте, получаем выражения для коэффициентов оптимальных квадратурных формул.

6.1 Функции дискретного аргумента. Дискретный аналог дифференциального оператора

В данном пункте мы приводим краткие сведения о функциях дискретного аргумента и соответствующих операциях над ними из книг [1], [4].

Пусть β — целое число и $h = \frac{1}{N}$, $N = 1, 2, \dots$. Предположим, что f и g — вещественные функции, заданные на вещественной прямой $\mathbb{R}$.

Функция $f(h\beta)$ называется *функцией дискретного аргумента*, если она задана на некотором множестве целых значений β .

В дальнейшем для простоты мы также будем использовать понятие «дискретная функция» вместо «функция дискретного аргумента».

Скалярное произведение двух дискретных функций $f(h\beta)$ и $g(h\beta)$ задается формулой

$$[f(h\beta), g(h\beta)] = \sum_{\beta=-\infty}^{\infty} f(h\beta)g(h\beta),$$

если ряд в правой части последнего равенства сходится абсолютно.

Сверткой двух функций $f(h\beta)$ и $g(h\beta)$ называется следующее скалярное произведение:

$$f(h\beta) * g(h\beta) = [f(h\gamma), g(h\beta - h\gamma)] = \sum_{\gamma=-\infty}^{\infty} f(h\gamma)g(h\beta - h\gamma).$$

Далее нам понадобится функция дискретного аргумента $D_m(h\beta)$, удовлетворяющая следующему уравнению:

$$D_m(h\beta) * G_m(h\beta) = \delta_d(h\beta), \quad (43)$$

где

$$G_m(h\beta) = \frac{\text{sgn}(h\beta)}{2\sigma^{2m-1}} \left(\frac{e^{\sigma h\beta} - e^{-\sigma h\beta}}{2} - \sum_{k=1}^{m-1} \frac{(\sigma h\beta)^{2k-1}}{(2k-1)!} \right), \quad (44)$$

$\sigma \neq 0$, а $\delta_d(h\beta)$ — дискретная дельта-функция, то есть

$$\delta_d(h\beta) = \begin{cases} 1, & \beta = 0, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Следует отметить, что уравнение (43) является дискретным аналогом следующего уравнения:

$$\left(\frac{d^{2m}}{dx^{2m}} - \sigma^2 \frac{d^{2m-2}}{dx^{2m-2}} \right) G_m(x) = \delta(x), \quad (45)$$

где $G_m(x)$ определена формулой (25), а $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака.

Дискретная функция $D_m(h\beta)$, удовлетворяющая уравнению (43), была построена в работе [HayotovKuldoshev, 2022. Problems of Com. and Appl. Math., 5/1(44): 112–122], где был получен следующий результат:

Теорема 2. Дискретный аналог дифференциального оператора $\left(\frac{d^{2m}}{dx^{2m}} - \sigma^2 \frac{d^{2m-2}}{dx^{2m-2}}\right)$, удовлетворяющий уравнению (43), имеет вид

$$D_m(h\beta) = \frac{2\sigma^{2m-1}}{q_{2m-2}} \begin{cases} \sum_{k=1}^{m-1} A_k \lambda_k^{|\beta|-1}, & |\beta| \geq 2, \\ -e^{\sigma h} + \sum_{k=1}^{m-1} A_k, & |\beta| = 1, \\ C_m + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{A_k}{\lambda_k}, & |\beta| = 0, \end{cases} \quad (46)$$

где

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{(1 - \lambda_k)^{2m-2} (-\lambda_k^2 e^{\sigma h} + (e^{2\sigma h} + 1)\lambda_k - e^{\sigma h}) q_{2m-2}}{\lambda_k Q'_{2m-2}(\lambda_k)}, \\ C_m &= e^{\sigma h}(2m-2) + e^{2\sigma h} + 1 + \frac{e^{\sigma h} q_{2m-3}}{q_{2m-2}}, \\ Q_{2m-2}(x) &= (1 - e^{2\sigma h})(1-x)^{2m-2} + \\ &+ 2(x(1 + e^{2\sigma h}) - e^{\sigma h}(x^2 + 1)) \sum_{k=1}^{m-1} \frac{(\sigma h)^{2k-1} (1-x)^{2m-2k-2} E_{2k-2}(x)}{(2k-1)!}, \end{aligned}$$

здесь $E_{2k-2}(x)$ — многочлен Эйлера–Фробениуса степени $(2k-2)$, а λ_k — корни многочлена Q_{2m-2} , удовлетворяющие условию $|\lambda_k| < 1$.

Для дискретной функции $D_m(h\beta)$ справедливы следующие утверждения.

Теорема 3. Для функции дискретного аргумента $D_m(h\beta)$, определенной формулой (46), верны следующие равенства:

$$\begin{aligned} D_m(h\beta) * e^{\sigma h\beta} &= 0, \\ D_m(h\beta) * e^{-\sigma h\beta} &= 0, \\ D_m(h\beta) * (h\beta)^n &= 0, \quad n = 0, 1, \dots, (2m-3), \\ D_m(h\beta) * G_m(h\beta) &= \delta_d(h\beta), \end{aligned}$$

где $\delta_d(h\beta)$ — дискретная дельта-функция.

6.2 Выражения для оптимальных коэффициентов

Теперь решим систему уравнений (34)–(36). Для этого рассмотрим набор коэффициентов A_γ ($\gamma = 0, 1, \dots, N$) в системе как значения функции дискретного аргумента $A[\gamma]$ в точках $\gamma = 0, 1, \dots, N$, и положим функцию $A[\gamma]$ равной нулю при всех остальных целых значениях γ . То есть мы имеем:

$$A[\gamma] = \begin{cases} A_\gamma, & \gamma = 0, 1, \dots, N, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда, используя определение свертки для функций дискретного аргумента, мы можем переписать систему (34)–(36) в следующем виде:

$$A[\beta] * G_m(h\beta) + \sum_{n=0}^{m-2} p_n(h\beta)^n + de^{-\sigma h\beta} = g_m(h\beta), \quad \beta = 0, 1, \dots, N, \quad (47)$$

$$\sum_{\gamma=0}^N A[\gamma] e^{-\sigma h\gamma} = g_e, \quad (48)$$

$$\sum_{\gamma=0}^N A[\gamma] (h\gamma)^n = g_n, \quad n = 0, 1, \dots, m-2, \quad (49)$$

где $g_m(h\beta)$, g_e и g_n определены формулами (40)–(42).

Отсюда мы получаем следующее.

Задача 2. Решить систему (47)–(49) для заданных g_m , g_e и g_n .

Решая задачу 2, мы также находим оптимальные коэффициенты A_γ , $\gamma = 0, 1, \dots, N$.

Сначала найдем выражение для дискретной функции $A[\beta]$. Для этого обозначим левую часть уравнения (47) как функцию дискретного аргумента:

$$u_m(h\beta) = A[\beta] * G_m(h\beta) + \sum_{n=0}^{m-2} p_n(h\beta)^n + de^{-\sigma h\beta}. \quad (50)$$

Теперь рассмотрим полученную функцию дискретного аргумента $u_m(h\beta)$. Если мы определим эту функцию для всех целых чисел β , то для функции коэффициентов $A[\beta]$ мы получим:

$$A[\beta] = D_m(h\beta) * u_m(h\beta). \quad (51)$$

Учитывая (50), из (47) видно, что:

$$u_m(h\beta) = g_m(h\beta), \quad \beta = 0, 1, 2, \dots, N. \quad (52)$$

То есть функция $u_m(h\beta)$ известна при $\beta = 0, 1, 2, \dots, N$.

Теперь найдем вид дискретной функции $u_m(h\beta)$ для $\beta = -1, -2, \dots$ и $\beta = N + 1, N + 2, \dots$

Для $\beta = -1, -2, \dots$, используя (44), (48) и (49), из (50) получаем:

$$\begin{aligned} u_m(h\beta) = & \frac{-e^{\sigma h\beta}}{4\sigma^{2m-1}} \frac{1 - e^{-\sigma}}{\sigma} + \frac{e^{-\sigma h\beta}}{4\sigma^{2m-1}} \sum_{\gamma=0}^N A[\gamma] e^{\sigma h\gamma} + \\ & + \frac{1}{2\sigma^{2m-1}} \left[\sum_{k=1}^{\left[\frac{m+1}{2}\right]-1} \sum_{\alpha=0}^{2k-1} \frac{\sigma^{2k-1} (h\beta)^{2k-1-\alpha} (-1)^\alpha}{(2k-1-\alpha)! (\alpha+1)!} + \right. \\ & + \left. \sum_{k=\left[\frac{m+1}{2}\right]}^{m-1} \sum_{\alpha=0}^{m-2} \frac{\sigma^{2k-1} (h\beta)^{2k-1-\alpha} (-1)^\alpha}{(2k-1-\alpha)! (\alpha+1)!} \right] + \\ & + \frac{1}{2\sigma^{2m-1}} \sum_{k=\left[\frac{m+1}{2}\right]}^{m-1} \sum_{\alpha=m-1}^{2k-1} \frac{\sigma^{2k-1} (h\beta)^{2k-1-\alpha} (-1)^\alpha}{\alpha! (2k-1-\alpha)!} \sum_{\gamma=0}^N A[\gamma] (h\gamma)^\alpha + \end{aligned}$$

$$+ \sum_{n=0}^{m-2} p_n(h\beta)^n + de^{-\sigma h\beta}. \quad (53)$$

Здесь мы вводим следующие обозначения:

$$D = \frac{1}{4\sigma^{2m-1}} \sum_{\gamma=0}^N A[\gamma] e^{\sigma h\gamma}, \quad (54)$$

$$L_{2m-3}(h\beta) = \frac{1}{2\sigma^{2m-1}} \left[\sum_{k=1}^{\lceil \frac{m+1}{2} \rceil - 1} \sum_{\alpha=0}^{2k-1} \frac{\sigma^{2k-1} (h\beta)^{2k-1-\alpha} (-1)^\alpha}{(2k-1-\alpha)!(\alpha+1)!} + \right. \\ \left. + \sum_{k=\lceil \frac{m+1}{2} \rceil}^{m-1} \sum_{\alpha=0}^{m-2} \frac{\sigma^{2k-1} (h\beta)^{2k-1-\alpha} (-1)^\alpha}{(2k-1-\alpha)!(\alpha+1)!} \right], \quad (55)$$

$$M_{m-2}(h\beta) = \frac{1}{2\sigma^{2m-1}} \left[\sum_{k=\lceil \frac{m+1}{2} \rceil}^{m-1} \sum_{\alpha=m-1}^{2k-1} \frac{\sigma^{2k-1} (h\beta)^{2k-1-\alpha} (-1)^\alpha}{\alpha!(2k-1-\alpha)!} \sum_{\gamma=0}^N A[\gamma] (h\gamma)^\alpha \right], \quad (56)$$

$$P_{m-2}(h\beta) = \sum_{n=0}^{m-2} p_n(h\beta)^n. \quad (57)$$

Тогда из выражения (53), с учетом обозначений (54)–(57), для $\beta = -1, -2, \dots$ получаем:

$$u_m(h\beta) = -\frac{1-e^{-\sigma}}{4\sigma^{2m}} e^{\sigma h\beta} + D \cdot e^{-\sigma h\beta} + L_{2m-3}(h\beta) + M_{m-2}(h\beta) + P_{m-2}(h\beta) + de^{-\sigma h\beta}. \quad (58)$$

Заметим, что величины D , $M_{m-2}(h\beta)$, $P_{m-2}(h\beta)$ и d являются неизвестными в последнем выражении для функции $u_m(h\beta)$.

Теперь для $\beta = N+1, N+2, \dots$, проводя аналогичные вычисления, получаем:

$$u_m(h\beta) = \frac{1-e^{-\sigma}}{4\sigma^{2m}} e^{\sigma h\beta} - D \cdot e^{-\sigma h\beta} - L_{2m-3}(h\beta) - M_{m-2}(h\beta) + P_{m-2}(h\beta) + de^{-\sigma h\beta}. \quad (59)$$

Приводя подобные слагаемые в (58) и (59) и вводя следующие обозначения:

$$\begin{aligned} d + D &= d^-, \\ P_{m-2}(h\beta) + M_{m-2}(h\beta) &= P_{m-2}^-(h\beta), \\ d - D &= d^+, \\ P_{m-2}(h\beta) - M_{m-2}(h\beta) &= P_{m-2}^+(h\beta), \end{aligned}$$

а также учитывая равенства (52), (58) и (59), находим:

$$u_m(h\beta) = \begin{cases} -\frac{1-e^{-\sigma}}{4\sigma^{2m}} e^{\sigma h\beta} + d^- e^{-\sigma h\beta} + L_{2m-3}(h\beta) + P_{m-2}^-(h\beta) & \text{при } \beta = -1, -2, \dots, \\ g_m(h\beta) & \text{при } \beta = 0, 1, \dots, N, \\ \frac{1-e^{-\sigma}}{4\sigma^{2m}} e^{\sigma h\beta} + d^+ e^{-\sigma h\beta} - L_{2m-3}(h\beta) + P_{m-2}^+(h\beta) & \text{при } \beta = N+1, N+2, \dots, \end{cases} \quad (60)$$

где $d^\pm$ и $P_{m-2}^\pm(h\beta)$ — неизвестные величины. Эти неизвестные могут быть найдены, например, из следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned} D_m(h\beta) * u_m(h\beta) &= 0, \quad \beta = -1, -2, \dots, -(m-1), \\ D_m(h\beta) * u_m(h\beta) &= 0, \quad \beta = N+1, N+2, \dots, N+(m-1). \end{aligned}$$

Теперь найдем аналитический вид коэффициентов $A[\beta]$, $\beta = 0, 1, \dots, N$. Использование формул (46) и (60) совместно со сверткой (51) дает:

$$\begin{aligned} A[\beta] &= D_m(h\beta) * g_m + \sum_{\gamma=1}^{\infty} D_m(h\beta + h\gamma) \left[-\frac{1 - e^{-\sigma}}{4\sigma^{2m}} e^{\sigma h\gamma} + d^- e^{-\sigma h\gamma} + \right. \\ &\quad \left. + L_{2m-3}(-h\gamma) + P_{m-2}^-(-h\gamma) - g_m(-h\gamma) \right] + \\ &\quad + \sum_{\gamma=1}^{\infty} D_m(h(\gamma + N - \beta)) \left[\frac{1 - e^{-\sigma}}{4\sigma^{2m}} e^{\sigma h(N+\gamma)} + d^+ e^{-\sigma h(N+\gamma)} - \right. \\ &\quad \left. - L_{2m-3}(h(N+\gamma)) + P_{m-2}^+(h(N+\gamma)) - g_m(h(N+\gamma)) \right]. \quad (61) \end{aligned}$$

Для упрощения введем следующее обозначение:

$$T(h\beta) = D_m(h\beta) * g_m(h\beta). \quad (62)$$

Тогда путем прямых вычислений с использованием теорем 2 и 3 и с учетом (40), из равенства (61) мы получаем следующее утверждение.

Теорема 4. Коэффициенты оптимальных квадратурных формул вида (5) в гильбертовом пространстве $W_{2,\sigma}^{(m,m-1)}(0,1)$ имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} A[0] &= T(0) + a_0 + \sum_{k=1}^{m-1} (a_k + b_k \lambda_k^N), \\ A[\beta] &= T(h\beta) + \sum_{k=1}^{m-1} (a_k \lambda_k^\beta + b_k \lambda_k^{N-\beta}), \quad \beta = 1, 2, \dots, N-1, \\ A[N] &= T(1) + b_0 + \sum_{k=1}^{m-1} (a_k \lambda_k^N + b_k), \end{aligned}$$

где $T(h\beta)$ определяется формулой (62), а

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2\sigma^{2m-1}}{q_{2m-2}} (-e^{\sigma h}) \left[-\frac{1 - e^{-\sigma}}{4\sigma^{2m}} e^{-\sigma h} + d^- e^{\sigma h} + L_{2m-3}(-h) + P_{m-2}^-(-h) - g_m(-h) \right], \\ a_k &= \frac{2\sigma^{2m-1} A_k}{q_{2m-2} \lambda_k} \sum_{\gamma=1}^{\infty} \lambda_k^\gamma \left[-\frac{1 - e^{-\sigma}}{4\sigma^{2m}} e^{-\sigma h\gamma} + d^- e^{\sigma h\gamma} + \right. \\ &\quad \left. + L_{2m-3}(-h\gamma) + P_{m-2}^-(-h\gamma) - g_m(-h\gamma) \right], \end{aligned}$$

$$b_0 = \frac{2\sigma^{2m-1}}{q_{2m-2}}(-e^{\sigma h}) \left[\frac{1 - e^{-\sigma}}{4\sigma^{2m}} e^{\sigma h(N+1)} + d^+ e^{-\sigma h(N+1)} - \right. \\ \left. - L_{2m-3}(h(N+1)) + P_{m-2}^+(h(N+1)) - g_m(h(N+1)) \right], \\ b_k = \frac{2\sigma^{2m-1} A_k}{q_{2m-2} \lambda_k} \sum_{\gamma=1}^{\infty} \lambda_k^{\gamma} \left[\frac{1 - e^{-\sigma}}{4\sigma^{2m}} e^{\sigma h(N+\gamma)} + d^+ e^{-\sigma h(N+\gamma)} - L_{2m-3}(h(N+\gamma)) + \right. \\ \left. + P_{m-2}^+(h(N+\gamma)) - g_m(h(N+\gamma)) \right],$$

q_{2m-2} — старший коэффициент, а λ_k — корни многочлена $Q_{2m-2}(x)$, удовлетворяющие условию $|\lambda_k| < 1$.

7 Заключение

По полученным результатам можно сделать следующее заключение. В данной работе решена задача построения оптимальных квадратурных формул вида (5) в смысле Сарда в пространстве $W_{2,\sigma}^{(m,m-1)}(0,1)$. Во введении приведены актуальность рассматриваемой задачи и обзор предыдущих результатов. В параграфе 2 обсуждена постановка задачи оптимальных квадратурных формул. Чтобы решить поставленную задачу, в параграфе 3 найдена экстремальная функция функционала погрешности ℓ квадратурной формулы (5). Для этого найдено обобщенное решение одного линейного дифференциального уравнения с граничными условиями в пространстве $W_{2,\sigma}^{(m,m-1)}$. Далее, используя экстремальную функцию, вычислен квадрат нормы функционала погрешности для получения верхней оценки погрешности квадратурной формулы (5). Получена система линейных алгебраических уравнений для коэффициентов оптимальных квадратурных формул вида (5) в пространстве $W_{2,\sigma}^{(m,m-1)}$. В конце, используя дискретный аналог дифференциального оператора $d^{2m}/dx^{2m} - \sigma^2 d^{2m-2}/dx^{2m-2}$, получены явные выражения для оптимальных коэффициентов.

Надо отметить, что в выражениях оптимальных коэффициентов пока остаются параметры, которые следует определить. В следующих работах эти величины будут найдены. Также надо подчеркнуть, что при стремлении параметра σ к нулю из результатов этой работы получается результат Соболева–Шадиметова–Кохлера, полученный для оптимальных квадратурных формул в пространстве Соболева $L_2^{(m)}$.

Декларации

Финансирование. Данное исследование не имело финансовой поддержки.

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Вклад авторов. Автор единолично выполнил всю работу по подготовке статьи.

Доступность данных. Данные вычислительных экспериментов доступны у автора по обоснованному запросу.

Литература

- [1] Соболев С. Л. Введение в теорию кубатурных формул. — М.: Наука, 1974. — 808 с.
- [2] Никольский С. М. Квадратурные формулы. — 4-е изд., доп. / с доб. Н. П. Корнейчука. — М.: Наука, 1988. — 256 с.

- [3] *Sard A.* Linear approximation. — Providence: American Mathematical Society, 1963. — (Mathematical Surveys; Vol. 9).
- [4] *Соболев С.Л., Васкевич В.Л.* Кубатурные формулы. — Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 1996. — 484 с.
- [5] *Cătinaş T., Coman Gh.* Optimal quadrature formulas based on the φ -function method // *Studia Universitatis Babeş-Bolyai Mathematica.* — 2006. — Vol. 51, № 1. — P. 49–64.
- [6] *Shadimetov Kh. M., Hayotov A. R.* Optimal quadrature formulas with positive coefficients in $L_2^{(m)}(0,1)$ space // *Journal of Computational and Applied Mathematics.* — 2011. — Vol. 235. — P. 1114–1128.
- [7] *Shadimetov Kh. M., Hayotov A. R., Abdikayimov B.* On an optimal quadrature formula in a Hilbert space of periodic functions // *Algorithms.* — 2022. — Vol. 15. — Art. 344. — doi: <https://doi.org/10.3390/a15100344>.
- [8] *Shadimetov Kh. M., Gulomov O.* Optimal quadrature formulas for calculating integrals of rapidly oscillating functions // *Journal of Mathematical Sciences.* — 2023. — Vol. 277, № 3. — P. 446–457. — doi: <https://doi.org/10.1007/s10958-023-06848-6>.
- [9] *Shadimetov Kh. M., Hayotov A. R., Khayriev U.* Optimal quadrature formulas for approximating strongly oscillating integrals in the Hilbert space $\widetilde{W}_2^{(m,m-1)}$ of periodic functions // *Journal of Computational and Applied Mathematics.* — 2025. — Vol. 453. — Art. 116133. — doi: <https://doi.org/10.1016/j.cam.2024.116133>.
- [10] *Shadimetov Kh. M., Tursunmuradov S. T.* Optimal quadrature formulas in the Sobolev space of complex-valued functions // *Uzbek Mathematical Journal.* — 2025. — Vol. 69, № 4. — P. 194–200. — doi: <https://doi.org/10.29229/uzmj.2025-4-19>.
- [11] *Shadimetov Kh. M., Usmanov Kh.* Weighted optimal quadrature formulas in Sobolev space and their applications // *Algorithms.* — 2025. — Vol. 18. — Art. 374. — doi: <https://doi.org/10.3390/a18070374>.
- [12] *Vaskevich V. L., Turgunov I. M.* Optimal quadrature formulas for curvilinear integrals of the first kind // *Siberian Advances in Mathematics.* — 2024. — Vol. 34, № 1. — doi: <https://doi.org/10.1134/S1055134424010048>.
- [13] *Babaev S. S.* The weighted optimal quadrature formula with derivatives in the Hilbert space // *Problems of Computational and Applied Mathematics.* — 2024. — № 4/2(60). — P. 99–107.
- [14] *Okecha G. E.* Quadrature formulae for Cauchy principal value integrals of oscillatory kind // *Mathematics of Computation.* — 1987. — Vol. 49. — P. 259–268.
- [15] *Capobianco M. R., Criscuolo G.* On quadrature for Cauchy principal value integrals of oscillatory functions // *Journal of Computational and Applied Mathematics.* — 2003. — Vol. 156. — P. 471–486.
- [16] *Wang H., Xiang S.* Uniform approximations to Cauchy principal value integrals of oscillatory functions // *Applied Mathematics and Computation.* — 2009. — Vol. 215. — P. 1886–1894.
- [17] *He G., Xiang S. H.* An improved algorithm for the evaluation of Cauchy principal value integrals of oscillatory functions and its application // *Journal of Computational and Applied Mathematics.* — 2015. — Vol. 280. — P. 1–13. — doi: <https://doi.org/10.1016/j.cam.2014.11.023>.
- [18] *Соболев С.Л.* Коэффициенты оптимальных квадратурных формул // *Доклады АН СССР.* — 1977. — Т. 235, № 1. — С. 34–37.
- [19] *Шади́метов Х. М.* Оптимальные квадратурные формулы в пространствах $L_2^{(m)}(\Omega)$ и $L_2^{(m)}(R)$ // *Доклады АН УзССР.* — 1983. — № 3. — С. 5–8.

- [20] *Köhler P.* On the weights of Sard's quadrature formulas // *Calcolo.* — 1988. — Vol. 25. — P. 169–186.
- [21] *Shadimetov Kh. M., Hayotov A. R.* Optimal quadrature formulas in the sense of Sard in $W_2^{(m,m-1)}$ space // *Calcolo.* — 2014. — Vol. 51. — P. 211–243. — doi: <https://doi.org/10.1007/s10092-013-0076-6>.

UDC 519.63

EXPRESSIONS FOR THE COEFFICIENTS OF OPTIMAL QUADRATURE FORMULAS WITH A PARAMETER

^{1,2}*Kuldoshev Kh. M.*

hakimkhm1971@gmail.com

¹V. I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, 9, University Street, Tashkent, 100174 Uzbekistan;

²Tashkent International University, 7, Kichik Halqa Yuli Street, Yunusabad District, Tashkent, 100114 Uzbekistan

Background: Approximate integration of functions with specific smoothness properties requires special mathematical approaches, notably the optimization of quadrature formulas in the sense of Sard. Existing computational methods are primarily designed for classical Banach or Hilbert spaces. However, modern applied problems often involve functions from more complex functional classes that incorporate additional differential characteristics and specialized parameters. Using traditional algorithms for such classes significantly limits computational accuracy, creating a critical need for developing new, adapted computational schemes.

Purpose: This study aims to develop and theoretically substantiate an analytical method for constructing optimal quadrature formulas for a specialized functional space. The primary focus is on minimizing the integration error by finding the exact values of weight coefficients for a given class of integrands.

Method: The proposed approach is based on finding the extremal function of the error functional for the considered quadrature. This problem is solved by constructing a generalized solution to a linear differential equation supplemented with appropriate boundary conditions. The main novelty lies in the analytical calculation of the error functional's squared norm, which reduces the original problem to a system of linear algebraic equations for the unknown weights. To solve it accurately, a specially constructed discrete analogue of the differential operator is applied, strictly accounting for the internal specificity of the investigated space.

Results: Mathematical analysis yields explicit analytical expressions for the optimal coefficients of the quadrature formulas. The derived exact relations significantly simplify the practical implementation of the algorithm and completely avoid the computational instability that inevitably arises during the numerical inversion of large matrices. The calculated squared norm of the functional confirms the high reliability of the method and guarantees the achievement of the minimum possible integration error for the entire considered class of functions.

Implication: The obtained results significantly expand the existing theory of quadrature formulas. It is proven that under the appropriate limit transition with respect to the space's weight parameter, the proposed analytical formulas strictly transform into the well-known fundamental results of Sobolev, Shadimetov, and Kohler, previously obtained for classical spaces.

Keywords: optimal quadrature formulas, error functional, extremal function, optimal coefficients, Hilbert space, functions of a discrete argument

Citation: Kuldoshev Kh.M. 2026. Expressions for the coefficients of optimal quadrature formulas with a parameter. *Problems of Computational and Applied Mathematics*. 4/1(75): 41-60.

DOI: 10.71310/pcam.4-1_75.2026.04

HISOBLASH VA AMALIY MATEMATIKA MUAMMOLARI

ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ
И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
PROBLEMS OF COMPUTATIONAL
AND APPLIED MATHEMATICS

ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

№ 4/1(75) 2026

Журнал основан в 2015 году.

Издается 6 раз в год.

Учредитель:

Научно-исследовательский институт развития цифровых технологий и
искусственного интеллекта.

Главный редактор:

Равшанов Н.

Заместители главного редактора:

Арипов М.М., Шадиметов Х.М., Ахмедов Д.Д.

Ответственный секретарь:

Убайдуллаев М.Ш.

Редакционный совет:

Азамов А.А., Алоев Р.Д., Амиргалиев Е.Н. (Казахстан), Арушанов М.Л.,
Боборахимов Б.И., Бурнашев В.Ф., Джумаёзов У.З., Загребина С.А. (Россия),
Задорин А.И. (Россия), Игнатъев Н.А., Ильин В.П. (Россия),
Иманкулов Т.С. (Казахстан), Исмагилов И.И. (Россия), Кабанихин С.И. (Россия),
Курбонов Н.М., Маматов Н.С., Мирзаев Н.М., Мурадов Ф.А., Назирова Э.Ш.,
Нормуродов Ч.Б., Нуралиев Ф.А., Нуралиев Ф.М., Опанасенко В.Н. (Украина),
Расулмухамедов М.М., Садуллаева Ш.А., Старовойтов В.В. (Беларусь),
Хаётов А.Р., Халджигитов А., Хамдамов Р.Х., Хужаев И.К., Хужаеров Б.Х.,
Эшмаматова Д.Б., Дустмуродова Ш.Ж., Чье Ен Ун (Россия),
Шабозов М.Ш. (Таджикистан), Dimov I. (Болгария), Li Y. (США),
Mascagni M. (США), Min A. (Германия), Singh M. (Южная Корея).

Журнал зарегистрирован в Агентстве информации и массовых коммуникаций при
Администрации Президента Республики Узбекистан.

Свидетельство №0856 от 5 августа 2015 года.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

При перепечатке материалов ссылка на журнал обязательна.

За точность фактов и достоверность информации ответственность несут авторы.

Адрес редакции:

100125, г. Ташкент, м-в. Буз-2, 17А.

Тел.: +(998) 71 263-41-98.

Э-почта: journals@airi.uz.

Веб-сайт: <https://journals.airi.uz>.

Дизайн и вёрстка:

Шарипов Х.Д.

Отпечатано в типографии НИИ РЦТТИ.

Подписано в печать 05.10.2026 г.

Формат 60x84 1/8. Заказ № 5. Тираж 100 экз.

PROBLEMS OF COMPUTATIONAL AND APPLIED MATHEMATICS

No. 4/1(75) 2026

The journal was established in 2015.
6 issues are published per year.

Founder:

Digital Technologies and Artificial Intelligence Development Research Institute.

Editor-in-Chief:

Ravshanov N.

Deputy Editors:

Aripov M.M., Shadimetov Kh.M., Akhmedov D.D.

Executive Secretary:

Ubaydullaev M.Sh.

Editorial Council:

Azamov A.A., Aloev R.D., Amirgaliev E.N. (Kazakhstan), Arushanov M.L.,
Boborakhimov B.I., Burnashev V.F., Djumayozov U.Z., Zagrebina S.A. (Russia),
Zadorin A.I. (Russia), Ignatiev N.A., Ilyin V.P. (Russia), Imankulov T.S. (Kazakhstan),
Ismagilov I.I. (Russia), Kabanikhin S.I. (Russia), Kurbonov N.M., Mamatov N.S.,
Mirzaev N.M., Muradov F.A., Nazirova E.Sh., Normurodov Ch.B., Nuraliev F.A.,
Nuraliev F.M., Opanasenko V.N. (Ukraine), Sadullaeva Sh.A.,
Starovoitov V.V. (Belarus), Khayotov A.R., Khaldjigitov A., Khamdamov R.Kh.,
Khujaev I.K., Khujayorov B.Kh., Eshmamatova D.B., Dustmurodova Sh.J.,
Chye En Un (Russia), Shabozov M.Sh. (Tajikistan), Dimov I. (Bulgaria), Li Y. (USA),
Mascagni M. (USA), Min A. (Germany), Singh M. (South Korea).

The journal is registered by Agency of Information and Mass Communications under the
Administration of the President of the Republic of Uzbekistan.

Certificate of Registration No. 0856 of 5 August 2015.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

At a reprint of materials the reference to the journal is obligatory.
Authors are responsible for the accuracy of the facts and reliability of the information.

Address:

100125, Tashkent, Buz-2, 17A.

Tel.: +(998) 71 263-41-98.

E-mail: journals@airi.uz.

Web-site: <https://journals.airi.uz>.

Layout design:

Sharipov Kh.D.

DTAIRI printing office.

Signed for print 05.10.2026

Format 60x84 1/8. Order No. 5. Print run of 100 copies.

Содержание

Хаётов А.Р., Мухторова М.М.

Функции гистосплайна при восстановлении функций по интегральным значениям 5

Олимов Н.Н.

Численное решение линейных интегральных уравнений Фредгольма второго рода на основе оптимальных интерполяционных формул с производными . . 16

Бабаев С.С., Элмуродова С.С.

Численное приближение дробных интегралов: оптимальный квадратурный подход, основанный на фи-функциях 29

Кулдошев Х.М.

Выражения для коэффициентов оптимальных квадратурных формул с параметром 41

Хаётов А.Р., Хусаинов А.

Альтернативный вывод и численный анализ оптимальной интерполяционной формулы в гильбертовом пространстве 61

Хаитов Т.О.

Оптимальные методы численного интегрирования, основанные на алгебраических и тригонометрических функциях 72

Шадиметов Х.М., Нафасов А.Ю.

Квадрат нормы функционала погрешности интерполяционной формулы с третьей производной в гильбертовом пространстве 85

Болтаев А.К., Пардаева О.Ф.

Интерполяционные сплайны, минимизирующие полунорму в гильбертовом пространстве Соболева 98

Бердимуродова У.А.

Явные коэффициенты и оценка погрешности оптимальной квадратурной формулы 116

Полвонов С.З.

Оптимальная квадратурная формула с кратными узлами в гильбертовом пространстве 127

Барраева С.Ш.

Оптимальные квадратурные формулы с тригонометрическими весами в пространстве Соболева 141

Нуралиев Ф.А., Абдуллаева Г.Ш.

Сравнительный анализ алгебраико-гиперболических натуральных сплайнов шестого порядка и интегральных квазиинтерполяционных сплайнов 153

Ахмедов Д.М., Шомаликова М.Ш.

Оптимальная квадратурная формула типа Эрмита со слабосингулярным весом методом РН-функций 167

Хаётов А.Р., Пирнапасов С.О.

Приближённое вычисление дробной производной Капуто 180

Буваширов Д.С., Алиев Ш.Е.

Оптимальные квадратурные формулы для интегралов типа Коши с тригонометрическими весами 190

Насруллаев П.А., Джурабоева О.С., Саманова Г.Б.

Консервативная модель переноса примесей в атмосфере над сложным рельефом 201

Contents

<i>Hayotov A.R., Mukhtorova M.M.</i>	
Histospline functions in reconstructing functions using integral values	5
<i>Olimov N.N.</i>	
Numerical solution of linear Fredholm integral equations of the second kind based on optimal interpolation formulas with derivatives	16
<i>Babaev S.S., Elmurodova S.S.</i>	
Numerical approximation of fractional integrals: an optimal quadrature approach based on phi-functions	29
<i>Kuldoshev Kh.M.</i>	
Expressions for the coefficients of optimal quadrature formulas with a parameter	41
<i>Hayotov A.R., Husainov A.</i>	
Alternative derivation and numerical analysis of an optimal interpolation formula in the Hilbert space	61
<i>Khaitov T.O.</i>	
Optimal numerical integration rules based on algebraic and trigonometric functions	72
<i>Shadimetov Kh.M., Nafasov A.Y.</i>	
The squared norm of the error functional for a third-derivative interpolation formula in a Hilbert space	85
<i>Boltaev A.K., Pardaeva O.F.</i>	
Interpolation splines minimizing a semi-norm in a Sobolev Hilbert space	98
<i>Berdimuradova U.A.</i>	
Explicit coefficients and error estimate for an optimal quadrature formula	116
<i>Polvonov S.Z.</i>	
Optimal quadrature formula with multiple nodes in a Hilbert space	127
<i>Barraeva S.Sh.</i>	
Optimal quadrature formulas with trigonometric weights in a Sobolev space	141
<i>Nuraliev F.A., Abdullaeva G.Sh.</i>	
A comparative analysis of sixth-order algebraic-hyperbolic natural splines and integral quasi-interpolating splines	153
<i>Akhmedov D.M., Shomalikova M.Sh.</i>	
Optimal Hermite-type quadrature with weakly singular weight via PHI-functions	167
<i>Hayotov A.R., Pirnapasov S.O.</i>	
Approximate calculation of the Caputo fractional-order derivative	180
<i>Buvasharov D.S., Aliev Sh.E.</i>	
Optimal quadrature formulas for highly oscillatory Cauchy-type integrals	190
<i>Nasrullayev P.A., Juraboyeva O.S., Samanova G.B.</i>	
A mass-conserving model of pollutant transport in the atmosphere over complex terrain	201