УДК 539.3

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ РАСЧЕТА ТРЁХСЛОЙНЫХ СТЕРЖНЕЙ ПРИ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ НАГРУЗКАХ

[1*]***Анарова Ш.А.***, [2]***Шокиров Д.А.***
[*]shahzodaanarova@gmail.com
[1]Ташкентский университет информационных технологий имени Мухаммада ал-Хоразмий,
100200, Узбекистан, г. Ташкент, ул. Амира Темура, 108;
[2]Наманганский инженерно-строительный институт,
160103, Узбекистан, г. Наманган, ул. И.Каримов 12

В статье разработана математическая модель для расчета колебаний трехслойных стержней при пространственном нагружении. Составлены вариации кинетической и потенциальной энергий, а также работы внешних сил, которые подставляются в вариационный принцип Остроградского-Гамильтона. Получена система уравнений колебаний трехслойного стержня с соответствующими обобщенными начальными и естественными граничными условиями. Задача решается относительно шести неизвестных. Для ее решения использованы центральные конечно-разностные соотношения неявной схемы метода конечных разностей второго порядка точности с учетом особенностей граничных и начальных условий. Задавая конкретные граничные условия можно решить ряд практических задач. Приведена методика и вычислительный алгоритм расчета статических и динамических деформационных процессов пространственно-нагруженных трёхслойных стержней.

Ключевые слова: алгоритм, трехслойный стержень, метод конечных разностей, принцип Остроградского – Гамильтона, безразмерного параметр, колебания стержня.

Цитирование: *Анарова Ш.А., Шокиров Д.А.* Вычислительный алгоритм расчета трёхслойных стержней при пространственных нагрузках // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2024. – № 3(57). – С. 57-76.

1 Введение

В последнее время значительное распространение получили трехслойные конструкции, состоящие из двух несущих слоев и заполнителя, обеспечивающего их совместную работу. В условиях деформации изгиба трехслойные конструкции оказываются наиболее рациональными, то есть близкими к оптимальным с точки зрения обеспечения минимума весовых показателей при заданных ограничениях на прочность и жесткость.

Теорию многослойных конструкций можно трактовать как результат обобщения классической теории пластин и оболочек в теории трехслойных конструкций. В ряде случаев многослойные элементы конструкций уже нельзя считать тонкими в смысле гипотез классической теории. При увеличении числа слоев и применении различных заполнителей существенную роль начинают играть эффекты, связанные с работой отдельных слоев. Кроме поперечных сдвигов и обжатия нормалей, в многослойных конструкциях часто приходится учитывать моментные эффекты в несущих слоях, локальные формы потери устойчивости и др.

В работе [1] рассматриваются вынужденные колебания упругой трехслойной балки под действием локальных нагрузок прямоугольной и параболической формы. Предполагалось, что гипотеза ломаной нормали описывает кинематику пакета с несимметричной толщиной. Наполнитель твердый и сжимаемый. Найдены аналитические решения задач при импульсном и резонансном воздействии. Проведен численный анализ. Результаты сопоставлены со случаем локальной пологой нагрузки прямоугольной формы.

В [2] изложены постановки и методы решения задач статики широкого класса металлополимерных систем при комплексных силовых, тепловых и радиационных воздействиях. Учтены реономные и пластические свойства материалов слоев. Приведен ряд аналитических и тепловых решений для трехслойных металлополимерных стержней, пластин и оболочек.

Стержни, пластины и оболочки, имеющие слоистую структуру, обычно набраны из материалов с существенно различными физико-механическими свойствами. Несущие слои из материалов высокой прочности и жесткости предназначены для восприятия основной части механической нагрузки. Связующие слои, служащие для образования монолитной конструкции, обеспечивают перераспределение усилий между несущими слоями. Еще одна группа слоев предназначена для защиты от тепловых, химических, радиационных и других нежелательных воздействий. Такое сочетание слоев позволяет обеспечить надежную работу систем в неблагоприятных условиях окружающей среды, создавать конструкции, сочетающие высокую прочность и жесткость с относительно малой массой [3].

В [4] исследуется термосиловой изгиб упругопластической трехслойной балки с жестким заполнителем; балка связана с упругим основанием. Для описания кинематики несимметричного по толщине пакета принимается гипотеза о ломаной нормали. Реакция основания описывается моделью Винклера. Получена система уравнений равновесия и ее точное решение в перемещениях и представлены численные результаты для трехслойной металлополимерной балки.

В работе [5] системно изложены постановки и методы решения задач статики и динамики трехслойных элементов конструкций, связанных с упругим основанием при комплексных силовых, тепловых и радиационных воздействиях. Учтены физически нелинейные свойства материалов слоев. Приведены ряд аналитических решений и их численный параметрический анализ для трехслойных стержней и пластин.

Неоднородные конструкции нашли широкое применение в различных областях машиностроения и в строительстве, поэтому актуальна разработка методов их прочностного расчета при различных нагрузках. В работе [6] приведены результаты по однократному квазистатическому и динамическому деформированию трехслойных элементов конструкций, связанных и несвязанных с винклеровым основанием. Здесь рассмотрен изгиб с растяжением несимметричного по толщине трехслойного стержня в температурном поле.

В [7] рассмотрено деформирование физически нелинейного трёхслойного стержня при циклическом нагружении в температурном поле. Для описания кинематики несимметричного по толщине пакета стержня приняты гипотезы ломаной нормали. Предложена методика решения соответствующих краевых задач. Получены аналитические решения задач термоупругости и термоупругопластичности при прямом и обратном нагружениях. Проведён численный анализ решений.

В работе [8] предложена конечно-элементная формулировка геометрически точных многослойных балок. Межслоевое скольжение и поднятие не учитываются. Количество слоев произвольное, а базовое неизвестными функциями являются горизонтальное и вертикальное смещения базовой оси составной балки и вращение каждого слоя в поперечном сечении. Благодаря геометрически точной постановке задачи определяющие уравнения нелинейны относительно основных неизвестных функций, и решение получено численно. В общем случае каждый слой может иметь разные геометрические и материальные свойства, но поскольку слои жестко связаны, основное применение этой модели приходится на однородные слоистые балки. Численные примеры сравнивают результаты настоящей модели с существующими геометрически нелинейными моделями многослойных балок, а также с двумерными элементами плоского напряжения и, где это применимо, с результатами теории упругости. Сравнение с двумерными элементами плоского напряжения показывает, что многослойная модель балки очень эффективна для моделирования толстых балок, где необходимо учитывать деформацию поперечного сечения.

Рассмотрено влияние температурного поля на деформирование трехслойного упругого стержня со сжимаемым заполнителем в работе [9]. Для описания кинематики несимметричного по толщине пакета приняты гипотезы ломаной нормали: в тонких несущих слоях справедливы гипотезы Бернулли; в сжимаемом по толщине заполнителе выполняется гипотеза Тимошенко. Учитывается работа заполнителя в тангенциальном направлении. Уравнения равновесия получены вариационным методом. Предложена методика решения соответствующих краевых задач. Получены аналитические решения в перемещениях и проведен их численный анализ.

В работе [10] рассмотрено деформирование трехслойного металлополимерного стержня с упругопластическими несущими слоями и физически нелинейным заполнителем при воздействии локальных прямоугольной и синусоидальной нагрузок. Для описания кинематики несимметричного по толщине пакета стержня приняты гипотезы ломаной нормали. Приведена постановка краевых задач и методы их решения. Получены аналитические решения в итерациях задач теории малых упругопластических деформаций. Проведен численный анализ решений.

В работе [11] систематически изложены постановки и методы решения задач квазистатики трехслойных стержней прямоугольного сечения с гладкой и ступенчатой поверхностями. Учтены физически нелинейные свойства материалов слоев при комплексных силовых, тепловых и радиационных воздействиях. Приведен ряд аналитический решений и численный параметрический анализ напряженно-деформированного состояния исследуемых стержней.

В настоящее время широкое применение в технике и строительстве получили многослойные, в том числе трехслойные, элементы конструкций. Стержни, пластины и оболочки, имеющие слоистую структуру, при относительно малом весе способны обеспечить заданную прочность, жёсткость и противостоять ряду других физических воздействий. В связи с этим создание расчетных моделей трехслойных стержней, с применением различных кинематических гипотез и комплексных термосиловых локальных нагрузок, становится актуальной задачей. В [12] приведена постановка и построено аналитическое решение краевой задачи о термосиловом нагружении трехслойного стержня прямоугольного поперечного сечения со сжимаемым заполнителем при локальных равномерно распределенных, синусоидальных и параболических нагрузках. Численная апробация решения проведена в случае металлополимерного стержня.

В работе [13] систематически изложены постановки и методы решения краевых задач, но определению напряженно-деформированного состояния трехслойных стержневых элементов конструкций при однократных и квазистатических переменных нагрузках в терморадиационных полях. Учтены физически нелинейные свойства материалов слоев при комплексных силовых, тепловых н радиационных воздействиях. Приведен ряд аналитических решений и численный параметрический анализ напряженно-деформированного состояния трехслойных стержней.

В [14] рассмотрено напряженно-деформированное состояние трехслойного стержня при центральном сжатии. Результаты аналитического расчета и численного расчета (МКЭ) сравниваются с экспериментальными данными. Предполагается, что взаимодействие слоев осуществляется через контактный слой. Контактный слой рассматривается как поперечно-анизотропная упругая среда с такими параметрами, что его можно представить в виде набора коротких упругих стержней, не связанных друг с другом и ориентированных нормально к поверхности контакта. Такое допущение позволяет получить аналитическое решение задачи в замкнутом виде, а также избежать бесконечных касательных напряжений на границе раздела слоев вблизи торца модели. Полученные результаты расчетов качественно и количественно совпадают с результатами эксперимента.

В статье [15] рассмотрены проблемы расчета трехслойного стержня при действии мгновенно-нарастающих нагрузок. Решены дифференциальные уравнения колебания трехслойного стержня при действии динамических нагрузок. Определены максимальные коэффициенты динамичности прогиба при различных видах закрепления концов балки, а также при переходе в двуслойный и однородные стержни. Проведены также расчеты при различных значениях упругих характеристик несущих слоев стержня. Проанализирована зависимость безразмерного параметра, зависящего от времени действия нагрузки и приведенной частоты стержня с коэффициентом динамичности прогиба. Установлено, что изменения напряжений несущих слоев в зависимости от безразмерного параметра, зависящего от времени действия нагрузки и приведенной частоты стержня, подобны к закону изменения коэффициента динамичности.

В работах [16–18] приведены постановка задачи и математическая модель трехслойных стержней. Определены вариации кинетической и потенциальной энергии, также вариации работа внешних объемных и поверхностных сил трехслойного стержня. Применеяя принцип Остроградского – Гамильтона [19–21] для определения вариации кинетической и потенциальной энергии и работы внешних объемных и поверхностных сил

Проведенный анализ исследований в этой области показывает, что проблемы разработка вычислительный алгоритм расчета статики и динамики деформационных процессов пространственно-нагруженных трёхслойных стержней до сих пор не достаточно изучены.

2 Постановка задачи

Перемещения точек трехслойного стержня [5, 6, 9, 15–18, 22]:

$$\begin{cases} {u_1}^{(1)} = u^{(1)} - z\alpha^{(1)} + c\alpha^{(1)} + \frac{h_1}{2}\alpha^{(1)},\ w^{(1)} = w_1,\ (c \leqslant z \leqslant c + h_1)\,; \\ {u_1}^{(2)} = u^{(2)} - z\alpha^{(2)} - c\alpha^{(2)} - \frac{h_2}{2}\alpha^{(2)},\ w^{(2)} = w_2,\ (-c - h_2 \leqslant z \leqslant -c)\,; \\ {u_1}^{(3)} = \left(1 + \frac{z}{c}\right)\left(\frac{1}{2}u_1 + \frac{h_1}{4}\alpha^{(1)}\right) + \left(1 - \frac{z}{c}\right)\left(\frac{1}{2}u_2 - \frac{h_2}{4}\alpha^{(2)}\right); \\ w^{(3)} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{z}{c}\right)w_1 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{z}{c}\right)w_2,\ (-c \leqslant z \leqslant c)\,. \end{cases} \tag{1}$$

Полученные результаты вариации кинетической и потенциальной энергий, а также работы внешних сил подставляем в вариационный принцип Остроградского-Гамильтона [18–20]. Вариации $\delta u^{(1)}$, $\delta u^{(2)}$, $\delta\alpha^{(1)}$, $\delta\alpha^{(2)}$, $\delta w^{(1)}$, $\delta w^{(2)}$ произвольные, поэтому чтобы выполнить равенство (1.9), выражения, стоящие при вариациях, следует приравнять нулю. В результате получается система уравнений колебания стержня с соответствующими начальными и граничными условиями.

Система уравнения колебания трехслойного стержня:

$$
\begin{gathered}
\int\limits_t\int\limits_x\Bigg[\left(\rho F\frac{\partial^2u^{(1)}}{\partial t^2}+\rho cF\frac{\partial^2\alpha^{(1)}}{\partial t^2}+\rho\frac{h_1}{2}\,F\frac{\partial^2\alpha^{(1)}}{\partial t^2}\right)+\frac{1}{4}\,\left(\rho F\frac{\partial^2u^{(1)}}{\partial t^2}+\frac{h_1}{2}\rho F\frac{\partial^2\alpha^{(1)}}{\partial t^2}+\right.\\
+\frac{1}{c^2}\rho I_y\frac{\partial^2u^{(1)}}{\partial t^2}+\frac{h_1}{2c^2}\rho I_y\frac{\partial^2\alpha^{(1)}}{\partial t^2}+\rho F\frac{\partial^2u^{(2)}}{\partial t^2}-\frac{h_2}{2}\rho F\frac{\partial^2\alpha^{(2)}}{\partial t^2}-\frac{1}{c^2}\rho I_y\frac{\partial^2u^{(2)}}{\partial t^2}+\\
\left.+\frac{h_2}{2c^2}\rho I_y\frac{\partial^2\alpha^{(2)}}{\partial t^2}\right)-\left(-\frac{\partial N_{11}^{(1)}}{\partial x}-\frac{1}{2}\frac{\partial N_{11}^{(3)}}{\partial x}-\frac{1}{2c}\frac{\partial M_{11}^{(3)}}{\partial x}+\frac{1}{2c}Q_{13}^{(3)}\right)+\\
+\left(\overline{F}_1^{(1)}+\frac{1}{2}\overline{F}_1^{(3)}+\frac{1}{2c}MF_1^{(3)}\right)+\left(\overline{q}_1^{(1)}+\frac{1}{2}\overline{q}_1^{(3)}+\frac{1}{2c}Mq_1^{(3)}\right)\Bigg]\,\delta u^{(1)}dxdt=0;\\
\int\limits_t\int\limits_x\Bigg[\left(\rho F\frac{\partial^2u^{(2)}}{\partial t^2}-\rho cF\frac{\partial^2\alpha^{(2)}}{\partial t^2}-\rho\frac{h_2}{2}F\frac{\partial^2\alpha^{(2)}}{\partial t^2}\right)+\left(\rho F\frac{\partial^2u^{(1)}}{\partial t^2}+\frac{h_1}{2}\rho F\frac{\partial^2\alpha^{(1)}}{\partial t^2}-\right.\\
-\frac{1}{c^2}\rho I_y\frac{\partial^2u^{(1)}}{\partial t^2}-\frac{h_1}{2c^2}\rho I_y\frac{\partial^2\alpha^{(1)}}{\partial t^2}+\rho F\frac{\partial^2u^{(2)}}{\partial t^2}-\frac{h_2}{2}\rho F\frac{\partial^2\alpha^{(2)}}{\partial t^2}+\frac{1}{c^2}\rho I_y\frac{\partial^2u^{(2)}}{\partial t^2}-\\
\left.-\frac{h_2}{2c^2}\rho I_y\frac{\partial^2\alpha^{(2)}}{\partial t^2}\right)-\left(-\frac{\partial N_{11}^{(2)}}{\partial x}-\frac{1}{2}\frac{\partial N_{11}^{(3)}}{\partial x}+\frac{1}{2c}\frac{\partial M_{11}^{(3)}}{\partial x}-\frac{1}{2c}Q_{13}^{(3)}\right)+\\
+\left(\overline{F}_1^{(2)}+\frac{1}{2}\overline{F}_1^{(3)}-\frac{1}{2c}MF_1^{(3)}\right)+\left(\overline{q}_1^{(2)}+\frac{1}{2}\overline{q}_1^{(3)}-\frac{1}{2c}Mq_1^{(3)}\right)\Bigg]\,\delta u^{(2)}dxdt=0;\\
\int\limits_t\int\limits_x\Bigg[\left(\rho cF\frac{\partial^2u^{(1)}}{\partial t^2}+\rho\frac{h_1}{2}F\frac{\partial^2u^{(1)}}{\partial t^2}+\rho I_y\frac{\partial^2\alpha^{(1)}}{\partial t^2}+\rho c^2F\frac{\partial^2\alpha^{(1)}}{\partial t^2}+\rho c\frac{h_1}{2}F\frac{\partial^2\alpha^{(1)}}{\partial t^2}+\right.\\
\left.+\rho\frac{h_1}{2}cF\frac{\partial^2\alpha^{(1)}}{\partial t^2}+\rho\frac{h_1^2}{4}F\frac{\partial^2\alpha^{(1)}}{\partial t^2}\right)+\frac{1}{4}\left(+\frac{h_1}{2}\rho F\frac{\partial^2u^{(1)}}{\partial t^2}+\frac{h_1^2}{4}\rho F\frac{\partial^2\alpha^{(1)}}{\partial t^2}+\right.\\
+\frac{h_1}{2c^2}\rho I_y\frac{\partial^2u^{(1)}}{\partial t^2}+\frac{h_1^2}{4c^2}\rho I_y\frac{\partial^2\alpha^{(1)}}{\partial t^2}+\frac{h_1}{2}\rho F\frac{\partial^2u^{(2)}}{\partial t^2}-\frac{h_2h_1}{4}\rho F\frac{\partial^2\alpha^{(2)}}{\partial t^2}-\\
\left.-\frac{h_1}{2c^2}\rho I_y\frac{\partial^2u^{(2)}}{\partial t^2}+\frac{h_2h_1}{4c^2}\rho I_y\frac{\partial^2\alpha^{(2)}}{\partial t^2}\right)-\left(\frac{\partial M_{11}^{(1)}}{\partial x}-c\frac{\partial N_{11}^{(1)}}{\partial x}-\frac{h_1}{2}\frac{\partial N_{11}^{(1)}}{\partial x}-\right.\\
\left.-\frac{h_1}{4}\frac{\partial N_{11}^{(3)}}{\partial x}-\frac{h_1}{4c}\frac{\partial M_{11}^{(3)}}{\partial x}+\frac{h_1}{4c}\frac{\partial Q_{13}^{(3)}}{\partial x}\right)+\left(c\overline{F}_1^{(1)}-MF_1^{(1)}+\frac{h_1}{2}\overline{F}_1^{(1)}+\frac{h_1}{4}\overline{F}_1^{(3)}+\right.\\
\left.+\frac{h_1}{4c}MF_1^{(3)}\right)+\left(c\overline{q}_1^{(1)}-Mq_1^{(1)}+\frac{h_1}{2}\overline{q}_1^{(1)}+\frac{h_1}{4}\overline{q}_1^{(3)}+\frac{h_1}{4c}Mq_1^{(3)}\right)\Bigg]\,\delta\alpha^{(1)}dxdt=0;\\
\int\limits_t\int\limits_x\Bigg[\left(-\rho cF\frac{\partial^2u^{(2)}}{\partial t^2}-\rho\frac{h_2}{2}F\frac{\partial^2u^{(2)}}{\partial t^2}+\rho I_y\frac{\partial^2\alpha^{(2)}}{\partial t^2}+\rho c^2F\frac{\partial^2\alpha^{(2)}}{\partial t^2}+\rho c\frac{h_2}{2}F\frac{\partial^2\alpha^{(2)}}{\partial t^2}+\right.\\
\left.+\rho c\frac{h_2}{2}F\frac{\partial^2\alpha^{(2)}}{\partial t^2}+\rho\frac{h_2^2}{4}F\frac{\partial^2\alpha^{(2)}}{\partial t^2}\right)+\frac{1}{4}\left(-\frac{h_2}{2}\rho F\frac{\partial^2u^{(1)}}{\partial t^2}-\frac{h_1h_2}{4}\rho F\frac{\partial^2\alpha^{(1)}}{\partial t^2}+\right.\\
+\frac{h_2}{2c^2}\rho I_y\frac{\partial^2u^{(1)}}{\partial t^2}+\frac{h_1h_2}{4c^2}\rho I_y\frac{\partial^2\alpha^{(1)}}{\partial t^2}-\frac{h_2}{2}\rho F\frac{\partial^2u^{(2)}}{\partial t^2}+\frac{h_2^2}{4}\rho F\frac{\partial^2\alpha^{(2)}}{\partial t^2}-\\
\left.-\frac{h_2}{2c^2}\rho I_y\frac{\partial^2u^{(2)}}{\partial t^2}+\frac{h_2^2}{4c^2}\rho I_y\frac{\partial^2\alpha^{(2)}}{\partial t^2}\right)-\left(\frac{\partial M_{11}^{(2)}}{\partial x}+c\frac{\partial N_{11}^{(2)}}{\partial x}+\frac{h_2}{2}\frac{\partial N_{11}^{(2)}}{\partial x}+\frac{h_2}{4}\frac{\partial N_{11}^{(3)}}{\partial x}-\right.\\
\left.-\frac{h_2}{4c}\frac{\partial M_{11}^{(3)}}{\partial x}+\frac{h_2}{4c}\frac{\partial Q_{13}^{(3)}}{\partial x}\right)+\left(-MF_1^{(2)}-c\overline{F}_1^{(2)}-\frac{h_1}{2}\overline{F}_1^{(2)}-\frac{h_2}{4}\overline{F}_1^{(3)}+\frac{h_2}{4c}MF_1^{(3)}\right)+\\
+\left(-Mq_1^{(2)}\delta\alpha^{(2)}-c\overline{q}_1^{(2)}-\frac{h_1}{2}\overline{q}_1^{(2)}-\frac{h_2}{4}\overline{q}_1^{(3)}+\frac{h_2}{4c}Mq_1^{(3)}\right)\Bigg]\,\delta\alpha^{(2)}dxdt=0;\\
\int\limits_t\int\limits_x\Bigg[\left(\rho F\frac{\partial^2w_1}{\partial t^2}\right)+\frac{1}{4}\left(\rho F\frac{\partial^2w_1}{\partial t^2}+\rho\frac{1}{c^2}I_y\frac{\partial^2w_1}{\partial t^2}+\rho F\frac{\partial^2w_2}{\partial t^2}-\rho\frac{1}{c^2}I_y\frac{\partial^2w_2}{\partial t^2}\right)-\\
-\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial Q_{13}^{(3)}}{\partial x}-\frac{1}{2c}\frac{\partial M_{13}^{(3)}}{\partial x}\right)+\left(\overline{F}_3^{(1)}+\frac{1}{2}\overline{F}_3^{(3)}+\frac{1}{2c}MF_3^{(3)}\right)+\\
+\left(\overline{q}_3^{(1)}+\frac{1}{2}\overline{q}_3^{(3)}+\frac{1}{2c}Mq_3^{(3)}\right)\Bigg]\,\delta w^{(1)}dxdt=0;
\end{gathered}
\tag{2}
$$

$$
\int\limits_{t}\int\limits_{x}\left[\left(\rho F\frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2}\right)+\frac{1}{4}\left[\rho F\frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2}-\rho\frac{1}{c^2}I_y\frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2}+\rho F\frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2}+\rho\frac{1}{c^2}I_y\frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2}\right)-\right.
$$
$$
-\left(\frac{1}{2c}\frac{\partial M_{13}^{(3)}}{\partial x}-\frac{1}{2}\frac{\partial Q_{13}^{(3)}}{\partial x}\right)+\left(\overline{F}_3^{(2)}+\frac{1}{2}\overline{F}_3^{(3)}-\frac{1}{2c}MF_3^{(3)}\right)+
$$
$$
\left.+\left(\overline{q}_3^{(2)}+\frac{1}{2}\overline{q}_3^{(3)}-\frac{1}{2c}Mq_3^{(3)}\right)\right]\delta w^{(2)}dxdt=0.
$$

Естественные граничные условия следующие:

$$
\begin{gathered}
\left[-\left(N_{11}^{(1)}+\tfrac{1}{2}N_{11}^{(3)}+\tfrac{1}{2c}M_{11}^{(3)}\right)+\left(\overline{f}_1^{(1)}+\tfrac{1}{2}\overline{f}_1^{(3)}+\tfrac{1}{2c}Mf_1^{(3)}\right)\right]\delta u^{(1)}\Big|_x=0;\\
\left[-\left(N_{11}^{(2)}+\tfrac{1}{2}N_{11}^{(3)}-\tfrac{1}{2c}M_{11}^{(3)}\right)+\left(\overline{f}_1^{(2)}+\tfrac{1}{2}\overline{f}_1^{(3)}-\tfrac{1}{2c}Mf_1^{(3)}\right)\right]\delta u^{(2)}\Big|_x=0;\\
\left[-\left(-M_{11}^{(1)}+N_{11}^{(1)}+\tfrac{h_1}{2}N_{11}^{(1)}+\tfrac{h_1}{4}N_{11}^{(3)}+\tfrac{h_1}{4c}M_{11}^{(3)}\right)+\right.\\
\left.+\left(-Mf_1^{(1)}+c\overline{f}_1^{(1)}+\tfrac{h_1}{2}\overline{f}_1^{(1)}+\tfrac{h_1}{4}\overline{f}_1^{(3)}+\tfrac{h_1}{4c}Mf_1^{(3)}\right)\right]\delta\alpha^{(1)}\Big|_x=0;\\
\left[-\left(-M_{11}^{(2)}-cN_{11}^{(2)}-\tfrac{h_2}{2}N_{11}^{(2)}-\tfrac{h_2}{4}N_{11}^{(3)}+\tfrac{h_2}{4c}M_{11}^{(3)}\right)+\right.\\
\left.+\left(-Mf_1^{(2)}-c\overline{f}_1^{(2)}-\tfrac{h_1}{2}\overline{f}_1^{(2)}-\tfrac{h_2}{4}\overline{f}_1^{(3)}+\tfrac{h_2}{4c}Mf_1^{(3)}\right)\right]\delta\alpha^{(2)}\Big|_x=0;\\
\left[-\left(\tfrac{1}{2}Q_{13}^{(3)}+\tfrac{1}{2c}M_{13}^{(3)}\right)+\left(\overline{f}_3^{(1)}+\tfrac{1}{2}\overline{f}_3^{(3)}+\tfrac{1}{2c}Mf_3^{(3)}\right)\right]\delta w_1\Big|_x=0;\\
\left[-\left(\tfrac{1}{2}Q_{13}^{(3)}-\tfrac{1}{2c}M_{13}^{(3)}\right)+\left(\overline{f}_3^{(2)}+\tfrac{1}{2}\overline{f}_3^{(3)}-\tfrac{1}{2c}Mf_3^{(3)}\right)\right]\delta w_2\Big|_x=0.
\end{gathered}
\tag{3}
$$

Обобщенные начальные условия следующие:

$$
\begin{gathered}
\left[\rho F\tfrac{\partial u^{(1)}}{\partial t}+\rho cF\tfrac{\partial\alpha^{(1)}}{\partial t}+\rho\tfrac{h_1}{2}F\tfrac{\partial\alpha^{(1)}}{\partial t}+\tfrac{1}{4}\left(\rho F\tfrac{\partial u^{(1)}}{\partial t}+\tfrac{h_1}{2}\rho F\tfrac{\partial\alpha^{(1)}}{\partial t}+\tfrac{h_1}{2c^2}\rho I_y\tfrac{\partial\alpha^{(1)}}{\partial t}+\right.\right.\\
\left.+\tfrac{1}{c^2}\rho I_y\tfrac{\partial u^{(1)}}{\partial t}+\rho F\tfrac{\partial u^{(2)}}{\partial t}-\tfrac{h_2}{2}\rho F\tfrac{\partial\alpha^{(2)}}{\partial t}-\tfrac{1}{c^2}\rho I_y\tfrac{\partial u^{(2)}}{\partial t}+\tfrac{h_2}{2c^2}\rho I_y\tfrac{\partial\alpha^{(2)}}{\partial t}\right]\delta u^{(1)}\Big|_t=0;\\
\left[\rho F\tfrac{\partial u^{(2)}}{\partial t}-\rho cF\tfrac{\partial\alpha^{(2)}}{\partial t}-\rho\tfrac{h_2}{2}F\tfrac{\partial\alpha^{(2)}}{\partial t}+\tfrac{1}{4}\left(\rho F\tfrac{\partial u^{(1)}}{\partial t}+\tfrac{h_1}{2}\rho F\tfrac{\partial\alpha^{(1)}}{\partial t}-\tfrac{1}{c^2}\rho I_y\tfrac{\partial u^{(1)}}{\partial t}-\right.\right.\\
\left.-\tfrac{h_1}{2c^2}\rho I_y\tfrac{\partial\alpha^{(1)}}{\partial t}+\rho F\tfrac{\partial u^{(2)}}{\partial t}-\tfrac{h_2}{2}\rho F\tfrac{\partial\alpha^{(2)}}{\partial t}+\tfrac{1}{c^2}\rho I_y\tfrac{\partial u^{(2)}}{\partial t}-\tfrac{h_2}{2c^2}\rho I_y\tfrac{\partial\alpha^{(2)}}{\partial t}\right]\delta u^{(2)}\Big|_t=0;\\
\left[\rho cF\tfrac{\partial u^{(1)}}{\partial t}+\rho\tfrac{h_1}{2}F\tfrac{\partial u^{(1)}}{\partial t}+\rho I_y\tfrac{\partial\alpha^{(1)}}{\partial t}+\rho c^2F\tfrac{\partial\alpha^{(1)}}{\partial t}+\rho c\tfrac{h_1}{2}F\tfrac{\partial\alpha^{(1)}}{\partial t}+\rho\tfrac{h_1}{2}cF\tfrac{\partial\alpha^{(1)}}{\partial t}+\right.\\
+\rho\tfrac{h_1^2}{4}F\tfrac{\partial\alpha^{(1)}}{\partial t}+\tfrac{1}{4}\left(\tfrac{h_1}{2}\rho F\tfrac{\partial u^{(1)}}{\partial t}+\tfrac{h_1^2}{4}\rho F\tfrac{\partial\alpha^{(1)}}{\partial t}+\tfrac{h_1^2}{4c^2}\rho I_y\tfrac{\partial\alpha^{(1)}}{\partial t}+\tfrac{h_1}{2c^2}\rho I_y\tfrac{\partial u^{(1)}}{\partial t}+\right.\\
\left.\left.+\tfrac{h_1}{2}\rho F\tfrac{\partial u^{(2)}}{\partial t}-\tfrac{h_2h_1}{4}\rho F\tfrac{\partial\alpha^{(2)}}{\partial t}-\tfrac{h_1}{2c^2}\rho I_y\tfrac{\partial u^{(2)}}{\partial t}+\tfrac{h_2h_1}{4c^2}\rho I_y\tfrac{\partial\alpha^{(2)}}{\partial t}\right)\right]\delta\alpha^{(1)}\Big|_t=0;\\
\left[-\rho cF\tfrac{\partial u^{(2)}}{\partial t}-\rho\tfrac{h_2}{2}F\tfrac{\partial u^{(2)}}{\partial t}+\rho I_y\tfrac{\partial\alpha^{(2)}}{\partial t}+\rho c^2F\tfrac{\partial\alpha^{(2)}}{\partial t}+\rho c\tfrac{h_2}{2}F\tfrac{\partial\alpha^{(2)}}{\partial t}+\rho c\tfrac{h_2}{2}F\tfrac{\partial\alpha^{(2)}}{\partial t}+\right.\\
+\rho\tfrac{h_2^2}{4}F\tfrac{\partial\alpha^{(2)}}{\partial t}+\tfrac{1}{4}\left(-\tfrac{h_2}{2}\rho F\tfrac{\partial u^{(1)}}{\partial t}-\tfrac{h_1h_2}{4}\rho F\tfrac{\partial\alpha^{(1)}}{\partial t}+\tfrac{h_2}{2c^2}\rho I_y\tfrac{\partial u^{(1)}}{\partial t}+\tfrac{h_1h_2}{4c^2}\rho I_y\tfrac{\partial\alpha^{(1)}}{\partial t}-\right.\\
\left.\left.-\tfrac{h_2}{2}\rho F\tfrac{\partial u^{(2)}}{\partial t}+\tfrac{h_2^2}{4}\rho F\tfrac{\partial\alpha^{(2)}}{\partial t}-\tfrac{h_2}{2c^2}\rho I_y\tfrac{\partial u^{(2)}}{\partial t}+\tfrac{h_2^2}{4c^2}\rho I_y\tfrac{\partial\alpha^{(2)}}{\partial t}\right)\right]\delta\alpha^{(2)}\Big|_t=0;\\
\left[\rho F\tfrac{\partial w_1}{\partial t}+\tfrac{1}{4}\left(\rho F\tfrac{\partial w_1}{\partial t}+\rho\tfrac{1}{c^2}I_y\tfrac{\partial w_1}{\partial t}+\rho F\tfrac{\partial w_2}{\partial t}-\rho\tfrac{1}{c^2}I_y\tfrac{\partial w_2}{\partial t}\right)\right]\delta w_1\Big|_t=0;\\
\left[\rho F\tfrac{\partial w_2}{\partial t}+\tfrac{1}{4}\left(\rho F\tfrac{\partial w_1}{\partial t}-\rho\tfrac{1}{c^2}I_y\tfrac{\partial w_1}{\partial t}+\rho F\tfrac{\partial w_2}{\partial t}+\rho\tfrac{1}{c^2}I_y\tfrac{\partial w_2}{\partial t}\right)\right]\delta w_2\Big|_t=0.
\end{gathered}
\tag{4}
$$

Таким образом, с использованием гипотезы (1) разработана математическая модель трехслойных стержней при пространственном нагружении. Здесь решаются задачи относительно шестью неизвестных $u^{(1)}$, $u^{(2)}$, $\alpha^{(1)}$, $\alpha^{(2)}$, $w^{(1)}$, $w^{(2)}$. Задавая конкретные граничные условия при $x=0$ и $x=l$, можно решить ряд практических задач.

3 Метод решения

Для решения уравнения движения (2) при начальном условии (3) граничных условиях (4) переходим к безразмерном перемещениям и координатам:

$$x = l\,\bar{x};\ u^{(1)} = h_1\overline{u^{(1)}};\ u^{(2)} = h_1\overline{u^{(2)}};\ w_1 = h_1\,\overline{w_1};\ w_2 = h_2\,\overline{w_2};\ t = t_0\,\bar{t}; \tag{5}$$

$$\alpha^{(1)} = \frac{h_1}{l}\overline{\alpha^{(1)}};\ \alpha^{(2)} = \frac{h_2}{l}\overline{\alpha^{(2)}}.$$

Уравнения (2), (3) и (4) будем делить на $EF\frac{h^2}{l^2}$.

Здесь принимаем $\frac{\rho l^2}{E{t_0}^2} = 1$.

Отсюда определяем масштаб времени

$$t_0 = l\sqrt{\frac{\rho}{E}}. \tag{6}$$

Если учтем выражения (5) и (6) то уравнения (2), (3) и (4) приобратают вид:

$$\begin{gathered}
\Big[\tfrac{h_1^2}{l^2}\left(-b_0E_1h_1 - b_0E_3\tfrac{2c}{3}\right)\tfrac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial x^2} + \tfrac{h_1h_2}{l^2}\left(-b_0E_3\tfrac{c}{3}\right)\tfrac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial x^2} + \tfrac{h_1^2}{l^3}\left(-b_0E_3\tfrac{ch_1}{3}\right)\tfrac{\partial^2\alpha^{(1)}}{\partial x^2}+\\
+\tfrac{h_1h_2}{l^3}\left(b_0E_3\tfrac{ch_2}{6}\right)\tfrac{\partial^2\alpha^{(2)}}{\partial x^2} + \tfrac{h_1^2}{l}\left(\tfrac{1}{2}b_0G_3\right)\tfrac{\partial w_1}{\partial x} + \tfrac{h_1h_2}{l}\left(\tfrac{1}{2}b_0G_3\right)\tfrac{\partial w_2}{\partial x} + h_1^2\left(b_0G_3\tfrac{1}{2c}\right)u^{(1)}+\\
+h_1h_2\left(-b_0G_3\tfrac{1}{2c}\right)u^{(2)} + \tfrac{h_1^2}{l}\left(b_0G_3\tfrac{h_1}{4c}\right)\alpha^{(1)} + \tfrac{h_1h_2}{l}\left(b_0G_3\tfrac{h_2}{4c}\right)\alpha^{(2)} + \overline{F}_1^{(1)} + \tfrac{1}{2}\overline{F}_1^{(3)}+\\
+\tfrac{1}{2c}MF_1^{(3)} + \overline{q}_1^{(1)} + \tfrac{1}{2}\overline{q}_1^{(3)} + \tfrac{1}{2c}Mq_1^{(3)} + \overline{f}_1^{(1)} + \tfrac{1}{2}\overline{f}_1^{(3)} + \tfrac{1}{2c}Mf_1^{(3)}\Big]\,\delta u^{(1)} = 0;
\\[2ex]
\Big[\tfrac{h_2^2}{l^2}\left(-b_0E_2h_2 - b_0E_3\tfrac{2c}{3}\right)\tfrac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial x^2} + \tfrac{h_1h_2}{l^2}\left(b_0E_3\tfrac{c}{3}\right)\tfrac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial x^2}+\\
+\tfrac{h_1h_2}{l^3}\left(-b_0E_3\tfrac{ch_1}{6}\right)\tfrac{\partial^2\alpha^{(1)}}{\partial x^2} + \tfrac{h_2^2}{l^3}\left(b_0E_3\tfrac{ch_2}{3}\right)\tfrac{\partial^2\alpha^{(2)}}{\partial x^2} + \tfrac{h_1h_2}{l}\left(-\tfrac{1}{2}b_0G_3\right)\tfrac{\partial w_1}{\partial x}+\\
+\tfrac{h_2^2}{l}\left(-\tfrac{1}{2}b_0G_3\right)\tfrac{\partial w_2}{\partial x} + h_1h_2\left(-b_0G_3\tfrac{1}{2c}\right)u^{(1)} + h_2^2\left(+b_0G_3\tfrac{1}{2c}\right)u^{(2)}+\\
+\tfrac{h_1h_2}{l}\left(-b_0G_3\tfrac{h_1}{4c}\right)\alpha^{(1)} + \tfrac{h_2^2}{l}\left(-b_0G_3\tfrac{h_2}{4c}\right)\alpha^{(2)} + \overline{F}_1^{(2)} + \tfrac{1}{2}\overline{F}_1^{(3)} - \tfrac{1}{2c}MF_1^{(3)}+\\
+\overline{q}_1^{(2)} + \tfrac{1}{2}\overline{q}_1^{(3)} - \tfrac{1}{2c}Mq_1^{(3)} + \overline{f}_1^{(2)}\delta u^{(2)} + \tfrac{1}{2}\overline{f}_1^{(3)}\delta u^{(2)} - \tfrac{1}{2c}Mf_1^{(3)}\delta u^{(2)}\Big]\,\delta u^{(2)} = 0;
\\[2ex]
\Big[\tfrac{h_1^2}{l^3}\left(-b_0E_3\tfrac{ch_1}{3}\right)\tfrac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial x^2} + \tfrac{h_1h_2}{l^3}\left(-b_0E_3\tfrac{ch_1}{6}\right)\tfrac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial x^2} + \tfrac{h_1^2}{l^4}\left(-b_0E_1\tfrac{h_1^3}{12} - b_0E_3\tfrac{ch_1^2}{6}\right)\tfrac{\partial^2\alpha^{(1)}}{\partial x^2} +\\
+\tfrac{h_1h_2}{l^4}\left(b_0E_3\tfrac{ch_1h_2}{12}\right)\tfrac{\partial^2\alpha^{(2)}}{\partial x^2} + \tfrac{h_1^2}{l^2}\left(b_0G_3\tfrac{h_1}{4}\right)\tfrac{\partial w_1}{\partial x} + \tfrac{h_1h_2}{l^2}\left(b_0G_3\tfrac{h_1}{4}\right)\tfrac{\partial w_2}{\partial x} + \tfrac{h_1^2}{l}\left(b_0G_3\tfrac{h_1}{4}\right)u^{(1)}+\\
+\tfrac{h_1h_2}{l}\left(-b_0G_3\tfrac{h_1}{4}\right)u^{(2)} + \tfrac{h_1^2}{l^2}\left(b_0G_3\tfrac{h_1^2}{8}\right)\alpha^{(1)} + \tfrac{h_1h_2}{l^2}\left(b_0G_3\tfrac{h_1h_2}{8}\right)\alpha^{(2)} - MF_1^{(1)} + c\overline{F}_1^{(1)}+\\
+\tfrac{h_1}{2}\overline{F}_1^{(1)} + \tfrac{h_1}{4}\overline{F}_1^{(3)} + \tfrac{h_1}{4c}MF_1^{(3)} - Mq_1^{(1)} + c\overline{q}_1^{(1)} + \tfrac{h_1}{2}\overline{q}_1^{(1)} + \tfrac{h_1}{4}\overline{q}_1^{(3)} + \tfrac{h_1}{4c}Mq_1^{(3)} - Mf_1^{(1)}+\\
+c\overline{f}_1^{(1)} + \tfrac{h_1}{2}\overline{f}_1^{(1)} + \tfrac{h_1}{4}\overline{f}_1^{(3)} + \tfrac{h_1}{4c}Mf_1^{(3)}\Big]\,\delta\alpha^{(1)} = 0;
\\[2ex]
\Big[\tfrac{h_2^2}{l^3}\left(b_0E_3\tfrac{ch_2}{3}\right)\tfrac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial x^2} + \tfrac{h_1h_2}{l^3}\left(b_0E_3\tfrac{ch_2}{6}\right)\tfrac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial x^2} + \tfrac{h_2^2}{l^4}\left(-b_0E_2\tfrac{h_2^3}{12} - b_0E_3\tfrac{ch_2^2}{6}\right)\tfrac{\partial^2\alpha^{(2)}}{\partial x^2}+\\
+\tfrac{h_1h_2}{l^4}\left(b_0E_3\tfrac{ch_1h_2}{12}\right)\tfrac{\partial^2\alpha^{(1)}}{\partial x^2} + \tfrac{h_1h_2}{l^2}\left(b_0G_3\tfrac{h_2}{4}\right)\tfrac{\partial w_1}{\partial x} + +\tfrac{h_2^2}{l^2}\left(b_0G_3\tfrac{h_2}{4}\right)\tfrac{\partial w_2}{\partial x}+\\
+\tfrac{h_1h_2}{l}\left(b_0G_3\tfrac{h_2}{4c}\right)u^{(1)} + \tfrac{h_1h_2}{l^2}\left(b_0G_3\tfrac{h_1h_2}{8c}\right)\alpha^{(1)} + \tfrac{h_2^2}{l}\left(-b_0G_3\tfrac{h_2}{4c}\right)u^{(2)} + \tfrac{h_2^2}{l^2}\left(b_0G_3\tfrac{h_2^2}{8c}\right)\alpha^{(2)}-\\
-MF_1^{(2)} - c\overline{F}_1^{(2)} - \tfrac{h_1}{2}\overline{F}_1^{(2)} - \tfrac{h_2}{4}\overline{F}_1^{(3)} + \tfrac{h_2}{4c}MF_1^{(3)} - Mq_1^{(2)} - c\overline{q}_1^{(2)} - \tfrac{h_1}{2}\overline{q}_1^{(2)} - \tfrac{h_2}{4}\overline{q}_1^{(3)}+\\
+\tfrac{h_2}{4c}Mq_1^{(3)} - Mf_1^{(2)} - c\overline{f}_1^{(2)} - \tfrac{h_1}{2}\overline{f}_1^{(2)} - \tfrac{h_2}{4}\overline{f}_1^{(3)} + \tfrac{h_2}{4c}Mf_1^{(3)}\Big]\,\delta\alpha^{(2)} = 0;
\\[2ex]
\Big[\tfrac{h_1^2}{l^2}\left(-b_0G_3\tfrac{2c}{3}\right)\tfrac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \tfrac{h_1h_2}{l^2}\left(-b_0G_3\tfrac{c}{3}\right)\tfrac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} + \tfrac{h_1^2}{l}\left(-\tfrac{1}{2}b_0G_3\right)\tfrac{\partial u^{(1)}}{\partial x}+\\
+\tfrac{h_1^2}{l^2}\left(-b_0G_3\tfrac{h_1}{4}\right)\tfrac{\partial\alpha^{(1)}}{\partial x} + \tfrac{h_1h_2}{l}\left(\tfrac{1}{2}b_0G_3\right)\tfrac{\partial u^{(2)}}{\partial x} + \tfrac{h_1h_2}{l^2}\left(b_0G_3\tfrac{h_2}{4}\right)\tfrac{\partial\alpha^{(2)}}{\partial x} + \overline{F}_3^{(1)}+\\
+\tfrac{1}{2}\overline{F}_3^{(3)} + \tfrac{1}{2c}MF_3^{(3)} + \overline{q}_3^{(1)} + \tfrac{1}{2}\overline{q}_3^{(3)} + \tfrac{1}{2c}Mq_3^{(3)} + +\overline{f}_3^{(1)} + \tfrac{1}{2}\overline{f}_3^{(3)} + \tfrac{1}{2c}Mf_3^{(3)}\Big]\,\delta w_1 = 0;
\end{gathered} \tag{7}$$

$$\left[\frac{h_1h_2}{l^2}\left(-b_0G_3\frac{c}{3}\right)\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}+\frac{h_2^2}{l^2}\left(-b_0G_3\frac{2c}{3}\right)\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2}+\frac{h_1h_2}{l}\left(-\frac{1}{2}b_0G_3\right)\frac{\partial u^{(1)}}{\partial x}+\right.$$

$$+\frac{h_1^2}{l^2}\left(-b_0G_3\frac{h_1}{4}\right)\frac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial x}+\frac{h_1h_2}{l}\left(\frac{1}{2}b_0G_3\right)\frac{\partial u^{(2)}}{\partial x}+\frac{h_1h_2}{l^2}\left(-b_0G_3\frac{h_2}{4}\right)\frac{\partial \alpha^{(2)}}{\partial x}+\overline{F}_3^{(2)}+$$

$$\left.+\frac{1}{2}\overline{F}_3^{(3)}+-\frac{1}{2c}MF_3^{(3)}+\overline{q}_3^{(2)}+\overline{q}_3^{(2)}+-\frac{1}{2c}Mq_3^{(3)}+\overline{f}_3^{(2)}+\overline{f}_3^{(2)}+-\frac{1}{2c}Mf_3^{(3)}\right]\delta w_2=0.$$

Естественные начальные условия

$$\left[\left(\tfrac{5Fc^2l_1^2+l_1^2I_y}{4c^2h_1^2F}\right)\tfrac{\partial u^{(1)}}{\partial t}+\left(\tfrac{Fc^2l_1l_2-l_1l_2I_y}{4c^2h_1^2F}\right)\tfrac{\partial u^{(2)}}{\partial t}+\left(\tfrac{l_1h_2h_1I_y-Fc^2l_1h_2^2}{8c^2h_1Fl}\right)\tfrac{\partial \alpha^{(2)}}{\partial t}+\right.$$
$$\left.+\left(\tfrac{8Fc^3h_1l+5Fc^2h_1^2l_1+h_1^2l_1I_y}{8Fc^2h_1^2l}\right)\tfrac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial t}\right]\delta u^{(1)}t_0\Big|_t=0;$$

$$\left[\left(\tfrac{Fc^2l_1l_2-l_1l_2I_y}{4Fc^2h_2^2}\right)\tfrac{\partial u^{(1)}}{\partial t}+\left(\tfrac{5Fc^2l_2^2+l_2^2I_y}{4Fc^2h_2^2}\right)\tfrac{\partial u^{(2)}}{\partial t}+\left(\tfrac{Fc^2l_2h_1^2-l_2h_1^2I_y}{8Fc^2lh_2^2}\right)\tfrac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial t}+\right.$$
$$\left.\left(\tfrac{-8Fc^3l_2-5Fc^2h_2l_2-h_2l_2I_y}{8Fc^2lh_2}\right)\tfrac{\partial \alpha^{(2)}}{\partial t}\right]\delta u^{(2)}t_0\Big|_t=0;$$

$$\left[\left(\tfrac{8Fc^3l_1+5Fc^2h_1l_1+h_1l_1I_y}{8Fc^2lh_1}\right)\tfrac{\partial u^{(1)}}{\partial t}+\left(\tfrac{Fc^2l_2-l_2I_y}{8Fc^2l}\right)\tfrac{\partial u^{(2)}}{\partial t}+\left(\tfrac{h_2^2I_y-Fc^2h_2^2}{16Fc^2l^2}\right)\tfrac{\partial \alpha^{(2)}}{\partial t}+\right.$$
$$\left.\left(\tfrac{16c^2I_y+16Fc^4+16Fc^3h_1+5Fc^2h_1^2+h_1^2I_y}{16Fc^2l^2}\right)\tfrac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial t}\right]\delta \alpha^{(1)}t_0\Big|_t=0; \tag{8}$$

$$\left[\left(\tfrac{I_yl_1-Fc^2l_1}{8Fc^2l}\right)\tfrac{\partial u^{(1)}}{\partial t}+\left(\tfrac{-8Fc^3l_2-5Fc^2h_2l_2-h_2I_yl_2}{8Fc^2lh_2}\right)\tfrac{\partial u^{(2)}}{\partial t}+\left(\tfrac{I_yh_1^2-Fc^2h_1^2}{16Fc^2l^2}\right)\tfrac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial t}+\right.$$
$$\left.\left(\tfrac{16c^2I_y+16Fc^4+16Fc^3h_2+5Fc^2h_2^2+h_2^2I_y}{16Fc^2l^2}\right)\tfrac{\partial \alpha^{(2)}}{\partial t}\right]\delta \alpha^{(2)}t_0\Big|_t=0;$$

$$\left[\left(\tfrac{5Fc^2+I_y}{4Fc^2}\right)\tfrac{\partial w_1}{\partial t}+\left(\tfrac{Fc^2h_2-I_yh_2}{4Fc^2h_1}\right)\tfrac{\partial w_2}{\partial t}\right]\delta w_1t_0\Big|_t=0;$$

$$\left[\left(\tfrac{Fc^2h_1-h_1I_y}{4h_2Fc^2}\right)\tfrac{\partial w_1}{\partial t}+\left(\tfrac{5Fc^2+I_y}{4Fc^2}\right)\tfrac{\partial w_2}{\partial t}\right]\delta w_2t_0\Big|_t=0.$$

Естественные граничные условия

$$\left[\tfrac{l_1^2l}{EFh_1^2}\left(-b_0E_1h_1-b_0E_3\tfrac{2c}{3}\right)\tfrac{\partial u^{(1)}}{\partial x}+\tfrac{l_1l_2l}{EFh_1^2}\left(-b_0E_3\tfrac{2c}{3}\right)\tfrac{\partial u^{(2)}}{\partial x}+\tfrac{l_1}{EFh_1}\left(-b_0E_3\tfrac{ch_1}{3}\right)\tfrac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial x}+\right.$$
$$\left.+\tfrac{l_1h_2}{EFh_1^2}\left(-b_0E_3\tfrac{ch_2}{3}\right)\tfrac{\partial \alpha^{(2)}}{\partial x}+\tfrac{l_1l^2}{EFh_1^2}\overline{f}_1^{(1)}+\tfrac{l_1l^2}{2EFh_1^2}\overline{f}_1^{(3)}+\tfrac{l_1l^2}{EFh_1^22c}Mf_1^{(3)}\right]\delta u^{(1)}\Big|_x=0;$$

$$\left[\tfrac{l_1l_2l}{EFh_2^2}\left(-b_0E_3\tfrac{c}{3}\right)\tfrac{\partial u^{(1)}}{\partial x}+\tfrac{l_2l}{EFh_2^2}\left(-b_0E_2h_2-b_0E_3\tfrac{2c}{3}\right)\tfrac{\partial u^{(2)}}{\partial x}+\tfrac{l_2h_1}{EFh_2^2}\left(-b_0E_3\tfrac{ch_1}{6}\right)\tfrac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial x}+\right.$$
$$\left.+\tfrac{l_2}{EFh_2}\left(b_0E_3\tfrac{ch_2}{3}\right)\tfrac{\partial \alpha^{(2)}}{\partial x}+\tfrac{l_2l^2}{EFh_2^2}\overline{f}_1^{(1)}+\tfrac{l_2l^2}{2EFh_2^2}\overline{f}_1^{(3)}-\tfrac{l_2l^2}{2EFh_2^2}Mf_1^{(3)}\right]\delta u^{(2)}\Big|_x=0;$$

$$\left[\tfrac{l_1}{EFh_1}\left(-b_0E_3\tfrac{ch_1}{3}\right)\tfrac{\partial u^{(1)}}{\partial x}+\tfrac{l_2}{EFh_1}\left(-b_0E_3\tfrac{ch_1}{6}\right)\tfrac{\partial u^{(2)}}{\partial x}+\tfrac{1}{EF}\left(-b_0E_3\tfrac{h_1^3}{12}-b_0E_3\tfrac{ch_1^2}{6}\right)\tfrac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial x}+\right.$$
$$+\tfrac{h_2}{EFh_1}\left(b_0E_3\tfrac{ch_1h_2}{12}\right)\tfrac{\partial \alpha^{(2)}}{\partial x}-\tfrac{l}{EFh_1}Mf_1^{(1)}+\tfrac{ch_1}{EFh_1}\overline{f}_1^{(1)}+\tfrac{l}{2EF}\overline{f}_1^{(1)}+\tfrac{l}{4EF}\overline{f}_1^{(3)}+ \tag{9}$$
$$\left.+\tfrac{l}{EF4c}Mf_1^{(3)}\right]\delta \alpha^{(1)}\Big|_x=0;$$

$$\left[\tfrac{l_1}{EFh_2}\left(b_0E_3\tfrac{ch_2}{6}\right)\tfrac{\partial u^{(1)}}{\partial x}+\tfrac{l_2}{EFh_2}\left(b_0E_3\tfrac{ch_2}{3}\right)\tfrac{\partial u^{(2)}}{\partial x}+\tfrac{h_1}{EFh_2}\left(b_0E_3\tfrac{ch_1h_2}{12}\right)\tfrac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial x}+\right.$$
$$+\tfrac{1}{EF}\left(-b_0E_2\tfrac{h_1^3}{12}-b_0E_3\tfrac{ch_2^2}{6}\right)\tfrac{\partial \alpha^{(2)}}{\partial x}-\tfrac{l}{EFh_2}Mf_1^{(1)}-\tfrac{cl}{EFh_2}\overline{f}_1^{(1)}-\tfrac{l}{2EF}\overline{f}_1^{(1)}-$$
$$\left.-\tfrac{l}{4EF}\overline{f}_1^{(3)}+\tfrac{l}{EF4c}Mf_1^{(3)}\right]\delta \alpha^{(2)}\Big|_x=0;$$

$$\left[\frac{l}{EF}\left(-b_0G_3\frac{2c}{3}\right)\frac{\partial w_1}{\partial x}+\frac{lh_2}{EF}\left(-b_0G_3\frac{c}{3}\right)\frac{\partial w_2}{\partial x}+\frac{l_1l^2}{EFh_1}\left(-\frac{1}{2}b_0G_3\right)u^{(1)}+\right.$$

$$+\frac{l_2 l^2}{EF}\left(\frac{1}{2}b_0 G_3\right)u^{(2)}+\frac{l}{EF}\left(-b_0 G_3\frac{h_1}{4}\right)\alpha^{(1)}+\frac{lh_2}{EFh_1}\left(-b_0 G_3\frac{h_2}{4}\right)\alpha^{(2)}+$$

$$\left.+\frac{l^2}{EFh_1}\overline{f}_3^{(1)}+\frac{l^2}{2EFh_1}\overline{f}_3^{(3)}+\frac{l^2}{EFh_1 2c}Mf_3^{(3)}\right]\delta w_1\Big|_x=0;$$

$$\left[\frac{lh_1}{EFh_2}\left(-b_0 G_3\frac{c}{3}\right)\frac{\partial w_1}{\partial x}+\frac{l}{EF}\left(-b_0 G_3\frac{2c}{3}\right)\frac{\partial w_2}{\partial x}+\frac{l_1 l^2}{EFh_2}\left(-\frac{1}{2}b_0 G_3\right)u^{(1)}+\right.$$

$$+\frac{l_2 l^2}{EFh_2}\left(\frac{1}{2}b_0 G_3\right)u^{(2)}+\frac{h_1 l}{EFh_2}\left(-b_0 G_3\frac{h_1}{4}\right)\alpha^{(1)}+\frac{1}{EF}\left(-b_0 G_3\frac{h_2}{4}\right)\alpha^{(2)}+$$

$$\left.+\frac{l^2}{EFh_2}\overline{f}_3^{(1)}+\frac{l^2}{2EFh_2}\overline{f}_3^{(3)}-\frac{l^2}{EFh_2 2c}Mf_3^{(3)}\right]\delta w_2\Big|_x=0.$$

Решение дифференциальных уравнений движения (2) с соответствующими начальными (3) и граничными (4) условиями, полученными из вариационного принципа Остроградского-Гамильтона в скалярном виде, достаточно сложно. Поэтому решение системы дифференциальных уравнений (2) с начальными (3) и граничными (3) условиями представим в векторном виде. Для этого вводим векторы и матрицы $M,\ A,\ B,\ C,\ D,\ \bar{M},\ \bar{B},\ \bar{C},\ \bar{D}$.

$\overrightarrow{F}_i,\ \overrightarrow{F}_{gr}$ - векторные значения работы внешних сил, состоящие из шести скалярных величин, $\overrightarrow{U}^{(k)}$ вектор неизвестных коэффициентов. Порядок вектора неизвестных в системе уравнений и в граничных условиях получается в следующем виде: $\overrightarrow{F}_i=\left\{u^{(1)},\,u^{(2)},\,\alpha^{(1)},\,\alpha^{(2)},\,w^{(1)},\,w^{(2)}\right\}$ и

$$\overrightarrow{F}_{gr}=\left\{\bar{u}^{(1)},\,\bar{u}^{(2)},\,\bar{\alpha}^{(1)},\,\bar{\alpha}^{(2)},\,\bar{w}^{(1)},\,\bar{w}^{(2)}\right\}.$$

В соответствии уравнений движения (7) с соответственными начальными (8) и граничными условиями (9) формируются следующие матрицы:

$$M=\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} & 0 & 0\\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} & 0 & 0\\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} & 0 & 0\\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_{55} & m_{56}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_{65} & m_{66}\end{bmatrix};A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & 0 & 0\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & 0 & 0\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & 0 & 0\\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{55} & a_{56}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{65} & a_{66}\end{bmatrix};$$

$$B=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & b_{15} & b_{16}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_{25} & b_{26}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_{35} & b_{36}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_{15} & b_{15}\\ b_{51} & b_{52} & b_{53} & b_{54} & 0 & 0\\ b_{61} & b_{62} & b_{63} & b_{64} & 0 & 0\end{bmatrix};C=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & 0 & 0\\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & 0 & 0\\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & 0 & 0\\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix};$$

$$D=\begin{bmatrix} d_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & d_{22} & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & d_{33} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & d_{44} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{55} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{66}\end{bmatrix},$$

где элементы матрицы M, A, B, C, D:

$$m_{11}=\frac{l_1^2\left(-5c^2F-I_y\right)}{4c^2h_1^2F};\quad m_{12}=\frac{l_1l_2\left(I_y-c^2F\right)}{4c^2h_1^2F};\ m_{13}=\frac{l_1\left(-8c^3F-5c^2Fh_1-h_1I_y\right)}{8c^2Flh_1};$$

$$m_{14}=\frac{l_1h_2\left(Fc^2-I_y\right)}{8c^2h_1Fl};\ m_{21}=\frac{l_1l_2\left(I_y-4Fc^2\right)}{4Fc^2h_2^2};\quad m_{22}=\frac{l_2^2\left(-I_y-5Fc^2\right)}{4Fc^2h_2^2};$$

$$m_{23}=\frac{l_2h_1^2\left(I_y-Fc^2\right)}{8Fc^2lh_2^2};\ m_{24}=\frac{l_2\left(8Fc^3+5Fc^2h_2+I_yh_2\right)}{8Fc^2lh_2};\ m_{31}=\frac{l_1\left(-8Fc^3-5Fc^2h_1-h_1I_y\right)}{8c^2lFh_1};$$

$$m_{32}=\frac{l_2\left(I_y-Fc^2\right)}{8Fc^2l};\quad m_{33}=\frac{16\left(-c^2I_y-Fc^4-Fc^3h_1^2\right)+h_1^2\left(-5Fc^2-I_y\right)}{16Fc^2l^2};\quad m_{34}=\frac{h_2^2\left(Fc^2-I_y\right)}{16Fc^2l^2};$$

$$m_{41}=\frac{l_1\left(Fc^2-I_y\right)}{8Fc^2l};\quad m_{42}=\frac{l_2\left(8Fc^3+5Fc^2h_2+I_yh_2\right)}{8Fc^2lh_2};\ m_{43}=\frac{h_1^2\left(Fc^2-I_y\right)}{16Fc^2l^2};$$

$$m_{44}=\frac{16(-c^2I_y-Fc^4-Fc^3h_2)+h_2^2(-5Fc^2-I_y)}{16Fc^2l^2};m_{55}=\frac{-5Fc^2-I_y}{4Fc^2};\ m_{56}=\frac{h_2\left(I_y-Fc^2\right)}{4Fc^2h_1};$$

$$m_{65}=\frac{h_1\left(I_y-Fc^2\right)}{4Fc^2h_2};\ m_{66}=\frac{-5Fc^2-I_y}{4Fc^2}.$$

$$a_{11}=\frac{h_1^2}{l^2}\cdot(-b_0E_1h_1-b_0E_3\frac{2c}{3});\ a_{12}=\frac{h_1h_2}{l^2}(-b_0E_3\frac{c}{3});\ a_{13}=\frac{h_1^2}{l^3}(-b_0E_3\frac{ch_1}{3});$$

$$a_{14}=\frac{h_1h_2}{l^3}(b_0E_3\frac{ch_2}{6});\quad a_{21}=\frac{h_1h_2}{l^2}(b_0E_3\frac{c}{3});a_{22}=\frac{h_2^2}{l^2}(-b_0E_2h_2-b_0E_3\frac{2c}{3});$$

$$a_{23}=\frac{h_1h_2}{l^3}(b_0E_3\frac{ch_1}{6});\ a_{24}=\frac{h_2^2}{l^3}(b_0E_3\frac{ch_2}{3});\ a_{31}=\frac{h_1^2}{l^3}(-b_0E_3\frac{ch_1}{3});$$

$$a_{32}=\frac{h_1h_2}{l^3}(-b_0E_3\frac{ch_1}{6});\ a_{33}=\frac{h_1^2}{l^4}(-b_0E_1\frac{h_1^3}{12}-b_0E_3\frac{ch_1^2}{6});\ a_{34}=\frac{h_1h_2}{l^4}(b_0E_3\frac{ch_1h_2}{12});$$

$$a_{41}=\frac{h_1h_2}{l^3}(b_0E_3\frac{ch_2}{6});\ a_{42}=\frac{h_2^2}{l^3}(b_0E_3\frac{ch_2}{3});\ a_{43}=\frac{h_1h_2}{l^4}(b_0E_3\frac{ch_1h_2}{12});$$

$$a_{44}=\frac{h_2^2}{l^4}(-b_0E_2\frac{h_2^3}{12}-b_0E_3\frac{ch_2^2}{6});\ a_{55}=\frac{h_1^2}{l^2}(-b_0G_3\frac{2c}{3});$$

$$a_{56}=\frac{h_1h_2}{l^2}(-b_0G_3\frac{c}{3});a_{65}=\frac{h_1h_2}{l^2}(-b_0G_3\frac{c}{3});\ a_{66}=\frac{h_2^2}{l^2}(-b_0G_3\frac{2c}{3}).$$

$$b_{15=}\frac{h_1^2}{l}(\frac{1}{2}b_0G_3);\ b_{16}=\frac{h_1h_2}{l}(\frac{1}{2}b_0G_3);\ b_{25}=\frac{h_1h_2}{l}(-\frac{1}{2}b_0G_3);\ b_{26}=\frac{h_2^2}{l}(-\frac{1}{2}b_0G_3);$$

$$b_{35}=\frac{h_1^2}{l^2}(b_0G_3\frac{h_1}{4});\ b_{36}=\frac{h_1h_2}{l}(b_0G_3\frac{h_1}{4});\ b_{45}=\frac{h_1h_2}{l}(b_0G_3\frac{h_2}{4});\ b_{55}=\frac{h_2^2}{l^2}(b_0G_3\frac{h_2}{4});$$

$$b_{51}=\frac{h_1^2}{l}(-\frac{1}{2}b_0G_3);\ b_{52}=\frac{h_1h_2}{l}(\frac{1}{2}b_0G_3);\ b_{53}=\frac{h_1^2}{l^2}(-b_0G_3\frac{h_1}{4});\ b_{54}=\frac{h_1h_2}{l^2}(-b_0G_3\frac{h_2}{4});$$

$$b_{61}=\frac{h_1h_2}{l}(-\frac{1}{2}b_0G_3);\ b_{62}=\frac{h_1^2}{l}(\frac{1}{2}b_0G_3);\ b_{63}=\frac{h_1h_2}{l^2}(-b_0G_3\frac{h_1}{4});\ b_{64}=\frac{h_2^2}{l^2}(-b_0G_3\frac{h_2}{4}).$$

$$c_{11}=h_1^2(b_0G_3\frac{1}{2c});\ c_{12}=h_1h_2(-b_0G_3\frac{1}{2c});\ c_{13}=\frac{h_1^2}{l}(b_0G_3\frac{h_1}{4c});\ c_{14}=\frac{h_1h_2}{l}(b_0G_3\frac{h_2}{4c});$$

$$c_{21}=h_1h_2(-b_0G_3\frac{1}{2c});\ c_{22}=h_2^2(+b_0G_3\frac{1}{2c});\ c_{23}=\frac{h_1h_2}{l}(-b_0G_3\frac{h_1}{4c});\ c_{24}=\frac{h_2^2}{l}(-b_0G_3\frac{h_2}{4c});$$

$$c_{31}=\frac{h_1^2}{l}(b_0G_3\frac{h_2}{4c});\ c_{32}=\frac{h_1h_2}{l}(-b_0G_3\frac{h_1}{4c});\ c_{33}=\frac{h_1^2}{l^2}(b_0G_3\frac{h_1^2}{8c});\ c_{34}=\frac{h_1h_2}{l^2}(b_0G_3\frac{h_1h_2}{8c});$$

$$c_{41}=\frac{h_1h_2}{l}(b_0G_3\frac{h_2}{4c});\ c_{42}=\frac{h_2^2}{l}(-b_0G_3\frac{h_1}{4c});\ c_{43}=\frac{h_1h_2}{l^2}(b_0G_3\frac{h_1h_2}{8c});\ c_{44}=\frac{h_2^2}{l^2}(b_0G_3\frac{h_2^2}{8c}).$$

$$d_{11}=\frac{l_1l^2}{E_1Fh_1^2};\ d_{22}=\frac{l_2l^2}{E_2Fh_2^2};\ d_{33}=\frac{l}{E_1F};\ d_{44}=\frac{l}{E_2F};\ d_{55}=\frac{l^2}{E_1Fh_1};\ d_{66}=\frac{l^2}{E_2Fh_2}.$$

Здесь векторные элементы F следующие:

$$u^{(1)} = \left(\overline{F}_1^{(1)} + \overline{q}_1^{(1)}\right) + \tfrac{1}{2}\left(\overline{F}_1^{(3)} + \overline{q}_1^{(3)}\right) + \tfrac{1}{2}\left(MF_1^{(3)} + Mq_1^{(3)}\right);$$

$$u^{(2)} = \left(\overline{F}_1^{(2)} + \overline{q}_1^{(2)}\right) + \tfrac{1}{2}\left(\overline{F}_1^{(3)} + \overline{q}_1^{(3)}\right) + \tfrac{1}{2c}\left(-MF_1^{(3)} - Mq_1^{(3)}\right);$$

$$\alpha^{(1)} = \tfrac{1}{h_1}\left(-MF_1^{(1)} - Mq_1^{(1)}\right) + \tfrac{c}{h_1}\left(\overline{F}_1^{(1)} + \overline{q}_1^{(1)}\right) + \tfrac{1}{2}\left(\overline{F}_1^{(1)} + \overline{q}_1^{(1)}\right) + \\ + \tfrac{1}{4}\left(\overline{F}_1^{(3)} + \overline{q}_1^{(3)}\right) + \tfrac{1}{4c}\left(MF_1^{(3)} + Mq_1^{(3)}\right);$$

$$\alpha^{(2)} = \tfrac{1}{h_2}\left(-MF_1^{(2)} - Mq_1^{(2)}\right) + \tfrac{c}{h_2}\left(-\overline{F}_1^{(2)} - \overline{q}_1^{(2)}\right) + \tfrac{1}{2}\left(-\overline{F}_1^{(2)} - \overline{q}_1^{(2)}\right) + \\ + \tfrac{1}{4}\left(-\overline{F}_1^{(3)} - \overline{q}_1^{(3)}\right) + \tfrac{1}{4c}\left(MF_1^{(3)} + Mq_1^{(3)}\right);$$

$$w^{(1)} = \left(\overline{F}_3^{(1)} + \overline{q}_3^{(1)}\right) + \tfrac{1}{2}\left(\overline{F}_3^{(3)} + \overline{q}_3^{(3)}\right) + \tfrac{1}{2c}\left(MF_3^{(3)} + Mq_3^{(3)}\right);$$

$$w^{(2)} = \left(\overline{F}_3^{(2)} + \overline{q}_3^{(2)}\right) + \tfrac{1}{2}\left(\overline{F}_3^{(3)} + \overline{q}_3^{(3)}\right) + \tfrac{1}{2c}\left(-MF_3^{(3)} - Mq_3^{(3)}\right).$$

Приведем матрицу $\bar{M}$ обобщенных естественных начальных условий (8) и ее элементы:

$$\bar{M} = \begin{bmatrix} \bar{m}_{11} & \bar{m}_{12} & \bar{m}_{13} & \bar{m}_{14} & 0 & 0 \\ \bar{m}_{21} & \bar{m}_{22} & \bar{m}_{23} & \bar{m}_{24} & 0 & 0 \\ \bar{m}_{31} & \bar{m}_{32} & \bar{m}_{33} & \bar{m}_{34} & 0 & 0 \\ \bar{m}_{41} & \bar{m}_{42} & \bar{m}_{43} & \bar{m}_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{m}_{55} & \bar{m}_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{m}_{65} & \bar{m}_{66} \end{bmatrix};$$

$$\bar{m}_{11} = \tfrac{5Fc^2l_1^2+l_1^2I_y}{4c^2h_1^2F};\ \bar{m}_{12} = \tfrac{Fc^2l_1l_2-l_1l_2I_y}{4c^2h_1^2F};\ \bar{m}_{13} = \tfrac{8Fc^3h_1l+5Fc^2h_1^2l_1+h_1^2l_1I_y}{8Fc^2h_1^2l};$$

$$\bar{m}_{14} = \tfrac{l_1h_2h_1I_y-Fc^2l_1h_2^2}{8c^2h_1Fl};\ \bar{m}_{21} = \tfrac{Fc^2l_1l_2-l_1l_2I_y}{4Fc^2h_2^2};\ \bar{m}_{22} = \tfrac{5Fc^2l_2^2+l_2^2I_y}{4Fc^2h_2^2};$$

$$\bar{m}_{23} = \tfrac{Fc^2l_2h_1^2-l_2h_1^2I_y}{8Fc^2lh_2^2};\ \bar{m}_{24} = \tfrac{-8Fc^3l_2-5Fc^2h_2l_2-h_2l_2I_y}{8Fc^2lh_2};\ \bar{m}_{31} = \tfrac{8Fc^3l_1+5Fc^2h_1l_1+h_1l_1I_y}{8Fc^2lh_1};$$

$$\bar{m}_{32} = \tfrac{Fc^2l_2-l_2I_y}{8Fc^2l};\ \bar{m}_{33}{=}\tfrac{16c^2I_y+16Fc^4+16Fc^3h_1+5Fc^2h_1^2+h_1^2I_y}{16Fc^2l^2};\ \bar{m}_{34} = \tfrac{h_2^2I_y-Fc^2h_2^2}{16Fc^2l^2}$$

$$\bar{m}_{41} = \tfrac{I_yl_1-Fc^2l_1}{8Fc^2l};\ \bar{m}_{42} = \tfrac{-8Fc^3l_2-5Fc^2h_2l_2-h_2I_yl_2}{8Fc^2lh_2};\ \bar{m}_{43}{=}\tfrac{I_yh_1^2-Fc^2h_1^2}{16Fc^2l^2};$$

$$\bar{m}_{44} = \tfrac{16c^2I_y+16Fc^4+16Fc^3h_2+5Fc^2h_2^2+h_2^2I_y}{16Fc^2l^2};\ \bar{m}_{55} = \tfrac{5Fc^2+I_y}{4Fc^2};\ \bar{m}_{56} = \tfrac{Fc^2h_2-I_yh_2}{4Fc^2h_1};$$

$$\bar{m}_{65} = \tfrac{Fc^2h_1-h_1I_y}{4h_2Fc^2};\ \bar{m}_{66} = \tfrac{5Fc^2+I_y}{4Fc^2}.$$

Приведем матрицу $\bar{B}$ обобщенных естественных начальных условий (8) и ее элементы:

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} \bar{b}_{11} & \bar{b}_{12} & \bar{b}_{13} & \bar{b}_{14} & 0 & 0 \\ \bar{b}_{21} & \bar{b}_{22} & \bar{b}_{23} & \bar{b}_{24} & 0 & 0 \\ \bar{b}_{31} & \bar{b}_{32} & \bar{b}_{33} & \bar{b}_{34} & 0 & 0 \\ \bar{b}_{31} & \bar{b}_{32} & \bar{b}_{34} & \bar{b}_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{b}_{55} & \bar{b}_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{b}_{65} & \bar{b}_{66} \end{bmatrix};$$

$$\bar{b}_{11}=\tfrac{l_1^2 l}{E_1Fh_1^2}\left(-b_0E_1h_1-b_0E_3\tfrac{2c}{3}\right);\ \bar{b}_{12}=\tfrac{l_1l_2l}{E_1Fh_1^2}\left(-b_0E_3\tfrac{2c}{3}\right);\ \bar{b}_{13}=\tfrac{l_1}{E_1Fh_1}\left(-b_0E_3\tfrac{ch_1}{3}\right);$$
$$\bar{b}_{14}=\tfrac{l_1h_2}{E_1Fh_1^2}\left(-b_0E_3\tfrac{ch_2}{3}\right);\bar{b}_{21}=\tfrac{l_1l_2l}{E_2Fh_2^2}\left(-b_0E_3\tfrac{c}{3}\right);\ \bar{b}_{22}=\tfrac{l_2l}{E_2Fh_2^2}\left(-b_0E_2h_2-b_0E_3\tfrac{2c}{3}\right);$$
$$\bar{b}_{23}=\tfrac{l_2h_1}{E_2Fh_2^2}\left(-b_0E_3\tfrac{ch_1}{6}\right);\ \bar{b}_{24}=\tfrac{l_2}{E_2Fh_2}\left(b_0E_3\tfrac{ch_2}{3}\right);\ \bar{b}_{31}=\tfrac{l_1}{E_1Fh_1}\left(-b_0E_3\tfrac{ch_1}{3}\right);$$
$$\bar{b}_{32}=\tfrac{l_2}{E_1Fh_1}\left(-b_0E_3\tfrac{ch_1}{6}\right);\ \bar{b}_{33}=\tfrac{1}{E_1F}\left(-b_0E_3\tfrac{h_1^3}{12}-b_0E_3\tfrac{ch_1^2}{6}\right);\ \bar{b}_{34}=\tfrac{h_2}{E_1Fh_1}\left(b_0E_3\tfrac{ch_1h_2}{12}\right)$$
$$\bar{b}_{41}=\tfrac{l_1}{E_2Fh_2}\left(b_0E_3\tfrac{ch_2}{6}\right);\ \bar{b}_{42}=\tfrac{l_2}{E_2Fh_2}\left(b_0E_3\tfrac{ch_2}{3}\right);\ \bar{b}_{43}=\tfrac{h_1}{E_2Fh_2}\left(b_0E_3\tfrac{ch_1h_2}{12}\right);$$
$$\bar{b}_{44}=\tfrac{1}{E_2F}\left(-b_0E_2\tfrac{h_1^3}{12}-b_0E_3\tfrac{ch_2^2}{6}\right);\bar{b}_{55}=\tfrac{l}{E_1F}\left(-b_0G_3\tfrac{2c}{3}\right);\ \bar{b}_{56}=\tfrac{lh_2}{E_1F}\left(-b_0G_3\tfrac{c}{3}\right);$$
$$\bar{b}_{65}=\tfrac{lh_1}{E_2Fh_2}\left(-b_0G_3\tfrac{c}{3}\right);\ \bar{b}_{66}=\tfrac{l}{E_2F}\left(-b_0G_3\tfrac{2c}{3}\right).$$

Приведем матрицу $\bar{C}$ обобщенных естественных начальных условий (8) и ее элементы:

$$\bar{C}=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\\bar{c}_{51}&\bar{c}_{52}&\bar{c}_{53}&\bar{c}_{54}&0&0\\\bar{c}_{61}&\bar{c}_{62}&\bar{c}_{63}&\bar{c}_{64}&0&0\end{bmatrix};$$

$$\bar{c}_{51}=\frac{l_1l^2}{E_1Fh_1}\left(-\frac{1}{2}b_0G_3\right);\ \bar{c}_{52}=\frac{l_2l^2}{E_1F}\left(\frac{1}{2}b_0G_3\right);$$
$$\bar{c}_{53}=\frac{l}{E_1F}\left(-b_0G_3\frac{h_1}{4}\right);\ \bar{c}_{54}=\frac{lh_2}{E_1Fh_1}\left(-b_0G_3\frac{h_2}{4}\right);$$
$$\bar{c}_{61}=\frac{l_1l^2}{E_2Fh_2}\left(-\frac{1}{2}b_0G_3\right);\ \bar{c}_{62}=\frac{l_2l^2}{E_2Fh_2}\left(\frac{1}{2}b_0G_3\right);$$
$$\bar{c}_{63}=\frac{h_1l}{E_2Fh_2}\left(-b_0G_3\frac{h_1}{4}\right);\ \bar{c}_{64}=\frac{1}{E_2F}\left(-b_0G_3\frac{h_2}{4}\right).$$

Приведем матрицу $\bar{D}$ обобщенных естественных начальных условий (8) и ее элементы:

$$\bar{D}=\begin{bmatrix}\bar{d}_{11}&0&0&0&0&0\\0&\bar{d}_{22}&0&0&0&0\\0&0&\bar{d}_{33}&0&0&0\\0&0&0&\bar{d}_{44}&0&0\\0&0&0&0&\bar{d}_{55}&0\\0&0&0&0&0&\bar{d}_{66}\end{bmatrix};$$

$$\bar{d}_{11}=\frac{l_1l^2}{E_1Fh_1^2};\ \bar{d}_{22}=\frac{l_2l^2}{E_2Fh_2^2};\ \bar{d}_{33}=\frac{l}{E_1F};\ \bar{d}_{44}=\frac{l}{E_2F};\ \bar{d}_{55}=\frac{l^2}{E_1Fh_1};\ \bar{d}_{66}=\frac{l^2}{E_2Fh_2}.$$

Здесь элементами вектора $\overrightarrow{F}_{gr}$ являются:

$$\bar{u}^{(1)} = \left(\overline{f}_1^{(1)} + \tfrac{1}{2}\overline{f}_1^{(3)} + \tfrac{1}{2c}Mf_1^{(3)}\right); \quad \bar{u}^{(2)} = \left(\overline{f}_1^{(1)} + \tfrac{1}{2}\overline{f}_1^{(3)} - \tfrac{1}{2c}Mf_1^{(3)}\right);$$

$$\bar{\alpha}^{(1)} = \left(\tfrac{c}{h_1}\overline{f}_1^{(1)} + \tfrac{1}{2}\overline{f}_1^{(1)} + \tfrac{1}{4}\overline{f}_1^{(3)} + \tfrac{1}{4c}Mf_1^{(3)} - \tfrac{1}{h_1}Mf_1^{(1)}\right);$$

$$\bar{\alpha}^{(2)} = \left(-\tfrac{c}{h_2}\overline{f}_1^{(1)} - \tfrac{1}{2}\overline{f}_1^{(1)} - \tfrac{1}{4}\overline{f}_1^{(3)} + \tfrac{1}{4c}Mf_1^{(3)} - \tfrac{1}{h_2}Mf_1^{(1)}\right);$$

$$\bar{w}^{(1)} = \left(\overline{f}_3^{(1)} + \tfrac{1}{2}\overline{f}_3^{(3)} + \tfrac{1}{2c}Mf_3^{(3)}\right); \quad \bar{w}^{(2)} = \left(\overline{f}_3^{(1)} + \tfrac{1}{2}\overline{f}_3^{(3)} - \tfrac{1}{2c}Mf_3^{(3)}\right).$$

Тогда векторно-матричном вид систему дифференциальных уравнений (7), начальных условий (8) и граничных условий (9) имеют следующие:

$$M\frac{\partial^2\overrightarrow{U}}{\partial x^2} + A\frac{\partial^2\overrightarrow{U}}{\partial x^2} + B\frac{\partial\overrightarrow{U}}{\partial x} + C\overrightarrow{U} + D\overrightarrow{F} = 0; \tag{10}$$

$$[\bar{M}]\left[\frac{\partial\overrightarrow{U^k}}{\partial\bar{t}}\right]\Bigg|_{\bar{t}} = 0; \tag{11}$$

$$[\bar{B}]\,\frac{\partial\overrightarrow{U^k}}{\partial\bar{x}} + [\bar{C}]\,\overrightarrow{U^k} + [\bar{D}]\,\overrightarrow{F}_{gr} = 0, \tag{12}$$

где $\overrightarrow{U}(t,x)$ - искомый неизвестный вектор, матрицы, сформированные из коэффициентов начальных и граничных условий $\overrightarrow{F}_i$, $\overrightarrow{F}$-векторные элементы внешних сил, действующих на стержней при пространственных нагрузках. Как видно из вышеизложенного, уравнения (9)-(11) гиперболического типа, начальные и граничные условия являются нелинейными уравнениями распространения волн.

Как видно из вышеизложенного, уравнения (10) - (12) гиперболического типа, начальные и граничные условия являются нелинейными уравнениями распространения волн. С помощью уравнений (10) – (12) можно исследовать процесс колебания трехслойного стержня при пространственном нагружении.

На основе перемешения точек относително сентралной оси в упругом случае трехслойных стержней при пространственных нагрузках появление шести векторов неизвестных переменных можно записат следующим образом:

$$\overrightarrow{U} = \left\{u^{(1)}, u^{(2)}, \alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, w^{(1)}, w^{(2)}\right\}. \tag{13}$$

Математическая модель, решающая задачу упругости стержней при пространственном нагружении под действием комплексных сил, имеют следующих краевых задач.

1. Рассмотрим случай, когда два конца стержня жестко-защемленные. Граничные условия имеют вид

$$\overrightarrow{U}\Big|_{\bar{x}=0} = 0; \quad \frac{\partial\overrightarrow{U}}{\partial x}\Bigg|_{\bar{x}=0} = 0; \quad \overrightarrow{U}\Big|_{\bar{x}=l} = 0; \quad \frac{\partial\overrightarrow{U}}{\partial x}\Bigg|_{\bar{x}=l} = 0. \tag{14}$$

2. Рассмотрим другой случай, когда один конец защемлен, а второй свободный. Тогда условия принимают вид:

$$\overrightarrow{U}\Big|_{\bar{x}=0} = 0; \quad \frac{\partial\overrightarrow{U}}{\partial x}\Bigg|_{\bar{x}=0} = 0; \quad \overrightarrow{U}\Big|_{\bar{x}=l} \neq 0; \quad \frac{\partial\overrightarrow{U}}{\partial x}\Bigg|_{\bar{x}=l} \neq 0. \tag{15}$$

4 Вычислительный алгоритм

При построении алгоритма расчета системы дифференциальных уравнений (10) с начальными (11) и граничными условиями (12) применяем метод конечных разностей следующей неявной схемы [22].

При построении вычислительного алгоритма для системы дифференциальных уравнений (10) с начальными (11) и граничными (12) условиями применяем центральные конечно-разностные соотношения метода конечных разностей с точностью до второго порядка [?] Систему уравнений (10) аппроксимируем соответствующими началными (11) и граничными (12) условиями следующим образом:

$$M\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial t^2} = \frac{1}{\tau^2} M \left[\overrightarrow{U}_{i,j+1} - 2\overrightarrow{U}_{i,j} + \overrightarrow{U}_{i,j-1} \right]; \tag{16}$$

$$A\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial x^2} = \frac{1}{h^2} A \left[\overrightarrow{U}_{i+1,j+1} - 2\overrightarrow{U}_{i,j+1} + \overrightarrow{U}_{i-1,j+1} \right]; \tag{17}$$

$$B\frac{\partial \bar{U}}{\partial x} = \frac{1}{2h} B \left[\overrightarrow{U}_{i+1,j+1} - \overrightarrow{U}_{i-1,j+1} \right]; \tag{18}$$

$$M\frac{\partial \bar{U}}{\partial t} = M\frac{1}{2\tau} \left[\overrightarrow{U}_{i,j+1} - \overrightarrow{U}_{i,j-1} \right]. \tag{19}$$

Вставляя (16) - (19) в (10), имеем:

$$\begin{gathered} \tfrac{M}{\tau^2}\left[\overrightarrow{U}_{i,j+1} - 2\overrightarrow{U}_{i,j} + \overrightarrow{U}_{i,j-1}\right] + \tfrac{A}{h^2}\left[\overrightarrow{U}_{i+1,j} - 2\overrightarrow{U}_{i,j} + \overrightarrow{U}_{i-1,j}\right] + \\ + \tfrac{B}{2h}\left[\overrightarrow{U}_{i+1,j} - \overrightarrow{U}_{i-1,j}\right] + C\overrightarrow{U}_{i,j} + \overrightarrow{F}_{i,j} = 0. \end{gathered} \tag{20}$$

Уравнение (20) разделим на $^{M}/_{\tau^2}$:

$$\begin{gathered} \left[\overrightarrow{U}_{i,j+1} - 2\overrightarrow{U}_{i,j} + \overrightarrow{U}_{i,j-1}\right] + \tfrac{\tau^2 A M^{-1}}{h^2}\left[\overrightarrow{U}_{i+1,j} - 2\overrightarrow{U}_{i,j} + \overrightarrow{U}_{i-1,j}\right] + \\ + \tfrac{\tau^2 B M^{-1}}{2h}\left[\overrightarrow{U}_{i+1,j} - \overrightarrow{U}_{i-1,j}\right] + \tau^2 C M^{-1}\overrightarrow{U}_{i,j} + \tau^2 M^{-1}\overrightarrow{F}_{i,j} = 0. \end{gathered} \tag{21}$$

Приводим подобные члены:

$$\begin{gathered} \overrightarrow{U}_{i,j+1} - \left[2E + \tfrac{2\tau^2 A M^{-1}}{h^2} - \tau^2 C M^{-1}\right]\overrightarrow{U}_{i,j} + \left[\tfrac{\tau^2 A M^{-1}}{h^2} - \tfrac{\tau^2 B M^{-1}}{2h}\right]\overrightarrow{U}_{i-1,j} + \\ + \left[\tfrac{\tau^2 A M^{-1}}{h^2} + \tfrac{\tau^2 B M^{-1}}{2h}\right]\overrightarrow{U}_{i+1,j} + \overrightarrow{U}_{i,j-1} + \tau^2 M^{-1}\overrightarrow{F}_{i,j} = 0. \end{gathered} \tag{22}$$

Здесь вводим обозначения:

$$\begin{gathered} \tilde{A} = \tfrac{\tau^2 A M^{-1}}{h^2} - \tfrac{\tau^2 B M^{-1}}{2h},\ \tilde{B} = 2E + \tfrac{2\tau^2 A M^{-1}}{h^2} - \tau^2 C M^{-1}, \\ \tilde{C} = \tfrac{\tau^2 A M^{-1}}{h^2} + \tfrac{\tau^2 B M^{-1}}{2h},\ \tilde{F}_{i,j} = \tau^2 M^{-1}\overrightarrow{F}_{i,j}. \end{gathered} \tag{23}$$

Вставляем (23) в (22) и имеем:

$$\overrightarrow{U}_{i,j+1} + \tilde{A}\overrightarrow{U}_{i-1,j} - \tilde{B}\overrightarrow{U}_{i,j} + \tilde{C}\overrightarrow{U}_{i+1,j} + \overrightarrow{U}_{i,j-1} + \tilde{F}_{i,j} = 0.$$

Последнее уравнение решается относительно вектор-функции $\overrightarrow{U}_{i,j+1}$:

$$\overrightarrow{U}_{i,j+1} = -\tilde{A}\overrightarrow{U}_{i-1,j} + \tilde{B}\overrightarrow{U}_{i,j} - \tilde{C}\overrightarrow{U}_{i+1,j} - \overrightarrow{U}_{i,j-1} - \tilde{F}_{i,j}. \tag{24}$$

При $j=0;\ i=i$ рассмотрим начальные условия

$$M\left.\frac{\partial\overrightarrow{U}}{\partial t}\right|_{t=t_0}=\dot{\overrightarrow{U}}_{i,0}=\frac{M}{2\tau}\left(\overrightarrow{U}_{i,1}-\overrightarrow{U}_{i,-1}\right);\quad \left.\overrightarrow{U}\right|_{t=t_0}=\overrightarrow{U}^0_{i,0}. \tag{25}$$

Из начальных условий (25) определяем вектор-функции $\overrightarrow{U}_{i,-1}$:

$$\overrightarrow{U}_{i,-1}=\overrightarrow{U}_{i,1}-2\tau\dot{\overrightarrow{U}}_{i,0}\ M^{-1}. \tag{26}$$

При $j=0;\ i=i$ уравнение (23) имеет вид:

$$\overrightarrow{U}_{i,1}=-\tilde{A}\overrightarrow{U}_{i-1,0}+\tilde{B}\overrightarrow{U}_{i,0}-\tilde{C}\overrightarrow{U}_{i+1,0}-\left(\overrightarrow{U}_{i,1}-2\tau M^{-1}\dot{\overrightarrow{U}}^{0}_{i,0}\right)-\tilde{F}_{i,0}.$$

Приводим подобные члены:

$$\overrightarrow{U}_{i,1}=\frac{1}{2}\left[-\tilde{A}\overrightarrow{U}_{i-1,0}+\tilde{B}\overrightarrow{U}_{i,0}-\tilde{C}\overrightarrow{U}_{i+1,0}+2\tau M^{-1}\dot{\overrightarrow{U}}^{0}_{i,0}-\tilde{F}_{i,0}\right]. \tag{27}$$

Если учтем начальные условия (27), то последнее уравнение принимает вид

$$\overrightarrow{U}_{i,1}=\frac{1}{2}\left[-\tilde{A}\overrightarrow{U}^{0}{}_{i-1,0}+\tilde{B}\overrightarrow{U}^{0}{}_{i,0}-\tilde{C}\overrightarrow{U}^{0}{}_{i+1,0}+2\tau M^{-1}\dot{\overrightarrow{U}}^{0}_{i,0}-\tilde{F}_{i,0}\right]. \tag{28}$$

При $j=1,\ i=i$ уравнение (24), с учетом начальных условий (25), принимает вид:

$$\overrightarrow{U}_{i,2}=-\tilde{A}\overrightarrow{U}_{i-1,1}+\tilde{B}\overrightarrow{U}_{i,1}-\tilde{C}\overrightarrow{U}_{i+1,1}-\overrightarrow{U}^0_{i,0}-\tilde{F}_{i,0}. \tag{29}$$

Рассмотрим граничные условия (11) при $i=0$, аппроксимируем шагом вперёд:

$$\frac{\partial\overrightarrow{U}}{\partial x}=\frac{1}{2h}\left(-3\overrightarrow{U}_{0;j}+4\overrightarrow{U}_{1,j}-\overrightarrow{U}_{2,j}\right). \tag{30}$$

Вставляя (29) в (11), имеем:

$$\left[-\frac{A}{2h}\left(-3\overrightarrow{U}_{0;j}+4\overrightarrow{U}_{1,j}-\overrightarrow{U}_{2,j}\right)+B\overrightarrow{U}_{0;j}+\overrightarrow{D}_{0;j}\right]_{i=0}=0. \tag{31}$$

Приводим подобные члены и решаем относительно $\overrightarrow{U}_{0;j}$:

$$\begin{gathered}\left[\left(-\tfrac{3A}{2h}+B\right)\overrightarrow{U}_{0;j}+4\overrightarrow{U}_{1,j}-\overrightarrow{U}_{2,j}+\overrightarrow{D}_{0;j}\right]_{i=0}=0;\\ \left[\overrightarrow{U}_{0;j}=\left(-\tfrac{3A}{2h}+B\right)^{-1}4\overrightarrow{U}_{1,j}+\left(-\tfrac{3A}{2h}+B\right)^{-1}\overrightarrow{U}_{2,j}-\left(-\tfrac{3A}{2h}+B\right)^{-1}\overrightarrow{D}_{0;j}\right]_{i=0}=0.\end{gathered} \tag{32}$$

При $j=j,\ i=1$ решаем уравнение (24):

$$\overrightarrow{U}_{i,j+1}=-\tilde{A}\overrightarrow{U}_{0;j}+\tilde{B}\overrightarrow{U}_{1,j}-\tilde{C}\overrightarrow{U}_{2,j}-\overrightarrow{U}_{1,j-1}-\tilde{F}_{1,j}. \tag{33}$$

Здесь используем граничные условия (32):

$$\overrightarrow{U}_{i,j+1}=-\tilde{A}\left[\left(-\frac{3A}{2h}+B\right)^{-1}\left(4\overrightarrow{U}_{1,j}+\overrightarrow{U}_{2,j}-\overrightarrow{D}_{0;j}\right)\right]+$$

$$+\tilde{B}\overrightarrow{U}_{1,j}-\tilde{C}\overrightarrow{U}_{2,j}-\overrightarrow{U}_{1,j-1}-\tilde{F}_{1,j}.$$

Приводим подобные члены:

$$\overrightarrow{U}_{i,j+1} = \left(4\tilde{A}\big(-\tfrac{3A}{2h} + B\big)^{-1} + \tilde{B}\right)\overrightarrow{U}_{1,j} + \left(-\tilde{A}\big(-\tfrac{3A}{2h} + B\big)^{-1} + \tilde{C}\right)\overrightarrow{U}_{2,j} - \\ -\overrightarrow{U}_{1,j-1} + \tilde{A}\big(-\tfrac{3A}{2h} + B\big)^{-1}\overrightarrow{D}_{0;j} - \tilde{F}_{1,j}. \tag{34}$$

Вводим обозначения:

$$A_1 = 4\tilde{A}\big(-\tfrac{3A}{2h} + B\big)^{-1} + \tilde{B},\ B_1 = -\tilde{A}\big(-\tfrac{3A}{2h} + B\big)^{-1} + \tilde{C}, \\ P_{0;j} = \tilde{A}\big(-\tfrac{3A}{2h} + B\big)^{-1}\overrightarrow{D}_{0;j}. \tag{35}$$

Если учтем введенные обозначения (35), то уравнение (34) принимает вид

$$\overrightarrow{U}_{1,j+1} = A_1\overrightarrow{U}_{1,j} + B_1\overrightarrow{U}_{2,j} - \overrightarrow{U}_{1,j-1} + P_{0;j} - \tilde{F}_{i,j}. \tag{36}$$

При $j = j,\ i = N$ рассмотрим граничные условия (12). Здесь производные $\frac{\partial\overrightarrow{U}}{\partial x}$ аппроксимируем шагом назад:

$$\frac{\partial\overrightarrow{U}}{\partial x} = \frac{1}{2h}\left(3\overrightarrow{U}_{N,j} - 4\overrightarrow{U}_{N-1,j} + \overrightarrow{U}_{N-2,j}\right).$$

Это соотношение вставляем в (28) и имеем:

$$-\frac{A}{2h}\left(3\overrightarrow{U}_{N,j} - 4\overrightarrow{U}_{N-1,j} + \overrightarrow{U}_{N-2,j}\right) + B\overrightarrow{U}_{N,j} + \overrightarrow{D}_{N,j} = 0. \tag{37}$$

Приводим подобные члены:

$$\left(-\frac{3A}{2h} + B\right)\overrightarrow{U}_{N,j} + \frac{4A}{2h}\overrightarrow{U}_{N-1,j} - \frac{A}{2h}\overrightarrow{U}_{N-2,j} + \overrightarrow{D}_{N,j} = 0. \tag{38}$$

Уравнение (38) решается относительно вектор-функции $\overrightarrow{U}_{N,j}$:

$$\overrightarrow{U}_{N,j} = \left(-\frac{3A}{2h} + B\right)^{-1}\left(-\frac{4A}{2h}\overrightarrow{U}_{N-1,j} + \frac{A}{2h}\overrightarrow{U}_{N-2,j} - \overrightarrow{D}_{N,j}\right). \tag{39}$$

При $j = j,\ i = N-1$ уравнение (24) принимает вид:

$$\overrightarrow{U}_{N-1,j+1} = -\tilde{A}\overrightarrow{U}_{N-2,j} + \tilde{B}\overrightarrow{U}_{N-1,j} - \tilde{C}\overrightarrow{U}_{N,j} - \overrightarrow{U}_{N-1,j-1} - \tilde{F}_{N-1,j}.$$

Здесь используем соотношения (39):

$$\overrightarrow{U}_{N-1,j+1} = -\tilde{A}\overrightarrow{U}_{N-2,j} + \tilde{B}\overrightarrow{U}_{N-1,j} - \tilde{C}\left[\left(-\frac{3A}{2h} + B\right)^{-1}\times\right. \\ \left.\times\left(-\frac{4A}{2h}\overrightarrow{U}_{N-1,j} + \frac{A}{2h}\overrightarrow{U}_{N-2,j} - \overrightarrow{D}_{N,j}\right)\right] - \overrightarrow{U}_{N-1,j-1} - \tilde{F}_{N-1,j}.$$

Приводим подобные члены:

$$\overrightarrow{U}_{N-1,j+1} = \left(-\tilde{A} - \tilde{C}\left(-\frac{3A}{2h} + B\right)^{-1}\frac{A}{2h}\right)\overrightarrow{U}_{N-2,j} + \\ + \left(\tilde{B} + \tilde{C}\left(-\frac{3A}{2h} + B\right)^{-1}\frac{4A}{2h}\right)\overrightarrow{U}_{N-1,j} - \\ -\overrightarrow{U}_{N-1,j-1} + \tilde{C}\left(-\frac{3A}{2h} + B\right)^{-1}\overrightarrow{D}_{N,j} - \tilde{F}_{N-1,j}. \tag{40}$$

Вводим обозначения:

$$\bar{A}_1 = -\tilde{A} - \tilde{C}\big(-\tfrac{3A}{2h} + B\big)^{-1}\ \tfrac{A}{2h};\ \ \bar{B}_1 = \tilde{B} + 4\tilde{C}\big(-\tfrac{3A}{2h} + B\big)^{-1}\ \tfrac{A}{2h};$$
$$\bar{P}_{N,j} = \tilde{C}\big(-\tfrac{3A}{2h} + B\big)^{-1}\ \overrightarrow{\Phi}_{N,j}. \tag{41}$$

С учетом введенных обозначений (41) уравнение (40) принимает вид:

$$\overrightarrow{U}_{N-1,j+1} = \bar{A}_1\overrightarrow{U}_{N-2,j} + \bar{B}_1\overrightarrow{U}_{N-1,j} - \overrightarrow{U}_{N-1,j-1} + \bar{P}_{N,j} - \tilde{F}_{N-1,j}. \tag{42}$$

Уравнение (15) запишем с учетом $j = 0;\ i = 1$:

$$\overrightarrow{U}_{1,1} = A_1\overrightarrow{U}_{1,0} + B_1\overrightarrow{U}_{2,0} - \overrightarrow{U}_{1,-1} + P_{0;0} - \tilde{F}_{1,0}.$$

Здесь учитываем соотношения (32):

$$\overrightarrow{U}_{1,1} = A_1\overrightarrow{U}_{1,0} + B_1\overrightarrow{U}_{2,0} - \overrightarrow{U}_{1,-1} + 2\tau M^{-1}\dot{\overrightarrow{U}}{}^0_{1,0} + \mathsf{P}_{0;0} - \tilde{F}_{1,0}.$$

Приводим подобные члены и используем начальные условия (25):

$$\overrightarrow{U}_{1,1} = \frac{1}{2}\left[A_1\overrightarrow{U}_{1,0} + B_1\overrightarrow{U}{}^0_{2,0} + 2\tau M^{-1}\dot{\overrightarrow{U}}{}^0_{1,0} + \mathsf{P}_{0;0} - \tilde{F}_{1,0}\right]. \tag{43}$$

При $j = 1,\ i = 1$ уравнение (23) имеет вид:

$$\overrightarrow{U}_{1,2} = -\tilde{A}\overrightarrow{U}_{0;1} + \tilde{B}\overrightarrow{U}_{1,1} - \tilde{C}\overrightarrow{U}_{2,1} - \overrightarrow{U}_{1,0} - \tilde{F}_{1,1}.$$

Здесь используем начальные условия (25), тогда уравнение (36) принимает вид:

$$\overrightarrow{U}_{1,2} = A_1\overrightarrow{U}_{1,1} + B_1\overrightarrow{U}_{2,1}\overrightarrow{U}{}^0_{1,0} + \mathsf{P}_{0;1} - \tilde{F}_{1,1}. \tag{44}$$

При $i = N-1,\ j = 0$ уравнение (23) запишем в виде

$$\overrightarrow{U}_{N-1,1} = -\tilde{A}\overrightarrow{U}_{N-2,0} + \tilde{B}\overrightarrow{U}_{N-1,0} - \tilde{C}\overrightarrow{U}_{N,0} - \overrightarrow{U}_{N-1,-1} - \tilde{F}_{N-1,0}.$$

Здесь используем начальные условия (24). При этом уравнение (41) принимает вид

$$\overrightarrow{U}_{N-1,1} = \bar{A}_1\overrightarrow{U}_{N-2,0} + \bar{B}_1\overrightarrow{U}_{N-1,0} - \overrightarrow{U}_{N-1,-1} + \bar{P}_{N,0} - \tilde{F}_{N-1,0}.$$

Учитываем соотношения (25), приводим подобные члены. Тогда последнее уравнение принимает вид

$$\overrightarrow{U}_{N-1,1} = \frac{1}{2}\left[\bar{A}_1\overrightarrow{U}{}^0_{N-2,0} + \bar{B}_1\overrightarrow{U}{}^0_{N-1,0} + 2\tau M^{-1}\dot{\overrightarrow{U}}{}^0_{N-1,0} + \bar{\mathsf{P}}_{N,0} - \tilde{F}_{N-1,0}\right]. \tag{45}$$

При $i = N-1,\ j = 1$ рассмотрим уравнение (24):

$$\overrightarrow{U}_{N-1,2} = -\tilde{A}\overrightarrow{U}_{N-2,1} + \tilde{B}\overrightarrow{U}_{N-1,1} - \tilde{C}\overrightarrow{U}_{N,1} - \overrightarrow{U}_{N-1,0} - \tilde{F}_{N-1,1}.$$

Здесь учитываем начальные условия (25):

$$M\frac{\partial\overrightarrow{U}}{\partial t}\bigg|_{t=t_0} = \dot{\overrightarrow{U}}_{i,0} = \frac{M}{2\tau}\left(\overrightarrow{U}_{i,1} - \overrightarrow{U}_{i,-1}\right);\quad \overrightarrow{U}\Big|_{t=t_0} = \overrightarrow{U}{}^0_{i,0}.$$

Тогда уравнение (41) приобретает вид

$$\overrightarrow{U}_{N-1,2} = \bar{A}_1 \overrightarrow{U}_{N-2,1} + \bar{B}_1 \overrightarrow{U}^0_{N-1,1} - \overrightarrow{U}^0_{N-1,0} + \bar{P}_{N,1} - \tilde{F}_{N-1,1}. \qquad (46)$$

Приведем порядок решения сформулированной задачи:

1. При $i = 1,\ j = 0$ решается уравнение (43).

2. При $i = i,\ j = 0$ решается уравнение (28).

3. При $i = N - 1,\ j = 0$ решается уравнение (45).

4. При $i = 1,\ j = 1$ решается уравнение (44).

5. При $i = i,\ j = 1$ решается уравнение (29).

6. При $i = N - 1,\ j = 1$ решается уравнение (46).

7. При $i = 1,\ j = j$ решается уравнение (30).

8. При $i = i,\ j = j$ решается уравнение (24).

9. При $i = N - 1,\ j = j$ решается уравнение (42).

В дальнейшем организуется процесс итерации до выполнения условия $MAX\left|\overrightarrow{U}_{i,j}^{\,k} - U_{i,j}^{\,k-1}\right| \leqslant \varepsilon$, здесь k - число итерации.

Таким образом, на основе метода конечных разностей разработан вычислительный алгоритм для решения статических и динамических задач трехслойной стержней при пространственных нагрузках.

5 Заключение

Изучена и проанализирована литература научных трудов зарубежных ученых в рамках темы исследования.

В математической модели система уравнений, соответствующих естественных начальных и граничных условий выводится с размерностью, их решение достаточно сложно, поэтому приведена их безразмерными.

Решение системы дифференциальных уравнений с начальными и граничными условиями представлена в векторном виде.

Разработан вычислительный алгоритм расчета колебаний стержней при пространственном динамическом нагружении с использованием метода конечных разностей в разных граничных условиях;

Приведен порядок решения сформированной задачи.

Литература

[1] *Гориков А.Г.* Колебания трехслойных стержней под действием нагрузок различных форм // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2004. – № 1. – С. 45-52.

[2] *Плескачевский Ю.М.* Деформирование металлополимерных систем. – Минск: Бел. наука, 2004. – 342 с.

[3] *Горшков А.Г.* Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций. – М.: Физматлит, 2005. – 576 с.

[4] *Starovoitov E.I* Deformation of a three-layer elastoplastic beam on an elastic foundation // Mechanics of Solids. – 2011. – Vol. 46. – № 2. – P. 291-298.

[5] *Плескачевский Ю. М., Старовойтов Э. И.* Механика трехслойных стержней и пластин, связанных с упругим основанием. – М.: Физматлит, 2011. – 560 с.

[6] *Старовойтов Э.И.* Изгиб с растяжением трехслойного термоупругого стержня // Теоретическая и прикладная механика : междунар. науч.-тех. сб. БНТУ. – Минск, 2013. – Т. 28. – С. 22-26.

[7] *Старовойтов Э.И.* Циклическое нагружение трехслойных стержней// Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. физ.-мат. науки. – 2013. – № 2. – С. 147-155.

[8] *Škec L., Jelenić G.* Analysis of a geometrically exact multi-layer beam with a rigid interlayer connection // Acta Mech. – 2014. – Vol. 225. – P. 523-541.

[9] *Журавков М.А.* Деформирование трехслойного упругого стержня со сжимаемым заполнителем в температурном поле // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2016. – № 4. – С. 101-109.

[10] *Журавков М.А.* Нелинейное деформирование трехслойного металлополимерного стержня локальными нагрузками.// Полимерные материалы и технологии. – 2016. – Т. 2. – № 1. – С. 68-74.

[11] *Старовойтов Э.И.* Деформирование трехслойных физически нелинейных стержней. – М.: Изд-во МАИ, 2016. – 184 с.

[12] *Плескачевский Ю.М.* Деформирование трехслойного упругого стержня нагрузками различных форм в температурном поле// Теоретическая и прикладная механика. – 2017. – Вып. 32. – С. 5-12.

[13] *Старовойтов Э.И.* Трехслойные стержни в терморадиационных полях. – Минск.: Беларуская наука, 2017. – 275 с.

[14] *Tsybin N.* Stress-strain state of a three-layer rod. Comparison of the results of analytical and numerical calculations with the experiment // MATEC Web of Conferences. – 2018. – Vol. 196. – doi: `http://dx.doi.org/10.1051/matecconf/201819601057`.

[15] *Бабажанов Б.Б.* Колебания трехслойного стержня под действием мгновенно-нарастающей нагрузки // Вестник науки и образования. – 2020. – Т. 88. – №10. – С. 1-10.

[16] *Анарова Ш.А., Исмоилов Ш.М., Шокиров Д.А.* Современное состояние и постановка задачи исследования трёхслойных стержней // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2022. – № 4(42). – С. 54-78.

[17] *Anarova Sh.A., Shokirov D.A., Amonov O.T.* State-of-the-art in the investigation of three-layer rods // Наманган муҳандислик-қурилиш институтининг механика ва технология журнали. – 2022. – № 3(8). – P. 51-64.

[18] *Анарова Ш.А., Исмоилов Ш.М., Шокиров Д.А.* Современное состояние и постановка задачи исследования трёхслойных стержней // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2023. – № 5(52). – С. 56-82.

[19] *Кабулов В.К.* Алгоритмизация в теории упругости и деформационной теории пластичности. – Т.: Фан, 1966. – 395 с.

[20] *Михлин С.Г.* Вариационные методы в математической физике. – М.: Наука, 1970. – 512 с.

[21] *Васидзу К.* Вариационные методы в теории упругости и деформационной пластичности. – М.: Мир, 1987. – 542 с.

[22] *Анарова Ш.А., Шокиров Д.А.* Фазовий юкланишлардаги уч қатламли стреженларнинг кучланганлик-деформацияланганлик ҳолатини ҳисоблаш алгоритми// Инновационные технологии, экономика и менеджмент в промышленности : сб. междунар. науч. конф. – Т., 2023. – Б. 188-195.

[23] *Самарский А.А.* Численные методы. – М.: Наука, 1989. – 432 с.

[24] *Самарский А.А., Михайлов А.П.* Математическое моделирование: идеи, методы, примеры. – М.: Физматлит, 2002. – 320 с.

Поступила в редакцию 27.02.2024

UDC 539.3

COMPUTATIONAL ALGORITHM FOR CALCULATING THREE-LAYER RODS UNDER SPATIAL LOADS

[1*]***Anarova Sh.A.***, [2]***Shokirov D.A.***
[*]shahzodaanarova@gmail.com
[1]Tashkent University of Information Technologies named after Muhammad al-Khorezmi, 100200, Uzbekistan, Tashkent, st. Amir Temur, 108;
[2]Namangan Institute of Engineering and Construction, 160103, Uzbekistan, Namangan, st. I. Karimov 12.

A mathematical model for calculating the vibrations of three-layer rods under spatial loading is developed in the article. Variations of kinetic and potential energies and the work of external forces, substituted into the Ostrogradsky-Hamilton variational principle, are compiled. A system of vibration equations for a three-layer rod with corresponding generalized initial and natural boundary conditions is obtained. The problem is solved for six unknowns. To solve it, the authors used the central finite-difference relations of the implicit scheme of the finite-difference method of the second-order accuracy, considering the features of the boundary and initial conditions. By setting specific boundary conditions, several practical problems can be solved. A methodology and computational algorithm for calculating static and dynamic strain processes of spatially loaded three-layer rods are given.

Keywords: algorithm, three – layer rod, finite difference method, Ostrogradsky – Hamilton principle, dimensionless parameter, rod oscillation.

Citation: Anarova Sh.A., Shokirov D.A. 2024. Computational algorithm for calculating three-layer rods under spatial loads. *Problems of Computational and Applied Mathematics.* 3(57): 57-76.

№ 3(57) 2024

ISSN 2181-8460

HISOBLASH VA AMALIY MATEMATIKA MUAMMOLARI

ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

PROBLEMS OF COMPUTATIONAL AND APPLIED MATHEMATICS

RAQAMLI TEXNOLOGIYALAR VA
SUN'IY INTELLEKTNI RIVOJLANTIRISH
ILMIY-TADQIQOT INSTITUTI

ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

№ 3(57) 2024

Журнал основан в 2015 году.
Издается 6 раз в год.

Учредитель:
Научно-исследовательский институт развития цифровых технологий и искусственного интеллекта.

Журнал зарегистрирован в Агентстве информации и массовых коммуникаций при Администрации Президента Республики Узбекистан.
Регистрационное свидетельство №0856 от 5 августа 2015 года.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

Адрес редакции:
100125, г. Ташкент, м-в. Буз-2, 17А.
Тел.: +(998) 712-319-253, 712-319-249.
Э-почта: journals@airi.uz.
Веб-сайт: https://journals.airi.uz.

Дизайн и вёрстка:
Шарипов Х.Д.

Отпечатано в типографии НИИ РЦТИИ.
Подписано в печать 28.06.2024 г.
Формат 60x84 1/8. Заказ №3. Тираж 100 экз.

Содержание