

УДК 519.624.3

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ ПРОИЗВОДНЫХ РАЗЛИЧНОГО ПОРЯДКА УРАВНЕНИЯ ФОЛКНЕРА–СКЭНА В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ГРАДИЕНТА ДАВЛЕНИЯ

Тиловов М.А.

mtilovov21@gmail.com

Термезский государственный университет,
190111 Узбекистан, Термез, ул. Баркамол авлод, дом 43.

В статье исследуется динамика производных различного порядка уравнения Фолкнера–Скэна (ФС) при наличии продольного градиента давления. Уравнение ФС является нелинейным сингулярно возмущённым уравнением третьего порядка, а исследование его решения и производных при различных значениях формпараметра β , связанного с градиентом давления, остаётся малоизученной областью. Первая производная решения определяет профиль скорости основного потока в пограничном слое и важна при исследовании гидродинамической устойчивости. Уравнение ФС сводится к задаче Коши для трёх нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, решаемой методом Рунге–Кутты четвёртого порядка в векторной форме. Получены результаты для положительного, нулевого и отрицательного градиентов давления. Показано, что при $\beta = 0$ профиль совпадает с профилем Блазиуса; при $\beta < 0$ пограничный слой утолщается и возможен его отрыв; при $\beta > 0$ толщина слоя уменьшается.

Ключевые слова: уравнения Фолкнера–Скэна, градиент давления, профиль скорости.

Цитирование: *Тиловов М.А.* Численное исследование динамики производных различного порядка уравнения Фолкнера–Скэна в зависимости от градиента давления // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2026. – № 3(73). – С. 139-152.

DOI: https://doi.org/10.71310/pcam.3_73.2026.10

1 Введение

В статье [1] представлен численный метод решения уравнения Фолкнера–Скэна. Метод основан на использовании координатного преобразования, позволяющего свести физическую задачу, заданную на полубесконечной области, к задаче на фиксированной вычислительной области. Далее, вводя подходящую замену переменных, рассматриваемая задача решается методом пристрелки. Автор утверждает, что численные решения хорошо согласуются с результатами, полученными другими авторами. Применение метода конечных элементов для решения уравнения Фолкнера–Скэна представлено в [2]. Метод основан на использовании координатного преобразования, позволяющего отобразить полубесконечную область задачи на единичный интервал $[0, 1]$. С помощью подходящей замены переменных преобразования краевая задача третьего порядка далее приводится к системе дифференциальных уравнений второго порядка и уравнения первого порядка. Затем уравнение второго порядка аппроксимируется методом Галеркина с кусочно-линейными элементами, а уравнение первого порядка – с помощью центральной разностной схемы. По утверждению автора, полученные решения превосходно согласуются с результатами, полученными

другими авторами. В статье [3] для уравнения Фолкнера–Скэна разработан новый итерационный метод, основанный на его преобразовании в интегральное уравнение. Численное решение интегрального уравнения разлагается в ряд, где в качестве базисных функции применяются сопряженные собственные функции. Предложенная итерационная схема обладает быстрой сходимостью и позволяет эффективно находить множественные решения уравнения Фолкнера–Скэна. Исследование нелинейного уравнения пограничного слоя Фолкнера–Скэна, заданного на полубесконечной области, осуществлено в [4]. Для численного решения рассматриваемого уравнения предлагается итерационная конечно-разностная схема. Вычислительная итерационная процедура построена на основе квазилинеаризации Ньютона–Канторовича. Численные расчёты, выполненные для различных значений параметров, демонстрируют высокую точность и эффективность предложенного метода. Целью статьи [5] является разработка новой стратегии численного решения задачи о вязком течении пограничного слоя вдоль плоской пластины при ненулевом градиенте давления для вязкоупругой жидкости. Функция тока данной задачи удовлетворяет обобщенному уравнению Фолкнера–Скэна. Сходимость итерационной схемы доказана на основе принципа сжимающего отображения. В статье [6] впервые получены результаты решения уравнения Фолкнера–Скэна для гиперзвуковых сжимаемых течений. В статье [7] представлен численный метод решения уравнения Фолкнера–Скэна. Метод основан на усечении полубесконечной области задачи до конечной области с последующим разложением искомого приближенного решения по рядам Чебышева. С использованием матричного представления функции и её производных исходная задача сводится к системе алгебраических уравнений простым и эффективным образом.

В статье [8] исследуется генерация энтропии в стационарном двумерном вязком несжимаемом течении Фолкнера–Скэна максвелловской наножидкости при вынужденной конвекции над неподвижным клином, погружённым в пористую среду, с температурно-зависимой вязкостью. Течение описывается нелинейными связанными дифференциальными уравнениями в частных производных, которые приводятся к системе связанных нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений с условиями прилипания, которые затем численно решаются с использованием пакета MATLAB.

Новый численный обучающий подход, а именно метод наименьших квадратов опорных векторов на основе рациональных функций Гегенбауэра, представлен в [9]. Предложенный подход позволяет преобразовать нелинейную модель высокого порядка, заданную на полубесконечной области, в систему линейных и нелинейных уравнений с ограничениями в виде равенств, что существенно снижает вычислительные затраты. В этой статье исследуются модели Блазиуса, Фолкнера–Скэна и МГД-модели Фолкнера–Скэна, а также влияние различных параметров на их решения с целью подтверждения точности, корректности и эффективности предлагаемого метода.

В статье [10] для решения уравнения Фолкнера–Скэна используются новые рациональные α -полиномы, содержащие вспомогательный параметр. Приближенное решение уравнения ищется в виде ряда по новым рациональным α -полиномам с неизвестными коэффициентами. Для определения этих коэффициентов и вспомогательного параметра, входящих в полиномы, применяется коллокационный метод с использованием точек Чебышева–Гаусса.

Обзор современных исследований, посвященных аналитическим, численным и комбинированным методам решения нелинейной краевой задачи третьего порядка

Фолкнера–Скэна, которая описывает безразмерное распределение скорости в ламинарном пограничном слое, представлен в [11]. В статье [12] рассматривается задача существования решений со свободными линиями тока для уравнения Фолкнера–Скэна. Ранее такие решения были известны лишь для отрицательных значений параметра градиента давления β . Все эти решения связаны с наличием скользящих скоростей $-1 < f'(0) < \infty$ и возникают из тривиального решения $f = \eta$. Однако в рассматриваемой статье показано, что в положительной области параметра $1 < \beta < \infty$, непосредственно ниже интервала $-1 < f'(0) < \infty$, существует дополнительная ветвь решений со свободными линиями тока, соответствующая диапазону скользящих скоростей $-2 \leq f'(0) < -1$.

В статье [13] рассматривается двумерное течение пограничного слоя жидкости Карро, индуцированное нагретой наклонной плоской пластинкой. С использованием автомодельного решения Фолкнера–Скэна исходные уравнения переноса приводятся к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, которая численно решается с помощью интеграционной схемы Рунге–Кутты пятого порядка в сочетании с методом пристрелки.

Термосолютальные характеристики максвелловской жидкости при течении Фолкнера–Скэна над клином исследованы в [14]. Учитывается влияние температурно-зависимых вязкости и теплопроводности, а также эффектов теплового излучения и энергии активации. С использованием автомодельных переменных исходная система уравнений в частных производных приводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Для численного решения нелинейных уравнений применяется пакет MATLAB.

В статье [15] нелинейные обыкновенные дифференциальные уравнения, описывающие течение жидкости в рамках модели Фолкнера–Скэна, численно исследуются с использованием метода квартных сплайнов. Для повышения эффективности и точности решения применяется гибридная оптимизационная стратегия, сочетающая глобальные поисковые алгоритмы на основе генетических алгоритмов и локальные методы оптимизации. Использование концепции гибридизации позволяет оптимизировать полученные результаты и существенно ускорить сходимость предлагаемого метода квартных сплайнов.

Исследование течения пограничного слоя для особого класса неньютоновских жидкостей – пьезовязких жидкостей – вдоль растягивающегося клина (течение Фолкнера–Скэна) осуществлено в [16]. Эти жидкости по своей природе являются жидкостями Навье–Стокса с вязкостью, зависящей от давления. Рассматривается двумерное стационарное течение, для которого вводятся автомодельные переменные, позволяющие свести исходную задачу к нелинейной краевой задаче третьего порядка. Численное решение полученной задачи осуществляется с использованием метода пристрелки в сочетании с методом Ньютона, что позволяет найти локальные автомодельные решения. Установлено, что в зависимости от значений материальных параметров влияние давления может приводить как к уменьшению, так и к увеличению толщины пограничного слоя по сравнению с ньютоновским случаем.

В статье [17] для численного моделирования сингулярно возмущенного уравнения второго порядка применен спектральный метод по полиномам Чебышева второго рода. Оценка скорости сходимости метода предварительного интегрирования для приближенного решения уравнения Орра–Зоммерфельда изложена в [18].

Гидродинамическая устойчивость двухфазного потока Пуазейля со взвешенными твёрдыми частицами с применением спектрального метода по полиномам Чебышева

первого рода исследована в статье [19]. Показано, что частицы гасят турбулентные пульсации и ламинаризируют течение. Исследование гидродинамической устойчивости двухфазного потока газ–твердые частицы в пограничном слое спектрально-сеточным методом является основной целью статьи [20].

В статье [21] рассматривается применение спектрального метода с полиномами Чебышева второго рода для численного решения сингулярно возмущенного уравнения второго порядка. Численные и графические результаты иллюстрируют высокую точность и эффективность применяемого метода. Теоретическое обоснование спектрально-сеточного метода для численного моделирования уравнения Бюргерса изложено в [22].

В статье [23] предлагается дискретный вариант метода предварительного интегрирования с полиномами Чебышева первого рода для численного решения краевой задачи неоднородного бигармонического уравнения. Численные расчёты, выполненные с использованием выбранных различных пробных функций, демонстрируют высокую точность и эффективность предлагаемого метода.

Применение непрерывного варианта метода предварительного интегрирования с полиномами Чебышева первого рода для численного моделирования краевой задачи для сингулярно возмущенного уравнения изложено в [23]. Высокая точность и эффективность непрерывного варианта метода предварительного интегрирования демонстрируются при решении конкретного неоднородного сингулярно возмущенного уравнения. Показано, что приближенное решение сходится к точному решению со скоростью геометрической прогрессии при незначительном увеличении числа аппроксимирующих полиномов.

В статье [24] исследуется динамика производных различного порядка для краевой задачи сингулярно возмущенного уравнения четвертого порядка. Результаты сравнения с точным решением задачи показывают высокую точность и эффективность применяемого метода при исследовании динамики производных.

2 Постановка задачи

При исследовании проблемы гидродинамической устойчивости для однофазных и многофазных течений возникает другая самостоятельная задача — определение профиля скорости основного потока для этих течений, который является первой производной от решения уравнения Фолкнера–Скэна. При течении жидкости с большими значениями числа Рейнольдса весь поток может быть разбит на две области: 1) область, примыкающая к стенке, называемая «пограничным слоем», где влияние сил вязкости столь же существенно, как и влияние других сил и 2) область пренебрежимого влияния вязкости — «внешний поток» [25].

Рассмотрим стационарное двумерное ламинарное течение несжимаемой вязкой жидкости в пограничном слое при наличии продольного градиента давления. Предполагается, что течение развивается вдоль плоской поверхности, а вне пограничного слоя скорость основного (невязкого) потока задаётся степенным законом по продольной координате x в виде

$$U_e(x) = Kx^m, \quad (1)$$

где $K > 0$ — постоянная величина, а параметр m характеризует влияние градиента давления на течение. При этих предположениях уравнения пограничного слоя для двумерного несжимаемого течения включают уравнение неразрывности

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (2)$$

и уравнение импульса в продольном направлении

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + \vartheta \frac{\partial u}{\partial y} = U_e(x) \frac{dU_e(x)}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (3)$$

где $u(x, y)$ и $\vartheta(x, y)$ — компоненты скорости вдоль осей x и y , соответственно, а ν — кинематическая вязкость жидкости. Член $U_e(x) dU_e(x)/dx$ в правой части уравнения импульса обусловлен продольным градиентом давления, который определяется внешним невязким течением и связан с ним через уравнение Эйлера.

Для автоматического выполнения уравнения неразрывности вводится функция тока $\psi(x, y)$, определяемая соотношениями:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \vartheta = - \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (4)$$

Показано, что при степенном законе изменения внешней скорости (1) уравнения пограничного слоя допускают подобное решение. В этой связи вводится безразмерная переменная подобия

$$\eta = y \sqrt{\frac{(m+1)U_e(x)}{2\nu x}} = y \sqrt{\frac{(m+1)K}{2\nu}} x^{\frac{m-1}{2}}, \quad (5)$$

а функцию тока выбирают в виде

$$\psi(x, y) = \sqrt{\frac{2\nu x U_e(x)}{m+1}} f(\eta) = \sqrt{\frac{2\nu K}{m+1}} x^{\frac{m+1}{2}} f(\eta), \quad (6)$$

где $f(\eta)$ — неизвестная безразмерная функция. Такой выбор переменных обеспечивает сведение исходной системы уравнений в частных производных к обыкновенному дифференциальному уравнению.

Используя выражение (6) для функции тока, получаем компоненты скорости в виде

$$u(x, y) = U_e(x) f'(\eta), \quad (7)$$

$$\vartheta(x, y) = \sqrt{\frac{\nu U_e(x)}{2x(m+1)}} [(m+1)f(\eta) - \eta f'(\eta)], \quad (8)$$

где штрих означает дифференцирование по переменной η . Подстановка выражений (7)–(8) в уравнение импульса пограничного слоя (3) приводит к полному устранению зависимости от координат x и y , в результате чего исходное уравнение в частных производных сводится к нелинейному обыкновенному дифференциальному уравнению третьего порядка

$$f''' + f f'' + \beta (1 - (f')^2) = 0, \quad (9)$$

где параметр

$$\beta = \frac{2m}{m+1}, \quad (10)$$

называется параметром Фолкнера–Скэна и характеризует влияние продольного градиента давления на течение.

Граничные условия для уравнения (9) следуют из физических условий течения в пограничном слое. На поверхности выполняются условия прилипания и непроницаемости, что даёт

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 0, \quad (11)$$

а при удалении от поверхности скорость стремится к скорости внешнего потока, что приводит к условию

$$f'(\eta) \rightarrow 1 \quad \text{при} \quad \eta \rightarrow \infty. \quad (12)$$

Таким образом, уравнение Фолкнера–Скэна (9) с граничными условиями (11)–(12) представляет собой наиболее общее подобное решение стационарных двумерных уравнений пограничного слоя для несжимаемой вязкой жидкости при степенном законе изменения скорости внешнего потока и включает в качестве частных случаев классическое решение Блазиуса при $m = 0$, а также течение в окрестности точки торможения при $m = 1$.

Понимание физического смысла каждого граничного условия является принципиально важным для корректного моделирования течения жидкости. Первое граничное условие $f(0) = 0$ на стенке непосредственно означает отсутствие протекания жидкости через твёрдую границу; иными словами, нормальная составляющая скорости на стенке равна нулю. Это обеспечивает сохранение массы и предотвращает проникновение жидкости в твёрдую поверхность или выход из неё. Второе граничное условие $f'(0) = 0$ на стенке представляет собой проявление условия прилипания, которое является краеугольным камнем механики вязких жидкостей. Оно означает, что частицы жидкости, находящиеся в непосредственном контакте со стенкой, имеют ту же скорость, что и сама стенка; в случае неподвижной стенки касательная составляющая скорости жидкости на стенке равна нулю. Это отражает действие вязких сил, обуславливающих прилипание жидкости к поверхности. Наконец, граничное условие $f'(\eta) \rightarrow 1$ при $\eta \rightarrow \infty$ является существенным внешним условием, указывающим на то, что на достаточном удалении от стенки, где вязкие эффекты становятся пренебрежимо малыми, скорость жидкости плавно переходит в скорость невозмущённого внешнего потока. Тем самым обеспечивается корректное сопряжение решения уравнений пограничного слоя с внешней невязкой областью течения.

Система уравнений в частных производных (2)–(3) сводится к одному нелинейному обыкновенному дифференциальному уравнению третьего порядка — уравнению Фолкнера–Скэна (9), определяющему автомодельное решение стационарных двумерных уравнений пограничного слоя. В уравнении Фолкнера–Скэна безразмерный параметр β количественно характеризует влияние продольного градиента давления, создаваемого внешним (невязким) потоком, на течение в пограничном слое. Формально параметр β определяется соотношением

$$\beta = \frac{2m}{m+1},$$

где $U_e(x) = Kx^m$ — скорость внешнего потока.

При $\beta = 0$ уравнение переходит в уравнение Блазиуса, описывающее течение над плоской пластиной при нулевом градиенте давления. При $\beta > 0$ течение ускоряется, что приводит к благоприятному градиенту давления ($\frac{dP}{dx} < 0$), в результате чего пограничный слой утончается и отрыв потока откладывается. Напротив, при $\beta < 0$ течение замедляется, формируя неблагоприятный градиент давления ($\frac{dP}{dx} > 0$), который способствует утолщению пограничного слоя и может приводить к отрыву потока от поверхности — критическому явлению в аэродинамике. Значение параметра β также напрямую связано с физической геометрией угла клина в рассматриваемой задаче.

В совокупности нелинейное уравнение Фолкнера–Скэна (9) и соответствующий ему набор граничных условий (11) образуют полную краевую задачу. Численное или

аналитическое решение данной системы является принципиально важным, поскольку оно определяет поведение двумерного стационарного ламинарного несжимаемого течения жидкости в пограничном слое, развивающемся над клинообразным препятствием. Полученное решение даёт ключевое представление о распределениях скорости и структуре линий тока, характерных для таких течений.

Присущая уравнению Фолкнера–Скэна нелинейность в сочетании с соответствующими граничными условиями создаёт существенные трудности при получении его численного решения в виде краевой задачи. Среди различных численных методов наибольшее распространение получил метод пристрелки. Однако данный метод чувствителен к проблемам сходимости, особенно при наличии сильной нелинейности или при рассмотрении широкого диапазона параметров. Подобные трудности со сходимостью зачастую удаётся преодолеть за счёт тщательного выбора достаточно малого шага численного интегрирования, что приводит к чрезмерному увеличению числа арифметических операций. Основная идея метода пристрелки заключается в преобразовании исходной двухточечной краевой задачи в эквивалентную задачу с начальными условиями. Это достигается путём задания неизвестного граничного условия для производной на стенке ($\eta = 0$), которое обычно интерпретируется как безразмерное касательное напряжение:

$$\frac{d^2 f}{d\eta^2} = \alpha \quad \text{при} \quad \eta = 0, \quad (13)$$

где α является предполагаемым «параметром пристрелки». Полученная задача Коши затем численно интегрируется от $\eta = 0$ до достаточно большого значения $\eta = \eta_\infty$. Далее данный процесс повторяется итерационно с корректировкой значения α на каждом шаге до тех пор, пока численное решение с требуемой точностью не удовлетворит исходному внешнему граничному условию при $\eta = \eta_\infty$, что обеспечивает сходимость к истинному решению краевой задачи.

3 Метод решения

В данном разделе рассматривается задача численного решения уравнения Фолкнера–Скэна, описывающего течение пограничного слоя при наличии градиента давления. Данное уравнение представляет собой нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение третьего порядка и формулируется в виде следующей краевой задачи:

$$f''' + f f'' + \beta (1 - (f')^2) = 0, \quad \eta \in [0, \infty). \quad (14)$$

Граничные условия имеют вид:

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 0, \quad f'(\infty) = 1. \quad (15)$$

Для проведения численных вычислений бесконечный интервал интегрирования $[0, \infty)$ заменяется достаточно большим, но конечным интервалом. Таким образом, вместо исходного интервала используется интервал $[0, \eta_{\max}]$, при этом внешнее граничное условие аппроксимируется следующим образом:

$$f'(\eta_{\max}) \approx 1.$$

Для применения численных методов, в частности алгоритма Рунге–Кутты, системе обыкновенных дифференциальных уравнений необходимо привести к системе

обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. С этой целью вводятся следующие вспомогательные переменные:

$$d_1(\eta) = f(\eta), \quad d_2(\eta) = f'(\eta), \quad d_3(\eta) = f''(\eta).$$

В результате исходное уравнение (14) приводится к следующей системе нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} d_1' = d_2, \\ d_2' = d_3, \\ d_3' = -d_1 d_3 - \beta(1 - d_2^2). \end{cases} \quad (16)$$

Начальные условия для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (16) задаются следующим образом:

$$d_1(0) = 0, \quad d_2(0) = 0, \quad d_3(0) = s. \quad (17)$$

Здесь $s = f''(0)$ является неизвестным параметром, который определяется с помощью метода пристрелки. Суть данного метода заключается в том, что выбирается начальное приближённое значение параметра s , после чего система интегрируется с использованием алгоритма Рунге–Кутты на интервале от $\eta = 0$ до $\eta = \eta_{\max}$. В зависимости от того, насколько полученное решение удовлетворяет внешнему граничному условию $f'(\eta_{\max}) \approx 1$, значение параметра s итерационно корректируется. Процесс продолжается до тех пор, пока внешнее граничное условие не будет выполнено с требуемой точностью.

Если систему обыкновенных дифференциальных уравнений (16) записать в векторно-функциональной форме, то она принимает вид:

$$\mathbf{F}(\eta, \mathbf{d}) = \begin{bmatrix} d_2 \\ d_3 \\ -d_1 d_3 - \beta(1 - d_2^2) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}, \quad (18)$$

то есть $\mathbf{d}'(\eta) = \mathbf{F}(\eta, \mathbf{d})$. Для численного интегрирования данной системы может быть использован метод Рунге–Кутты четвёртого порядка точности. Интервал интегрирования $[0, \eta_{\max}]$ разбивается равномерной сеткой:

$$t_n = nh, \quad n = 0, 1, \dots, N, \quad Nh = \eta_{\max},$$

где $h = \eta_{\max}/N$ — шаг сетки. Алгоритм метода Рунге–Кутты для решения данной системы имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_1 &= \mathbf{F}(t_n, \mathbf{d}_n), \quad \mathbf{k}_2 = \mathbf{F}\left(t_n + \frac{h}{2}, \mathbf{d}_n + \frac{h}{2}\mathbf{k}_1\right), \\ \mathbf{k}_3 &= \mathbf{F}\left(t_n + \frac{h}{2}, \mathbf{d}_n + \frac{h}{2}\mathbf{k}_2\right), \quad \mathbf{k}_4 = \mathbf{F}(t_n + h, \mathbf{d}_n + h\mathbf{k}_3), \\ \mathbf{d}_{n+1} &= \mathbf{d}_n + \frac{h}{6}(\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4), \quad n = 0, 1, \dots, N - 1. \end{aligned}$$

4 Обсуждение результатов

Ниже в таблице 1 приведены результаты численного решения уравнения Фолкнера–Скэна для различных значений параметра градиента давления β . Численные расчёты выполнены с использованием алгоритма Рунге–Кутты на равномерной сетке по переменной подобия η на интервале $[0, \eta_{\max}]$, разбитом на $N = 25$ равных шагов.

В таблице представлены значения функций $f(\eta)$, $f'(\eta)$ и $f''(\eta)$, которые соответственно характеризуют профиль функции тока, распределение продольной скорости и величину касательного напряжения в пограничном слое. Начальные значения второй производной $f''(\eta)$ выбраны в соответствии с данными, приведёнными в источнике [25].

Таблица 1. Численные значения функций $f(\eta)$, $f'(\eta)$ и $f''(\eta)$ при различных значениях β

η	$\beta=-0,19$			$\beta=0$			$\beta=2$		
	$f(\eta)$	$f'(\eta)$	$f''(\eta)$	$f(\eta)$	$f'(\eta)$	$f''(\eta)$	$f(\eta)$	$f'(\eta)$	$f''(\eta)$
0	0	0	0,086	0	0	0,4696	0	0	1,687
0,2	0,001973	0,020999	0,12398	0,009391	0,093905	0,469306	0,031094	0,2979	1,296679
0,4	0,008905	0,049581	0,161786	0,037549	0,187605	0,467254	0,114214	0,521815	0,952483
0,6	0,022307	0,085679	0,199061	0,084386	0,280575	0,461734	0,235653	0,683287	0,67358
0,8	0,043667	0,129131	0,235207	0,149675	0,371963	0,45119	0,384258	0,79567	0,460737
1,0	0,074429	0,179628	0,269343	0,23299	0,460633	0,434379	0,551485	0,871438	0,305654
1,2	0,115955	0,236657	0,300299	0,333657	0,545247	0,410565	0,731093	0,921019	0,196895
1,4	0,169476	0,299441	0,326647	0,450724	0,624386	0,379692	0,918692	0,952525	0,123122
1,6	0,236043	0,366902	0,346798	0,582956	0,6967	0,342487	1,111301	0,971944	0,074565
1,8	0,316456	0,437641	0,359165	0,728872	0,761057	0,300445	1,30695	0,983511	0,043472
2,0	0,411205	0,509958	0,36239	0,886797	0,816695	0,255669	1,504376	0,990107	0,024038
2,2	0,520417	0,581928	0,355617	1,054947	0,863304	0,21058	1,702788	0,993624	0,012114
2,4	0,643819	0,651528	0,338735	1,231528	0,901065	0,16756	1,901701	0,995261	0,00485
2,6	0,780739	0,7168	0,312551	1,414824	0,930601	0,128613	2,100817	0,995747	0,000362
2,8	0,930136	0,776043	0,278801	1,603284	0,952875	0,095113	2,299952	0,995509	-0,00256
3,0	1,090668	0,827982	0,23998	1,795568	0,969055	0,06771	2,498988	0,99478	-0,00465
3,2	1,260792	0,871891	0,199002	1,990581	0,980365	0,04637	2,697839	0,993676	-0,00635
3,4	1,438879	0,907633	0,158764	2,187467	0,98797	0,030535	2,896437	0,992246	-0,00794
3,6	1,623327	0,935612	0,12173	2,38559	0,992888	0,019329	3,094716	0,990498	-0,00955
3,8	1,81266	0,956656	0,089629	2,584499	0,995944	0,011759	3,292614	0,988419	-0,01127
4,0	2,005599	0,971853	0,06334	2,783887	0,99777	0,006874	3,49006	0,98598	-0,01314
4,2	2,201091	0,982386	0,042946	2,983555	0,998818	0,003861	3,68698	0,983149	-0,0152
4,4	2,398318	0,989391	0,027933	3,183383	0,999397	0,002084	3,883291	0,979886	-0,01746
4,6	2,596678	0,99386	0,017427	3,383296	0,999703	0,001081	4,078902	0,976149	-0,01994
4,8	2,795747	0,996595	0,010428	3,583254	0,999859	0,000538	4,273716	0,971895	-0,02264
5,0	2,995242	0,998201	0,005985	3,783235	0,999936	0,000258	4,467623	0,967078	-0,02557

Анализ табличных данных показывает, что параметр β оказывает существенное влияние на структуру течения в пограничном слое. В частности, при $\beta = 0$ полученные результаты соответствуют классическому решению Блазиуса для течения над плоской пластиной при отсутствии градиента давления.

При положительных значениях параметра β наблюдается более быстрое формирование скоростного профиля и ускоренное убывание функции $f''(\eta)$, что свидетельствует о наличии благоприятного градиента давления и уменьшении толщины пограничного слоя.

В случае отрицательных значений β отмечается замедленный рост функции $f'(\eta)$ и более медленное уменьшение $f''(\eta)$, что указывает на влияние неблагоприятного градиента давления и тенденцию к утолщению пограничного слоя.

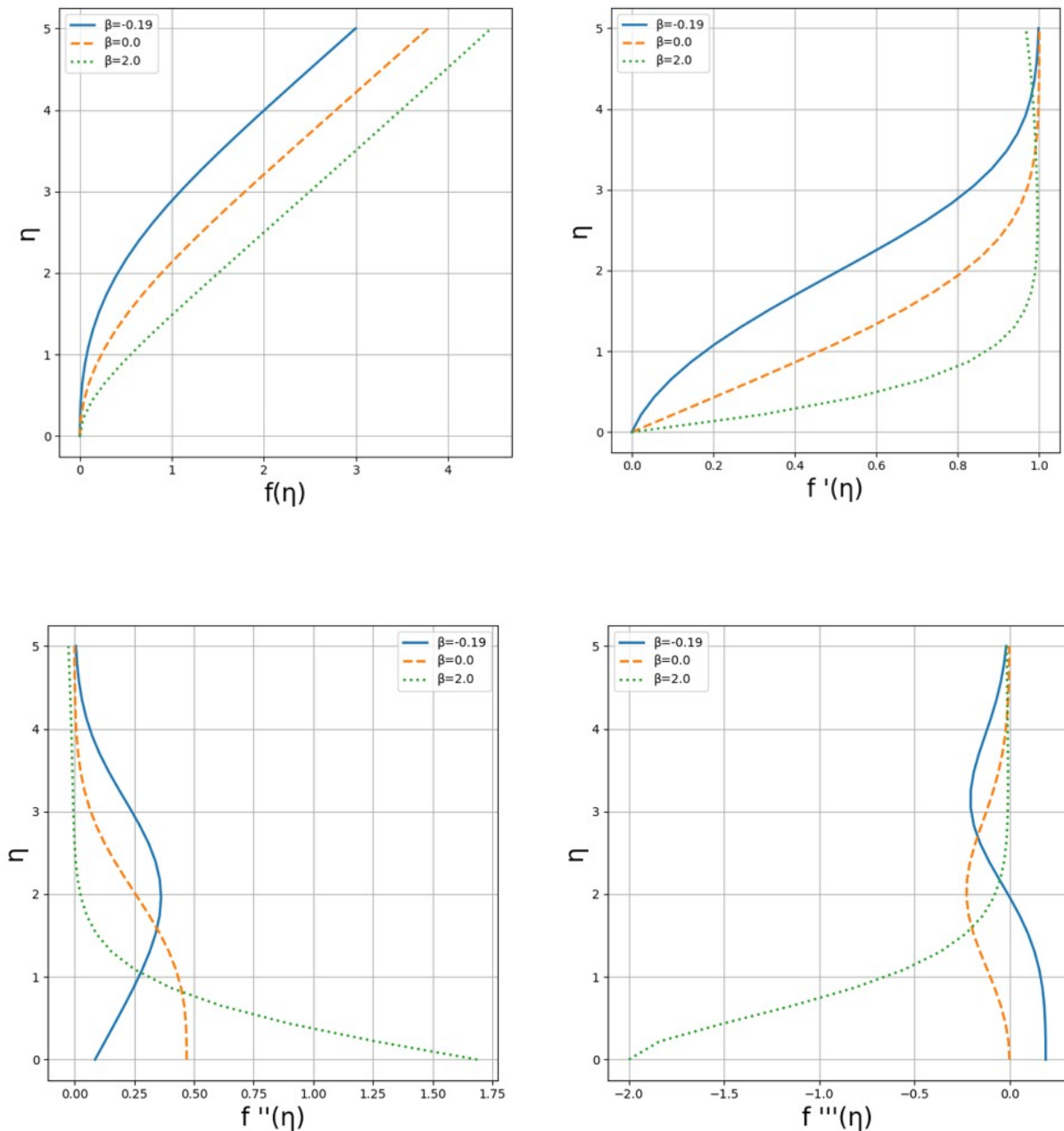


Рис. 1 Профили функций $f(\eta)$, $f'(\eta)$, $f''(\eta)$ и $f'''(\eta)$ для различных значений параметра β

На рис. 1 представлены профили функций $f(\eta)$, $f'(\eta)$, $f''(\eta)$ и $f'''(\eta)$, полученные в результате численного решения уравнения Фолкнера–Скэна для различных значений параметра градиента давления β . Из графиков видно, что изменение параметра

β существенно влияет на структуру пограничного слоя и характер распределения скорости в безразмерной координате η .

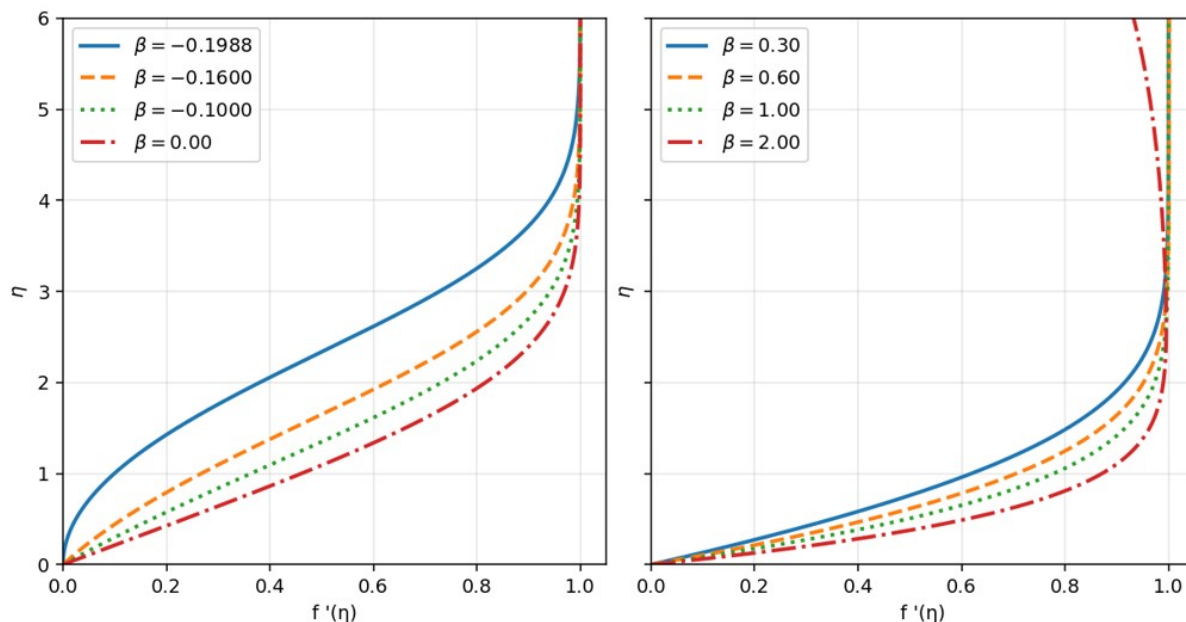


Рис. 2 Профили основной скорости $f'(\eta) = U(\eta)$ для различных значений параметра давления β

На рис. 2 показаны профили функции $f'(\eta)$, полученные в результате численного решения уравнения Фолкнера–Скэна для различных значений параметра давления β .

Представленные профили основной безразмерной скорости соответствуют известным результатам теории ламинарного пограничного слоя и наглядно отражают влияние продольного градиента давления, характеризуемого параметром β , на структуру течения. В условиях неблагоприятного градиента давления ($\beta < 0$) имеет место утолщение пограничного слоя и усиление предпосылок к отрыву потока, тогда как при благоприятном градиенте давления ($\beta > 0$) наблюдается интенсификация основного течения и уменьшение толщины пограничного слоя. Тем самым подтверждается адекватность численного моделирования на основе уравнения Фолкнера–Скэна.

5 Заключение

В заключении можно отметить следующие основные моменты. Исследована физическая сущность уравнения Фолкнера–Скэна и установлено, что первая производная от решения этого уравнения определяет профиль скорости основного течения в пограничном слое. Уравнение Фолкнера–Скэна сведено к задаче Коши для системы трех нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Для численного решения этой задачи применен метод Рунге–Кутты четвертого порядка точности. Исследована динамика решения и производных различного порядка для уравнения Фолкнера–Скэна в зависимости от характерного формпараметра β , который выражает градиент давления в пограничном слое. Полученные численные и графические результаты показывают, что при нулевом градиенте давления ($\beta = 0$) профиль скорости основного потока совпадает с профилем скорости Блазиуса для пограничного слоя; при отрицательных градиентах давления ($\beta > 0$) толщина

пограничного слоя уменьшается; при положительных градиентах давления ($\beta < 0$) пограничный слой утолщается, возможен отрыв пограничного слоя от тела и появление возвратного течения, направленного против основного потока.

Литература

- [1] *Asaithambi N.S.* A numerical method for the solution of the Falkner–Skan equation // Applied Mathematics and Computation. – 1997. – Vol. 85. – P. 1–13.
- [2] *Asaithambi A.* Numerical solution of the Falkner–Skan equation using piecewise linear functions // Applied Mathematics and Computation. – 2004. – Vol. 159. – P. 267–273.
- [3] *Liu C.-S.* An iterative method based on eigenfunctions and adjoint eigenfunctions for solving the Falkner–Skan equation // Applied Mathematics Letters. – 2017. – Vol. 67. – P. 33–39. doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.aml.2016.12.004>.
- [4] *Temimi H., Ben-Romdhane M.* Numerical solution of Falkner–Skan equation by iterative transformation method // Mathematical Modelling and Analysis. – 2018. – Vol. 23. – № 1. – P. 139–151. doi: <http://dx.doi.org/10.3846/mma.2018.009>.
- [5] *Khuri S.A., Sayfy A.* Numerical solution of a generalized Falkner–Skan flow of a FENE-P fluid // International Journal of Computer Mathematics. – 2021. – Vol. 98. – № 6. – P. 1098–1111. doi: <http://dx.doi.org/10.1080/00207160.2020.1802436>.
- [6] *Lipatov I.I., Ngo K.T.* Solution of Falkner–Skan equations for hypersonic flows // Fluid Dynamics. – 2020. – Vol. 55. – № 4. – P. 525–533. doi: <http://dx.doi.org/10.1134/S0015462820040072>.
- [7] *Elnady A.O., Abd Rabbo M.F., Negm H.M.* Solution of the Falkner–Skan equation using the Chebyshev series in matrix form // Journal of Engineering. – 2020. – Vol. 2020. – Art. 3972573. – 9 p. doi: <http://dx.doi.org/10.1155/2020/3972573>.
- [8] *Verma A.K., Gautam A.K., Bhattacharyya K., Pop I.* Entropy generation analysis of Falkner–Skan flow of Maxwell nanofluid in porous medium with temperature-dependent viscosity // Pramana – Journal of Physics. – 2021. – Vol. 95. – Art. 69. doi: <http://dx.doi.org/10.1007/s12043-021-02083-3>.
- [9] *Hajmohammadi Z., Baharifard F., Parand K.* A new numerical learning approach to solve general Falkner–Skan model // Engineering with Computers. – 2022. – Vol. 38 (Suppl. 1). – P. S121–S137. doi: <http://dx.doi.org/10.1007/s00366-020-01114-8>.
- [10] *Abbasbandy S., Hajishafieha J.* Numerical solution to the Falkner–Skan equation: a novel numerical approach through the new rational α -polynomials // Applied Mathematics and Mechanics (English Edition). – 2021. – Vol. 42. – № 10. – P. 1449–1460. doi: <http://dx.doi.org/10.1007/s10483-021-2777-5>.
- [11] *Asaithambi A.* On solving the nonlinear Falkner–Skan boundary-value problem: a review // Fluids. – 2021. – Vol. 6. – Art. 153. doi: <http://dx.doi.org/10.3390/fluids6040153>.
- [12] *Magyari E.* On the free streamline solutions of the Falkner–Skan equation // European Journal of Mechanics / B Fluids. – 2021. – Vol. 88. – P. 243–250. doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.euromechflu.2021.04.007>.
- [13] *Khan M., Salahuddin T., Ayub S., Altanji M.* A Blasius boundary layer study for generalized viscosity model with thermo-physical properties and Falkner–Skan approach // Alexandria Engineering Journal. – 2023. – Vol. 81. – P. 444–448. doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.aej.2023.09.022>.
- [14] *Bilal S., Yasir M., Riaz M.B.* Thermal characteristics of Falkner–Skan flow of time-dependent Maxwell material with varying viscosity and thermal conductivity // International Journal of Thermofluids. – 2024. – Vol. 24. – Art. 100833. doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijft.2024.100833>.

- [15] *Subhan F., Nisar K.S., Raja M.A.Z., Uddin I., Shoaib M., Ullah K., Islam S., Munjam S.R.* Novel quartic spline method for boundary layer fluid flow problem of Falkner–Skan model with wall stretching and transfer of mass effects // *Case Studies in Thermal Engineering*. – 2024. – Vol. 53. – Art. 103887. doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.csite.2023.103887>.
- [16] *Fusi L., Tozzi R.* Falkner–Skan boundary layer flow of a fluid with pressure-dependent viscosity past a stretching wedge with suction or injection // *International Journal of Non-Linear Mechanics*. – 2024. – Vol. 163. – Art. 104746.
- [17] *Normurodov Ch.B., Tursunova B.A.* Numerical modeling of the boundary value problem of an ordinary differential equation with a small parameter at the highest derivative by Chebyshev polynomials of the second kind // *Results in Applied Mathematics*. – 2023. – Vol. 19. – Art. 100388. doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.rinam.2023.100388>.
- [18] *Normurodov Ch.B., Abduraximov B.F., Djurayeva N.T.* On estimating the rate of convergence of the initial integration method // *AIP Conference Proceedings*. – 2024. – Vol. 3244. – № 1. doi: <http://dx.doi.org/10.1063/5.0242041>.
- [19] *Normurodov Ch.B., Djurayeva N.T., Normatova M.M.* High-accuracy and efficient method for studying the dynamics of derivatives of different orders of a singularly perturbed equation // *Chebyshevskii Sbornik*. – 2025. – Vol. 26. – № 4. – P. 357–369.
- [20] *Normurodov Ch.B., Deraman F., Anuar M.S., Asi S.M.* One effective method for solving singularly perturbed equations // *Malaysian Journal of Science*. – 2025. – Vol. 44. – № 1. – P. 63–69. doi: <http://dx.doi.org/10.22452/mjs.vol144no1.8>.
- [21] *Normurodov Ch.B., Ziyakulova Sh.A., Murodov S.K.* On one highly accurate and efficient method for solving the biharmonic equation // *International Journal of Applied Mathematics*. – 2025. – Vol. 38. – № 4. – P. 437–453. doi: <http://dx.doi.org/10.12732/ijam.v38i4.1>.
- [22] *Normurodov Ch.B., Toyirov A., Ziyakulova Sh., Viswanathan K.K.* Convergence of spectral-grid method for Burgers equation with initial-boundary conditions // *Mathematics and Statistics*. – 2024. – Vol. 12. – № 2. – P. 115–125. doi: <http://dx.doi.org/10.13189/ms.2024.120201>.
- [23] *Normurodov Ch.B., Solov'ev A.S.* Stability of two-phase gas-solid particle flow in a boundary layer // *Fluid Dynamics*. – 1987. – Vol. 22. – № 2. – P. 217–221. doi: <http://dx.doi.org/10.1007/BF01052251>.
- [24] *Normurodov Ch.B., Solov'ev A.S.* Effect of suspended particles on the stability of plane Poiseuille flow // *Fluid Dynamics*. – 1986. – Vol. 21. – № 1. – P. 38–44.
- [25] *Loitsyanskii L.G.* *Laminar Boundary Layer*. – Moscow: Fizmatgiz, 1962. – 479 p.

UDC 519.624.3

**NUMERICAL STUDY OF THE DYNAMICS OF
DERIVATIVES OF VARIOUS ORDERS OF THE
FALKNER–SKAN EQUATION DEPENDING ON THE
PRESSURE GRADIENT**

Tilovov M.A.

mtilovov21@gmail.com

Termez state university,

43, Barkamol Avlod str., Termez, 190111 Uzbekistan.

This paper studies the dynamics of derivatives of various orders of the Falkner–Skan (FS) equation in the presence of a longitudinal pressure gradient. The FS equation is a nonlinear singularly perturbed third-order equation, and the behaviour of its solution and derivatives for various values of the form parameter β , which is related to the pressure gradient, remains largely unexplored. The first derivative determines the velocity profile of the main flow in the boundary layer and is important for hydrodynamic stability analysis. The FS equation is reduced to a Cauchy problem for three nonlinear first-order ordinary differential equations, solved by the fourth-order Runge–Kutta method in vector form. Results are obtained for positive, zero, and negative pressure gradients. At $\beta = 0$ the profile coincides with the Blasius profile; for $\beta < 0$ the boundary layer thickens and may separate; for $\beta > 0$ its thickness decreases.

Keywords: Falkner–Skan equations, pressure gradient, velocity profile.

Citation: Tilovov M.A. 2026. Numerical study of the dynamics of derivatives of various orders of the Falkner–Skan equation depending on the pressure gradient. *Problems of Computational and Applied Mathematics*. 3(73): 139-152.

DOI: https://doi.org/10.71310/pcam.3_73.2026.10

HISOBLASH VA AMALIY МАТЕМАТИКА MUAMMOLARI

ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ
И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
PROBLEMS OF COMPUTATIONAL
AND APPLIED MATHEMATICS

ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

№ 3(73) 2026

Журнал основан в 2015 году.

Издается 6 раз в год.

Учредитель:

Научно-исследовательский институт развития цифровых технологий и
искусственного интеллекта.

Главный редактор:

Равшанов Н.

Заместители главного редактора:

Арипов М.М., Шадиметов Х.М., Ахмедов Д.Д.

Ответственный секретарь:

Убайдуллаев М.Ш.

Редакционный совет:

Азамов А.А., Алоев Р.Д., Амиргалиев Е.Н. (Казахстан), Арушанов М.Л.,
Бурнашев В.Ф., Джумаёзов У.З., Загребина С.А. (Россия), Задорин А.И. (Россия),
Игнатъев Н.А., Ильин В.П. (Россия), Иманкулов Т.С. (Казахстан),
Исмагилов И.И. (Россия), Кабанихин С.И. (Россия), Курбонов Н.М., Маматов Н.С.,
Мирзаев Н.М., Мурадов Ф.А., Назирова Э.Ш., Нормуродов Ч.Б., Нуралиев Ф.М.,
Опанасенко В.Н. (Украина), Расулмухамедов М.М., Садуллаева Ш.А.,
Старовойтов В.В. (Беларусь), Хаётов А.Р., Халджигитов А., Хамдамов Р.Х.,
Хужаев И.К., Хужаеров Б.Х., Эшмаматова Д.Б., Дустмуродова Ш.Ж.,
Чье Ен Ун (Россия), Шабозов М.Ш. (Таджикистан), Dimov I. (Болгария),
Li Y. (США), Mascagni M. (США), Min A. (Германия), Singh M. (Южная Корея).

Журнал зарегистрирован в Агентстве информации и массовых коммуникаций при
Администрации Президента Республики Узбекистан.

Свидетельство №0856 от 5 августа 2015 года.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

При перепечатке материалов ссылка на журнал обязательна.

За точность фактов и достоверность информации ответственность несут авторы.

Адрес редакции:

100125, г. Ташкент, м-в. Буз-2, 17А.

Тел.: +(998) 71 263-41-98.

Э-почта: journals@airi.uz.

Веб-сайт: <https://journals.airi.uz>.

Дизайн и вёрстка:

Шарипов Х.Д.

Отпечатано в типографии НИИ РЦТИИ.

Подписано в печать 25.06.2026 г.

Формат 60x84 1/8. Заказ №3. Тираж 100 экз.

Содержание

Яхшибаев Д.С., Боборахимов Б.И.

Математическое моделирование поступления многофазного потока смеси в стратифицированное водохранилище и разрушения слоистой структуры . . . 7

Бахтиёрв Б.Б., Хужаев И.К., Туропова Н.В.

Математическая модель и анализ гашения гидравлического удара с помощью воздушного колпака 25

Бегимов О.М., Хужаев И.К., Мамадалиев Х.А.

Исследование скорости распространения малых возмущений давления в газожидкостной среде с учетом массовой концентрации газа и деформации стенки трубопровода 37

Эргашев Д.Й., Хужаев Ж.И., Ахмаджонов С.С.

Математическая модель процесса теплоотдачи от жидкого теплоносителя, текущего по оребренному прямоугольными ребрами цилиндрическому трубопроводу 50

Музаффаров С.А., Маратов Х.У., Хамдамов А.А.

Вычислительное моделирование вертикально-осевой ветроэнергетической установки с пассивным изменением шага лопастей для условий слабых ветров 61

Хожиккулов Ш.Ш., Бегимов О.М., Обиджонов А.Ж.

Исследование динамики переходных процессов, связанных с изменением расхода в конце участка трубопровода, с учетом и без учета силы сопротивления 75

Равшанов Ш.А., Боборахимова М.И., Чулмиев Ш.И.

Моделирование тепло- и массообмена в рельефном трубопроводе с постоянными и изменяющимися диаметрами 90

Равшанов Н., Боборахимов Б.И., Бердиёров Ш.Ш.

Характеристики загрязнения мембраны в процессе фильтрации и транспортировки в цилиндрическом пористом фильтре 104

Халджигитов А.А., Бобоназаров А.А., Рахмонова Р.А., Тиловов О.О.

Численное моделирование задач теории упругости в напряжениях методом конечных элементов 125

Тиловов М.А.

Численное исследование динамики производных различного порядка уравнения Фолкнера–Скэна в зависимости от градиента давления 139

Жумаев З.З.

Приближённое решение задач с начальными условиями для дифференциальных уравнений первого порядка с использованием комбинированного метода Рунге–Кутты и метода с кусочно-постоянным аргументом 153

Contents

<i>Yakhshibaev D.S., Boborakhimov B.I.</i> Mathematical modeling of multiphase mixture inflow into a stratified reservoir and the breakdown of the layered structure	7
<i>Bakhtiyorov B.B., Khujaev I.K., Turapova N.V.</i> Mathematical model and analysis of water hammer damping using an air vessel .	25
<i>Begimov O.M., Khujaev I.K., Mamadaliev Kh.A.</i> Investigation of the propagation velocity of small pressure disturbances in a gas–liquid medium with account for gas mass concentration and pipeline wall deformation	37
<i>Ergashev D.Y., Khujaev J.I., Akhmadjonov S.S.</i> A mathematical model of heat transfer from a liquid coolant flowing through a cylindrical pipeline finned with rectangular fins	50
<i>Muzaffarov S.A., Maratov Kh.U., Hamdamov M.M.</i> Computational modeling of a passive-pitch low-wind vertical-axis wind turbine .	61
<i>Khozhikulov Sh.Sh., Begimov O.M., Obidjonov A.J.</i> Investigation into the dynamics of transient processes associated with flow rate changes at the end of a pipeline section, both with and without resistance force .	75
<i>Ravshanov Sh.A., Boborakhimova M.I., Chulliev Sh.I.</i> Modelling heat and mass transfer in a relief pipeline with constant and varying diameters	90
<i>Ravshanov N., Boborakhimov B.I., Berdiyev Sh.Sh.</i> Membrane fouling characteristics during filtration and transport processes in a cylindrical porous filter	104
<i>Khaldjigitov A.A., Bobonazarov A.A., Rakhmonova R.A., Tilovov O.O.</i> Numerical modeling of elasticity theory problems in terms of stresses using the finite element method	125
<i>Tilovov M.A.</i> Numerical study of the dynamics of derivatives of various orders of the Falkner–Skan equation depending on the pressure gradient	139
<i>Jumaev Z.Z.</i> Approximate solution of initial value problems for first-order differential equations using a combined Runge-Kutta and piecewise constant argument method .	153