

УДК 519.644.2

КВАДРАТУРНАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ ОПТИМАЛЬНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ С ПОЛИНОМИАЛЬНЫМ ВЕСОМ

^{1,2,3*} *Хаётов А.Р.*, ^{1,4} *Исмоилов С.И.*

*hayotov@mail.ru

¹Институт математики имени В. И. Романовского,
ул. Университетская, 9, Ташкент 100174, Узбекистан;²Центрально-Азиатский университет,
ул. Миллий бог, 264, Ташкент 111221, Узбекистан;³Бухарский государственный университет,
ул. М. Икбола, 11, Бухара 200114, Узбекистан;⁴Ташкентский международный Вестминстерский университет,
ул. Истикбол, 12, Ташкент 100047, Узбекистан

Классические квадратурные правила не всегда учитывают одновременно структуру веса, геометрию узлов и функциональный класс подынтегральной функции, поэтому актуально построение формул, оптимальных по норме функционала погрешности. Цель работы состоит в построении оптимальной в смысле Сарда квадратурной формулы для интеграла с полиномиальным весом в пространстве дифференцируемых функций с квадратично интегрируемой первой производной при фиксированной системе узлов. Используется метод φ -функций. Остаточный член представляется через производную подынтегральной функции, после чего задача минимизации нормы функционала погрешности распадается на независимые задачи на каждом частичном отрезке. Постоянные интегрирования выбираются из условий минимума соответствующих квадратичных функционалов. Получены явные выражения для оптимальных коэффициентов на произвольной неравномерной сетке и их упрощенная форма для равномерной сетки. Результаты численных экспериментов сопоставлены с составной формулой трапеций на тех же узлах. Для нелинейных тестовых функций оптимальная формула дает меньшую абсолютную погрешность, а для линейной функции воспроизводит значение интеграла с машинной точностью. Экспериментальный порядок убывания погрешности близок ко второму. Полученные коэффициенты непосредственно применимы на адаптивных и неравномерных сетках и позволяют учитывать полиномиальный вес без предварительного преобразования интеграла.

Ключевые слова: оптимальная квадратурная формула, весовой интеграл, метод φ -функций, пространство дифференцируемых функций, функционал погрешности

Цитирование: Хаётов А.Р., Исмоилов С.И. Квадратурная формула для оптимального приближения определенных интегралов с полиномиальным весом // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2026. – № 4(74). – С. 110-119.

DOI: 10.71310/psam.4_74.2026.07

1 Введение

Многие задачи математического моделирования, механики, физики и вычислительной техники приводят к интегральным и дифференциальным уравнениям или к их системам. Решения таких уравнений часто выражаются через определенные интегралы. В большинстве практически важных случаев эти интегралы не удастся вычислить точно, поэтому возникает задача построения приближенных формул, которые

дают достаточно малую погрешность при ограниченном числе значений подынтегральной функции.

Задачу численного вычисления однократных и многократных интегралов обычно связывают соответственно с квадратурными и кубатурными формулами. Классические формулы Грегори, Ньютона–Котеса, Симпсона, Эйлера, Гаусса, Чебышева, Маркова и другие до сих пор широко используются в вычислительной практике. Вместе с тем развитие теории численного интегрирования показало, что выбор узлов и коэффициентов должен зависеть не только от алгебраической степени точности, но и от функционального класса, которому принадлежит подынтегральная функция. Поэтому в теории квадратурных и кубатурных формул сформировались несколько основных подходов: алгебраический, вероятностный, теоретико-числовой и функциональный.

В алгебраическом подходе узлы и коэффициенты выбираются так, чтобы формула была точной на заранее заданном конечномерном классе функций, например на множестве алгебраических или тригонометрических многочленов. Вероятностный подход связан главным образом с методом Монте-Карло и его модификациями. Теоретико-числовой подход используется преимущественно при построении многомерных кубатурных формул. Настоящая работа относится к функциональному подходу: здесь разность между интегралом и приближающей его линейной комбинацией значений функции рассматривается как линейный функционал погрешности, а качество формулы оценивается нормой этого функционала в соответствующем функциональном пространстве.

Основы функционального подхода к построению оптимальных квадратурных формул были заложены в работах А. Сарда [1, 7], С. М. Никольского [2, 3] и С. Л. Соболева [4]. В смысле Сарда оптимальность понимается как минимальность нормы функционала погрешности по коэффициентам при фиксированных узлах, тогда как в подходе Никольского рассматривается также оптимизация по узлам. Появление общей теории кубатурных формул и ее связь с функциональным анализом тесно связаны с работами С. Л. Соболева [4, 5]. В одномерном случае задачи минимизации нормы функционала погрешности в различных пространствах изучались многими авторами; современные результаты и уточнения для оптимальных формул в смысле Никольского можно найти, например, в [8].

При минимизации нормы функционала погрешности по коэффициентам при фиксированных узлах применяются три близких, но технически различных направления: метод сплайнов, метод φ -функций и метод Соболева. На основе сплайн-метода оптимальные формулы исследовались в работах А. Сарда, Л. Ф. Мейерса, Г. Комана, И. Дж. Шёнберга, С. Д. Силлимана и П. Коклера [9–11, 14–18]. Метод φ -функций использовался А. Гиззетти и А. Оссичини, Ф. Ланзарой, Т. Катинашем и Г. Команом при построении оптимальных квадратурных формул в пространствах типа $L_2^{(m)}$ [12, 13, 19]. Метод Соболева и его развитие для пространств дифференцируемых функций подробно изложены в [6, 20, 21]; близкие оптимальные квадратурные формулы в смысле Сарда и их применения рассматривались также в работах [22–25].

Особый интерес представляют весовые интегралы, поскольку множитель x^α меняет вклад различных частей отрезка интегрирования и приводит к другой системе оптимальных коэффициентов. Такие интегралы естественно возникают при вычислении моментов, при аппроксимации интегральных преобразований, а также в задачах, где подынтегральная функция имеет заданную весовую структуру. В отличие от классических равномерных формул, для весовых интегралов важно учитывать

одновременно геометрию узлов, показатель веса α и норму пространства, в котором оценивается функционал погрешности.

В данной статье изучается оптимальная квадратурная формула для интеграла

$$I(f) = \int_a^b x^\alpha f(x) dx, \quad \alpha = 0, 1, 2, \dots,$$

в пространстве $L_2^{(1)}(a, b)$. Основная цель работы состоит в получении коэффициентов квадратурной формулы методом φ -функций при фиксированной системе узлов и в получении явного представления нормы функционала погрешности. По постановке задачи рассматриваемые формулы близки к исследованиям оптимальных квадратурных формул с параметрами [26], однако здесь основной акцент сделан на весовой множитель x^α и на реализацию метода φ -функций в пространстве $L_2^{(1)}(a, b)$. Полученные формулы сопоставляются с составной формулой трапеций на тех же узлах, что позволяет численно оценить эффективность оптимальной формулы для различных подынтегральных функций.

2 Постановка задачи

Определение 1. Пространством $L_2^{(1)}(a, b)$ будем называть класс абсолютно непрерывных на $[a, b]$ функций, производная первого порядка которых квадратично интегрируема на этом отрезке. Для функции $f \in L_2^{(1)}(a, b)$ положим

$$\|f\|_{L_2^{(1)}(a, b)} = \left(\int_a^b (f'(x))^2 dx \right)^{1/2}.$$

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана система узлов

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b.$$

Рассматривается задача приближенного вычисления весового интеграла

$$I(f) = \int_a^b x^\alpha f(x) dx, \quad \alpha = 0, 1, 2, \dots$$

Для этого строится квадратурная формула вида

$$\int_a^b x^\alpha f(x) dx = \sum_{k=0}^N C_k f(x_k) + R_N(f), \quad (1)$$

где C_k — коэффициенты квадратурной формулы, а $R_N(f)$ — функционал погрешности.

Определение 2. Функционалом погрешности квадратурной формулы (1) называется линейный функционал

$$R_N(f) = \int_a^b x^\alpha f(x) dx - \sum_{k=0}^N C_k f(x_k).$$

Определение 3. Квадратурная формула (1) называется оптимальной в смысле Сарда в пространстве $L_2^{(1)}(a, b)$, если при фиксированных узлах ее коэффициенты доставляют минимум нормы функционала погрешности.

3 Метод φ -функций

Метод φ -функций позволяет представить остаточный член через производную $f'(x)$ и затем выбрать коэффициенты так, чтобы верхняя оценка погрешности была минимальной. Введем квадратурную сумму

$$Q_N(f) = \sum_{k=0}^N C_k f(x_k).$$

На каждом частичном отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ выберем функцию φ_k так, чтобы

$$\varphi'_k(x) = x^\alpha.$$

Тогда

$$\varphi_k(x) = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + D_k, \quad k = 1, \dots, N,$$

где D_k — постоянные интегрирования. Интегрируя по частям, получаем

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} x^\alpha f(x) dx = \varphi_k(x_k) f(x_k) - \varphi_k(x_{k-1}) f(x_{k-1}) - \int_{x_{k-1}}^{x_k} \varphi_k(x) f'(x) dx.$$

Суммирование последних равенств по $k = 1, \dots, N$ приводит к формулам

$$C_0 = -\varphi_1(x_0), \quad (2)$$

$$C_k = \varphi_k(x_k) - \varphi_{k+1}(x_k), \quad k = 1, 2, \dots, N-1, \quad (3)$$

$$C_N = \varphi_N(x_N), \quad (4)$$

и представлению остатка

$$R_N(f) = - \sum_{k=1}^N \int_{x_{k-1}}^{x_k} \varphi_k(x) f'(x) dx.$$

Из неравенства Коши–Буняковского следует

$$|R_N(f)| \leq \left(\sum_{k=1}^N \int_{x_{k-1}}^{x_k} \varphi_k^2(x) dx \right)^{1/2} \|f\|_{L_2^{(1)}(a,b)}.$$

Следовательно, при фиксированной сетке надо минимизировать величину

$$\|\varphi\|_{L_2(a,b)}^2 = \sum_{k=1}^N \int_{x_{k-1}}^{x_k} \left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + D_k \right)^2 dx. \quad (5)$$

4 Оптимальный выбор коэффициентов

Для каждого $k = 1, \dots, N$ рассмотрим

$$F_k(D_k) = \int_{x_{k-1}}^{x_k} \left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + D_k \right)^2 dx.$$

Условие минимума имеет вид

$$\frac{dF_k}{dD_k} = 2 \int_{x_{k-1}}^{x_k} \left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + D_k \right) dx = 0.$$

Отсюда

$$D_k = - \frac{x_k^{\alpha+2} - x_{k-1}^{\alpha+2}}{(\alpha+1)(\alpha+2)(x_k - x_{k-1})}. \quad (6)$$

Теорема 1. Пусть $\alpha = 0, 1, 2, \dots$ и узлы $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ фиксированы. Тогда оптимальная квадратурная формула (1) в пространстве $L_2^{(1)}(a, b)$ имеет коэффициенты

$$C_0 = -\frac{x_0^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)} \frac{x_1^{\alpha+2} - x_0^{\alpha+2}}{x_1 - x_0}, \quad (7)$$

$$C_k = \frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)} \left(\frac{x_{k+1}^{\alpha+2} - x_k^{\alpha+2}}{x_{k+1} - x_k} - \frac{x_k^{\alpha+2} - x_{k-1}^{\alpha+2}}{x_k - x_{k-1}} \right), \quad k = 1, 2, \dots, N-1, \quad (8)$$

$$C_N = \frac{x_N^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)} \frac{x_N^{\alpha+2} - x_{N-1}^{\alpha+2}}{x_N - x_{N-1}}. \quad (9)$$

Доказательство. Из (5) следует, что минимизация оценки нормы функционала погрешности распадается на независимые задачи минимизации $F_k(D_k)$ на каждом частичном отрезке. Вычисление производной dF_k/dD_k дает (6). Подставляя эти значения в (2)–(4), получаем (7)–(9).

Замечание 1. Формулы (7)–(9) справедливы для произвольной неравномерной сетки. Поэтому их можно применять и тогда, когда распределение узлов выбирается с учетом особенностей подынтегральной функции.

5 Равномерная сетка на отрезке $[0, 1]$

Рассмотрим частный случай $a = 0, b = 1$ и

$$x_k = kh, \quad h = \frac{1}{N}, \quad k = 0, 1, \dots, N.$$

Тогда из (7)–(9) получаем

$$C_0 = \frac{h^{\alpha+1}}{(\alpha+1)(\alpha+2)},$$

$$C_k = \frac{h^{\alpha+1}}{(\alpha+1)(\alpha+2)} ((k+1)^{\alpha+2} - 2k^{\alpha+2} + (k-1)^{\alpha+2}), \quad k = 1, 2, \dots, N-1,$$

$$C_N = \frac{1}{\alpha+1} - \frac{1 - (1-h)^{\alpha+2}}{(\alpha+1)(\alpha+2)h}.$$

Таким образом, в случае равномерной сетки коэффициенты зависят только от параметра α , шага h и номера узла.

6 Численные результаты

В этом разделе приведены численные эксперименты для значения $\alpha = 3$ на отрезке $[1, 2]$. Узлы выбирались так же, как в Maple-программе, использованной для проверки формул:

$$x_0 = 1, \quad x_N = 2, \quad x_k = 1 + \frac{k + 0.35 \sin k}{N}, \quad k = 1, 2, \dots, N-1.$$

Такая сетка не является равномерной, но сохраняет порядок узлов и не приводит к их сильному сгущению около одной точки. Для каждого $N = 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128$ вычислялись значение оптимальной квадратурной суммы Q_N , значение составной формулы трапеций T_N на тех же узлах и абсолютные погрешности

$$E_N^{\text{opt}} = |I - Q_N|, \quad E_N^{\text{tr}} = |I - T_N|.$$

Порядок сходимости в таблицах вычислялся по формуле

$$p_N = \log_2 \frac{E_{N/2}}{E_N}.$$

Таблица 1 Результаты для $f(x) = 1/(1+x)$, $I = 1.427868225225170$.

N	Q_N	E_N^{opt}	p_N^{opt}	T_N	E_N^{tr}	p_N^{tr}
2	1.438535437991	0.010667212765797	—	1.476362870689	0.048494645463906	—
4	1.430212974634	0.002344749409019	2.185678	1.438665978028	0.010797752802699	2.167094
8	1.428527206429	0.000658981203838	1.831125	1.430728602545	0.002860377319911	1.916454
16	1.428029516213	0.000161290988308	2.030571	1.428572099268	0.000703874042703	2.022816
32	1.427908680211	0.000040454986016	1.995276	1.428044293832	0.000176068607209	1.999180
64	1.427878389280	0.000010164054664	1.992841	1.427912412984	0.000044187758629	1.994419
128	1.427870776672	0.000002551447259	1.994088	1.427879306497	0.000011081271817	1.995523

В первом примере оптимальная формула уже при малых N дает меньшую погрешность, чем формула трапеций, а при дальнейшем удвоении числа узлов обе погрешности убывают устойчиво.

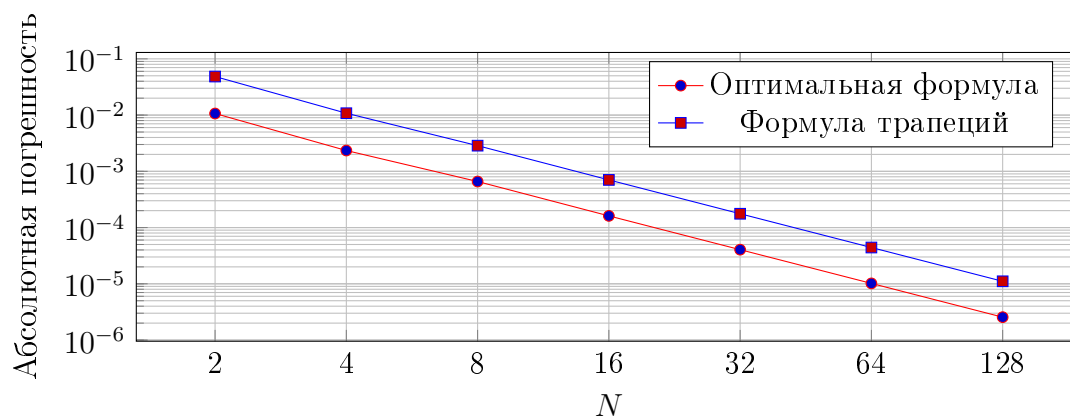


Рис. 1 Абсолютные погрешности для $f(x) = 1/(1+x)$.

Таблица 2 Результаты для $f(x) = \exp(x)$, $I = 20.214675854779400$.

N	Q_N	E_N^{opt}	p_N^{opt}	T_N	E_N^{tr}	p_N^{tr}
2	20.563012084804	0.348336230024906	—	22.910562052526	2.695886197747010	—
4	20.309286194654	0.094610339874620	1.880411	20.887822207793	0.673146353013106	2.001767
8	20.246025660845	0.031349806065954	1.593541	20.426752178298	0.212076323518428	1.666337
16	20.222114195707	0.007438340927465	2.075404	20.265503562827	0.050827708047446	2.060896
32	20.216577723853	0.001901869073983	1.967563	20.227572244355	0.012896389575801	1.978648
64	20.215154725067	0.000478870287548	1.989711	20.217920994936	0.003245140156565	1.990615
128	20.214796514424	0.000120659644402	1.988692	20.215492463903	0.000816609123934	1.990563

Для функции $f(x) = \exp(x)$ различие между двумя формулами заметнее: оптимальная формула сохраняет меньшую абсолютную погрешность на всех рассмотренных сетках.

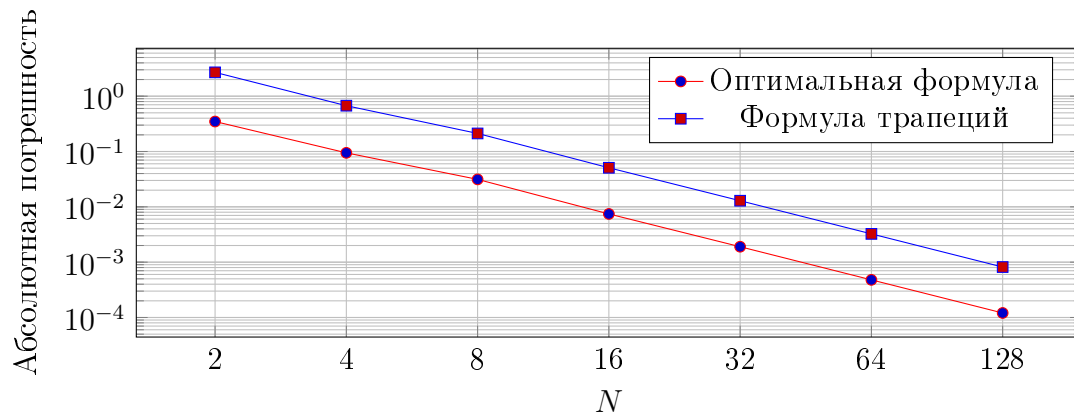


Рис. 2 Абсолютные погрешности для $f(x) = \exp(x)$.

Таблица 3 Результаты для $f(x) = 5x + 3$, $I = 42.250000000000000$.

N	Q_N	E_N^{opt}	p_N^{opt}	T_N	E_N^{tr}	p_N^{tr}
2	42.2500000000000	0.000000000000000	—	46.043409477848	3.793409477847900	—
4	42.2500000000000	0.000000000000000	—	43.128291135110	0.878291135109677	2.110724
8	42.2500000000000	0.000000000000000	—	42.507347268560	0.257347268560046	1.770983
16	42.2500000000000	0.000000000000000	—	42.312652012393	0.062652012392739	2.038284
32	42.2500000000000	0.000000000000000	—	42.265758401161	0.015758401161413	1.991240
64	42.2500000000000	0.000000000000000	—	42.253961523610	0.003961523610400	1.991994
128	42.2500000000000	0.000000000000000	—	42.250995149366	0.000995149365743	1.993070

В линейном случае оптимальная формула воспроизводит значение интеграла с машинной точностью, тогда как формула трапеций также демонстрирует убывание погрешности второго порядка.

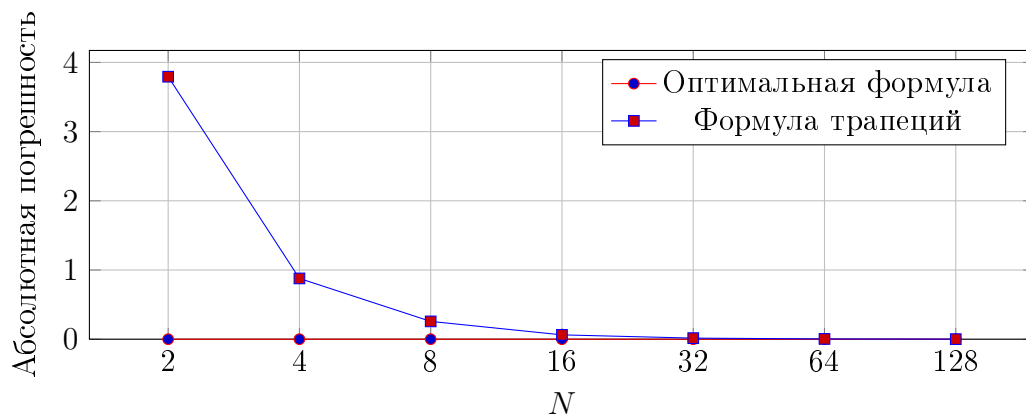


Рис. 3 Абсолютные погрешности для $f(x) = 5x + 3$.

Из таблиц и графиков видно, что при увеличении числа узлов абсолютные погрешности обеих формул убывают примерно со вторым порядком. Для функций $f(x) = 1/(1+x)$ и $f(x) = \exp(x)$ оптимальная формула даёт меньшую погрешность, чем формула трапеций, на всех рассмотренных сетках. Для линейной функции $f(x) = 5x + 3$ оптимальная формула даёт точное значение интеграла в пределах машинной точности.

7 Заключение

В работе рассмотрена квадратурная формула для весового интеграла

$$\int_a^b x^\alpha f(x) dx, \quad \alpha = 0, 1, 2, \dots,$$

в пространстве $L_2^{(1)}(a, b)$ при фиксированных узлах $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$. Оптимальность формулы понимается в смысле Сарда, то есть минимизация проводится по коэффициентам при заданной сетке. С помощью метода φ -функций остаточный член квадратурной формулы представлен в виде

$$R_N(f) = - \sum_{k=1}^N \int_{x_{k-1}}^{x_k} \varphi_k(x) f'(x) dx.$$

Для каждого частичного отрезка найден оптимальный параметр

$$D_k = - \frac{x_k^{\alpha+2} - x_{k-1}^{\alpha+2}}{(\alpha+1)(\alpha+2)(x_k - x_{k-1})}.$$

Подстановка этих значений дала явные формулы для коэффициентов $C_0, C_1, \dots, C_N$ на произвольной неравномерной сетке. Численные эксперименты при $\alpha = 3$ показывают второй порядок убывания погрешности при удвоении числа узлов. В рассмотренных примерах оптимальная формула эффективна для $f(x) = 1/(1+x)$ и $f(x) = \exp(x)$, а для линейной функции $f(x) = 5x + 3$ дает точное значение интеграла.

Декларации

Финансирование. Исследование не получало внешнего финансирования.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Вклад авторов. А.Р. Хаётов — постановка задачи, разработка теоретического метода, вывод оптимальных коэффициентов и научное руководство; С.И. Исмоилов — проведение численных экспериментов, подготовка таблиц и графиков, анализ результатов и оформление рукописи. Оба автора участвовали в обсуждении результатов, редактировании текста и одобрили окончательную версию рукописи.

Доступность данных. Все данные, использованные и полученные в ходе численных экспериментов, приведены в тексте статьи.

Литература

- [1] *Sard A.* Best approximate integration formulas; best approximation formulas // *American Journal of Mathematics.* — 1949. — Vol. 71, № 1. — P. 80–91.
- [2] *Никольский С. М.* К вопросу об оценках приближений квадратурными формулами // *Успехи математических наук.* — 1950. — Т. 5, вып. 2. — С. 165–177.
- [3] *Никольский С. М.* Квадратурные формулы. — 4-е изд. — М.: Наука, 1988. — 256 с.
- [4] *Соболев С. Л.* Введение в теорию кубатурных формул. — М.: Наука, 1974. — 808 с.
- [5] *Соболев С. Л.* Коэффициенты оптимальных квадратурных формул // *Доклады АН СССР.* — 1977. — Т. 235, № 1. — С. 34–37.
- [6] *Шадиметов Х. М., Хаётов А. Р.* Оптимальные квадратурные формулы в пространствах Соболева. — Ташкент: Fan va texnologiya, 2012.

- [7] *Sard A.* Linear approximation. — 2nd ed. — Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 1963.
- [8] *Baboş A., Acu A. M.* Note on corrected optimal quadrature formulas in the sense Nikolski // Applied Mathematics and Information Sciences. — 2015. — Vol. 9, № 3. — P. 1231–1238.
- [9] *Meyers L. F., Sard A.* Best approximate integration formulas // Journal of Mathematics and Physics. — 1950. — Vol. 29. — P. 118–123.
- [10] *Coman G.* Formule de cuadrature de tip Sard // Studia Universitatis Babeş-Bolyai Mathematica-Mechanica. — 1972. — Vol. 17, № 2. — P. 73–77.
- [11] *Coman G.* Monosplines and optimal quadrature formulae // Rendiconti di Matematica. — 1972. — Vol. 5, № 3. — P. 567–577.
- [12] *Catinaş T., Coman G.* Optimal quadrature formulas based on the φ -function method // Studia Universitatis Babeş-Bolyai Mathematica. — 2006. — Vol. 51, № 1. — P. 49–64.
- [13] *Ghizzetti A., Ossicini A.* Quadrature Formulae. — Berlin: Akademie Verlag, 1970.
- [14] *Schoenberg I. J.* On trigonometric spline interpolation // Journal of Mathematics and Mechanics. — 1964. — Vol. 13. — P. 795–825.
- [15] *Schoenberg I. J.* On monosplines of least deviation and best quadrature formulae // Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics, Series B: Numerical Analysis. — 1965. — Vol. 2. — P. 144–170.
- [16] *Schoenberg I. J.* On monosplines of least square deviation and best quadrature formulae II // SIAM Journal on Numerical Analysis. — 1966. — Vol. 3. — P. 321–328.
- [17] *Schoenberg I. J., Silliman S. D.* On semicardinal quadrature formulae // Mathematics of Computation. — 1973. — Vol. 27, № 126. — P. 483–497.
- [18] *Köhler P.* On the weights of Sard's quadrature formulas // Calcolo. — 1988. — Vol. 25, № 3. — P. 169–186.
- [19] *Lanzara F.* On optimal quadrature formulae // Journal of Inequalities and Applications. — 2000. — Vol. 5. — P. 201–225.
- [20] *Шадиметов Х. М.* Оптимальные решетчатые квадратурные и кубатурные формулы в пространстве Соболева. — Ташкент: Fan va texnologiya, 2019. — 223 с.
- [21] *Шадиметов Х. М., Хаётов А. Р.* Оптимальная аппроксимация функционалов погрешностей квадратурных и интерполяционных формул в пространствах дифференцируемых функций. — Ташкент: Muhr Press, 2022. — 247 с.
- [22] *Shadimetov Kh. M., Hayotov A. R.* Optimal quadrature formulas in the sense of Sard in $W_2^{(m,m-1)}$ space // Calcolo. — 2014. — Vol. 51, № 2. — P. 211–243.
- [23] *Boltaev N. D., Hayotov A. R., Khudayberdiev M.* Optimal quadrature formula for approximate calculation of Fourier coefficients in $W_2^{(1,0)}$ space // Problems of Computational and Applied Mathematics. — 2015. — Vol. 1, № 1. — P. 71–77.
- [24] *Boltaev N. D., Hayotov A. R., Milovanović G. V., Shadimetov Kh. M.* Optimal quadrature formulas for numerical evaluation of Fourier coefficients in $W_2^{(m,m-1)}$ // Journal of Applied Analysis and Computation. — 2017. — Vol. 7, № 4. — P. 1233–1266.
- [25] *Hayotov A. R., Rasulov R. G.* The order of convergence of an optimal quadrature formula with derivative in the space $W_2^{(1,0)}$ // Filomat. — 2020. — Vol. 34, № 11. — P. 3835–3844.
- [26] *Hayotov A. R., Kuldoshev H. M.* An optimal quadrature formula with sigma parameter // Problems of Computational and Applied Mathematics. — 2023. — № 2/1(48). — P. 7–19.

UDC 519.644.2

OPTIMAL QUADRATURE FOR DEFINITE INTEGRALS WITH POLYNOMIAL WEIGHT

^{1,2,3*} *Hayotov A.R.*, ^{1,4} *Ismoilov S.I.*

*hayotov@mail.ru

¹V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics,
9, University str., Tashkent 100174, Uzbekistan;²Central Asian University,
264, Milliy bog St, Tashkent 111221, Uzbekistan;³Bukhara State University,
11, M. Ikbol str., Bukhara 200114, Uzbekistan;⁴Westminster International University in Tashkent,
12, Istiqbol str., Tashkent 100047, Uzbekistan

Classical quadrature rules do not always account simultaneously for the weight, node geometry, and functional class of the integrand, which motivates formulas optimized with respect to the norm of the error functional. The purpose of this study is to construct a Sard-optimal quadrature formula for an integral with polynomial weight in a space of differentiable functions with square-integrable first derivative for a fixed system of nodes. The φ -function method is employed. The remainder is represented in terms of the derivative of the integrand, reducing minimization of the error-functional norm to independent minimization problems on the partial intervals. The integration constants are determined from the minimum conditions for the resulting quadratic functionals. Explicit optimal coefficients are obtained for an arbitrary nonuniform grid, together with a simplified form for a uniform grid. Numerical experiments with a cubic polynomial weight are performed for three test functions and compared with the composite trapezoidal rule on the same nodes. For the nonlinear test functions, the optimal formula produces smaller absolute errors; for the linear function, it reproduces the integral to machine precision. The observed error decay is approximately of second order. The coefficients can be applied directly on adaptive and nonuniform grids and incorporate the polynomial weight without a preliminary transformation of the integral.

Keywords: optimal quadrature formula, weighted integral, phi-function method, space of differentiable functions, error functional

Citation: Hayotov A.R., Ismoilov S.I. 2026. Optimal quadrature for definite integrals with polynomial weight. *Problems of Computational and Applied Mathematics*. 4(74): 110-119.

DOI: 10.71310/pcam.4_74.2026.07

HISOBLASH VA AMALIY MATEMATIKA MUAMMOLARI

ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ
И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
PROBLEMS OF COMPUTATIONAL
AND APPLIED MATHEMATICS

ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

№ 4(74) 2026

Журнал основан в 2015 году.

Издается 6 раз в год.

Учредитель:

Научно-исследовательский институт развития цифровых технологий и
искусственного интеллекта.

Главный редактор:

Равшанов Н.

Заместители главного редактора:

Арипов М.М., Шадиметов Х.М., Ахмедов Д.Д.

Ответственный секретарь:

Убайдуллаев М.Ш.

Редакционный совет:

Азамов А.А., Алоев Р.Д., Амиргалиев Е.Н. (Казахстан), Арушанов М.Л.,
Бурнашев В.Ф., Джумаёзов У.З., Загребина С.А. (Россия), Задорин А.И. (Россия),
Игнатъев Н.А., Ильин В.П. (Россия), Иманкулов Т.С. (Казахстан),
Исмагилов И.И. (Россия), Кабанихин С.И. (Россия), Курбонов Н.М., Маматов Н.С.,
Мирзаев Н.М., Мурадов Ф.А., Назирова Э.Ш., Нормуродов Ч.Б., Нуралиев Ф.М.,
Опанасенко В.Н. (Украина), Расулмухамедов М.М., Садуллаева Ш.А.,
Старовойтов В.В. (Беларусь), Хаётов А.Р., Халджигитов А., Хамдамов Р.Х.,
Хужаев И.К., Хужаеров Б.Х., Эшмаматова Д.Б., Дустмуродова Ш.Ж.,
Чье Ен Ун (Россия), Шабозов М.Ш. (Таджикистан), Dimov I. (Болгария),
Li Y. (США), Mascagni M. (США), Min A. (Германия), Singh M. (Южная Корея).

Журнал зарегистрирован в Агентстве информации и массовых коммуникаций при
Администрации Президента Республики Узбекистан.

Свидетельство №0856 от 5 августа 2015 года.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

При перепечатке материалов ссылка на журнал обязательна.

За точность фактов и достоверность информации ответственность несут авторы.

Адрес редакции:

100125, г. Ташкент, м-в. Буз-2, 17А.

Тел.: +(998) 71 263-41-98.

Э-почта: journals@airi.uz.

Веб-сайт: <https://journals.airi.uz>.

Дизайн и вёрстка:

Шарилов Х.Д.

Отпечатано в типографии НИИ РЦТИИ.

Подписано в печать 25.08.2026 г.

Формат 60x84 1/8. Заказ № 4. Тираж 100 экз.

PROBLEMS OF COMPUTATIONAL AND APPLIED MATHEMATICS

No. 4(74) 2026

The journal was established in 2015.
6 issues are published per year.

Founder:

Digital Technologies and Artificial Intelligence Development Research Institute.

Editor-in-Chief:

Ravshanov N.

Deputy Editors:

Aripov M.M., Shadimetov Kh.M., Akhmedov D.D.

Executive Secretary:

Ubaydullaev M.Sh.

Editorial Council:

Azamov A.A., Aloev R.D., Amirgaliev E.N. (Kazakhstan), Arushanov M.L.,
Burnashev V.F., Djumayozov U.Z., Zagrebina S.A. (Russia), Zadorin A.I. (Russia),
Ignatiev N.A., Ilyin V.P. (Russia), Imankulov T.S. (Kazakhstan), Ismagilov I.I. (Russia),
Kabanikhin S.I. (Russia), Kurbonov N.M., Mamatov N.S., Mirzaev N.M., Muradov F.A.,
Nazirova E.Sh., Normurodov Ch.B., Nuraliev F.M., Opanasenko V.N. (Ukraine),
Sadullaeva Sh.A., Starovoitov V.V. (Belarus), Khayotov A.R., Khaldjigitov A.,
Khamdamov R.Kh., Khujaev I.K., Khujayorov B.Kh., Eshmamatova D.B.,
Dustmurodova Sh.J., Chye En Un (Russia), Shabozov M.Sh. (Tajikistan),
Dimov I. (Bulgaria), Li Y. (USA), Mascagni M. (USA), Min A. (Germany),
Singh M. (South Korea).

The journal is registered by Agency of Information and Mass Communications under the
Administration of the President of the Republic of Uzbekistan.
Certificate of Registration No. 0856 of 5 August 2015.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

At a reprint of materials the reference to the journal is obligatory.
Authors are responsible for the accuracy of the facts and reliability of the information.

Address:

100125, Tashkent, Buz-2, 17A.

Tel.: +(998) 71 263-41-98.

E-mail: journals@airi.uz.

Web-site: <https://journals.airi.uz>.

Layout design:

Sharipov Kh.D.

DTAIRI printing office.

Signed for print 25.08.2026

Format 60x84 1/8. Order No. 4. Print run of 100 copies.

Содержание

Ахмедов Д.Д., Туркменова Р.Т.

Моделирование мезомасштабного переноса мелкодисперсной примеси в атмосфере с учётом стохастических пульсаций ветра 5

Чжан Х., Варламова Л.П., У Б.

Динамический анализ стохастической SICK-модели передачи раннего и позднего фитофтороза картофеля 27

Равшанов Н., Шафиев Т.Р., Бобожонова М.А., Кобилова Д.О.

Исследование ключевых факторов, влияющих на распространение пылевых частиц в атмосфере 47

Бердиёров Ш.Ш., Эрмонова М.У.

Сравнение методов конечных разностей и конечных объёмов для численного моделирования фильтрации в цилиндрическом пористом фильтре 65

Равшанов Н., Садуллаев С.

Моделирование процесса нестационарной фильтрации грунтовых вод со свободной поверхностью с учётом инфильтрационных потоков 85

Туракулов Ж.А., Жураев И.Р., Таштемирова Н.Н., Рахматуллаева Д.О.

Математическое моделирование фильтрации суспензии в пористых средах . 102

Хайтов А.Р., Исмоилов С.И.

Квадратурная формула для оптимального приближения определенных интегралов с полиномиальным весом 110

Нуралиев Ф.А., Едилбекова Р.М.

Оптимальная квадратурная формула в пространстве дифференцируемых функций 120

Эшмаматова Д.Б., Очилова Н.К.

Вырожденно-сингулярные эллиптические операторы: точная коэрцитивность, весовая корректность и методы функции Грина для моделей диффузии в опухолевых тканях 133

Назирова Э.Ш., Мадетбаева Н.Б., Мирзаева Ф.Ш., Исломов М.Б.

Математическая модель автоматического выделения фразеологизмов в тюркских языках 152

Ахмеджанова Д.А.

Модель семантического связывания тюркских языков: подход с ограничением справедливости для малоресурсных условий 171

Contents

<i>Akhmedov D.D., Turkmenova R.T.</i>	
Modeling mesoscale transport of fine particulate matter in the atmosphere accounting for stochastic wind fluctuations	5
<i>Zhang H., Varlamova L.P., Wu B.</i>	
Dynamical analysis of a stochastic SICK transmission model for potato early and late blight	27
<i>Ravshanov N., Shafiev T.R., Bobozhonova M.A., Kobilova D.O.</i>	
Study of the key factors affecting the dispersion of dust particles in the atmosphere	47
<i>Berdiyev Sh.Sh., Ermonova M.U.</i>	
Comparison of finite difference and finite volume methods for numerical simulation of filtration in a cylindrical porous filter	65
<i>Ravshanov N., Sadullaev S.</i>	
Modeling of the process of unsteady filtration of groundwater with a free surface taking into account infiltration flows	85
<i>Turakulov J.A., Juraev I.R., Tashtemirova N.N., Raxmatullayeva D.O.</i>	
Mathematical modeling of suspension filtration in porous media	102
<i>Hayotov A.R., Ismoilov S.I.</i>	
Optimal quadrature for definite integrals with polynomial weight	110
<i>Nuraliev F.A., Edilbekova R.M.</i>	
Optimal quadrature formula in the space of differentiable functions	120
<i>Eshmamatova D.B., Ochilova N.K.</i>	
Degenerate-singular elliptic operators: sharp coercivity, weighted well-posedness, and Green's function methods for tumor-diffusion models	133
<i>Nazirova E.Sh., Madetbayeva N.B., Mirzayeva F.Sh., Islomova M.B.</i>	
A mathematical model for the automatic extraction of idioms in Turkic languages	152
<i>Akhmedjanova D.A.</i>	
A semantic linking model for Turkic languages: a fairness-constrained cross-lingual approach for low-resource settings	171