

УДК 519.6:504.3.054

ИССЛЕДОВАНИЕ КЛЮЧЕВЫХ ФАКТОРОВ, ВЛИЯЮЩИХ НА РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПЫЛЕВЫХ ЧАСТИЦ В АТМОСФЕРЕ

^{1*}Равшанов Н., ²Шафиев Т.Р., ²Бобожонова М.А., ²Кобилова Д.О.

*ravshanzade-09@mail.ru

¹Научно-исследовательский институт развития цифровых технологий и искусственного интеллекта,

100125, Узбекистан, г. Ташкент, м-в Буз-2, 17А;

²Бухарский государственный университет,

200117, Узбекистан, г. Бухара, ул. Мухаммада Икбола, 11

Разработана математическая модель для более точного описания переноса пылевых частиц в атмосфере. В отличие от большинства существующих моделей, в которых скорость частиц полагается равной скорости ветра, рассмотрен случай, когда частица обладает инерцией и её скорость отличается от скорости потока. Уравнения движения получены на основе второго закона Ньютона с учётом силы сопротивления Стокса, внешнего воздушного потока и силы тяжести. Построен трёхэтапный численный алгоритм на основе формулы обратного дифференцирования второго порядка (BDF2) со стартовым подшагом по схеме Кранка–Николсона, обеспечивающий второй порядок точности; наблюдаемый в вычислительном эксперименте порядок сходимости составил около двух. Изучена динамика движения трёх типичных категорий пылевых частиц — PM_{2.5}, PM₁₀ и крупных частиц (50 мкм) — при различных скоростях ветра и высотах выброса. Определены время релаксации, установившаяся скорость оседания, дальность горизонтального переноса и угол наклона траектории. Показано, что инерционное запаздывание приводит к отставанию частицы от воздушного потока, относительная погрешность упрощённой модели максимальна непосредственно после выброса и убывает по мере выравнивания скоростей, тогда как для частиц PM_{2.5} и PM₁₀ упрощение практически не влияет на результат. Сформулированы практические рекомендации по применению модели для мониторинга строительной пыли, прогнозирования промышленных выбросов и управления качеством воздуха в городах.

Ключевые слова: атмосферный перенос пыли, математическое моделирование, численные методы, алгоритм BDF2, сила сопротивления Стокса, динамика пылевых частиц

Цитирование: Равшанов Н., Шафиев Т.Р., Бобожонова М.А., Кобилова Д.О. Исследование ключевых факторов, влияющих на распространение пылевых частиц в атмосфере // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2026. – № 4(74). – С. 47-64.

DOI: 10.71310/psam.4_74.2026.03

1 Введение

В настоящее время создаются беспрецедентные возможности для обеспечения комфортных условий жизни людей. При реализации этих условий технологические процессы стремительно развиваются на основе научного прогресса. Однако быстрое развитие этих процессов неизбежно оказывает значительное влияние на экологические системы.

В частности, резкий рост строительного сектора ведёт к расширению производства новых видов строительных материалов. В то же время рост населения увеличивает спрос на сельскохозяйственную продукцию, увеличивая объёмы её производства. В результате этих процессов — особенно при добыче, транспортировке и переработке строительных материалов — в атмосферу выбрасывается значительное количество частиц пыли.

Кроме того, в сельском хозяйстве широко используются технологии капельного орошения для эффективного использования водных ресурсов. Однако в некоторых случаях неправильное применение этих технологий или их несоответствие природным условиям приводит к деградации и эрозии почвы, что, в свою очередь, создаёт условия для образования и выброса в атмосферу частиц пыли.

Частицы атмосферной пыли (особенно PM_{2.5} и PM₁₀) содержат различные химические компоненты, опасные для здоровья человека. Вдыхание воздуха, загрязнённого такими частицами, негативно влияет на организм, вызывая заболевания верхних дыхательных путей, аллергические реакции, а также лёгочные и сердечно-сосудистые заболевания. По данным Всемирной организации здравоохранения [1], загрязнение атмосферного воздуха ежегодно приводит примерно к 4,2 миллиона преждевременных смертей во всём мире. Это свидетельствует о важности научного и практического изучения процессов распространения частиц пыли в атмосфере.

Одним из эффективных подходов к комплексному изучению, мониторингу и прогнозированию вышеупомянутых проблем является математическое моделирование. По этой причине в последние годы было проведено большое количество теоретических и прикладных исследований, направленных на проведение вычислительных экспериментов по изучению распространения пылевых частиц в атмосфере.

В работе [2] выполнен анализ механизмов образования, характеристик распространения и опасности для здоровья частиц PM_{2.5} и PM₁₀ в атмосфере. Авторы показывают, что мелкие частицы (PM_{2.5}) способны проникать глубоко в ткани лёгких и что длительное воздействие таких частиц значительно повышает риск развития респираторных и сердечно-сосудистых заболеваний. Кроме того, в этой работе научно обоснована взаимосвязь между химическим составом твёрдых частиц (сульфатами, нитратами, органическими соединениями) и их источниками — промышленными выбросами, автомобильным транспортом и природными процессами.

В работе [3] предложена модель HYSPLIT_4, которая сочетает в себе лагранжев и эйлеров подходы к расчёту дисперсии частиц и доказала свою надёжность при моделировании реальных событий, таких как авария на Чернобыльской АЭС и эксперимент ANATEX. Исходя из этого, модель хорошо подходит в качестве методологического инструмента для анализа переноса частиц PM_{2.5} и PM₁₀ в городской среде.

Для оценки временной и пространственной динамики пыльных вихрей и их влияния на баланс аэрозолей в Восточноазиатском регионе была разработана новая схема параметризации, интегрированная в модель WRF-Chem [4]. Согласно результатам исследования, на эти мелкомасштабные конвективные процессы приходится в среднем 5–15 % от общего объёма выбросов минеральных пылевых аэрозолей в регионе и до 30 % в пустынных районах в зависимости от местных условий. Таким образом, учёт параметров пыльных вихрей при моделировании аэрозольной нагрузки в нижних слоях атмосферы помогает повысить точность расчётов.

Долгосрочные наблюдения, проведённые в [5], показали, что частицы пыли, поднятые с Африканского континента, переносятся через Атлантический океан в Ка-

рибский бассейн. Измерения, проведённые на Барбадосе в период с 1965 по 1998 год, показали, что концентрация пыли сильно варьируется от года к году и что эти колебания обратно пропорциональны количеству осадков в Сахельском регионе. Исследование показало, что выбросы пыли очень чувствительны к изменению климата и что в будущем возможно значительное увеличение выбросов пыли из засушливых регионов. Эти данные подтверждают, что перенос пылевых частиц на большие расстояния может представлять угрозу для качества воздуха и здоровья людей не только на местном, но и на региональном и глобальном уровнях.

Авторами работы [6] разработана математическая модель, учитывающая аэродинамическое сопротивление, характеристики подстилающей поверхности, размеры частиц и интенсивность турбулентного обмена. Результаты численных экспериментов показали высокую точность модели при прогнозировании процессов удаления аэрозолей из атмосферы и возможность её интеграции в современные программные комплексы экологического мониторинга.

Существенный вклад в исследование процессов переноса аэрозольных частиц внесли авторы [7], которые выполнили численное моделирование движения частиц в турбулентном канальном потоке с использованием метода крупных вихрей (Large Eddy Simulation, LES) совместно с методом дискретных элементов (DEM). В отличие от традиционных моделей, предполагающих незначительное взаимодействие между частицами при малых концентрациях, авторы показали, что при больших числах Стокса столкновения и агломерация происходят достаточно интенсивно. Установлено, что увеличение числа Рейнольдса приводит к росту турбулентности воздушного потока и значительно повышает вероятность столкновения частиц, особенно вблизи стенок канала. Полученные результаты имеют большое практическое значение при моделировании распространения промышленной пыли, поскольку образование агломератов изменяет аэродинамические характеристики частиц, скорость их осаждения и дальность переноса. Кроме того, работа демонстрирует необходимость учёта взаимодействия «частица — частица» при построении современных математических моделей атмосферной дисперсии.

Работа [8] посвящена экспериментальному определению скорости седиментации природных пылевых частиц. Авторами выполнена серия лабораторных измерений, позволивших установить статистические зависимости между размерами, плотностью, формой частиц и скоростью их осаждения. Полученные эмпирические зависимости рекомендованы для использования при разработке математических моделей атмосферного переноса и позволяют значительно уменьшить неопределённость прогнозов при расчёте концентраций аэрозолей.

Работа [9] посвящена экспериментальному исследованию процессов движения и осаждения аэрозольных частиц. Авторы выполнили серию экспериментов в аэродинамической трубе с использованием лазерной доплеровской анемометрии для определения скоростей движения воздуха и частиц. Было показано, что интенсивность осаждения определяется не только скоростью воздушного потока, но и распределением частиц по размерам, а также характеристиками поверхности. Наибольшая скорость осаждения наблюдается на горизонтальных поверхностях, тогда как на вертикальных стенках осаждение происходит значительно медленнее. Полученные результаты широко используются при моделировании распространения пыли внутри промышленных помещений и вентиляционных систем.

В монографии [10] были выполнены фундаментальные исследования процессов турбулентного переноса аэрозолей: автор подробно рассмотрел механизмы верти-

кального и горизонтального переноса частиц в турбулентной атмосфере, а также закономерности их осаждения на различные типы подстилающей поверхности. Медников показал, что коэффициенты турбулентной диффузии существенно изменяются в зависимости от устойчивости атмосферы, времени суток и характера подстилающей поверхности. Эти результаты стали теоретической основой большинства современных моделей атмосферной диффузии и до настоящего времени используются при разработке экологических моделей распространения загрязняющих веществ.

Цзэн и соавторы [11] использовали WRF-Chem версии 3.9 для численного моделирования пыльной бури, наблюдавшейся в Восточной Азии в мае 2017 года. В ходе исследования сравнивались различные схемы выбросов пыли и параметры сухого осаждения. Результаты моделирования хорошо согласуются с данными наблюдений, что позволило определить оптимальную конфигурацию модели.

В работе [12] автор исследовал распространение загрязняющих веществ в атмосфере на основе модели гауссова шлейфа, получив аналитическое решение для поля концентрации с учётом скорости ветра, коэффициента диффузии и высоты источника с помощью уравнения адвекции–диффузии. Кроме того, методом наименьших квадратов была решена обратная задача определения интенсивности источника выбросов с использованием данных измерений в нескольких точках приёма. В качестве примера был взят цинковый завод.

В работе [13] с помощью технологии LIDAR и модели WRF-Chem были изучены механизмы вертикального распределения пылевых частиц в пустыне Раджастан. Результаты показали, что кварц и полевые шпаты в диапазоне размеров PM10 действуют как ядра конденсации облаков (Cloud Condensation Nuclei, CCN) на высотах 500–2000 м и изменяют процессы выпадения осадков на 15–25 %. Исследование показало, что пылевые частицы оказывают долгосрочное влияние на региональный климат и гидрологический цикл посредством своего радиационного воздействия.

Развитие математического моделирования процессов распространения пылевых частиц привело к созданию большого количества моделей, различающихся физическими предположениями, областью применения и вычислительной сложностью. Наиболее распространёнными являются гауссовы модели, лагранжевы модели, эйлеровы модели, модели вычислительной гидродинамики (CFD) и комплексные метеорологические системы, такие как WRF-Chem. Каждая из них имеет свои преимущества и ограничения, поэтому выбор конкретной модели определяется целью исследования, пространственным масштабом задачи и доступностью исходной информации [14].

Анализ основных научных публикаций, посвящённых переносу и диффузии частиц атмосферной пыли, показывает, насколько обширна эта область. Эти процессы включают в себя выброс, подъём и оседание, диффузию и перенос частиц пыли под действием ветра. Процесс выброса частиц в атмосферу из источников пыли охватывает частицы размером от 0,1 до 100 микрон [15], а их перенос и диффузия, в зависимости от размера частиц и скорости ветра, могут происходить на расстояниях от нескольких сантиметров до тысяч километров.

Частицы пыли обычно делят на три основные категории: крупные частицы (PM10 — от 2,5 до 10 микрон), мелкие частицы (PM2.5 — менее 2,5 микрон или равные ему) и ультрамелкие частицы (менее 0,1 микрон) [16, 17]. В таких сложных условиях значительно труднее создать универсальную математическую модель переноса и распространения частиц атмосферной пыли.

В работе [15] был разработан программный инструмент для мониторинга и прогнозирования переноса и распространения вредных веществ в атмосфере, в котором

Таблица 1 Сравнение современных моделей атмосферной дисперсии.

Модель	Основные преимущества	Ограничения	Область применения
Gaussian (AERMOD)	Простота реализации, высокая скорость расчёта, небольшие требования к исходным данным	Предполагает стационарные метеоусловия, хуже работает при сложном рельефе	Локальные источники загрязнения
CALPUFF	Учитывает изменение ветра во времени и пространстве, сложный рельеф, дальний перенос	Более сложная подготовка входных данных, большие вычислительные затраты	Региональное моделирование
Eulerian	Хорошо описывает пространственное распределение концентраций	Высокая вычислительная стоимость	Региональные и глобальные модели
Lagrangian	Точное описание траекторий отдельных частиц	Требует большого количества вычислений при высокой концентрации частиц	Перенос аэрозолей и пылевые бури
CFD	Максимальная детализация потоков, учёт зданий и рельефа	Очень высокие вычислительные затраты	Городская среда, промышленные площадки
WRF-Chem	Совместное моделирование метеорологии и химии атмосферы	Требует мощных вычислительных ресурсов	Региональные и глобальные исследования

скорость частиц в трёх пространственных направлениях рассчитывалась численно. В отличие от этой работы, в данном исследовании основное внимание уделяется инерционному запаздыванию между скоростью движения пылевых частиц и скоростью ветра, которое для более крупных частиц оказывается существенным.

Анализ проведённых исследований показывает, что для разработки адекватной математической модели процессов переноса и диффузии атмосферных пылевых частиц и аэрозолей необходимо комплексно учитывать основные факторы, влияющие на объект, и использовать результаты вычислительных экспериментов. Чтобы полностью описать динамику движения пылевых частиц в атмосфере, необходимо учитывать следующие важные параметры: физические свойства частиц (размер, плотность, форма), метеорологические условия (скорость и направление ветра, температурный градиент, устойчивость атмосферы), топографические особенности и расположение источников выбросов.

Такой комплексный подход позволяет одновременно моделировать инерционные свойства частиц, гравитационное оседание, силу сопротивления Стокса и процессы турбулентной диффузии. Результаты, полученные с помощью компьютерного моде-

лирования, играют важную роль в прогнозировании распространения пылевых частиц в реальных атмосферных условиях и дают возможность оценить достоверность модели путём сравнения с экспериментальными данными.

2 Постановка задачи

На основе анализа рассмотренных выше научных работ для разработки адекватной математической модели процессов движения пылевых частиц в атмосфере необходимо комплексно изучить основные параметры, влияющие на них, с учётом физико-механических свойств частиц.

Следует отметить, что плотность и вязкость воздуха оказывают значительное влияние на перенос и диффузию частиц атмосферной пыли и меняются в зависимости от температуры окружающей среды. Вычислительные эксперименты [18] показали, что концентрация загрязняющих веществ в воздухе зависит от ряда переменных, в том числе от интенсивности выбросов, расстояния от точки наблюдения до источника, а также от метеорологических и климатических факторов в рассматриваемом регионе.

Принимая во внимание глобальный перенос частиц атмосферной пыли и основываясь на приведённых выше предположениях, мы рассматриваем проблему переноса частиц пыли радиусом r и плотностью ρ_p в гравитационном поле под действием силы ветра. Скорость ветра задаётся вектором $\mathbf{u} = (u_x, u_y, 0)$. Для сферической частицы в стоксовом приближении сила аэродинамического сопротивления равна $F = 6\pi\mu_a r(\mathbf{u} - \mathbf{v})$, а масса частицы $m = 4/3\pi r^3 \rho_p$; отсюда для изучения составляющих скорости v_x, v_y, v_z частиц в направлениях x, y, z получаем следующую систему уравнений:

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{9\mu_a}{2\rho_p r^2}(u_x - v_x); \quad (1)$$

$$\frac{dv_y}{dt} = \frac{9\mu_a}{2\rho_p r^2}(u_y - v_y); \quad (2)$$

$$\frac{dv_z}{dt} = \frac{3\rho_a \tau_0}{4\rho_p r} \delta(t - t_0) \frac{(u_x - v_x)^2 + (u_y - v_y)^2}{2} - \frac{9\mu_a}{2\rho_p r^2} v_z - g. \quad (3)$$

Начальные условия. В начальный момент частица неподвижна:

$$\left. \begin{aligned} v_x(x, y, z, 0) &= 0; \\ v_y(x, y, z, 0) &= 0; \\ v_z(x, y, z, 0) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Условие импульсного подъёма (если в момент t_0 частица приходит в движение). Если частица поднимается в момент $t = t_0$:

$$\left. \begin{aligned} v_x(x, y, z, t_0) &= u_x(x, y, z, t_0); \\ v_y(x, y, z, t_0) &= u_y(x, y, z, t_0); \\ v_z(x, y, z, t_0) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Здесь t – время, ρ_p – плотность частиц пыли, ρ_a – плотность воздуха, μ_a – коэффициент динамической вязкости воздуха, g – ускорение свободного падения, δ – дельта-функция Дирака, τ_0 – характерная длительность импульсного воздействия

(введение множителя τ_0 обеспечивает размерностную согласованность источникового члена: все слагаемые правой части уравнения (3) имеют размерность м/с²).

Функция $\delta(t - t_0)$ используется для математического выражения дискретного момента высвобождения частиц пыли. Физически $\delta(t - t_0)$ представляет собой импульсный подъём частицы в момент времени t_0 . Этот процесс происходит в три этапа:

1. $t < t_0$: частица всё ещё находится на поверхности земли, вертикальная скорость равна нулю;
2. $t = t_0$: частица резко поднимается вверх под действием импульса (ветра или других сил);
3. $t > t_0$: частица находится в воздухе, и к ней применимы обычные уравнения движения.

Отметим, что в численной реализации импульсный характер подъёма учитывается через условия (5), задающие состояние частицы в момент t_0 ; при $t > t_0$ источниковый член в (3) полагается равным нулю, и движение частицы описывается гладкой системой (1)–(3) с начальными данными (5).

Такой подход позволяет математически точно смоделировать процесс выброса частиц пыли в реальных условиях — например, при эрозии почвы под воздействием ветра, выбросе пыли при строительных работах или поднятии дорожной пыли в результате движения транспорта.

Как видно из приведённой выше формулировки задачи, для решения проблемы переноса и диффузии частиц атмосферной пыли необходимо рассчитать скорость движения частиц атмосферной пыли на основе уравнений (1)–(3).

Эта система уравнений описывает изменение во времени составляющих скорости частиц пыли в горизонтальном (x, y) и вертикальном (z) направлениях с учётом силы сопротивления Стокса, гравитационного эффекта и процесса импульсного выброса. Начальные условия (4), (5) определяют этапы движения частиц от состояния покоя до момента импульсного выброса.

Таким образом, для полного описания сложной динамики движения частиц атмосферной пыли разработана методика определения скоростных параметров потока частиц на основе численного решения системы (1)–(5), представленной выше, с последующим применением этих результатов в уравнении распространения концентрации.

3 Метод решения

Отметим, что при постоянной скорости ветра система (1)–(3) допускает аналитическое решение (см. формулу (7) ниже), однако в реальных задачах скорость ветра $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y, z, t)$ переменна, а уравнения движения частиц связаны с уравнением адвекции–диффузии для поля концентрации; в этих условиях аналитическое решение отсутствует, и требуется устойчивый численный алгоритм.

Скорости v_x, v_y, v_z , составляющие движение вдоль осей x, y, z , вычисляются на основе уравнений (1)–(3) с использованием неявной схемы (двухшагового метода обратной дифференцировки) в следующем виде. Рассмотрим уравнение скорости частицы в направлении x . Для удобства и упрощения введём обозначение $\beta = \frac{9\mu_a}{2\rho_p\tau^2}$ (величина $\tau = 1/\beta$ имеет смысл времени релаксации частицы), после чего уравнение (1) принимает вид

$$\frac{dv_x}{dt} = \beta(u_x - v_x).$$

Здесь и далее для краткости записи u обозначает соответствующую компоненту скорости ветра.

Временной шаг Δt делится на три равные части, то есть принимается

$$\Delta\tau = \frac{\Delta t}{3}$$

и на каждом макрошаге Δt последовательно выполняются три подшага: $n \rightarrow n + 1/3 \rightarrow n + 2/3 \rightarrow n + 1$. Такое построение делает алгоритм самостартующим: первый подшаг каждого макрошага выполняется по одношаговой схеме, а два последующих – по двухшаговой схеме BDF2.

Поскольку для первого подшага предыдущие по времени значения отсутствуют и, следовательно, применение формулы обратного дифференцирования второго порядка (двухшагового метода обратной дифференцировки, BDF2) невозможно, используется неявная разностная схема второго порядка точности по времени (схема Кранка–Николсона):

$$\frac{v_x^{n+1/3} - v_x^n}{\Delta\tau} = \frac{\beta}{2} [(u - v_x^n) + (u - v_x^{n+1/3})].$$

Раскрыв скобки в правой части, умножив обе части уравнения на $\Delta\tau$ и собрав члены с $v_x^{n+1/3}$ в левой части, получим

$$\left(1 + \frac{\beta\Delta\tau}{2}\right) v_x^{n+1/3} = \left(1 - \frac{\beta\Delta\tau}{2}\right) v_x^n + \beta\Delta\tau \cdot u.$$

Подставив $\frac{\beta\Delta\tau}{2} = \frac{\beta\Delta t}{6}$ и $\beta\Delta\tau = \frac{\beta\Delta t}{3}$, имеем

$$\left(1 + \frac{\beta\Delta t}{6}\right) v_x^{n+1/3} = \left(1 - \frac{\beta\Delta t}{6}\right) v_x^n + \frac{\beta\Delta t}{3} u,$$

откуда, выразив $v_x^{n+1/3}$, окончательно находим

$$v_x^{n+1/3} = \frac{(6 - \beta\Delta t)v_x^n + 2\beta\Delta t \cdot u}{6 + \beta\Delta t}.$$

На втором этапе осуществляется переход $n + 1/3 \rightarrow n + 2/3$; поскольку уравнение (1) уже имеет решение на подшаге $n + 1/3$, применяется двухшаговый метод обратной дифференцировки (BDF2). Левая часть уравнения аппроксимируется в виде $\frac{dv_x}{dt} \approx \frac{3v_x^{n+2/3} - 4v_x^{n+1/3} + v_x^n}{2\Delta\tau}$, а правая часть – в виде $\beta(u - v_x) \approx \beta(u - v_x^{n+2/3})$. Объединяя их, получаем

$$\frac{3v_x^{n+2/3} - 4v_x^{n+1/3} + v_x^n}{2\Delta\tau} = \beta(u - v_x^{n+2/3}). \quad (6)$$

Умножив уравнение (6) на $2\Delta\tau$, собрав члены с $v_x^{n+2/3}$ в левой части и подставив $2\beta\Delta\tau = \frac{2\beta\Delta t}{3}$, после умножения обеих частей на 3 получим

$$v_x^{n+2/3} = \frac{12v_x^{n+1/3} - 3v_x^n + 2\beta\Delta t \cdot u}{9 + 2\beta\Delta t}.$$

Далее, для вычисления подшага $n + 2/3 \rightarrow n + 1$ уравнения (1), учитывая наличие значений $v_x^{n+1/3}$ и $v_x^{n+2/3}$, повторно применяем двухшаговый метод обратной дифференцировки:

$$\frac{3v_x^{n+1} - 4v_x^{n+2/3} + v_x^{n+1/3}}{2\Delta\tau} = \beta(u - v_x^{n+1}).$$

Умножив уравнение на $2\Delta\tau$, собрав члены с v_x^{n+1} в левой части и приведя подобные члены, окончательный результат получаем в виде

$$v_x^{n+1} = \frac{12v_x^{n+2/3} - 3v_x^{n+1/3} + 2\beta\Delta t \cdot u}{9 + 2\beta\Delta t}.$$

Уравнение (2) решается в том же порядке, что и уравнение (1), а именно:

$$v_y^{n+1/3} = \frac{(6 - \beta\Delta t)v_y^n + 2\beta\Delta t \cdot u}{6 + \beta\Delta t}; \quad v_y^{n+2/3} = \frac{12v_y^{n+1/3} - 3v_y^n + 2\beta\Delta t \cdot u}{9 + 2\beta\Delta t};$$

$$v_y^{n+1} = \frac{12v_y^{n+2/3} - 3v_y^{n+1/3} + 2\beta\Delta t \cdot u}{9 + 2\beta\Delta t}.$$

Для решения уравнения (3) введём обозначения:

$$\frac{dv_z}{dt} = \underbrace{\frac{3\rho_a\tau_0}{4\rho_pr} \delta(t - t_0) \frac{(u_x - v_x)^2 + (u_y - v_y)^2}{2}}_{A(t)} - \underbrace{\frac{9\mu_a}{2\rho_pr^2}}_{\beta} v_z - g,$$

после чего уравнение принимает вид $\frac{dv_z}{dt} = A(t) - \beta v_z - g$. Здесь $A(t)$ — величина, вычисляемая по значениям v_x и v_y , рассчитанным на предыдущих этапах.

На первом подшаге, при $n \rightarrow n + 1/3$, применяется схема Кранка–Николсона:

$$\frac{v_z^{n+1/3} - v_z^n}{\Delta\tau} = \frac{1}{2} [(A^n - \beta v_z^n - g) + (A^{n+1/3} - \beta v_z^{n+1/3} - g)].$$

Умножив уравнение на $\Delta\tau$, сгруппировав члены с $v_z^{n+1/3}$ в левой части, выполнив замену $\Delta\tau = \Delta t/3$ и умножив полученное выражение на 6, находим

$$v_z^{n+1/3} = \frac{(6 - \beta\Delta t)v_z^n + \Delta t(A^n + A^{n+1/3}) - 2g\Delta t}{6 + \beta\Delta t}.$$

На втором подшаге осуществляется переход $n + 1/3 \rightarrow n + 2/3$ по схеме BDF2:

$$\frac{3v_z^{n+2/3} - 4v_z^{n+1/3} + v_z^n}{2\Delta\tau} = A^{n+2/3} - \beta v_z^{n+2/3} - g.$$

Умножив уравнение на $2\Delta\tau$, собрав члены с $v_z^{n+2/3}$ в левой части, подставив $\Delta\tau = \Delta t/3$ и умножив обе части на 3, получим

$$v_z^{n+2/3} = \frac{12v_z^{n+1/3} - 3v_z^n + 2\Delta t (A^{n+2/3} - g)}{9 + 2\beta\Delta t}.$$

Аналогичным образом осуществляется переход $n + 2/3 \rightarrow n + 1$; поскольку рассматриваемое уравнение уже имеет решения на подшагах $n + 1/3$ и $n + 2/3$, применяется схема BDF2:

$$\frac{3v_z^{n+1} - 4v_z^{n+2/3} + v_z^{n+1/3}}{2\Delta\tau} = A^{n+1} - \beta v_z^{n+1} - g,$$

и окончательный результат имеет вид

$$v_z^{n+1} = \frac{12v_z^{n+2/3} - 3v_z^{n+1/3} + 2\Delta t (A^{n+1} - g)}{9 + 2\beta\Delta t}.$$

Таким образом, для решения уравнений движения (1)–(5) построен трёхэтапный численный алгоритм, основанный на BDF2 (формуле обратного дифференцирования). На первом подшаге ($n \rightarrow n + 1/3$), поскольку предыдущее значение неизвестно, применяется схема Кранка–Николсона; на последующих двух подшагах ($n + 1/3 \rightarrow n + 2/3$ и $n + 2/3 \rightarrow n + 1$) используется схема BDF2. Такой подход обеспечивает точность $O(\Delta t^2)$ на всех этапах. Обе используемые схемы А-устойчивы, то есть устойчивы при любом шаге по времени; отметим при этом, что схема Кранка–Николсона не является L-устойчивой, поэтому при $\beta\Delta\tau \gg 1$ (жёсткий режим, характерный для мелких частиц) стартовый подшаг может порождать затухающие осцилляции, которые эффективно подавляются последующими L-устойчивыми подшагами BDF2. Алгоритм позволяет с высокой точностью вычислять компоненты горизонтального движения частиц пыли, при этом вертикальное движение рассматривается отдельно с учётом импульсного выброса, реализуемого через условия (5). В результате на каждом макрошаге последовательно находятся значения

$$v_x^{n+1/3}, v_x^{n+2/3}, v_x^{n+1}; \quad v_y^{n+1/3}, v_y^{n+2/3}, v_y^{n+1}; \quad v_z^{n+1/3}, v_z^{n+2/3}, v_z^{n+1}.$$

Таблица 2 Свойства численной схемы для решения уравнений (1)–(5).

Этап	Схема	Порядок точности
$n \rightarrow n + 1/3$	Кранка–Николсона	$O(\Delta\tau^2)$
$n + 1/3 \rightarrow n + 2/3$	BDF2	$O(\Delta\tau^2)$
$n + 2/3 \rightarrow n + 1$	BDF2	$O(\Delta\tau^2)$
Полный шаг Δt	комбинированная (CN + BDF2)	$O(\Delta t^2)$

4 Результаты вычислительных экспериментов

Для проверки разработанной математической модели и численного алгоритма была проведена серия вычислительных экспериментов с частицами пыли разного размера. Используются следующие стандартные атмосферные параметры: плотность воздуха $\rho_a = 1,225$ кг/м³, динамическая вязкость $\mu_a = 1,81 \times 10^{-5}$ Па·с, ускорение свободного падения $g = 9,81$ м/с², скорость ветра $u_x = 5,0$ м/с и временной шаг $\Delta t = 0,001$ с. Были проанализированы три основные категории частиц: PM2.5 ($d = 2,5$ мкм, $\rho_p = 1500$ кг/м³), PM10 ($d = 10$ мкм, $\rho_p = 2000$ кг/м³) и крупные частицы ($d = 50$ мкм, $\rho_p = 2500$ кг/м³). Рассчитанные по формулам $\tau = \rho_p d^2 / (18\mu_a)$ и $v_t = g\tau$ параметры категорий приведены в таб. 3.

4.1 Динамика релаксации скорости

На рис. 1 показана релаксация горизонтальной скорости $v_x(t)$ по отношению к скорости ветра $u_x = 5$ м/с для каждой категории частиц в течение первых 50 миллисекунд. Частицы PM2.5 практически мгновенно достигают стационарного состояния ($\tau \approx 2,88 \times 10^{-5}$ с), в то время как для крупных частиц время релаксации составляет $\tau \approx 19,2$ мс, а выход на 95 % скорости ветра занимает $\approx 3\tau \approx 58$ мс. Эта разница в три порядка показывает, почему упрощённое предположение $v_p = u$ применимо к

Таблица 3 Рассчитанные параметры категорий пылевых частиц.

Параметр	PM2.5	PM10	Крупные (50 мкм)
Диаметр d , мкм	2,5	10	50
Плотность ρ_p , кг/м ³	1500	2000	2500
Время релаксации τ , с	$2,88 \cdot 10^{-5}$	$6,14 \cdot 10^{-4}$	$1,92 \cdot 10^{-2}$
Скорость оседания v_t , м/с	$2,82 \cdot 10^{-4}$	$6,02 \cdot 10^{-3}$	0,188

частицам PM2.5, но приводит к систематическим ошибкам при работе с более крупными частицами.

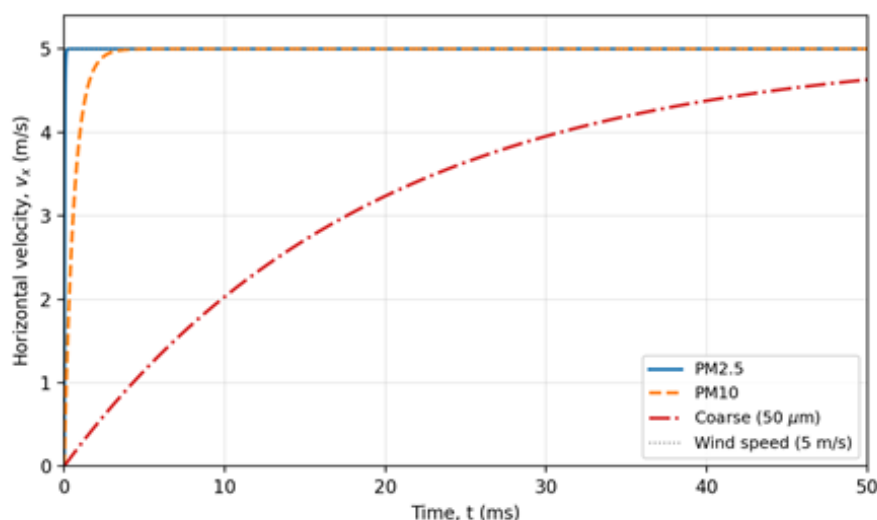


Рис. 1 Горизонтальная релаксация скорости движения пылевых частиц к скорости ветра ($u_x = 5$ м/с). Пунктирной серой линией обозначена скорость ветра. Частицы PM2.5 достигают стационарного состояния практически мгновенно; у крупных частиц (50 мкм) отчётливо видна фаза релаксации длительностью порядка $3\tau \approx 58$ мс.

4.2 Вертикальная скорость оседания

На рис. 2 представлена вертикальная скорость оседания $|v_z(t)|$ в двойном логарифмическом масштабе (логарифмическая шкала по времени выбрана потому, что процессы релаксации трёх категорий частиц происходят на масштабах, различающихся на три порядка). Все категории частиц достигают установившейся скорости оседания в течение первой секунды моделирования. Разница между частицами PM2.5 ($v_t = 2,82 \times 10^{-4}$ м/с) и крупными частицами ($v_t = 0,188$ м/с) составляет примерно три порядка величины, что объясняет существенную разницу во времени пребывания этих категорий частиц в атмосфере.

4.3 Траектории частиц

На рис. 3 представлены траектории движения частиц при трёх начальных высотах выброса ($H_0 = 10, 30, 50$ м). После завершения релаксации ($t \gg \tau$) траектория частицы близка к прямолинейной с наклоном $\arctan(v_t/u_x)$. Результаты показывают, что с увеличением начальной высоты увеличивается и дальность горизонтального переноса частиц до момента оседания. Частицы PM2.5 и PM10 за время моделирования ($t = 210$ с) переносятся более чем на 1 км, опустившись соответственно лишь

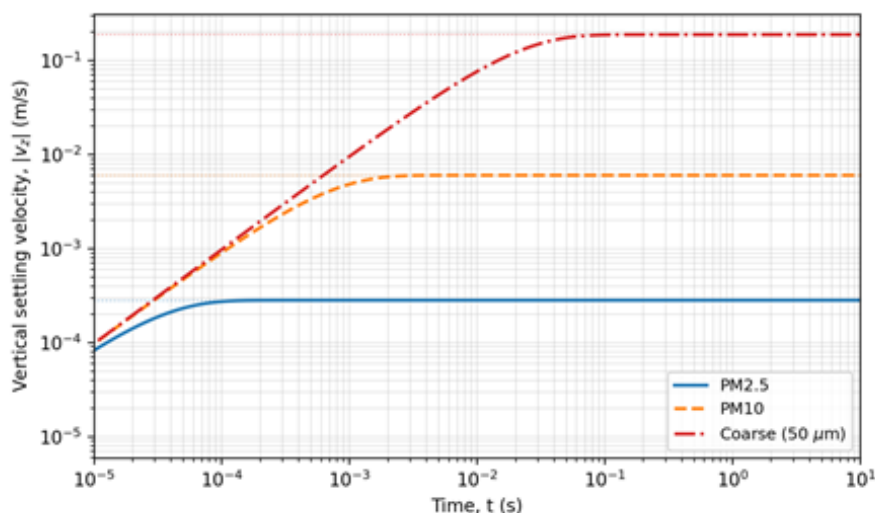


Рис. 2 Вертикальная скорость осаждения $|v_z(t)|$ для трёх категорий частиц (двойной логарифмический масштаб). Пунктирными линиями обозначена установившаяся скорость осаждения для каждой категории.

Таблица 4 Параметры траектории при $t = 10$ с ($u_x = 5$ м/с, $H_0 = 20$ м).

Параметр	PM2.5	PM10	Крупные (50 мкм)
Горизонтальное расстояние, м	50,00	50,00	49,90
Вертикальное оседание, м	-0,0028	-0,060	-1,88
Наклон траектории, °	0,003	0,069	2,16
Отношение скорости оседания к скорости ветра, %	0,006	0,12	3,76

на $\approx 0,06$ м и $\approx 1,3$ м, то есть в масштабе рисунка практически не оседают. Крупные частицы достигают земли: при $H_0 = 10$ м — через ≈ 53 с на расстоянии ≈ 266 м, при $H_0 = 30$ м — через ≈ 159 с на расстоянии ≈ 797 м; при $H_0 = 50$ м точка осаждения (≈ 1330 м) лежит за пределами показанной области.

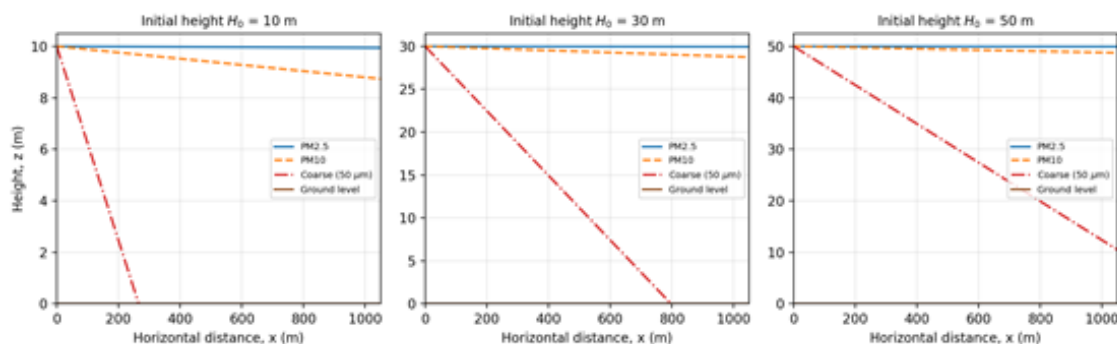


Рис. 3 Рассчитанные траектории движения частиц пыли при различных начальных высотах выброса $H_0 = 10, 30, 50$ м (скорость ветра $u_x = 5$ м/с). Коричневая горизонтальная линия обозначает уровень земли.

В таб. 4 приведены параметры траекторий трёх категорий частиц в момент времени $t = 10$ с. Под наклоном траектории понимается угол $\arctan(|v_z|/v_x)$ в установившемся режиме, под относительной скоростью оседания — отношение v_t/u_x .

На рис. 4 показаны траектории при пяти скоростях ветра ($u_x = 1, 3, 5, 10, 15$ м/с) для частиц PM10 и крупных частиц, выброшенных с высоты $H_0 = 20$ м. Горизонтальная дальность переноса пропорциональна скорости ветра для обеих категорий частиц. Важно отметить, что время осаждения частиц не зависит от скорости ветра: крупные частицы при любой из рассмотренных скоростей ветра достигают земли через одно и то же время (≈ 106 с), проходя при этом расстояние от ≈ 106 м ($u_x = 1$ м/с) до ≈ 1590 м ($u_x = 15$ м/с). Это подтверждает, что время пребывания частиц в атмосфере (в рамках рассматриваемой модели, без учёта турбулентности) определяется исключительно их размером и плотностью, а не скоростью ветра.

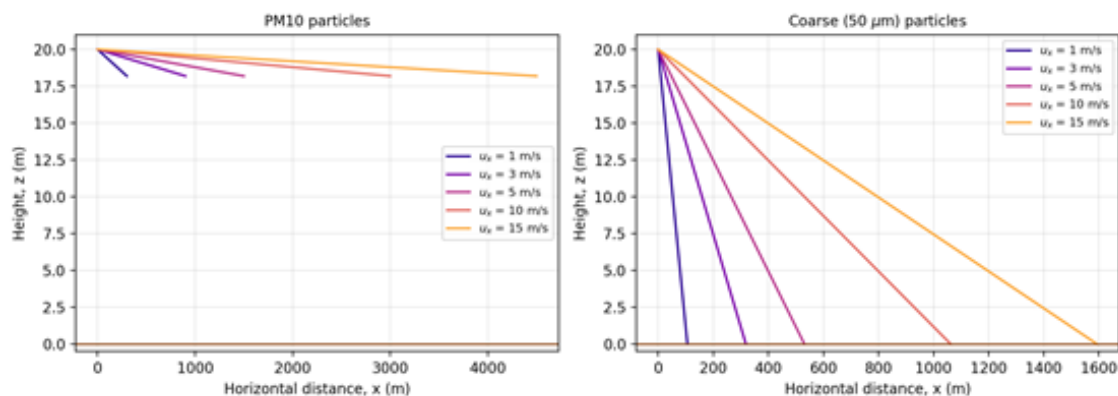


Рис. 4 Траектории частиц при пяти скоростях ветра ($u_x = 1, 3, 5, 10, 15$ м/с) для PM10 (слева) и крупных частиц (справа). Начальная высота $H_0 = 20$ м. Траектории PM10 показаны для интервала $t \leq 300$ с (частицы не достигают земли).

Чтобы проверить точность алгоритма второго порядка, мы сравнили численные решения с точным аналитическим решением, справедливым при постоянном ветре и отсутствии импульсных воздействий:

$$v_x(t) = u_x(1 - e^{-t/\tau}), \quad \tau = \frac{2\rho_p r^2}{9\mu_a}, \quad (7)$$

и с соответствующим точным выражением для координаты $x(t) = u_x(t - \tau(1 - e^{-t/\tau}))$. На рис. 5 (слева) численное решение для PM10 наложено на аналитическую кривую (7): в фазе релаксации расхождение не различимо в масштабе графика. Сходимость исследовалась на крупных частицах ($d = 50$ мкм, $\tau = 1,92 \times 10^{-2}$ с), для которых все использованные шаги Δt разрешают релаксационный переходный процесс; погрешность определялась как $|x_{\text{числ}}(T) - x_{\text{точн}}(T)|$ при $T = 1$ с. В таб. 5 представлен вычисленный порядок сходимости; наблюдаемый порядок $p \approx 2,00$ подтверждает второй порядок точности алгоритма (рис. 5, справа).

Таблица 5 Порядок сходимости алгоритма (частицы 50 мкм, $u_x = 5$ м/с, $T = 1$ с).

Шаг по времени Δt , с	Абсолютная погрешность, м	Относительная погрешность, %	Порядок сходимости p
0,01	$3,72 \cdot 10^{-4}$	$7,58 \cdot 10^{-3}$	—
0,001	$3,75 \cdot 10^{-6}$	$7,65 \cdot 10^{-5}$	2,00
0,0001	$3,75 \cdot 10^{-8}$	$7,65 \cdot 10^{-7}$	2,00

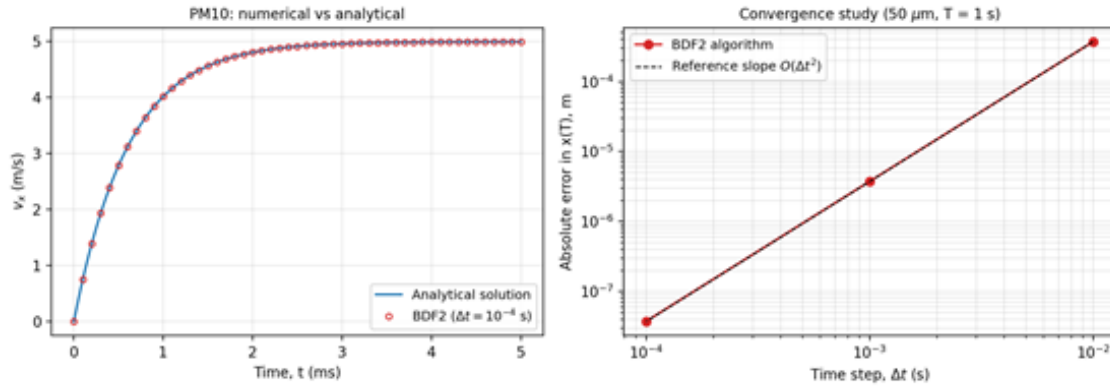


Рис. 5 Верификация численного алгоритма. Слева: сравнение численного решения ($\Delta t = 10^{-4}$ с, маркеры) с аналитическим решением (7) для частиц PM10 в фазе релаксации. Справа: зависимость абсолютной погрешности координаты $x(T)$ от шага Δt в двойном логарифмическом масштабе; штриховая линия — эталонный наклон $O(\Delta t^2)$.

5 Обсуждение

5.1 Сравнение с упрощённой моделью

На рис. 6 сравниваются траектории, рассчитанные с помощью разработанной модели и упрощённой модели ($v_p = u$), для крупных частиц ($d = 50$ мкм), выброшенных из состояния покоя с высоты $H_0 = 20$ м. Различие моделей допускает точную аналитическую характеристику: в любой фиксированный момент времени упрощённая модель завышает горизонтальную координату частицы на величину

$$\Delta x(t) = u_x \tau (1 - e^{-t/\tau}) \rightarrow u_x \tau,$$

что для рассматриваемых крупных частиц составляет $u_x \tau \approx 0,096$ м. Относительная погрешность $\Delta x/x$ максимальна непосредственно после выброса (при $t \sim \tau$ она достигает сотен процентов) и убывает со временем как $\sim \tau/t$: к моменту осаждения ($t \approx 106$ с, $x \approx 531$ м) она составляет лишь $\approx 0,02\%$. Таким образом, инерционное запаздывание существенно именно в ближней зоне источника — на расстояниях порядка $u_x \tau$ и временах порядка нескольких τ , — а также при переменном (порывистом) ветре, когда скорость потока меняется на масштабах времени, сопоставимых с τ , и упрощённая модель принципиально не способна воспроизвести отставание частицы от потока. Суммарная же дальность переноса до осаждения при постоянном однородном ветре в обеих моделях практически совпадает: запаздывание частицы по горизонтали компенсируется соответствующей задержкой её опускания.

Для частиц PM2.5 и PM10 релаксация происходит настолько быстро ($u_x \tau < 3 \times 10^{-3}$ м), что упрощённая модель даёт погрешность менее 0,1 % уже на субсекундных временах, что оправдывает её использование для моделирования мелких частиц. В то же время для крупных частиц, образующихся в результате строительных, горнодобывающих и сельскохозяйственных работ, инерционная задержка значима вблизи источника, и разработанный алгоритм обеспечивает физически более корректное описание без дополнительных вычислительных затрат.

Разработанная модель может быть напрямую применена в ряде инженерных и экологических задач. Во-первых, в сфере борьбы с пылью на строительных площадках модель траекторий позволяет прогнозировать зоны осаждения вокруг строительных площадок при заданных метеорологических условиях, что даёт информацию

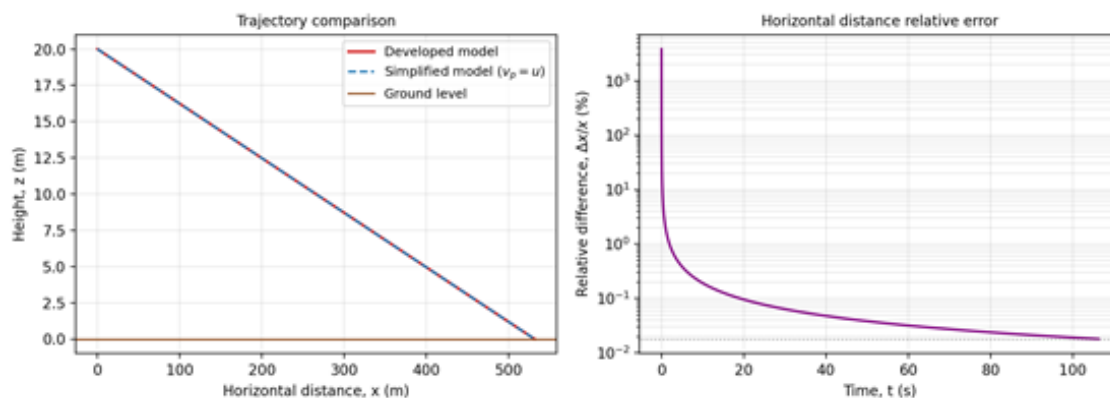


Рис. 6 Сравнение разработанной и упрощённой ($v_p = u$) моделей для крупных частиц ($d = 50$ мкм, $H_0 = 20$ м, $u_x = 5$ м/с). Слева: траектории частиц (различие $\Delta x \leq u_x \tau \approx 0,1$ м не различимо в масштабе графика). Справа: относительная погрешность горизонтальной координаты в зависимости от времени (логарифмическая шкала); пунктиром показан асимптотический уровень $\approx 0,02\%$.

для размещения пылезащитных экранов или систем туманообразования; именно в ближней зоне источника, где сосредоточено осаждение крупных частиц, учёт инерционного запаздывания наиболее важен. Во-вторых, в сфере оценки промышленных выбросов модель импульсных выбросов (уравнения (3) и (5)) хорошо подходит для описания импульсных или прерывистых процессов, таких как взрывные работы в карьерах. В-третьих, модель совместима с уравнениями адвекции–диффузии для прогнозирования поля концентрации, что позволяет использовать в качестве входных данных физически обоснованное поле скоростей частиц. В-четвёртых, тот факт, что время осаждения не зависит от скорости ветра, указывает на то, что время пребывания частиц в атмосфере — а значит, и потенциал переноса на большие расстояния — определяется физическими свойствами частиц, а не силой ветра.

5.2 Ограничения модели

Отметим границы применимости представленной модели. Во-первых, сила сопротивления описывается в стоксовом приближении, справедливом при малых числах Рейнольдса частицы; для крупных частиц ($d = 50$ мкм) при установившемся оседании $Re_p = \rho_a v_t d / \mu_a \approx 0,64$, то есть режим приближается к границе применимости закона Стокса, а для частиц крупнее ~ 60 – 80 мкм потребуются поправка на нелинейное сопротивление (например, корреляция Шиллера–Наумана). Во-вторых, для субмикронных частиц следует учитывать поправку скольжения Каннингема (для $d = 2,5$ мкм она составляет $\approx 7\%$). В-третьих, модель не учитывает турбулентную диффузию и восходящие конвективные потоки, поэтому вывод о независимости времени пребывания от скорости ветра относится к ламинарному оседанию; в реальной турбулентной атмосфере мелкие частицы могут удерживаться во взвешенном состоянии значительно дольше. Учёт этих эффектов планируется при сопряжении модели с уравнением адвекции–диффузии.

6 Заключение

В этом исследовании была предложена математическая модель и численный алгоритм для более точного описания движения и рассеивания пылевых частиц в атмосфере. В отличие от классических упрощённых моделей, предложенный подход позволяет определить собственную скорость отдельной пылевой частицы. Это важно,

поскольку в реальных атмосферных условиях скорость пылевых частиц отличается от скорости окружающего ветра.

Расчёт скорости частиц проводился на основе второго закона Ньютона. Была сформулирована система уравнений, описывающих компоненты скорости частиц в различных направлениях, с одновременным учётом аэродинамического сопротивления (в приближении Стокса), гравитационного оседания и импульсного подъёма частиц в воздух. Процесс подъёма представлен с помощью дельта-функции Дирака с размерностно согласованным коэффициентом, что позволяет последовательно математически описать импульсное высвобождение частиц; в численной реализации импульс учитывается через начальные условия в момент выброса.

Для численного решения сформулированной задачи использовалась комбинированная схема. На первом подшаге каждого временного шага применялась схема Кранка–Николсона, поскольку для метода BDF2 требуются значения решения на двух предыдущих временных слоях. На последующих подшагах использовалась непосредственно схема BDF2. Сочетание этих схем обеспечило второй порядок точности и численную устойчивость на протяжении всего вычислительного процесса; наблюдаемый в вычислительном эксперименте порядок сходимости составил $p \approx 2,00$.

Вычислительные эксперименты выявили несколько важных закономерностей. Мелкие частицы, такие как PM_{2.5}, достигают скорости ветра практически мгновенно. Более крупные частицы демонстрируют инерционное отставание: упрощённая модель $v_p = u$ завышает горизонтальную координату частицы на величину ut (около 0,1 м для частиц 50 мкм при $u = 5$ м/с), причём относительная погрешность максимальна непосредственно после выброса и убывает по мере выравнивания скоростей частицы и потока. Поэтому учёт инерции наиболее важен при моделировании ближней зоны источника и при переменном ветре.

Ещё одно наблюдение, сделанное в ходе численных экспериментов, заключается в том, что время осаждения частиц не зависит от скорости ветра: независимо от силы ветра частицы одинакового размера и плотности достигают земли за одно и то же время, а дальность их переноса пропорциональна скорости ветра. Время пребывания частиц в атмосфере (в рамках ламинарной модели) определяется физико-механическими свойствами частиц.

Если предложенная система уравнений, описывающих движение частиц, будет дополнена уравнениями адвекции–диффузии, то станет возможным рассчитать поле концентрации пылевых частиц. В рамках этой системы можно учитывать не только скорость частиц, но и эффекты диффузии и турбулентности, что позволит отслеживать и прогнозировать концентрацию пылевых частиц, рассеивающихся в атмосфере.

Декларации

Финансирование. Исследование выполнено в соответствии с планами НИР Научно-исследовательского института развития цифровых технологий и искусственного интеллекта.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Вклад авторов. Авторы внесли равный вклад в данную работу. Все авторы прочитали и одобрили итоговый вариант рукописи.

Доступность данных. Данные вычислительных экспериментов доступны у авторов по обоснованному запросу.

Литература

- [1] Загрязнение атмосферного (наружного) воздуха: информационный бюллетень // Всемирная организация здравоохранения. — Женева, 2024. — URL: [https://www.who.int/ru/news-room/fact-sheets/detail/ambient-\(outdoor\)-air-quality-and-health](https://www.who.int/ru/news-room/fact-sheets/detail/ambient-(outdoor)-air-quality-and-health).
- [2] *Seinfeld J. H., Pandis S. N.* Atmospheric chemistry and physics: from air pollution to climate change. — 3rd ed. — Hoboken: Wiley, 2016. — 1152 p.
- [3] *Draxler R. R., Hess G. D.* An overview of the HYSPLIT_4 modelling system for trajectories, dispersion, and deposition // Australian Meteorological Magazine. — 1998. — Vol. 47, № 4. — P. 295–308.
- [4] *Tang Y., Han Y., Liu Q.* Temporal and spatial characteristics of dust devils and their contribution to the aerosol budget in East Asia // Atmospheric Environment. — 2018. — Vol. 182. — P. 225–233.
- [5] *Prospero J. M., Lamb P. J.* African droughts and dust transport to the Caribbean: Climate change implications // Science. — 2003. — Vol. 302, № 5647. — P. 1024–1027.
- [6] *Mikko P., Joris T. K., Arto S., Mikkä D. M.* Exposure and fate of manufactured nanomaterials at local scales // Nanomaterials. — 2022. — Vol. 10, № 7. — P. 354.
- [7] *Afkhami M., Hassanpour A., Fairweather M.* Reynolds number effects on particle-particle interaction and agglomeration in a turbulent channel flow // Powder Technology. — 2019. — Vol. 343. — P. 908–920. — doi: <https://doi.org/10.1016/j.powtec.2018.11.041>.
- [8] *Raffaele L., Bruno L., Sherman D. J.* Statistical characterization of the settling velocity of natural particles // Aeolian Research. — 2020. — doi: <https://doi.org/10.1016/j.aeolia.2020.100593>.
- [9] *Zhang J. [et al.]* Study on particle movement and deposition in a wind tunnel // Procedia Engineering. — 2015. — doi: <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2015.09.050>.
- [10] *Медников Е. П.* Турбулентный перенос и осаждение аэрозолей. — М.: Наука, 1980. — 176 с.
- [11] *Zeng Y., Brunner D., Luo B. [et al.]* Simulation of East Asian dust storm in May 2017 with WRF-Chem v3.9: Comparison of dust emission schemes and dry deposition parameterizations // Geoscientific Model Development. — 2020. — Vol. 13, № 5. — P. 2125–2147.
- [12] *Stockie J. M.* The mathematics of atmospheric dispersion // SIAM Review. — 2011. — Vol. 53, № 2. — P. 349–372.
- [13] *Cai C., Li Q., Li P. [et al.]* Vertical distribution of aerosol and cloud microphysical properties and aerosol-cloud effects on continental cumulus clouds based on aircraft measurements over the Loess Plateau in China // Frontiers in Environmental Science. — 2022. — Vol. 9. — Art. 813081.
- [14] Air Pollution Scientific Initiative: website // APSI Technologies. — 2026. — URL: <https://www.apsi.tech> (дата обращения: 16.07.2026).
- [15] *Шафиев Т., Бобожонова М.* Создание программного инструмента для мониторинга и прогнозирования процесса переноса и распространения вредных веществ в атмосфере // Proceedings of SPIE. — 2024. — Vol. 13217. — Art. 1321711. — doi: <https://doi.org/10.1117/12.3036773>.
- [16] Particulate matter (PM) basics // United States Environmental Protection Agency. — 2025. — URL: <https://www.epa.gov/pm-pollution/particulate-matter-pm-basics>.
- [17] Inhalable particulate matter and health (PM_{2.5} and PM₁₀) // California Air Resources Board. — 2025. — URL: <https://ww2.arb.ca.gov/resources/inhalable-particulate-matter-and-health>.

- [18] *Мурадов Ф., Тахтемурова Н.* Численный алгоритм расчёта плотности вредных веществ в атмосфере // 2021 International Conference on Information Science and Communications Technologies (ICISCT). — Tashkent: IEEE, 2021. — P. 1–3.

UDC 519.6:504.3.054

STUDY OF THE KEY FACTORS AFFECTING THE DISPERSION OF DUST PARTICLES IN THE ATMOSPHERE

^{1*}*Ravshanov N.*, ²*Shafiev T.R.*, ²*Bobozhonova M.A.*, ²*Kobilova D.O.*

*ravshanzade-09@mail.ru

¹Digital technologies and artificial intelligence development research institute,

17A, Buz-2, Tashkent, 100125 Uzbekistan;

²Bukhara State University,

11, Muhammad Iqbal Street, Bukhara, 200117 Uzbekistan

A mathematical model has been developed to provide a more accurate description of atmospheric dust particle transport. Unlike most existing models that assume the particle velocity matches the wind speed, this work considers the case where particles possess inertia and their velocity differs from the flow velocity. The equations of motion are derived from Newton's second law, accounting for the Stokes drag force, ambient air flow, and gravity. A three-stage numerical algorithm based on the second-order backward differentiation formula (BDF2) with an initial Crank–Nicolson startup substep is constructed, ensuring second-order accuracy; the convergence rate observed in computational experiments was approximately two. The motion dynamics of three typical categories of dust particles – $PM_{2.5}$, PM_{10} , and coarse particles ($50\ \mu\text{m}$) – were investigated across various wind speeds and release heights. Relaxation times, terminal settling velocities, horizontal transport ranges, and trajectory inclination angles were determined. The results demonstrate that inertial lag causes particles to lag behind the air flow, with the relative error of the simplified model reaching its maximum immediately after release and decaying as velocities equalize, whereas for $PM_{2.5}$ and PM_{10} particles, this simplification has virtually no effect on the outcome. Practical recommendations are formulated for applying the model to construction dust monitoring, industrial emission forecasting, and urban air quality management.

Keywords: atmospheric dust transport, mathematical modeling, numerical methods, BDF2 algorithm, Stokes drag, particle dynamics

Citation: Ravshanov N., Shafiev T.R., Bobozhonova M.A., Kobilova D.O. 2026. Study of the key factors affecting the dispersion of dust particles in the atmosphere. *Problems of Computational and Applied Mathematics*. 4(74): 47-64.

DOI: 10.71310/pcam.4_74.2026.03

HISOBLASH VA AMALIY MATEMATIKA MUAMMOLARI

ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ
И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
PROBLEMS OF COMPUTATIONAL
AND APPLIED MATHEMATICS

ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

№ 4(74) 2026

Журнал основан в 2015 году.

Издается 6 раз в год.

Учредитель:

Научно-исследовательский институт развития цифровых технологий и
искусственного интеллекта.

Главный редактор:

Равшанов Н.

Заместители главного редактора:

Арипов М.М., Шадиметов Х.М., Ахмедов Д.Д.

Ответственный секретарь:

Убайдуллаев М.Ш.

Редакционный совет:

Азамов А.А., Алоев Р.Д., Амиргалиев Е.Н. (Казахстан), Арушанов М.Л.,
Бурнашев В.Ф., Джумаёзов У.З., Загребина С.А. (Россия), Задорин А.И. (Россия),
Игнатъев Н.А., Ильин В.П. (Россия), Иманкулов Т.С. (Казахстан),
Исмагилов И.И. (Россия), Кабанихин С.И. (Россия), Курбонов Н.М., Маматов Н.С.,
Мирзаев Н.М., Мурадов Ф.А., Назирова Э.Ш., Нормуродов Ч.Б., Нуралиев Ф.М.,
Опанасенко В.Н. (Украина), Расулмухамедов М.М., Садуллаева Ш.А.,
Старовойтов В.В. (Беларусь), Хаётов А.Р., Халджигитов А., Хамдамов Р.Х.,
Хужаев И.К., Хужаеров Б.Х., Эшмаматова Д.Б., Дустмуродова Ш.Ж.,
Чье Ен Ун (Россия), Шабозов М.Ш. (Таджикистан), Dimov I. (Болгария),
Li Y. (США), Mascagni M. (США), Min A. (Германия), Singh M. (Южная Корея).

Журнал зарегистрирован в Агентстве информации и массовых коммуникаций при
Администрации Президента Республики Узбекистан.

Свидетельство №0856 от 5 августа 2015 года.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

При перепечатке материалов ссылка на журнал обязательна.

За точность фактов и достоверность информации ответственность несут авторы.

Адрес редакции:

100125, г. Ташкент, м-в. Буз-2, 17А.

Тел.: +(998) 71 263-41-98.

Э-почта: journals@airi.uz.

Веб-сайт: <https://journals.airi.uz>.

Дизайн и вёрстка:

Шарилов Х.Д.

Отпечатано в типографии НИИ РЦТИИ.

Подписано в печать 25.08.2026 г.

Формат 60x84 1/8. Заказ № 4. Тираж 100 экз.

PROBLEMS OF COMPUTATIONAL AND APPLIED MATHEMATICS

No. 4(74) 2026

The journal was established in 2015.
6 issues are published per year.

Founder:

Digital Technologies and Artificial Intelligence Development Research Institute.

Editor-in-Chief:

Ravshanov N.

Deputy Editors:

Aripov M.M., Shadimetov Kh.M., Akhmedov D.D.

Executive Secretary:

Ubaydullaev M.Sh.

Editorial Council:

Azamov A.A., Aloev R.D., Amirgaliev E.N. (Kazakhstan), Arushanov M.L.,
Burnashev V.F., Djumayozov U.Z., Zagrebina S.A. (Russia), Zadorin A.I. (Russia),
Ignatiev N.A., Ilyin V.P. (Russia), Imankulov T.S. (Kazakhstan), Ismagilov I.I. (Russia),
Kabanikhin S.I. (Russia), Kurbonov N.M., Mamatov N.S., Mirzaev N.M., Muradov F.A.,
Nazirova E.Sh., Normurodov Ch.B., Nuraliev F.M., Opanasenko V.N. (Ukraine),
Sadullaeva Sh.A., Starovoitov V.V. (Belarus), Khayotov A.R., Khaldjigitov A.,
Khamdamov R.Kh., Khujaev I.K., Khujayorov B.Kh., Eshmamatova D.B.,
Dustmurodova Sh.J., Chye En Un (Russia), Shabozov M.Sh. (Tajikistan),
Dimov I. (Bulgaria), Li Y. (USA), Mascagni M. (USA), Min A. (Germany),
Singh M. (South Korea).

The journal is registered by Agency of Information and Mass Communications under the
Administration of the President of the Republic of Uzbekistan.
Certificate of Registration No. 0856 of 5 August 2015.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

At a reprint of materials the reference to the journal is obligatory.
Authors are responsible for the accuracy of the facts and reliability of the information.

Address:

100125, Tashkent, Buz-2, 17A.

Tel.: +(998) 71 263-41-98.

E-mail: journals@airi.uz.

Web-site: <https://journals.airi.uz>.

Layout design:

Sharipov Kh.D.

DTAIRI printing office.

Signed for print 25.08.2026

Format 60x84 1/8. Order No. 4. Print run of 100 copies.

Содержание

Ахмедов Д.Д., Туркменова Р.Т.

Моделирование мезомасштабного переноса мелкодисперсной примеси в атмосфере с учётом стохастических пульсаций ветра 5

Чжан Х., Варламова Л.П., У Б.

Динамический анализ стохастической SICK-модели передачи раннего и позднего фитофтороза картофеля 27

Равшанов Н., Шафиев Т.Р., Бобожонова М.А., Кобилова Д.О.

Исследование ключевых факторов, влияющих на распространение пылевых частиц в атмосфере 47

Бердиёров Ш.Ш., Эрмонова М.У.

Сравнение методов конечных разностей и конечных объёмов для численного моделирования фильтрации в цилиндрическом пористом фильтре 65

Равшанов Н., Садуллаев С.

Моделирование процесса нестационарной фильтрации грунтовых вод со свободной поверхностью с учётом инфильтрационных потоков 85

Туракулов Ж.А., Жураев И.Р., Таштемирова Н.Н., Рахматуллаева Д.О.

Математическое моделирование фильтрации суспензии в пористых средах . 102

Хайтов А.Р., Исмоилов С.И.

Квадратурная формула для оптимального приближения определенных интегралов с полиномиальным весом 110

Нуралиев Ф.А., Едилбекова Р.М.

Оптимальная квадратурная формула в пространстве дифференцируемых функций 120

Эшмаматова Д.Б., Очилова Н.К.

Вырожденно-сингулярные эллиптические операторы: точная коэрцитивность, весовая корректность и методы функции Грина для моделей диффузии в опухолевых тканях 133

Назирова Э.Ш., Мадетбаева Н.Б., Мирзаева Ф.Ш., Исломов М.Б.

Математическая модель автоматического выделения фразеологизмов в тюркских языках 152

Ахмеджанова Д.А.

Модель семантического связывания тюркских языков: подход с ограничением справедливости для малоресурсных условий 171

Contents

<i>Akhmedov D.D., Turkmenova R.T.</i>	
Modeling mesoscale transport of fine particulate matter in the atmosphere accounting for stochastic wind fluctuations	5
<i>Zhang H., Varlamova L.P., Wu B.</i>	
Dynamical analysis of a stochastic SICK transmission model for potato early and late blight	27
<i>Ravshanov N., Shafiev T.R., Bobozhonova M.A., Kobilova D.O.</i>	
Study of the key factors affecting the dispersion of dust particles in the atmosphere	47
<i>Berdiyev Sh.Sh., Ermonova M.U.</i>	
Comparison of finite difference and finite volume methods for numerical simulation of filtration in a cylindrical porous filter	65
<i>Ravshanov N., Sadullaev S.</i>	
Modeling of the process of unsteady filtration of groundwater with a free surface taking into account infiltration flows	85
<i>Turakulov J.A., Juraev I.R., Tashtemirova N.N., Raxmatullayeva D.O.</i>	
Mathematical modeling of suspension filtration in porous media	102
<i>Hayotov A.R., Ismoilov S.I.</i>	
Optimal quadrature for definite integrals with polynomial weight	110
<i>Nuraliev F.A., Edilbekova R.M.</i>	
Optimal quadrature formula in the space of differentiable functions	120
<i>Eshmamatova D.B., Ochilova N.K.</i>	
Degenerate-singular elliptic operators: sharp coercivity, weighted well-posedness, and Green's function methods for tumor-diffusion models	133
<i>Nazirova E.Sh., Madetbayeva N.B., Mirzayeva F.Sh., Islomova M.B.</i>	
A mathematical model for the automatic extraction of idioms in Turkic languages	152
<i>Akhmedjanova D.A.</i>	
A semantic linking model for Turkic languages: a fairness-constrained cross-lingual approach for low-resource settings	171