

УДК 519.6:504.3.054

МОДЕЛИРОВАНИЕ МЕЗОМАСШТАБНОГО ПЕРЕНОСА МЕЛКОДИСПЕРСНОЙ ПРИМЕСИ В АТМОСФЕРЕ С УЧЁТОМ СТОХАСТИЧЕСКИХ ПУЛЬСАЦИЙ ВЕТРА

Ахмедов Д.Д., Туркменова Р.Т.*d.akhmedov@airi.uz*

Научно-исследовательский институт развития цифровых технологий и искусственного интеллекта,

100125, Узбекистан, г. Ташкент, м-в Буз-2, 17А

Рассматривается разработка математической модели для оценки пространственного распределения выброса мелкодисперсной примеси от непрерывного высотного источника. В основу модели положено уравнение адвекции-диффузии, решаемое на пространственной сетке с логарифмическим сгущением узлов у земли. Для численного решения применяется метод расщепления по координатным направлениям и неявная схема. Особое внимание уделено способу параметризации пограничного слоя атмосферы. Для проверки точности и устойчивости предложенного алгоритма проведена серия вычислительных экспериментов для четырех метеорологических сценариев, характерных для города Ташкента. Полученные результаты подтверждают консервативность разностной схемы, а также наглядно отражают локальное влияние шероховатости ландшафта на структуру осаждения частиц загрязняющей примеси и приземные уровни концентрации.

Ключевые слова: атмосферный массоперенос, термодинамическая стратификация, турбулентность, антропогенное загрязнение, метод конечных разностей

Цитирование: Ахмедов Д.Д., Туркменова Р.Т. Моделирование мезомасштабного переноса мелкодисперсной примеси в атмосфере с учётом стохастических пульсаций ветра // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2026. – № 4(74). – С. 5-26.

DOI: 10.71310/psam.4_74.2026.01

1 Введение

Загрязнение атмосферного воздуха мелкодисперсными частицами является одной из наиболее острых экологических проблем в крупных промышленных центрах и городах. Тепловые электростанции, производственные объекты, теплицы и другие антропогенные источники выбрасывают значительные объёмы вредных примесей. Переносясь на десятки километров, эти примеси оказывают негативное влияние на здоровье людей и состояние природных экосистем.

Для того чтобы эффективно отслеживать экологическую обстановку и минимизировать риски, необходимы надёжные инструменты прогнозирования. Математическое моделирование позволяет детально оценить, как распределяются примеси в атмосфере, какова их концентрация у поверхности земли и где именно они оседают с учётом множества влияющих факторов.

В основе большинства современных моделей атмосферного переноса лежат полуэмпирические уравнения адвекции-диффузии. На фоне прогресса в области вычислительной техники такие модели получили значительное развитие, однако ряд важных вопросов всё ещё остаётся открытым. Главные трудности связаны с тем, что турбулентная структура пограничного слоя атмосферы крайне изменчива и подвержена

влиянию большого количества факторов. Кроме того, турбулентность воздушных потоков по своей природе стохастична. Ветер постоянно испытывает хаотические пульсации, и эти пульсации играют ключевую роль в рассеивании примесей. Чтобы получить реалистичную картину загрязнения, необходимо сочетать детерминированные и стохастические подходы.

В последние годы интерес к чисто стохастическим и гибридным методам моделирования атмосферного массопереноса заметно вырос. Теоретическую базу таких методов активно развивают многие исследователи.

Например, в работе В. N. Bailey [1] подробно разбираются численные аспекты стохастических моделей распространения примесей. Автор обращает особое внимание на проблему так называемых «блуждающих траекторий» частиц и подчёркивает, что для корректного описания поведения примеси в турбулентном потоке необходима высокая точность вычислений.

Важный вклад в понимание роли стохастических параметров внесли исследования I. Chen [2]. Авторами статьи сравнивались разные способы внесения случайных возмущений в расчёты атмосферных процессов — влияние на турбулентность и на микрофизику среды. Выяснилось, что решающую роль в рассеивании играет сама динамика воздушного потока, а не конкретный математический механизм добавления случайности. Это доказало, что эмпирические вероятностные методы отлично подходят для построения ансамблевых прогнозов погоды и качества воздуха.

Базовые аспекты стохастического описания турбулентности опираются на труды S. Du. В его статье [3] исследовалась универсальность распределения скоростей (лагранжевых структурных функций) для различных типов турбулентности. Эти данные имеют ключевое значение для корректного замыкания сложных систем уравнений в современных моделях.

Интересный альтернативный подход предложил К. А. Krishnaprasad [4], описавший концепцию моделирования с использованием избыточного количества случайно сгенерированных виртуальных частиц-трассеров. Этот метод позволяет за один вычислительный цикл оценить статистическую вероятность всех возможных сценариев распространения облака выброса, строго учитывая неопределённости, вызванные непредсказуемыми порывами ветра.

В целом, чтобы компенсировать недостатки классических подходов, современные исследователи всё чаще комбинируют стандартные уравнения переноса с алгоритмами машинного обучения [5] или интегрируют в них модули стохастических флуктуаций [6]. В частности, проблему моделирования случайных пульсаций ветра успешно решали N. D. Kelley и соавторы [7], которые разработали методы генерации пространственно коррелированных полей скорости. Применение таких алгоритмов позволяет виртуально воссоздавать реалистичные когерентные вихревые потоки.

Тем не менее, когда речь заходит о строгом соблюдении закона сохранения массы, наиболее надёжным инструментом остаются численные эйлеровы модели, построенные на базе консервативных разностных схем. Их главный минус заключается в том, что в традиционном виде они оперируют лишь усреднённым профилем скорости ветра и «не замечают» локальных турбулентных вихрей. Из-за этого возникает острая потребность в разработке таких алгоритмов, которые сочетали бы в себе строгую математическую консервативность и физическую реалистичность.

Анализ научной литературы показывает устойчивый тренд на активное внедрение стохастических методов в модели атмосферного массопереноса. В данном исследовании поддерживается этот тренд и предлагается усовершенствованный эйлеров под-

ход с явным моделированием стохастических пульсаций ветра через пространственно коррелированные случайные поля. Это позволяет детально описывать турбулентную структуру пограничного слоя, сохраняя при этом вычислительную эффективность.

Целью данного исследования является разработка трёхмерной математической модели процесса переноса мелкодисперсной примеси в условиях суточного изменения термодинамической стратификации пограничного слоя атмосферы с учётом стохастических пульсаций ветра, гравитационного осаждения и влажного вымывания частиц примеси, а также влияния характеристик подстилающей поверхности.

2 Постановка задачи

Основу математической модели исследуемого процесса атмосферного массопереноса составляет полуэмпирическое уравнение адвекции-диффузии, записанное в консервативной дивергентной форме с учётом процессов гравитационного оседания и влажного вымывания частиц примеси:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial(uC)}{\partial x} + \frac{\partial(vC)}{\partial y} + \frac{\partial(-w_g C)}{\partial z} + R_{\text{wet}} C = \\ = \frac{\partial}{\partial x} \left(K_x \frac{\partial C}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_y \frac{\partial C}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial C}{\partial z} \right) + S. \end{aligned} \quad (1)$$

Полагаем, что в начальный момент времени антропогенное загрязнение в расчётной области отсутствует, что соответствует нулевому начальному условию:

$$C(x, y, z)|_{t=0} = 0, \quad \forall (x, y, z) \in \Omega. \quad (2)$$

Граничные условия для уравнения (1) сформулированы исходя из предположения об открытых границах на боковых гранях, закрытой верхней границе и условия поглощения на подстилающей поверхности.

Для боковых границ по оси Ox условия определяются направлением вектора составляющей скорости ветра u :

$$\begin{cases} C|_{x=0} = 0, & u \geq 0, \\ \left. \frac{\partial C}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, & u < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} C|_{x=L_x} = 0, & u < 0, \\ \left. \frac{\partial C}{\partial x} \right|_{x=L_x} = 0, & u \geq 0. \end{cases} \quad (3)$$

Аналогичным образом устанавливаются условия для боковых границ по оси Oy в зависимости от знака составляющей скорости ветра v :

$$\begin{cases} C|_{y=0} = 0, & v \geq 0, \\ \left. \frac{\partial C}{\partial y} \right|_{y=0} = 0, & v < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} C|_{y=L_y} = 0, & v < 0, \\ \left. \frac{\partial C}{\partial y} \right|_{y=L_y} = 0, & v \geq 0. \end{cases} \quad (4)$$

Форма записи (3)–(4) физически означает, что на границах втекания в расчётную область поступает чистый воздух, а на границах вытекания примесь свободно покидает область за счёт адвективного переноса при нулевом диффузионном градиенте.

На верхней границе области $z = L_z$ задаётся условие отсутствия полного потока массы — закрытая граница. На нижней границе $z = z_0$ задаётся условие третьего рода, в котором левая часть описывает полный вертикальный поток примеси к земле,

а правая часть характеризует интенсивность её поглощения подстилающей поверхностью:

$$\left(K_z \frac{\partial C}{\partial z} + w_g C \right) \Big|_{z=L_z} = 0, \quad \left(K_z \frac{\partial C}{\partial z} + w_g C \right) \Big|_{z=z_0} = R_{\text{dry}} C. \quad (5)$$

Следует уточнить, что процесс поглощения R_{dry} выражается через механизм скорости сухого осаждения частиц примеси в данной точке (x, y) , обеспечивающий уменьшение концентрации в приземной ячейке на каждом шаге и имитирующий «прилипание» частиц к поверхности. Причём подстилающая поверхность действует исключительно как адсорбент, то есть накопления массы на поверхности не происходит. Соответственно, и реэмиссия частиц с поверхности также отсутствует.

Источник загрязнения полагается точечным и непрерывно действующим. Функция источника $S(x, y, z, t)$ в уравнении (1) описывает поступление массы примеси в расчётную область и задаётся следующим образом:

$$S(x, y, z, t) = Q \delta(x - x_s) \delta(y - y_s) \delta(z - h_e). \quad (6)$$

В уравнениях (1)–(6) приняты следующие условные обозначения: Ω — область решения задачи; x, y, z — координаты; L_x, L_y, L_z — размеры расчётной области (м); t — время (с) в интервале $[0, T]$; $C(x, y, z, t)$ — концентрация мелкодисперсной примеси PM_{10} ($\text{кг}/\text{м}^3$); u, v — горизонтальные компоненты скорости ветра (м/с); w_g — скорость гравитационного осаждения частиц (м/с); K_x, K_y, K_z — коэффициенты турбулентной диффузии ($\text{м}^2/\text{с}$); R_{wet} — коэффициент влажного вымывания (с^{-1}); $R_{\text{dry}}(x, y)$ — скорость сухого осаждения на поверхность (м/с); $S(x, y, z, t)$ — источник выброса загрязняющей примеси ($\text{кг}/(\text{м}^3 \cdot \text{с})$); (x_s, y_s) — плановые координаты устья источника (трубы); h_e — эффективная высота выброса, учитывающая начальный термодинамический подъём факела (м); $Q = C_s A v_p \cdot 10^{-6}$ — массовый расход выброса, или мощность источника ($\text{кг}/\text{с}$), где C_s — концентрация примеси на выходе из трубы ТЭС ($\text{мг}/\text{м}^3$), $A = \pi D^2/4$ — площадь устья трубы (м^2), v_p — скорость выброса газовой смеси (м/с), множитель 10^{-6} используется для перевода размерности в $\text{кг}/\text{с}$; δ — дельта-функция Дирака, нормированная так, что $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$.

Для расчёта эффективной высоты выброса h_e используется полуэмпирическая формула Бриггса, зависящая от параметра плавучести [8]:

$$h_e = h_s + \Delta h, \quad \Delta h = \frac{c_1 F^\gamma}{u_s},$$

где h_s — высота дымовой трубы (м); Δh — высота подъёма шлейфа выброса над устьем трубы (м); u_s — скорость ветра на высоте среза трубы (м/с), рассчитываемая через вертикальный профиль ветра с учётом высоты трубы; c_1, γ — эмпирические коэффициенты, зависящие от величины потока плавучести: при маломощном источнике $c_1 = 21,42$ и $\gamma = 0,75$, а при мощном источнике, таком как ТЭС, — $c_1 = 38,71$ и $\gamma = 0,60$; F — параметр плавучести ($\text{м}^4/\text{с}^3$), рассчитываемый как [8]

$$F = \frac{g v_p D^2 (T_p - T_a)}{4 T_p},$$

где g — ускорение свободного падения ($9,81 \text{ м}/\text{с}^2$); v_p — выходная скорость потока выброса (м/с); D — внутренний диаметр устья трубы (м); T_p — абсолютная температура выброса газовой смеси (К); T_a — абсолютная температура окружающего атмосферного воздуха (К).

Скорость гравитационного осаждения частиц w_g рассчитывается по закону Стокса с учётом поправки Каннингема, что критически важно для мелкодисперсных примесей:

$$w_g = \frac{2}{9} \frac{\langle r^2 \rangle g (\langle \rho_p \rangle - \rho_a) \theta_c}{\mu_a}, \quad (7)$$

где g — ускорение свободного падения; $\langle r^2 \rangle$ — средний квадрат радиуса частиц примеси (м^2); $\langle \rho_p \rangle$ — средняя плотность частиц ($\text{кг}/\text{м}^3$); ρ_a — плотность атмосферного воздуха ($\text{кг}/\text{м}^3$); μ_a — динамическая вязкость воздуха ($\text{Па}\cdot\text{с}$); θ_c — коэффициент Каннингема, который вычисляется как функция от средней длины свободного пробега молекул воздуха [9]:

$$\theta_c = 1 + \frac{\langle l_a \rangle}{r} \left(A_1 + A_2 \exp \left(-A_3 \frac{r}{\langle l_a \rangle} \right) \right),$$

где $\langle l_a \rangle$ — средняя длина свободного пробега молекул воздуха, которая при температуре 20°C составляет порядка $0,066 \cdot 10^{-6}$ м; r — радиус частиц (м); A_1, A_2, A_3 — эмпирические константы, равные $A_1 = 1,257, A_2 = 0,4, A_3 = 1,1$.

3 Параметризация пограничного слоя атмосферы

Термодинамическое состояние пограничного слоя атмосферы (ПСА) описывается параметром длины Монины–Обухова $L_{\text{мо}}$ (м), который рассчитывается динамически в зависимости от времени суток и солнечной инсоляции [10]:

$$L_{\text{мо}} = -\frac{u_*^3 T}{kgw'T'},$$

где u_* — динамическая скорость трения ($\text{м}/\text{с}$); $k \approx 0,4$ — постоянная Кармана; T — температура приземного слоя (К); $\overline{w'T'}$ — суточный цикл кинематического потока тепла ($\text{К}\cdot\text{м}/\text{с}$), который при $\overline{w'T'} > 0$ соответствует дневной конвективной неустойчивости ($L_{\text{мо}} < 0$), а при $\overline{w'T'} \leq 0$ — ночной устойчивой стратификации ($L_{\text{мо}} > 0$).

Поле скорости ветра имеет детерминированную и стохастическую составляющие. Вектор скорости ветра $\mathbf{U}$ представляется в виде суперпозиции осреднённого профиля и пространственно коррелированных флуктуаций:

$$\mathbf{U}(x, y, z) = \bar{\mathbf{U}}(z) + \mathbf{U}'(x, y, z). \quad (8)$$

Осреднённый профиль модуля скорости ветра $|\bar{\mathbf{U}}(z)|$ здесь учитывает стратификацию атмосферы [10]:

$$|\bar{\mathbf{U}}(z)| = \frac{u_*}{k} \left(\ln \frac{z}{z_0} - \Psi_m \left(\frac{z}{L} \right) + \Psi_m \left(\frac{z_0}{L} \right) \right), \quad (9)$$

где z_0 — параметр шероховатости подстилающей поверхности (м); Ψ_m — интегральные универсальные функции устойчивости (функции Бюзингера–Дайера) [11, 12].

Помимо того, что с высотой возрастает скорость ветра, также усиливается влияние силы Кориолиса, которая в северном полушарии загибает ветер вправо, пока он не совпадёт с геострофическим. Для описания поворота вектора скорости ветра с высотой под действием силы Кориолиса (аппроксимация спирали Экмана) вводится поправка к направлению потока [13]:

$$\psi(z) = \psi_0 + \alpha_{\text{max}} \left(1 - \exp \left(-2 \frac{z}{H_a} \right) \right),$$

где ψ_0 — направление приземного ветра; $\alpha_{\max}$ — максимальный угол поворота геострофического ветра относительно приземного (принят равным 25°); H_a — высота пограничного слоя.

Проекции вектора скорости на горизонтальные оси x и y с учётом турбулентных флуктуаций u' и v' определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} u &= |\bar{\mathbf{U}}(z)| \sin(\psi(z)) + u', \\ v &= |\bar{\mathbf{U}}(z)| \cos(\psi(z)) + v'. \end{aligned} \quad (10)$$

Флуктуационная составляющая скорости $\mathbf{U}'(\mathbf{x})$, где $\mathbf{x} = (x, y, z)$, моделируется как случайное поле с заданным пространственным масштабом корреляции. Для этого генерируется поле белого шума с нулевым средним и единичной дисперсией $\eta(\boldsymbol{\xi}) \sim \mathcal{N}(0, 1)$, где $\boldsymbol{\xi} = (\xi_x, \xi_y, \xi_z)$, к которому применяется трёхмерный гауссов фильтр с вектором масштабов $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$, задаваемый оператором свёртки

$$\tilde{\mathbf{U}}'(\mathbf{x}) = (G * \eta)(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}; \boldsymbol{\sigma}) \eta(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi}. \quad (11)$$

Ядро свёртки имеет вид многомерного нормального распределения

$$G(\mathbf{r}; \boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} \sigma_x \sigma_y \sigma_z} \exp\left(-\frac{r_x^2}{2\sigma_x^2} - \frac{r_y^2}{2\sigma_y^2} - \frac{r_z^2}{2\sigma_z^2}\right), \quad \mathbf{r} = \mathbf{x} - \boldsymbol{\xi},$$

и нормировано так, что $\int_{\mathbb{R}^3} G(\mathbf{r}; \boldsymbol{\sigma}) d\mathbf{r} = 1$.

Финальное поле пульсаций получается путём перенормировки сглаженного поля $\tilde{\mathbf{U}}'(\mathbf{x})$ для соответствия заданной интенсивности турбулентности $\alpha \approx 0,2$ и масштабу скорости трения u_* :

$$\mathbf{U}'(\mathbf{x}) = \alpha \cdot u_* \cdot \frac{\tilde{\mathbf{U}}'(\mathbf{x})}{\sqrt{\langle (\tilde{\mathbf{U}}')^2 \rangle}}, \quad (12)$$

где $\langle (\tilde{\mathbf{U}}')^2 \rangle$ — пространственная дисперсия отфильтрованного поля.

Такой подход позволяет воспроизвести когерентные вихревые структуры, характерные для реальной атмосферы.

Для учёта пространственной неоднородности применяется дискретная карта типов подстилающей поверхности. Классификация включает пять основных категорий, для каждой из которых установлены значения параметра шероховатости z_0 и скорости сухого осаждения R_{dry} (таб. 1).

Таблица 1 Классификация подстилающей поверхности.

Индекс на карте	Тип поверхности	z_0 (м)	R_{dry} (м/с)
0,0	Водная поверхность	0,0002	0,0010
0,2	Травяной покров	0,0500	0,0060
0,5	Пустыня / степь	0,0300	0,0090
0,8	Лесной массив	1,0000	0,0298
1,0	Городская застройка	0,5000	0,0050

Во избежание численных разрывов на границах разнородных типов поверхностей (например, «суша — вода») к полю параметров шероховатости $z_0(x, y)$ применяется процедура пространственного сглаживания с использованием двумерного фильтра Гаусса. Это обеспечивает плавность перехода профилей ветра и коэффициентов диффузии, что критически важно для сохранения устойчивости численной схемы.

Для замыкания турбулентных потоков используется параметризация С. Ханна [14], учитывающая различные режимы генерации турбулентности. В условиях дневной конвективной неустойчивости при $L_{mo} < 0$ профиль вертикальной диффузии K_z формируется как среднеквадратичная сумма конвективного K_{zk} и механического K_{zm} вкладов:

$$\begin{aligned} K_{zk} &= 0,1 \cdot w_* H_a \left(\frac{z}{H_a} \right)^{1/3} \left(1 - \frac{z}{H_a} \right); \\ K_{zm} &= 0,4 \cdot u_* z \left(1 - \frac{z}{H_a} \right); \\ K_z(z) &= \sqrt{K_{zk}^2 + K_{zm}^2}, \quad z < H_a. \end{aligned} \quad (13)$$

В условиях ночной устойчивой стратификации при $L_{mo} > 0$ турбулентность имеет исключительно механическую природу и экспоненциально затухает с высотой, ограничиваясь приземной инверсией:

$$K_z(z) = 0,4 \cdot u_* \cdot z \cdot e^{-2z/H_a}. \quad (14)$$

Расчёт конвективной скорости производится по формуле А. Дирдорфа [15]:

$$w_* = \left(\frac{g}{T} \cdot \overline{w'T'} \cdot H_a \right)^{1/3}.$$

Горизонтальная диффузия $K_x = K_y = K_h$ полагается изотропной и пропорциональной дисперсии пульсаций горизонтальной скорости σ_v :

$$K_h \approx \sigma_v^2 \cdot T_L, \quad (15)$$

где $\sigma_v = \sqrt{u_*^2 + 0,6 w_*^2}$; T_L — лагранжев временной масштаб, составляющий 100 секунд, что является временем жизни наиболее энергонесущих вихрей в приземном слое.

Коэффициент вымывания R_{wet} рассчитывается на основе интенсивности осадков R (мм/ч) по эмпирической степенной зависимости [16, 17]:

$$R_{wet} = \begin{cases} A \cdot R^B, & R > 0; \\ 0, & R = 0. \end{cases} \quad (16)$$

Здесь $A = 1 \cdot 10^{-4}$ — эмпирический коэффициент, зависящий от размеров частиц и типа осадков; $B = 0,8$ — эмпирический показатель степени.

Влажное вымывание применяется на этапе вертикального переноса как процесс первого порядка, действующий на весь столб атмосферы в расчётной области.

4 Численный алгоритм решения задачи

Так как получить решение задачи (1)–(5) в аналитическом виде практически не представляется возможным, предлагается обратиться к поиску приближённого численного решения. Для этого применяется метод конечных разностей на структурированной сетке. С целью оптимизации вычислительных ресурсов исходная многомерная задача редуцируется до последовательности одномерных задач с использованием метода расщепления по физическим процессам и координатным направлениям [18].

В первую очередь осуществляется пространственно-временная дискретизация путём покрытия области непрерывного изменения функций $\Omega = [0, L_x] \times [0, L_y] \times [0, L_z]$ сеточной областью

$$\Omega_h = \{(x_i, y_j, z_k) \mid i = \overline{0, N_x - 1}, j = \overline{0, N_y - 1}, k = \overline{0, N_z - 1}\}.$$

Пространственные шаги по горизонтали постоянны: $\Delta x = L_x/(N_x - 1)$, $\Delta y = L_y/(N_y - 1)$. Шаг по вертикали Δz_k является переменным. Для разрешения больших градиентов концентрации в приземном слое используется логарифмическое распределение узлов, задаваемое отображением

$$z_k = L_z \frac{e^{\varkappa \xi_k} - 1}{e^{\varkappa} - 1}, \quad \xi_k = \frac{k}{N_z - 1}, \quad (17)$$

где $\varkappa$ — коэффициент сгущения сетки, обычно принимающий значения от 3,0 до 5,0. Чем больше $\varkappa$, тем сильнее узлы прижимаются к земле.

Временной интервал $[0, T]$ разбивается на шаги Δt_n , величина которых выбирается адаптивно на каждой итерации исходя из условия Куранта–Фридрихса–Леви для адвекции и гравитационного оседания:

$$\Delta t_n \leqslant CN \cdot \min \left(\frac{\Delta x}{\max |u|}, \frac{\Delta y}{\max |v|}, \frac{\min(\Delta z_k)}{w_g} \right), \quad (18)$$

где CN — коэффициент запаса устойчивости, равный 0,45 и подобранный экспериментально.

Для подавления численной неустойчивости (эффекта Гиббса), возникающей из-за высоких градиентов в точке выброса, аппроксимация непрерывного источника $S(x, y, z, t)$ реализуется на отдельном явном подшаге перед этапами координатного расщепления. Масса выброса распределяется с использованием двумерного гауссова ядра на шаблон из 3×3 ячеек вокруг центра эмиссии, обновляя поле концентрации следующим образом:

$$C_{i_s+p, j_s+q, k_s}^* = C_{i_s+p, j_s+q, k_s}^n + \frac{Q \Delta t_n}{\Delta x \Delta y \Delta z_{k_s}} W_{p,q}, \quad p, q \in \{-1, 0, 1\}, \quad (19)$$

где C^* — промежуточное значение концентрации после срабатывания источника; Δz_{k_s} — локальная высота ячейки, в которой находится эффективная высота выброса h_e ; $W_{p,q}$ — матрица весовых коэффициентов гауссова фильтра:

$$W_{p,q} = \frac{1}{W_\Sigma} \exp \left(-\frac{(p\Delta x)^2}{2\sigma_x^2} - \frac{(q\Delta y)^2}{2\sigma_y^2} \right).$$

Здесь $\sigma_x = 0,5\Delta x$ и $\sigma_y = 0,5\Delta y$ — параметры ширины гауссова фильтра, обеспечивающие затухание распределения в пределах соседних ячеек. Величина W_Σ является нормировочной константой, равной сумме всех девяти ненормированных весов, что математически гарантирует строгое соблюдение локального закона сохранения массы: в расчётную область поступает ровно $Q \Delta t_n$ килограммов примеси. По вертикали источник строго локализуется в одном слое k_s .

Для исключения численных осцилляций и «шоков» в поле концентрации применяется итерационная релаксация коэффициентов турбулентной диффузии K_h и K_z —

процедура временной фильтрации, обеспечивающая численную устойчивость и физическую преемственность турбулентных полей при динамическом обновлении метеорологических параметров пограничного слоя:

$$K_{h,z}^n = (1 - \alpha)K_{h,z}^{n-1} + \alpha\tilde{K}_{h,z}^n, \quad (20)$$

где $K_{h,z}^n$ — скорректированное значение коэффициента диффузии на текущем временном шаге; $K_{h,z}^{n-1}$ — значение, использованное на предыдущем шаге; $\tilde{K}_{h,z}^n$ — «мгновенное» значение коэффициента, рассчитанное по схеме С. Ханна для текущего состояния атмосферы (u_* , w_* , L_{mo} , H_a). Безразмерный коэффициент релаксации $\alpha \in (0, 1]$ в начале счёта принимается $\alpha = 1,0$ для немедленного формирования начального расчётного поля. На всех последующих итерациях используется значение $\alpha = 0,3$. Физически это означает, что турбулентное поле на 70 % сохраняет инерцию предыдущего состояния и на 30 % адаптируется к новым метеорологическим условиям. Подобный баланс эффективно демпфирует высокочастотные флуктуации и обеспечивает необходимую гладкость численного решения.

Включение итерационной релаксации аргументируется рядом положений. Как было сказано выше, реальные вихревые структуры в ПСА обладают временем жизни и не перестраиваются мгновенно при изменении потока тепла или скорости ветра. Релаксация позволяет имитировать эту задержку. При переходе от ночной устойчивости к дневной конвекции значения K_z могут изменяться на порядки. Релаксация сглаживает этот переход, предотвращая возникновение нефизичных градиентов концентрации. Наконец, поскольку поле ветра содержит флуктуационную компоненту, дискретное обновление которой влияет на интенсивность перемешивания, релаксация коэффициентов турбулентной диффузии выступает дополнительным демпфером.

Переход от временного слоя t_n к t_{n+1} осуществляется через последовательность операторов, действующих на поле концентрации, а именно: явное добавление массы выброса в ячейку источника; неявный перенос вдоль оси Ox (адвекция, диффузия); неявный перенос вдоль оси Oy (адвекция, диффузия); неявный консервативный перенос по вертикали Oz (диффузия, осаждение, поглощение).

4.1 Перенос вдоль горизонтальных осей

При переносе вдоль оси Ox для каждого фиксированного j и k ($j = \overline{0, N_y - 1}$; $k = \overline{0, N_z - 1}$) решается неявная схема относительно неизвестных значений $C_{i,j,k}^{n+1/3}$:

$$\begin{aligned} \frac{C_{i,j,k}^{n+1/3} - C_{i,j,k}^n}{\Delta t} + \left[\frac{u_R^+ C_{i,j,k} + u_R^- C_{i+1,j,k}}{\Delta x} - \frac{u_L^+ C_{i-1,j,k} + u_L^- C_{i,j,k}}{\Delta x} \right]^{n+1/3} = \\ = \left[K_{h,i,j,k} \frac{C_{i+1,j,k} - 2C_{i,j,k} + C_{i-1,j,k}}{\Delta x^2} \right]^{n+1/3}. \end{aligned} \quad (21)$$

Здесь адвективные потоки на гранях ячеек аппроксимируются строго консервативной схемой «против потока» первого порядка. Скорости на правой и левой гранях ячейки определяются как $u_R = 0,5(u_{i,j,k} + u_{i+1,j,k})$ и $u_L = 0,5(u_{i-1,j,k} + u_{i,j,k})$, а положительная и отрицательная части проекции скорости — как $u^+ = \max(u_{i,j,k}, 0)$ и $u^- = \min(u_{i,j,k}, 0)$. При положительной скорости ветра ($u > 0$) используется левосторонняя разность — информация переносится от узла $i - 1$ к i . При отрицательной скорости ветра ($u < 0$) используется правосторонняя разность — информация переносится от узла $i + 1$ к i .

Уравнение (21) приводится к системе линейных уравнений с трёхдиагональной матрицей

$$a_i C_{i-1,j,k}^{n+1/3} + b_i C_{i,j,k}^{n+1/3} + c_i C_{i+1,j,k}^{n+1/3} = d_i,$$

где коэффициенты для внутренних узлов $i = \overline{1, N_x - 2}$ определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} a_i &= -\frac{K_{hi,j,k} \Delta t}{\Delta x^2} - u_L^+ \frac{\Delta t}{\Delta x}; & b_i &= 1 + 2 \frac{K_{hi,j,k} \Delta t}{\Delta x^2} + (u_R^+ - u_L^-) \frac{\Delta t}{\Delta x}; \\ c_i &= -\frac{K_{hi,j,k} \Delta t}{\Delta x^2} + u_R^- \frac{\Delta t}{\Delta x}; & d_i &= C_{i,j,k}^n. \end{aligned}$$

На боковых границах области аппроксимация открытых граничных условий (3) реализуется путём вычисления односторонних скоростей на внешних гранях, что позволяет автоматически и корректно обрабатывать приток чистой воздушной массы и свободный выход загрязняющей примеси.

Запись уравнения для левой границы при $i = 0$ имеет вид

$$b_0 C_{0,j,k}^{n+1/3} + c_0 C_{1,j,k}^{n+1/3} = d_0,$$

где скорости на гранях равны $u_{R0} = 0,5(u_{0,j,k} + u_{1,j,k})$ и $u_{L0} = u_{0,j,k}$, а коэффициенты задаются так:

$$b_0 = 1 + \frac{K_{h0,j,k} \Delta t}{\Delta x^2} + (u_{R0}^+ - u_{L0}^-) \frac{\Delta t}{\Delta x}; \quad c_0 = -\frac{K_{h0,j,k} \Delta t}{\Delta x^2} + u_{R0}^- \frac{\Delta t}{\Delta x}; \quad d_0 = 0.$$

Запись уравнения для правой границы при $i = N_x - 1$ имеет вид

$$a_{N_x-1} C_{N_x-2,j,k}^{n+1/3} + b_{N_x-1} C_{N_x-1,j,k}^{n+1/3} = d_{N_x-1},$$

где скорости равны $u_{RN} = u_{N_x-1,j,k}$ и $u_{LN} = 0,5(u_{N_x-2,j,k} + u_{N_x-1,j,k})$, а коэффициенты принимают значения

$$\begin{aligned} a_{N_x-1} &= -\frac{K_{hN_x-1,j,k} \Delta t}{\Delta x^2} - u_{LN}^+ \frac{\Delta t}{\Delta x}; & d_{N_x-1} &= 0; \\ b_{N_x-1} &= 1 + \frac{K_{hN_x-1,j,k} \Delta t}{\Delta x^2} + (u_{RN}^+ - u_{LN}^-) \frac{\Delta t}{\Delta x}. \end{aligned}$$

При переносе вдоль оси Oy для каждого фиксированного i и k ($i = \overline{0, N_x - 1}$; $k = \overline{0, N_z - 1}$) решается неявная схема относительно неизвестных $C_{i,j,k}^{n+2/3}$:

$$\begin{aligned} \frac{C_{i,j,k}^{n+2/3} - C_{i,j,k}^{n+1/3}}{\Delta t} + \left[\frac{v_R^+ C_{i,j,k} + v_R^- C_{i,j+1,k}}{\Delta y} - \frac{v_L^+ C_{i,j-1,k} + v_L^- C_{i,j,k}}{\Delta y} \right]^{n+2/3} &= \\ = \left[K_{hi,j,k} \frac{C_{i,j+1,k} - 2C_{i,j,k} + C_{i,j-1,k}}{\Delta y^2} \right]^{n+2/3}. \end{aligned} \quad (22)$$

Здесь адвективные потоки и скорости на гранях ячеек v_R и v_L аппроксимируются абсолютно аналогично оси Ox : скорости на правой и левой гранях определяются соответственно как $v_R = 0,5(v_{i,j,k} + v_{i,j+1,k})$ и $v_L = 0,5(v_{i,j-1,k} + v_{i,j,k})$, а положительная и отрицательная части проекции скорости — как $v^+ = \max(v_{i,j,k}, 0)$ и $v^- = \min(v_{i,j,k}, 0)$.

После перегруппировки слагаемых уравнение (22) приводится к системе линейных уравнений

$$a_j C_{i,j-1,k}^{n+2/3} + b_j C_{i,j,k}^{n+2/3} + c_j C_{i,j+1,k}^{n+2/3} = d_j,$$

где коэффициенты для внутренних узлов $j = \overline{1, N_y - 2}$ определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} a_j &= -\frac{K_{hi,j,k} \Delta t}{\Delta y^2} - v_L^+ \frac{\Delta t}{\Delta y}; & b_j &= 1 + 2 \frac{K_{hi,j,k} \Delta t}{\Delta y^2} + (v_R^+ - v_L^-) \frac{\Delta t}{\Delta y}; \\ c_j &= -\frac{K_{hi,j,k} \Delta t}{\Delta y^2} + v_R^- \frac{\Delta t}{\Delta y}; & d_j &= C_{i,j,k}^{n+1/3}. \end{aligned}$$

При аппроксимации граничных условий (4) для прогонки по оси Oy при $j = 0$ и $j = N_y - 1$ коэффициенты задаются аналогично прогонке по оси Ox , с использованием значений компоненты скорости v на гранях ячеек.

4.2 Перенос вдоль вертикальной оси

На заключительном этапе расщепления осуществляется интегрирование уравнения переноса по вертикальной оси Oz . Учитывая логарифмическое сгущение вертикальной сетки у поверхности и наличие направленного потока гравитационного осаждения, для аппроксимации используется интегро-интерполяционный метод конечного объёма. Это обеспечивает строгое выполнение закона сохранения массы в расчётной ячейке.

Таким образом, для каждого фиксированного набора индексов $i = \overline{0, N_x - 1}$, $j = \overline{0, N_y - 1}$ решается уравнение баланса в контрольном объёме ΔV_k относительно $C_{i,j,k}^{n+1}$.

Сначала введём геометрические параметры для узла с индексом k ($k = \overline{0, N_z - 1}$). Расстояния между центрами ячеек сетки равны разностям $z_k - z_{k-1}$ и $z_{k+1} - z_k$. Высота контрольного объёма определяется как расстояние между гранями ячейки:

$$\Delta V_k = \begin{cases} 0,5(z_1 - z_0), & k = 0; \\ 0,5(z_{k+1} - z_{k-1}), & 1 \leq k \leq N_z - 2; \\ 0,5(z_{N_z-1} - z_{N_z-2}), & k = N_z - 1. \end{cases}$$

Разностное уравнение баланса для внутренних узлов $k = \overline{1, N_z - 2}$ записывается с учётом гармонического усреднения коэффициента диффузии на гранях и неявной схемы «против потока» для аппроксимации скорости оседания частиц, которая направлена сверху вниз:

$$\begin{aligned} \Delta V_k \frac{C_{i,j,k}^{n+1} - \left(C_{i,j,k}^{n+2/3} \exp(-R_{\text{wet}} \Delta t) \right)}{\Delta t} = & \\ = \left[\left(\frac{2K_{zi,j,k} K_{zi,j,k+1}}{K_{zi,j,k} + K_{zi,j,k+1}} \right) \frac{C_{i,j,k+1}^{n+1} - C_{i,j,k}^{n+1}}{z_{k+1} - z_k} + w_g C_{i,j,k+1}^{n+1} \right] - & \quad (23) \\ - \left[\left(\frac{2K_{zi,j,k-1} K_{zi,j,k}}{K_{zi,j,k-1} + K_{zi,j,k}} \right) \frac{C_{i,j,k}^{n+1} - C_{i,j,k-1}^{n+1}}{z_k - z_{k-1}} + w_g C_{i,j,k}^{n+1} \right]. & \end{aligned}$$

Группируя слагаемые относительно искомым значений C^{n+1} , получаем систему линейных алгебраических уравнений с трёхдиагональной матрицей

$$a_k C_{i,j,k-1}^{n+1} + b_k C_{i,j,k}^{n+1} + c_k C_{i,j,k+1}^{n+1} = d_k,$$

где коэффициенты для внутренних узлов $k = \overline{1, N_z - 2}$ определяются как

$$\begin{aligned} a_k &= -\frac{\Delta t}{\Delta V_k} \left(\frac{1}{z_k - z_{k-1}} \frac{2K_{zk}K_{zk-1}}{K_{zk} + K_{zk-1}} \right); \\ b_k &= 1 + \frac{\Delta t}{\Delta V_k} \left[\frac{1}{z_k - z_{k-1}} \left(\frac{2K_{zk}K_{zk-1}}{K_{zk} + K_{zk-1}} \right) + \frac{1}{z_{k+1} - z_k} \left(\frac{2K_{zk}K_{zk+1}}{K_{zk} + K_{zk+1}} \right) + w_g \right]; \\ c_k &= -\frac{\Delta t}{\Delta V_k} \left(\frac{1}{z_{k+1} - z_k} \frac{2K_{zk}K_{zk+1}}{K_{zk} + K_{zk+1}} + w_g \right); \quad d_k = C_{i,j,k}^{n+2/3} \exp(-R_{\text{wet}}\Delta t). \end{aligned}$$

Граничное условие при $k = 0$ включает скорость сухого осаждения на поверхность $R_{\text{dry}}(x_i, y_j)$. Таким образом, уравнение для приземной ячейки принимает вид

$$b_0 C_{i,j,0}^{n+1} + c_0 C_{i,j,1}^{n+1} = d_0,$$

где коэффициенты определяются как

$$\begin{aligned} a_0 &= 0; \quad b_0 = 1 + \frac{\Delta t}{\Delta V_0} \left[\frac{1}{z_1 - z_0} \left(\frac{2K_{z0}K_{z1}}{K_{z0} + K_{z1}} \right) + R_{\text{dry}}(x_i, y_j) \right]; \\ c_0 &= -\frac{\Delta t}{\Delta V_0} \left[\frac{1}{z_1 - z_0} \left(\frac{2K_{z0}K_{z1}}{K_{z0} + K_{z1}} \right) + w_g \right]; \quad d_0 = C_{i,j,0}^{n+2/3} \exp(-R_{\text{wet}}\Delta t). \end{aligned}$$

На верхней границе при $k = N_z - 1$ ставится строгое условие отсутствия диффузионного и адвективного перетекания массы (закрытая граница). Разностное уравнение баланса для верхнего узла принимает вид

$$a_{N_z-1} C_{i,j,N_z-2}^{n+1} + b_{N_z-1} C_{i,j,N_z-1}^{n+1} = d_{N_z-1},$$

где коэффициенты принимают значения

$$\begin{aligned} a_{N_z-1} &= -\frac{\Delta t}{\Delta V_{N_z-1}} \left(\frac{1}{z_{N_z-1} - z_{N_z-2}} \frac{2K_{zN_z-1}K_{zN_z-2}}{K_{zN_z-1} + K_{zN_z-2}} \right); \\ b_{N_z-1} &= 1 - a_{N_z-1} + \frac{\Delta t}{\Delta V_{N_z-1}} w_g; \quad c_{N_z-1} = 0; \quad d_{N_z-1} = 0. \end{aligned}$$

4.3 Метод прогонки

Для решения всех систем линейных алгебраических уравнений вида $a_i x_{i-1} + b_i x_i + c_i x_{i+1} = d_i$, возникающих на каждом этапе расщепления, используется метод прогонки [19, 20].

Алгоритм прогонки состоит из двух этапов. Сначала вычисляются прогоночные коэффициенты α_i и β_i (прямой ход). Здесь для первого узла $i = 0$:

$$\alpha_0 = \frac{c_0}{b_0}, \quad \beta_0 = \frac{d_0}{b_0}.$$

Для последующих узлов ($i = 1, \dots, N - 1$) применяются рекуррентные соотношения

$$\alpha_i = \frac{c_i}{b_i - a_i \alpha_{i-1}}, \quad \beta_i = \frac{d_i - a_i \beta_{i-1}}{b_i - a_i \alpha_{i-1}}.$$

На втором этапе (обратный ход) вычисляются неизвестные x_i . Здесь для последнего узла $i = N - 1$ имеем $x_{N-1} = \beta_{N-1}$, а для остальных узлов в обратном порядке ($i = N - 2, \dots, 0$)

$$x_i = \beta_i - \alpha_i x_{i+1}.$$

Алгоритм прогонки обладает линейной вычислительной сложностью $O(N)$ и является устойчивым для матриц с диагональным преобладанием. Однако дополнительно при расчёте прогоночных коэффициентов α_i и β_i вводится стабилизированный знаменатель D_i^* , определяемый как

$$D_i^* = \begin{cases} b_i - a_i \alpha_{i-1}, & |b_i - a_i \alpha_{i-1}| \geq \varepsilon; \\ \varepsilon, & |b_i - a_i \alpha_{i-1}| < \varepsilon. \end{cases}$$

Здесь $\varepsilon = 10^{-25}$ — чрезвычайно малая величина, предотвращающая возникновение сингулярности (деления на ноль) в случае вырождения матрицы. Величина D_i^* подставляется вместо знаменателя $b_i - a_i \alpha_{i-1}$ в обе рекуррентные формулы прямого хода.

5 Результаты вычислительных экспериментов

Для проверки разработанной математической модели рассмотрим задачу оценки пространственно-временного распределения концентрации выброса мелкодисперсной примеси РМ₁₀.

В качестве расчётной области рассматривалась территория г. Ташкента и Ташкентской области размерами $L_x = 20$ км и $L_y = 20$ км (рис. 1). Вертикальная граница ПСА установлена на высоте $L_z = 2500$ м. Шаг пространственной дискретизации задан сеткой, состоящей из $N_x \times N_y \times N_z = 300 \times 300 \times 80$ узлов.

Аэродинамическая шероховатость z_0 и параметры сухого осаждения задавались в виде пространственно распределённых матриц на основе цифровой карты типов подстилающей поверхности (рис. 2).



Рис. 1 Спутниковое изображение поверхности рассматриваемой области.

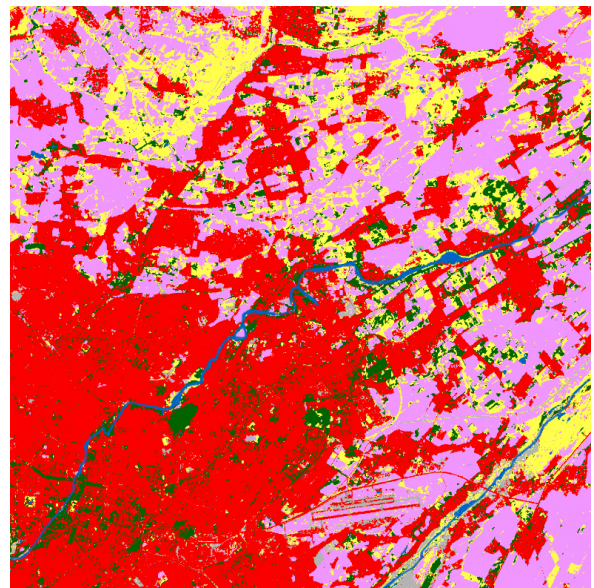


Рис. 2 Карта типов подстилающей поверхности, согласно таб. 1.

В качестве источника загрязнения моделировался точечный непрерывный выброс, имитирующий дымовую трубу тепловой электростанции (ТЭС). Расположение источника — центр расчётной области: $x_s = 10$ км, $y_s = 10$ км. Остальные параметры источника следующие: высота устья трубы $h_s = 150$ м; диаметр устья трубы $D = 6$ м; скорость выхода газовой смеси $v_p = 15,0$ м/с; температура выброса $T_p = 140,0^\circ\text{C}$; концентрация частиц PM_{10} на выходе — $50,0$ мг/м³; плотность дисперсных частиц $\rho_p = 2300,0$ кг/м³; медианный аэродинамический диаметр частиц $d_p = 10$ мкм.

Базовое направление ветра на высоте флюгера ($z_{\text{ref}} = 10$ м) для всех экспериментов составляло 225° , то есть в юго-западном направлении от источника — на город.

Поскольку интенсивность турбулентного перемешивания и высота пограничного слоя H_a критически зависят от времени суток и термодинамической стратификации атмосферы, вычислительные эксперименты проводились для четырёх характерных сценариев (режимов). Параметры моделируемых сценариев представлены в таб. 2. Подчеркнём, что каждый сценарий — это новый вычислительный эксперимент с соответствующими входными данными.

Таблица 2 Метеорологические сценарии вычислительных экспериментов.

№	Описание	Стартовое время	Время T (ч)	Темп-ра T_a ($^\circ\text{C}$)	Скор. ветра U (м/с)
1	Ночь, устойчивая стратификация	02:00	2	15,0	4,0
2	Утро, переходный режим	08:00	2	18,0	3,0
3	День, конвективная неустойчивость	14:00	2	35,0	5,0
4	Вечер, восстановление инверсии	20:00	2	25,0	2,0

Важнейшим свидетельством корректности моделирования процесса переноса примеси в атмосфере является адекватное воспроизведение суточной динамики ПСА. Изменения высоты слоя перемешивания H_a для всех сценариев из таб. 2 представлены на рис. 3.

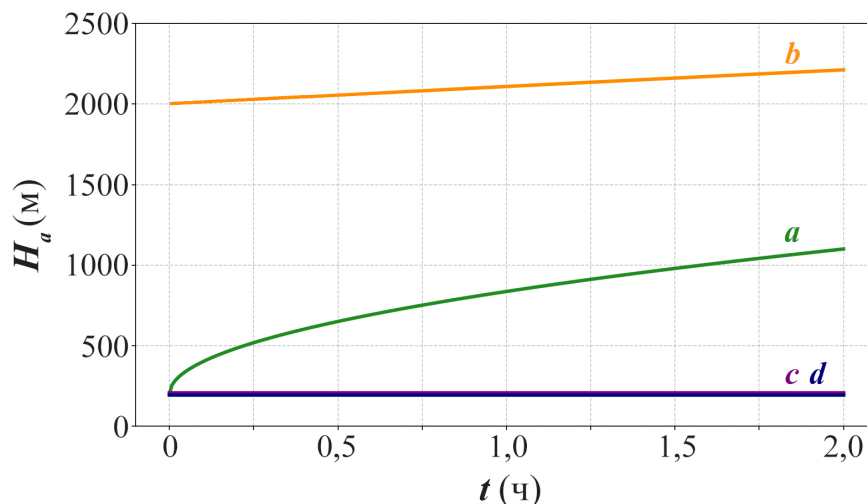


Рис. 3 Динамика высоты ПСА H_a за время моделирования $T = 2$ ч: a — утро, b — день, c — вечер, d — ночь.

Утренний сценарий (кривая *a* на рис. 3) характеризует самый сложный этап моделирования динамики ПСА — разрушение ночной приземной инверсии и начало развития конвекции, вызванной постепенным прогревом подстилающей поверхности. За время моделирования $T = 2$ часа H_a логарифмически возрастает с ночного минимума (около 260 м) до практически 1100 м.

Дневной сценарий (кривая *b* на рис. 3) характеризует состояние полностью развитого конвективного пограничного слоя, обусловленного максимальным радиационным прогревом подстилающей поверхности и мощным восходящим потоком явного тепла. К середине дня высота ПСА достигает значительных величин, увеличиваясь за время моделирования с 2050 до 2200 м.

При переходе к вечернему режиму, в связи с заходом солнца, поток тепла $\overline{w'T'}$ меняет знак на отрицательный, вызывая коллапс конвекции и снижение высоты слоя ПСА вплоть до 200 м (рис. 3).

Ночной сценарий характеризует уже условия глубокой, полностью сформировавшейся приземной температурной инверсии, когда наблюдается выраженное доминирование горизонтальной адвекции над вертикальным турбулентным обменом.

Данная динамика ПСА находит прямое отражение в профилях коэффициента вертикальной турбулентной диффузии K_z (рис. 4).

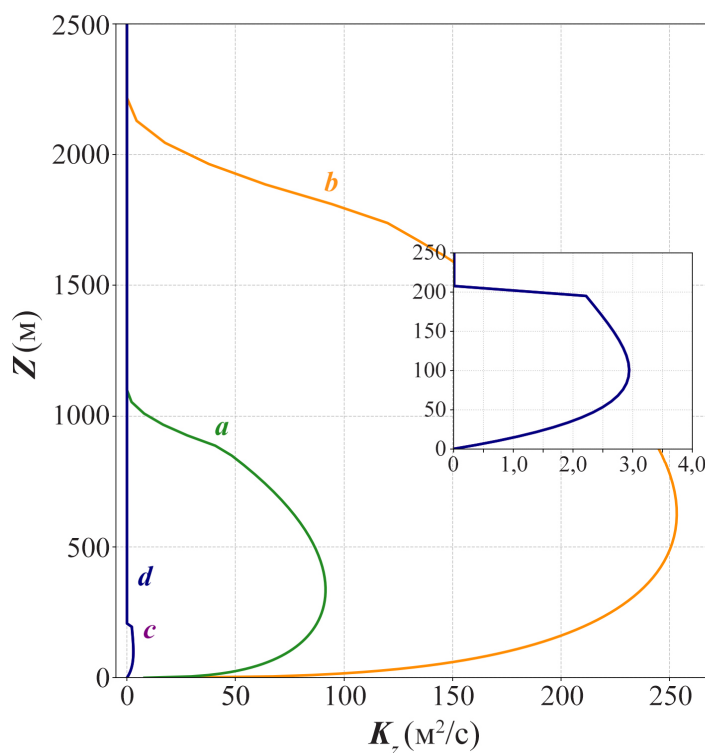


Рис. 4 Изменение коэффициента турбулентной диффузии K_z : *a*) утро — $H_a = 1100$ м, $\max K_z = 91,5$ м²/с; *b*) день — $H_a = 2212$ м, $\max K_z = 253,3$ м²/с; *c*, *d*) вечер и ночь — $H_a = 200$ м, $\max K_z = 2,9$ м²/с.

Как видно на рис. 4, утренний профиль приобретает классическую «выпуклую» форму, характерную для схемы С. Ханна, достигая максимума порядка 90 м²/с на высоте около 350 м, после чего плавно затухает к верхней границе пограничного слоя.

Дневной профиль образует выраженный «конвективный горб», достигая экстремальных значений около $250 \text{ м}^2/\text{с}$ на высоте около 700 м.

В противоположность этому ночные и вечерние кривые K_z демонстрируют подавление турбулентности. Вертикальная турбулентная диффузия значительно затухает вблизи поверхности (до $3,0 \text{ м}^2/\text{с}$) и полностью обнуляется выше уровня инверсии при $H_a = 200 \text{ м}$.

Анализ кривых вертикальных профилей скорости ветра (рис. 5) также подтверждает соответствие модели физической природе исследуемого процесса. В дневных и утренних условиях при неустойчивой стратификации ($L_{\text{mo}} < 0$) формируется характерный перемешанный профиль, а выше приземного слоя, более 100 м, скорость ветра становится квазипостоянной по всей толще пограничного слоя.

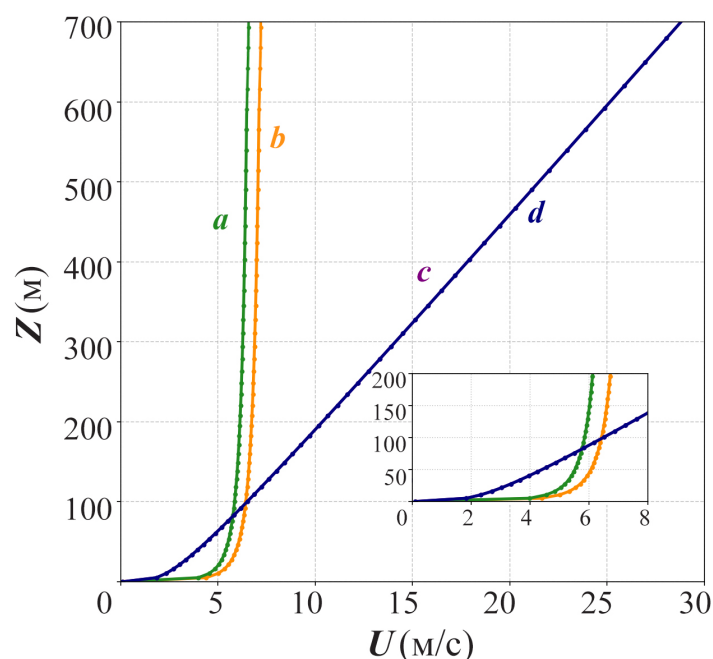


Рис. 5 Изменение вертикального профиля скорости ветра: *a* — утро, *b* — день, *c* — вечер, *d* — ночь.

Напротив, в ночном и вечернем сценариях (сильная устойчивость $L_{\text{mo}} > 0$) подавление турбулентных вихрей приводит к формированию выраженного лог-линейного профиля.

Здесь следует пояснить, что согласно теории подобия Монина–Обухова лог-линейный профиль справедлив только для приземного слоя высотой до 100 м. Выше приземного слоя рост скорости должен плавно затухать, переходя в геострофический ветер свободной атмосферы. Однако в нашем случае выражение (9) экстраполируется на всю высоту расчётной области до $z = 2500 \text{ м}$. Как видно из рис. 5, на эффективной высоте выброса $h_e \approx 400 \text{ м}$ этот лог-линейный рост скорости даёт значение около 15–16 м/с. Физически это совпадает с известным метеорологическим феноменом — ночным низкоуровневым струйным течением, которое часто формируется прямо над инверсионным слоем. Забегая вперёд, отметим, что именно этот скоростной перенос обеспечивает очищение атмосферы в пределах рассматриваемой области.

Тем не менее из рис. 5 видно, что такая экстраполяция приводит к неограниченному росту теоретической скорости ветра на верхней границе области, что является математическим допущением, которое, впрочем, не оказывает влияния на распре-

деление поля концентрации, поскольку весь перенос массы в этих ночных условиях происходит значительно ниже L_z .

Различия в высоте ПСА и скоростях ветра значительно меняют картину распределения концентрации выброса в приземном слое. Анализ поля приземной концентрации (рис. 6) показывает, что, несмотря на существенную мощность выброса, приземная концентрация примеси не высока. Как видно из графика осевой концентрации, максимальные значения приземной концентрации вредных частиц за 2 часа не превышают $7,0 \text{ мкг/м}^3$, что намного ниже безопасного порога среднесуточной предельно допустимой концентрации (ПДК) для PM_{10} , составляющей 50 мкг/м^3 .

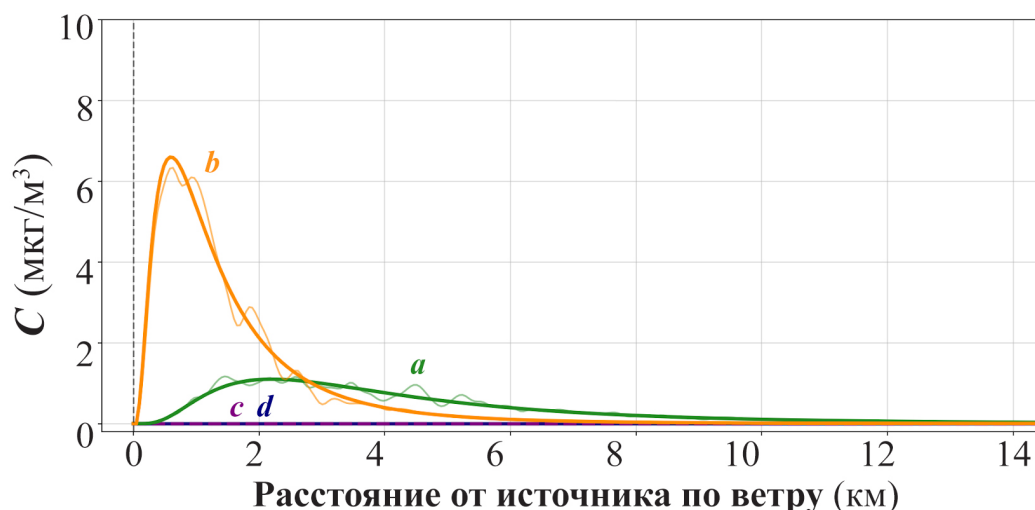


Рис. 6 Профиль приземной осевой концентрации на высоте $z = 2 \text{ м}$: a — утро, b — день, c — вечер, d — ночь.

В утренний период наблюдается так называемый эффект «зависания» шлейфа. Высота h_e значительно превышает высоту ещё только развивающегося конвективного слоя, соответственно переноса примеси к поверхности за счёт турбулентного перемешивания не происходит. За время моделирования большая часть примеси транспортируется ветром достаточно высоко над городом, поэтому приземная концентрация растёт медленно и не превышает $3,0 \text{ мкг/м}^3$.

В наиболее жаркие дневные часы возрастает эффект от конвективного перемешивания. Нисходящие потоки захватывают частицы примеси непосредственно с высоты выброса и довольно интенсивно переносят массу к поверхности земли. На графиках осевой концентрации (рис. 6, рис. 7 b) этот эффект выражается в резком смещении максимума приземной концентрации ближе к источнику.

Основной пик наблюдается на расстоянии всего $0,5\text{--}1,0 \text{ км}$ от трубы. Максимальная осреднённая концентрация возрастает более чем в 3 раза по сравнению с утренними часами — до $6,7 \text{ мкг/м}^3$.

Карта накопленной концентрации частиц примеси, осевшей на подстилающую поверхность (рис. 8), полностью коррелирует с полем приземной концентрации.

Максимальная плотность выпадений в утреннее время (рис. 8 a) составляет менее $0,35 \text{ мг/м}^2$, что во много раз ниже «порога заметности». При этом на диаграмме осадения явно прослеживается дискретная структура — «пятнистость», которая свидетельствует о влиянии свойств подстилающей поверхности. Интенсивность захвата и накопления частиц примеси локально меняется в зависимости от того, проходит

ли шлейф выброса над растительными массивами, открытыми водоёмами или над городской застройкой.

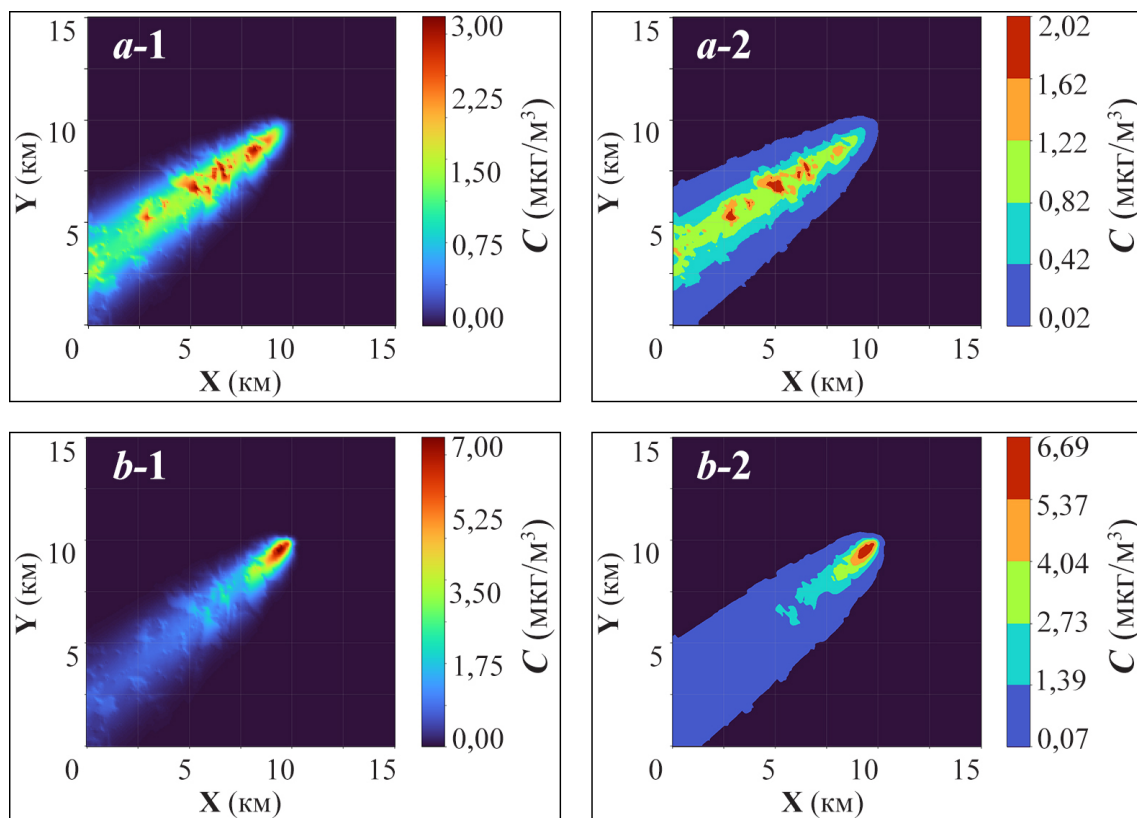


Рис. 7 Распределение поля концентрации на высоте $z = 2$ м: $a-1$, $a-2$ — утро; $b-1$, $b-2$ — день; 1 — мгновенная при $t = 2$ ч, 2 — осреднённая за время $T = 2$ ч.

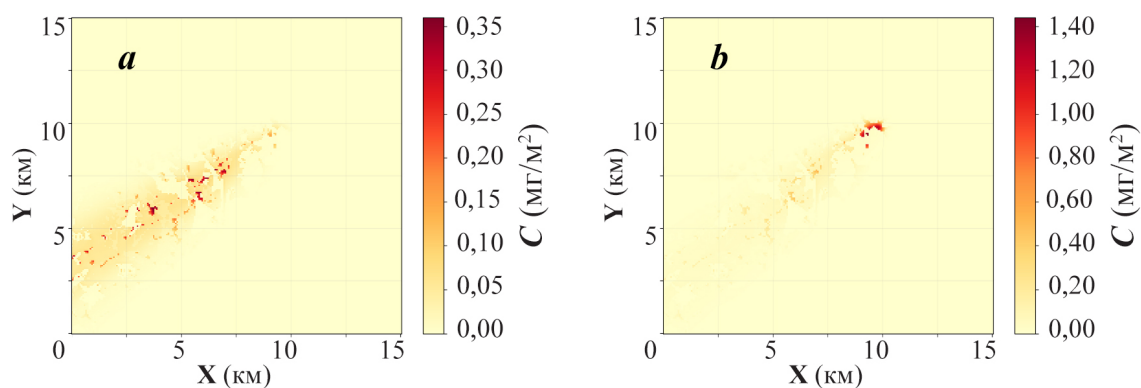


Рис. 8 Концентрация частиц примеси, осевших на подстилающую поверхность: a — утренний сценарий, b — дневной сценарий.

Карта накопленного сухого осаждения (рис. 8 b) логично подтверждает рост приземных концентраций. Локальные максимумы плотности осевших мелкодисперсных частиц днём возрастают до $1,4$ мг/м² против $0,35$ мг/м² утром. Пятнистая структура осаждения сохраняется, подчёркивая влияние шероховатости различных типов подстилающей поверхности.

В вечернее и ночное время инверсионный слой устанавливается на высоте намного ниже эффективной высоты выброса, и шлейф не испытывает вертикального рассеивания. Шлейф приобретает форму тонкой плоской ленты, которая транспортируется по ветру строго горизонтально на большой высоте, не проникая вниз к земле. Тем самым из-за отсутствия вертикального массопереноса к земле вечером и ночью процесс сухого осаждения полностью останавливается. Соответственно, значения приземной концентрации на всём протяжении расчётной области имеют порядок 10^{-16} , что соответствует «машинному нулю».

Анализ графиков баланса массы (рис. 9, таб. 3) подтверждает высокую робастность реализованного численного ядра. Во всех режимах моделирования — от глубокой конвекции до жёсткой инверсии — интегральная невязка остаётся на уровне машинного нуля.

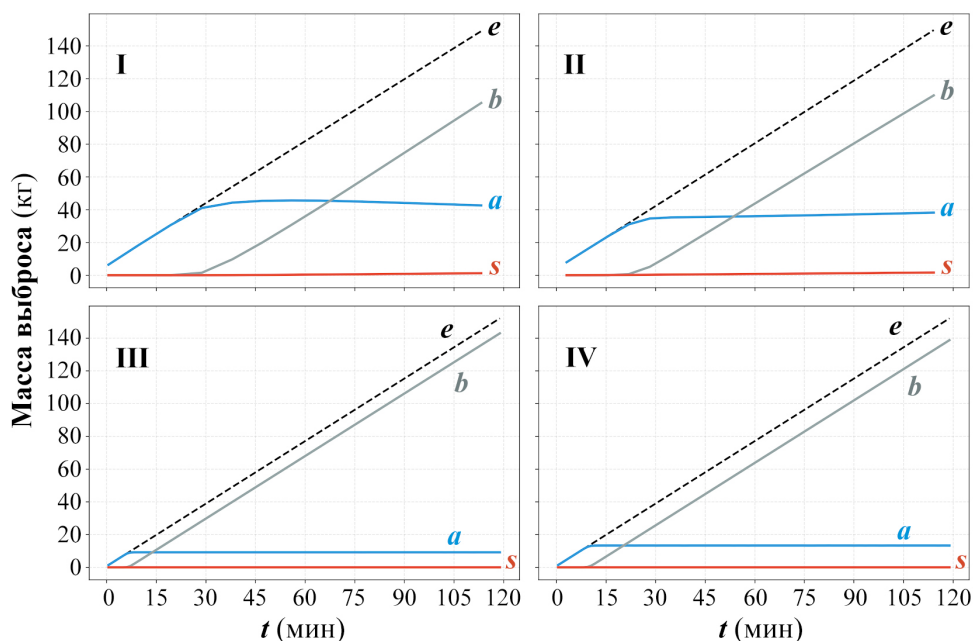


Рис. 9 Баланс массы за время $T = 2$ ч: I — утро, II — день, III — вечер, IV — ночь; e — общая масса выброса; b — масса примеси, унесённая за границы области; a — взвешенная масса в воздухе; s — масса частиц, осевших на подстилающую поверхность.

Таблица 3 Баланс массы (в кг) за время $T = 2$ ч.

Сценарий	Масса выброса	Взвешенная масса	Осажденная масса	Отток за границы	Погрешность баланса
Утро	149,04	42,63	1,22	105,19	0,00
День	149,66	38,21	1,64	109,81	0,00
Вечер	152,00	9,14	0,00	142,87	−0,01
Ночь	152,00	13,29	0,00	138,70	0,01

Как видно из кривых рис. 9, при утреннем и особенно дневном сценарии существенная доля массы переходит в сухое осаждение. В вечерние и ночные часы, напротив, более 85 % выброшенной массы выносится за пределы расчётной области под действием струйного течения на больших высотах.

Баланс массы на рис. 9 и в таб. 3 подтверждает удовлетворительную вычислительную устойчивость численной схемы. Сумма масс — взвешенной в области, осевшей на поверхность и покинувшей границы расчётной сетки — практически полностью совпадает с интегралом функции выброса источника. Балансовая ошибка на всём протяжении расчёта находится в пределах машинной точности, что подтверждает консервативность реализованных разностных схем адвекции-диффузии.

Отсутствие осцилляций на графиках оттока подтверждает, что реализованный численный алгоритм исключает возникновение явлений, противоречащих физической природе исследуемого процесса как в пределах области, так и на её границах.

6 Заключение

В заключение можно сформулировать следующие выводы.

Разработана и численно реализована мезомасштабная трёхмерная математическая модель процесса распространения мелкодисперсной примеси в пограничном слое атмосферы с учётом стохастических пульсаций ветра. Для аппроксимации задачи на эйлеровой сетке применялся метод расщепления по физическим процессам и пространственным координатам в сочетании с неявной разностной схемой и интегро-интерполяционным методом конечного объёма по вертикали.

Проведённые вычислительные эксперименты для территории города Ташкента в условиях четырёх различных суточных метеорологических режимов продемонстрировали физическую адекватность модели. Алгоритм корректно воспроизводит суточную динамику высоты слоя перемешивания, формирование профилей ветра и коэффициента турбулентной диффузии при переходе от дневной конвективной неустойчивости к ночной приземной инверсии.

Установлено, что наибольшую экологическую нагрузку на приземный слой высотный источник оказывает в дневные часы, когда имеет место интенсивное конвективное перемешивание, что обуславливает пик приземной концентрации на расстоянии 0,5–1,0 км от трубы. В ночное и вечернее время шлейф выброса изолируется инверсионным слоем и транспортируется горизонтально на больших высотах, не проникая к поверхности земли, из-за чего процесс сухого осаждения полностью останавливается. Кроме того, результаты наглядно отражают влияние различных типов подстилающей поверхности на структуру сухого осаждения частиц примеси.

Анализ баланса массы показал, что интегральная невязка во всех рассмотренных сценариях остаётся на уровне машинного нуля, что строго подтверждает консервативность реализованного численного алгоритма.

Таким образом, предложенная математическая модель и численный алгоритм представляют собой эффективный инструмент, который может применяться для задач экологического мониторинга, оценки рисков загрязнения воздуха и прогнозирования распространения антропогенных выбросов над урбанизированными территориями со сложной подстилающей поверхностью.

Декларации

Финансирование. Исследование выполнено в соответствии с планами НИР Научно-исследовательского института развития цифровых технологий и искусственного интеллекта.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Вклад авторов. Авторы внесли равный вклад в данную работу. Оба автора прочитали и одобрили итоговый вариант рукописи.

Доступность данных. Данные вычислительных экспериментов доступны у авторов по обоснованному запросу.

Литература

- [1] *Bailey B. N.* Numerical considerations for Lagrangian stochastic dispersion models: eliminating rogue trajectories, and the importance of numerical accuracy // *Boundary-Layer Meteorology*. — 2017. — Vol. 162, № 1. — P. 43–68. — doi: <https://doi.org/10.1007/s10546-016-0181-6>.
- [2] *Chen I. [et al.]* To which degree do the details of stochastic perturbation schemes matter for convective-scale and mesoscale perturbation growth? // *Monthly Weather Review*. — 2025. — Vol. 153, № 3. — P. 447–469. — doi: <https://doi.org/10.1175/MWR-D-24-0030.1>.
- [3] *Du S.* Universality of the Lagrangian velocity structure function constant (C_0) across different kinds of turbulence // *Boundary-Layer Meteorology*. — 1997. — Vol. 83, № 2. — P. 207–219. — doi: <https://doi.org/10.1023/A:1000216809160>.
- [4] *Krishnaprasad K. A. [et al.]* The statistical overloading framework for accurate evaluation of pollutant dispersal with rigorous uncertainty estimation // *Journal of Aerosol Science*. — 2025. — Vol. 188. — Art. 106590. — doi: <https://doi.org/10.1016/j.jaerosci.2025.106590>.
- [5] *Zhou Y. [et al.]* Explore a deep learning multi-output neural network for regional multi-step-ahead air quality forecasts // *Journal of Cleaner Production*. — 2019. — Vol. 209. — P. 134–145. — doi: <https://doi.org/10.1016/j.jclepro.2018.10.243>.
- [6] *Oettl D.* Evaluation of the revised Lagrangian particle model GRAL against wind-tunnel and field observations in the presence of obstacles // *Boundary-Layer Meteorology*. — 2015. — Vol. 155. — P. 271–287. — doi: <https://doi.org/10.1007/s10546-014-9993-4>.
- [7] *Kelley N. D. [et al.]* The impact of coherent turbulence on wind turbine aeroelastic response and its simulation: preprint: conference paper NREL/CP-500-38074. — Golden: NREL, 2005. — URL: <https://docs.nrel.gov/docs/fy05osti/38074.pdf> (дата обращения: 29.07.2026).
- [8] *Briggs G. A.* Plume rise // *Meteorology and Atomic Energy 1968* / ed. by D. H. Slade. — Washington: U. S. Atomic Energy Commission, 1969. — P. 102–123.
- [9] *Cunningham E.* On the velocity of steady fall of spherical particles through fluid medium // *Proceedings of the Royal Society A*. — 1910. — Vol. 83. — P. 357–365. — doi: <https://doi.org/10.1098/rspa.1910.0024>.
- [10] *Монин А. С., Обухов А. М.* Основные закономерности турбулентного перемешивания в приземном слое атмосферы // *Труды Геофизического института АН СССР*. — 1954. — № 24(151). — С. 163–187.
- [11] *Dyer A. J.* A review of flux-profile relationships // *Boundary-Layer Meteorology*. — 1974. — Vol. 7, № 3. — P. 363–372. — doi: <https://doi.org/10.1007/BF00240838>.
- [12] *Wallace J. M., Hobbs P. V.* Atmospheric science: an introductory survey. — 2nd ed. — Amsterdam: Academic Press, 2006. — 483 p.
- [13] *Ekman V. W.* On the influence of the Earth's rotation on ocean-currents // *Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik*. — 1905. — Vol. 2, № 11. — P. 1–52.
- [14] *Hanna S. R.* Applications in air pollution modeling // *Atmospheric turbulence and air pollution modelling* / ed. by F. T. M. Nieuwstadt, H. van Dop. — Dordrecht: D. Reidel Publishing Company, 1982. — P. 275–310.
- [15] *Deardorff J. W.* Convective velocity and temperature scales for the unstable planetary boundary layer and for Rayleigh convection // *Journal of the Atmospheric Sciences*. — 1970. — Vol. 27. — P. 1211–1213.

- [16] *Andronache C.* Estimated variability of below-cloud aerosol removal by rainfall for observed aerosol size distributions // *Atmospheric Chemistry and Physics*. — 2003. — Vol. 3, № 1. — P. 131–143. — doi: <https://doi.org/10.5194/acp-3-131-2003>.
- [17] *Wang X., Zhang L., Moran M.D.* Bulk or modal parameterizations for below-cloud scavenging of fine, coarse, and giant particles by both rain and snow // *Journal of Advances in Modeling Earth Systems*. — 2014. — Vol. 6, № 4. — P. 1301–1310. — doi: <https://doi.org/10.1002/2014MS000392>.
- [18] *Yanenko N.N.* The method of fractional steps: the solution of problems of mathematical physics in several variables. — Berlin: Springer, 1971. — 160 p.
- [19] *Hundsdoerfer W., Verwer J.G.* Numerical solution of time-dependent advection-diffusion-reaction equations. — Berlin: Springer, 2003. — 471 p.
- [20] *Trefethen L.N., Bau D., III.* Numerical linear algebra. — Philadelphia: SIAM, 1997. — 361 p.

UDC 519.6:504.3.054

MODELING MESOSCALE TRANSPORT OF FINE PARTICULATE MATTER IN THE ATMOSPHERE ACCOUNTING FOR STOCHASTIC WIND FLUCTUATIONS

**Akhmedov D.D., Turkmenova R.T.*

*d.akhmedov@airi.uz

Digital technologies and artificial intelligence development research institute, 17A, Buz-2,
Tashkent, 100125 Uzbekistan

This paper addresses the development of a mathematical model for evaluating the spatial distribution of fine particulate emissions from a continuous elevated source. The model is built upon the advection-diffusion equation, solved on a spatial grid with logarithmic node refinement near the ground surface. For numerical implementation, a directional splitting method and an implicit scheme are applied. Particular emphasis is placed on the parameterization method of the atmospheric boundary layer. To verify the accuracy and stability of the proposed algorithm, a series of computational experiments was conducted for four meteorological scenarios typical of Tashkent. The obtained results confirm the conservative nature of the finite-difference scheme and clearly demonstrate the local influence of surface roughness on the deposition pattern of pollutant particles and ground-level concentration levels.

Keywords: atmospheric mass transfer, thermodynamic stratification, turbulence, anthropogenic pollution, finite difference method

Citation: Akhmedov D.D., Turkmenova R.T. 2026. Modeling mesoscale transport of fine particulate matter in the atmosphere accounting for stochastic wind fluctuations. *Problems of Computational and Applied Mathematics*. 4(74):5-26.

DOI: 10.71310/pcam.4_74.2026.01

HISOBLASH VA AMALIY MATEMATIKA MUAMMOLARI

ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ
И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
PROBLEMS OF COMPUTATIONAL
AND APPLIED MATHEMATICS

ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

№ 4(74) 2026

Журнал основан в 2015 году.

Издается 6 раз в год.

Учредитель:

Научно-исследовательский институт развития цифровых технологий и
искусственного интеллекта.

Главный редактор:

Равшанов Н.

Заместители главного редактора:

Арипов М.М., Шадиметов Х.М., Ахмедов Д.Д.

Ответственный секретарь:

Убайдуллаев М.Ш.

Редакционный совет:

Азамов А.А., Алоев Р.Д., Амиргалиев Е.Н. (Казахстан), Арушанов М.Л.,
Бурнашев В.Ф., Джумаёзов У.З., Загребина С.А. (Россия), Задорин А.И. (Россия),
Игнатъев Н.А., Ильин В.П. (Россия), Иманкулов Т.С. (Казахстан),
Исмагилов И.И. (Россия), Кабанихин С.И. (Россия), Курбонов Н.М., Маматов Н.С.,
Мирзаев Н.М., Мурадов Ф.А., Назирова Э.Ш., Нормуродов Ч.Б., Нуралиев Ф.М.,
Опанасенко В.Н. (Украина), Расулмухамедов М.М., Садуллаева Ш.А.,
Старовойтов В.В. (Беларусь), Хаётов А.Р., Халджигитов А., Хамдамов Р.Х.,
Хужаев И.К., Хужаеров Б.Х., Эшмаматова Д.Б., Дустмуродова Ш.Ж.,
Чье Ен Ун (Россия), Шабозов М.Ш. (Таджикистан), Dimov I. (Болгария),
Li Y. (США), Mascagni M. (США), Min A. (Германия), Singh M. (Южная Корея).

Журнал зарегистрирован в Агентстве информации и массовых коммуникаций при
Администрации Президента Республики Узбекистан.

Свидетельство №0856 от 5 августа 2015 года.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

При перепечатке материалов ссылка на журнал обязательна.

За точность фактов и достоверность информации ответственность несут авторы.

Адрес редакции:

100125, г. Ташкент, м-в. Буз-2, 17А.

Тел.: +(998) 71 263-41-98.

Э-почта: journals@airi.uz.

Веб-сайт: <https://journals.airi.uz>.

Дизайн и вёрстка:

Шарилов Х.Д.

Отпечатано в типографии НИИ РЦТИИ.

Подписано в печать 25.08.2026 г.

Формат 60x84 1/8. Заказ № 4. Тираж 100 экз.

PROBLEMS OF COMPUTATIONAL AND APPLIED MATHEMATICS

No. 4(74) 2026

The journal was established in 2015.
6 issues are published per year.

Founder:

Digital Technologies and Artificial Intelligence Development Research Institute.

Editor-in-Chief:

Ravshanov N.

Deputy Editors:

Aripov M.M., Shadimetov Kh.M., Akhmedov D.D.

Executive Secretary:

Ubaydullaev M.Sh.

Editorial Council:

Azamov A.A., Aloev R.D., Amirgaliev E.N. (Kazakhstan), Arushanov M.L.,
Burnashev V.F., Djumayozov U.Z., Zagrebina S.A. (Russia), Zadorin A.I. (Russia),
Ignatiev N.A., Ilyin V.P. (Russia), Imankulov T.S. (Kazakhstan), Ismagilov I.I. (Russia),
Kabanikhin S.I. (Russia), Kurbonov N.M., Mamatov N.S., Mirzaev N.M., Muradov F.A.,
Nazirova E.Sh., Normurodov Ch.B., Nuraliev F.M., Opanasenko V.N. (Ukraine),
Sadullaeva Sh.A., Starovoitov V.V. (Belarus), Khayotov A.R., Khaldjigitov A.,
Khamdamov R.Kh., Khujaev I.K., Khujayorov B.Kh., Eshmamatova D.B.,
Dustmurodova Sh.J., Chye En Un (Russia), Shabozov M.Sh. (Tajikistan),
Dimov I. (Bulgaria), Li Y. (USA), Mascagni M. (USA), Min A. (Germany),
Singh M. (South Korea).

The journal is registered by Agency of Information and Mass Communications under the
Administration of the President of the Republic of Uzbekistan.
Certificate of Registration No. 0856 of 5 August 2015.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

At a reprint of materials the reference to the journal is obligatory.
Authors are responsible for the accuracy of the facts and reliability of the information.

Address:

100125, Tashkent, Buz-2, 17A.

Tel.: +(998) 71 263-41-98.

E-mail: journals@airi.uz.

Web-site: <https://journals.airi.uz>.

Layout design:

Sharipov Kh.D.

DTAIRI printing office.

Signed for print 25.08.2026

Format 60x84 1/8. Order No. 4. Print run of 100 copies.

Содержание

Ахмедов Д.Д., Туркменова Р.Т.

Моделирование мезомасштабного переноса мелкодисперсной примеси в атмосфере с учётом стохастических пульсаций ветра 5

Чжан Х., Варламова Л.П., У Б.

Динамический анализ стохастической SICK-модели передачи раннего и позднего фитофтороза картофеля 27

Равшанов Н., Шафиев Т.Р., Бобожонова М.А., Кобилова Д.О.

Исследование ключевых факторов, влияющих на распространение пылевых частиц в атмосфере 47

Бердиёров Ш.Ш., Эрмонова М.У.

Сравнение методов конечных разностей и конечных объёмов для численного моделирования фильтрации в цилиндрическом пористом фильтре 65

Равшанов Н., Садуллаев С.

Моделирование процесса нестационарной фильтрации грунтовых вод со свободной поверхностью с учётом инфильтрационных потоков 85

Туракулов Ж.А., Жураев И.Р., Таштемирова Н.Н., Рахматуллаева Д.О.

Математическое моделирование фильтрации суспензии в пористых средах . 102

Хайтов А.Р., Исмоилов С.И.

Квадратурная формула для оптимального приближения определенных интегралов с полиномиальным весом 110

Нуралиев Ф.А., Едилбекова Р.М.

Оптимальная квадратурная формула в пространстве дифференцируемых функций 120

Эшмаматова Д.Б., Очилова Н.К.

Вырожденно-сингулярные эллиптические операторы: точная коэрцитивность, весовая корректность и методы функции Грина для моделей диффузии в опухолевых тканях 133

Назирова Э.Ш., Мадетбаева Н.Б., Мирзаева Ф.Ш., Исломов М.Б.

Математическая модель автоматического выделения фразеологизмов в тюркских языках 152

Ахмеджанова Д.А.

Модель семантического связывания тюркских языков: подход с ограничением справедливости для малоресурсных условий 171

Contents

<i>Akhmedov D.D., Turkmenova R.T.</i>	
Modeling mesoscale transport of fine particulate matter in the atmosphere accounting for stochastic wind fluctuations	5
<i>Zhang H., Varlamova L.P., Wu B.</i>	
Dynamical analysis of a stochastic SICK transmission model for potato early and late blight	27
<i>Ravshanov N., Shafiev T.R., Bobozhonova M.A., Kobilova D.O.</i>	
Study of the key factors affecting the dispersion of dust particles in the atmosphere	47
<i>Berdiyev Sh.Sh., Ermonova M.U.</i>	
Comparison of finite difference and finite volume methods for numerical simulation of filtration in a cylindrical porous filter	65
<i>Ravshanov N., Sadullaev S.</i>	
Modeling of the process of unsteady filtration of groundwater with a free surface taking into account infiltration flows	85
<i>Turakulov J.A., Juraev I.R., Tashtemirova N.N., Raxmatullayeva D.O.</i>	
Mathematical modeling of suspension filtration in porous media	102
<i>Hayotov A.R., Ismoilov S.I.</i>	
Optimal quadrature for definite integrals with polynomial weight	110
<i>Nuraliev F.A., Edilbekova R.M.</i>	
Optimal quadrature formula in the space of differentiable functions	120
<i>Eshmamatova D.B., Ochilova N.K.</i>	
Degenerate-singular elliptic operators: sharp coercivity, weighted well-posedness, and Green's function methods for tumor-diffusion models	133
<i>Nazirova E.Sh., Madetbayeva N.B., Mirzayeva F.Sh., Islomova M.B.</i>	
A mathematical model for the automatic extraction of idioms in Turkic languages	152
<i>Akhmedjanova D.A.</i>	
A semantic linking model for Turkic languages: a fairness-constrained cross-lingual approach for low-resource settings	171