

УДК 519.63

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В НАПРЯЖЕНИЯХ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

<sup>1</sup>Халджигитов А.А., <sup>1\*</sup>Бобоназаров А.А., <sup>2</sup>Рахмонова Р., <sup>1</sup>Тиловов О.  
\*akmalbobo1991@gmail.com

<sup>1</sup>Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека,  
100174, Узбекистан, г. Ташкент, ул. Университетская, 4;

<sup>2</sup>Самаркандский филиал Ташкентского университета информационных технологий,  
140100, Узбекистан, Самарканд, ул. Шохрух Мирзо 47А.

Статья посвящена постановке плоских задач теории упругости в напряжениях и их численному решению методом конечных элементов Галёркина. На основе уравнений равновесия, геометрических соотношений и физических законов упругости сформулирована система дифференциальных уравнений, описывающая напряжённое состояние упругой среды в плоской постановке. Метод Галёркина позволяет получить слабую форму краевой задачи и перейти к дискретной модели. Построены билинейные формы и локальные матрицы конечных элементов, необходимые для формирования глобальной системы алгебраических уравнений. Для практической реализации созданы программы на языках C++ и FreeFEM++. Достоверность подхода подтверждена на классической задаче Кирша о распределении напряжений вокруг кругового отверстия в упругой пластине: результаты обеих программ хорошо согласуются между собой и с известными аналитическими решениями, что подтверждает корректность постановки и применимость метода.

**Ключевые слова:** задача в напряжениях, вариационная задача, метод Галеркина, МКЭ, базисные функции, задача Кирша, FreeFEM++.

**Цитирование:** Халджигитов А.А., Бобоназаров А.А., Рахмонова Р.А., Тиловов О.О. Численное моделирование задач теории упругости в напряжениях методом конечных элементов // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2026. – № 3(73). – С. 125-138.

**DOI:** [https://doi.org/10.71310/pcam.3\\_73.2026.09](https://doi.org/10.71310/pcam.3_73.2026.09)

### 1 Введение

Прочность и долговечность механических конструкций и инженерных сооружений прежде всего зависят от их геометрической структуры и условий нагружения. В прикладной механике отверстия, полости и другие геометрические неоднородности являются неотъемлемой частью конструктивных элементов, причём именно в этих областях возникают неравномерное распределение напряжений и локальные зоны разрушения. Явление концентрации напряжений имеет фундаментальное значение в теории упругости и играет важную роль при определении прочности и надёжности конструкций.

Одной из классических задач плоской теории упругости является задача определения распределения напряжений в пластинке с круглым отверстием в центре, решённая G. Kirsch [1]. Это решение впоследствии стало широко известным под названием “задача Кирша” и было принято в качестве одной из основных задач при оценке допускаемых напряжений. С помощью решения задачи Кирша были подробно

исследованы максимальные напряжения, возникающие вблизи отверстия, и характер их распределения [1, 2].

Теоретические основы теории упругости подробно изложены в фундаментальных трудах таких учёных, как Nowacki [3], Timoshenko - Goodier [4], Филоненко-Бородич [5], Лехницкий [6], где приведены общие уравнения, граничные условия и классические решения для изотропных и анизотропных сред. В этих работах задачи теории упругости в основном ставятся в перемещениях, а напряжения и деформации определяются как вторичные величины с помощью известных соотношений Гука и Коши [3, 6].

Вместе с тем известно, что во многих прикладных задачах, основанных на перемещениях, вычисление напряжений осуществляется с определёнными погрешностями аппроксимации [7]. По этой причине важное значение приобретает идея постановки задач теории упругости непосредственно в напряжениях. Исследования в данном направлении впервые были начаты в работах Бельтрами и Митчелла. В дальнейшем они получили развитие в трудах Победри [8], Бородачёва [9], Кучера [10], Markenscoff [11], Георгиевского и других исследователей. Задачи, поставленные относительно напряжений, как правило, включают уравнения равновесия, уравнения Бельтрами-Митчелла и соответствующие граничные условия [10–12].

Теоретические основы уравнений Бельтрами-Митчелла и их формы в различных системах координат подробно проанализированы в работах Patnaik [13], Андрианова [14], Лурье и Белова [15]. Эти уравнения обеспечивают взаимную согласованность компонентов напряжений и служат для непосредственного определения поля напряжений в задачах плоской и пространственной теории упругости. Важное место при постановке задач в напряжениях занимают также подходы, основанные на функциях напряжений Эри и Максвелла.

Для реальных конструкций со сложной геометрией, неравномерным нагружением и граничными условиями нахождение аналитических решений, как правило, связано с трудностями и во многих случаях оказывается невозможным. Поэтому в теории упругости широко применяются такие методы, как метод конечных разностей, метод конечных элементов и метод граничных элементов. В настоящее время при решении задач прикладной механики широко используется метод конечных элементов (МКЭ). Метод конечных элементов основан на сведении дифференциальной задачи к вариационной задаче. При применении метода конечных элементов требуется выполнение условий симметричности и положительной определённости дифференциального оператора. Выполнение этих условий играет важную роль при построении квадратичного функционала Лагранжа, а также в обеспечении существования и единственности решения. Обычно при переходе от граничных задач к вариационным возникают определённые трудности. Однако вопрос перехода от дифференциальных задач, поставленных в перемещениях, к вариационной задаче в литературе освещён достаточно полно.

В последние годы в решении задач прикладной механики всё более широкое развитие получает применение метода конечных элементов в рамках метода Галёркина [7]. Особенно эффективным этот подход оказывается при численном решении дифференциальных уравнений, поставленных относительно напряжений.

Основная сущность метода Галёркина заключается в проверке условия ортогональности заданного дифференциального оператора к полной системе базисных функций, удовлетворяющих граничным условиям [7]. Если дифференциальный оператор удовлетворяет условиям симметричности и положительной определённости,

то функционал, полученный из условия ортогональности, совпадает с квадратичным функционалом Лагранжа. Разбиение рассматриваемой области на треугольные и другие по форме “конечные элементы”, а также построение полиномов Лагранжа различных порядков на основе условия интерполяции позволяют получить полную и ортогональную систему базисных функций. Изложенный метод конечных элементов Галёркина (МКЭГ) позволяет получать численные решения высокой точности для сложных областей [7].

Классическая задача Кирша [1] и её численные решения рассмотрены в работах Rezini, Khaldi, Rahmani [16], где они сопоставлены с аналитическими решениями [16]. Кроме того, исследования, посвящённые изучению краевых задач теории упругости и термоупругости, изотропных и анизотропных тел относительно напряжений рассмотрены в работах Халджигитова и других [22–24].

Настоящая работа посвящена постановке плоских задач теории упругости относительно напряжений в рамках уравнений Бельтрами-Митчелла, и их численному решению с помощью метода конечных элементов Галёркина. В качестве примера рассмотрена известная задача Кирша [1] о пластинке с круговой полостью в центре и получено её численное решение методом МКЭГ. На основе сопоставления полученных решений с численными результатами, полученными в среде FreeFEM 4.15++ и на языке программирования C++, показаны применимость метода Галеркина в сочетании с методом конечных элементов для решения модельных уравнений теории упругости относительно напряжений, корректность численного метода решения и достоверность полученных результатов.

## 2 Плоская задача теории упругости в напряжениях

Известно, что краевая задача теории упругости в напряжениях состоит из трех уравнений равновесия [7]:

$$\sigma_{ij,j} + X_i = 0, \quad (1)$$

шести уравнений Бельтрами-Митчелля [8]

$$\nabla^2 \sigma_{ij} + \frac{1}{1+\nu} S_{,ij} = -(X_{i,j} + X_{j,i}) - \frac{\nu}{1-\nu} \delta_{ij} X_{k,k}, \quad S = \sigma_{kk}, \quad (2)$$

с соответствующими граничными условиями

$$\sigma_{ij} n_j |_{\Sigma} = S_i, \quad (3)$$

$$\sigma_{ij,j} |_{\Sigma} = 0, \quad (4)$$

где  $\sigma_{ij}$  – тензор напряжений,  $X_i$  – объемные силы,  $S_i$  – поверхностная нагрузка,  $\Sigma$  – поверхность объема  $V$ , состоящая из двух частей  $\Sigma_1, \Sigma_2$ ,  $n_i$  – компоненты внешней нормали к поверхности  $\Sigma$ ,  $\nu$  – коэффициент Пуассона,  $\nabla^2$  – оператор Лапласа.

Заметим, что условие (4) получено рассмотрением уравнений равновесия на границе заданной области [8]. Уравнения (1-4) представляют краевую задачу теории упругости в напряжениях.

В случае плоского напряженного состояния и при отсутствии массовых сил уравнения (1-2) имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial y} &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\nabla^2 \sigma_{12} + \frac{1}{1 + \nu} \frac{\partial}{\partial x \partial y} (\sigma_{11} + \sigma_{22}) = 0. \quad (6)$$

Из уравнений (5-6), взяв соответствующие производные по  $x$  и  $y$ , можно получить систему дифференциальных уравнений второго порядка.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{12}}{\partial x \partial y} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \sigma_{21}}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial y^2} &= 0, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\nabla^2 \sigma_{12} + \frac{1}{1 + \nu} \frac{\partial}{\partial x \partial y} (\sigma_{11} + \sigma_{22}) = 0. \quad (8)$$

Граничные условия на  $\Gamma$  имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} (\sigma_{11} n_1 + \sigma_{12} n_2) \Big|_{\Gamma} &= S_1, \quad (\sigma_{21} n_1 + \sigma_{22} n_2) \Big|_{\Gamma} = S_2, \\ \left( \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial y} \right) \Big|_{\Gamma} &= 0, \quad \left( \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial y} \right) \Big|_{\Gamma} = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Уравнения (7-9) представляют собой плоскую задачу теории упругости в напряжениях. Эти уравнения конечно-разностным методом в прямоугольных областях были решены в работах [22–24]. В случае сложных областей, применение метода конечных элементов, сталкиваются с трудностями, связанными с переходом вариационной задаче т.е. определением квадратичного функционала относительно напряжений. Применение метода конечных элементов в сочетании с методом Галеркина позволяют решать задачи теории упругости, сформулированные относительно напряжений.

### 3 Метод конечных элементов Галёркина для плоской задачи в напряжениях

Рассмотрим метод Галеркина применительно к уравнениям (7-8). Пусть эти уравнения рассматриваются в прямоугольной области с граничными условиями (9). Предположим, что краевую задачу (7-9) можно записать в виде следующего операторного уравнения

$$L\sigma = F, \quad (10)$$

где  $L$  – дифференциальный оператор, описывающий левую часть системы уравнений (7-9),  $\sigma = \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}\}^T$ ,  $F$  – вектор поверхностных и объёмных сил.

Обычно в методе Галеркина решение уравнения ищется в виде следующего ряда [7]

$$\sigma = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i, \quad (11)$$

где  $\varphi_i$  – полная система базисных функций. Предположим, что первая из базисных функций, то есть  $\varphi_1$ , удовлетворяет граничным условиям (9), а остальные – однородным граничным условиям [3].

Подставим решение (11) в уравнение (10), умножим полученное выражение на базисные функции и проинтегрируем по области, в которой рассматривается задача т.е.

$$\int_{\Omega} L\sigma \cdot \varphi_i d\Omega = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (12)$$

Последнее выражение представляет собой систему алгебраических уравнений относительно коэффициентов  $a_i$ . Поскольку  $\varphi_i$  – образуют полную систему базисных функций, при достаточно больших значениях  $n$  приближённое решение с высокой точностью стремится к точному решению [21].

В уравнении (12) оператор  $L\sigma$  содержит вторые производные, и в результате однократного интегрирования по частям подынтегральное выражение приводится к произведениям первых производных от  $\sigma$  и  $\varphi_i$ . Обычно такие интегралы называют билинейными функционалами [21].

Обычно для каждого конечного элемента базисные функции определяются из условия интерполяции, при этом решение ищется в полиномиальной форме [7]. Для треугольного элемента линейная базисная функция имеет следующий вид

$$N_i(x, y) = \frac{1}{2A}(a_i + b_i x + c_i y), \quad i = 1, \dots, 3. \quad (13)$$

Здесь  $A$  – площадь треугольного конечного элемента,  $a_i, b_i, c_i$  – постоянные, определяемые относительно узловых значений искомых функций [7]. В этом случае компоненты напряжений в треугольных конечных элементах имеют следующий вид

$$\begin{aligned} \sigma_{11}(x, y) &= \sum_{i=1}^3 N_i(x, y) \sigma_{11}^{(i)}, \\ \sigma_{22}(x, y) &= \sum_{i=1}^3 N_i(x, y) \sigma_{22}^{(i)}, \\ \sigma_{12}(x, y) &= \sum_{i=1}^3 N_i(x, y) \sigma_{12}^{(i)}. \end{aligned} \quad (14)$$

Эти выражения представляют разложение (11) для треугольного конечного элемента. Здесь  $\sigma_{pq}^{(i)}$  – неизвестные величины в  $i$  – м узле элемента,  $N_i(x, y)$  – базисные функции, которые играют важную роль при построении локальной и глобальной матриц жёсткости.

Предположим, что область  $\Omega$ , в которой рассматривается задача (7-9), разбита на конечные элементы треугольной формы. Построим локальные матрицы жёсткости для одного конечного элемента. Для этого умножим первое уравнение системы (7)<sub>1</sub> на  $[N] = [N_1, N_2, N_3]$  и проинтегрируем по частям [17]:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega^e} [N]^T \left( \frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{12}}{\partial x \partial y} \right) d\Omega = \\ &= \int_{\Omega^e} \left[ \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} [N]^T \right) - \frac{\partial [N]^T}{\partial x} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} \right\} + \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x} [N]^T \right) - \frac{\partial [N]^T}{\partial y} \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x} \right\} \right] d\Omega = \\ &= \int_{\partial \Omega^e} \left( \frac{\partial N}{\partial x} [N]^T \{ \sigma_{11} \} n_1 + \frac{\partial N}{\partial x} [N]^T \{ \sigma_{12} \} n_2 \right) ds - \\ & \quad - \int_{\Omega^e} \left( \frac{\partial [N]^T}{\partial x} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} + \frac{\partial [N]^T}{\partial y} \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x} \right) d\Omega = 0. \end{aligned}$$

$$\int_{\partial\Omega^e} \frac{\partial N}{\partial x} [N]^T S_1 ds - \int_{\Omega^e} \left[ \frac{\partial [N]^T}{\partial x} \frac{\partial N}{\partial x} \{\sigma_{11}\} + \frac{\partial [N]^T}{\partial y} \frac{\partial N}{\partial x} \{\sigma_{12}\} \right] d\Omega = \int_{\partial\Omega^e} \frac{\partial N}{\partial x} [N]^T S_1 ds -$$

$$- \left( \frac{\partial [N]^T}{\partial x} \frac{\partial N}{\partial x} \{\sigma_{11}\} + \frac{\partial [N]^T}{\partial y} \frac{\partial N}{\partial x} \{\sigma_{12}\} \right) A = 0,$$

где  $[N]^T$  – столбец. С учётом выражения (14) и граничных условий (9) уравнение (7)<sub>1</sub> принимает следующий вид:

$$\left( \frac{\partial [N]^T}{\partial x} \frac{\partial N}{\partial x} \{\sigma_{11}\} + \frac{\partial [N]^T}{\partial y} \frac{\partial N}{\partial x} \{\sigma_{12}\} \right) A = \int_{\partial\Omega^e} S_1 [N]^T \frac{\partial N}{\partial x} ds. \quad (15)$$

Умножив уравнения (7)<sub>2</sub> и (8) на  $[N] = [N_1, N_2, N_3]$  и выполнив те же преобразования, что и выше, можно получить следующие уравнения:

$$\left( \frac{\partial [N]^T}{\partial x} \frac{\partial N}{\partial y} \{\sigma_{21}\} + \frac{\partial [N]^T}{\partial y} \frac{\partial N}{\partial y} \{\sigma_{22}\} \right) A = \int_{\partial\Omega} S_2 [N]^T \frac{\partial N}{\partial y} ds, \quad (16)$$

$$\left( \left[ \frac{\partial [N]^T}{\partial x} \frac{\partial N}{\partial x} + \frac{\partial [N]^T}{\partial y} \frac{\partial N}{\partial y} \right] \{\sigma_{12}\} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial [N]^T}{\partial y} \frac{\partial N}{\partial x} \{\sigma_{11}\} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial [N]^T}{\partial x} \frac{\partial N}{\partial y} \{\sigma_{22}\} \right) A = \quad (17)$$

$$= \frac{\nu}{1+\nu} \int_{\partial\Omega} [N]^T \frac{\partial N}{\partial x} \{\sigma_{12}\} n_1 ds + \frac{\nu}{1+\nu} \int_{\partial\Omega} [N]^T \frac{\partial N}{\partial y} \{\sigma_{12}\} n_2 ds.$$

Систему уравнений (15-17) можно записать в матричном виде:

$$K\sigma = F, \quad (18)$$

где  $K$  – матрица жёсткости,  $\sigma$  – вектор узловых значений напряжений,  $F$  – вектор узловых значений поверхностной нагрузки.

Матрица жёсткости (18) для одного конечного элемента имеет вид:

$$K^{(e)} = \begin{bmatrix} K^{ii} & K^{ij} & K^{ik} \\ K^{ji} & K^{jj} & K^{jk} \\ K^{ki} & K^{kj} & K^{kk} \end{bmatrix}, \quad (19)$$

$$\sigma = [\sigma_{11}^m, \sigma_{22}^m, \sigma_{12}^m]^T, \quad F = [f_1^m, f_2^m, f_3^m]^T,$$

где

$$K^{mn} = \begin{bmatrix} k_{11}^{mn} & k_{12}^{mn} & k_{13}^{mn} \\ k_{21}^{mn} & k_{22}^{mn} & k_{23}^{mn} \\ k_{31}^{mn} & k_{32}^{mn} & k_{33}^{mn} \end{bmatrix}, \quad m, n \in \{i, j, k\},$$

$$\begin{aligned}
k_{11}^{mn} &= \frac{\partial N_m}{\partial x} \frac{\partial N_n}{\partial x} A, & k_{12}^{mn} &= 0, & k_{13}^{mn} &= \frac{\partial N_m}{\partial y} \frac{\partial N_n}{\partial x} A, \\
k_{21}^{mn} &= 0, & k_{22}^{mn} &= \frac{\partial N_m}{\partial y} \frac{\partial N_n}{\partial y} A, & k_{23}^{mn} &= \frac{\partial N_m}{\partial x} \frac{\partial N_n}{\partial y} A, \\
k_{31}^{mn} &= \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial N_m}{\partial y} \frac{\partial N_n}{\partial x} A, & k_{32}^{mn} &= \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial N_m}{\partial x} \frac{\partial N_n}{\partial y} A, \\
k_{33}^{mn} &= \left( \frac{\partial N_m}{\partial x} \frac{\partial N_n}{\partial x} + \frac{\partial N_m}{\partial y} \frac{\partial N_n}{\partial y} \right) A,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_1^m &= \int_{\partial\Omega} \frac{\partial N}{\partial x} [N]^T S_1 ds, & f_2^m &= \int_{\partial\Omega} \frac{\partial N}{\partial y} [N]^T S_2 ds, \\
f_3^m &= \frac{\nu}{1+\nu} \int_{\partial\Omega} \frac{\partial N}{\partial x} [N]^T \{\sigma_{12}\} n_1 ds + \frac{\nu}{1+\nu} \int_{\partial\Omega} \frac{\partial N}{\partial y} [N]^T \{\sigma_{12}\} n_2 ds.
\end{aligned}$$

Используя матрицы (19), полученные для одного конечного элемента, можно построить глобальную матрицу жёсткости для всей области. В результате получаем систему линейных уравнений относительно узловых значений компонент тензора напряжений. Решая эту систему уравнений методом Гаусса, могут быть найдены численные результаты [18].

При численном решении задач прикладной механики целесообразно использовать язык программирования FreeFEM++, предназначенный для решения дифференциальных уравнений методом конечных элементов. Основу FreeFEM++ составляет язык программирования C++, дополненный алгоритмами метода конечных элементов. Для численного решения дифференциальных уравнений в FreeFEM++ необходимо предварительно перейти от дифференциальной задачи к вариационной постановке и построить соответствующий функционал. В FreeFEM++ данный функционал требуется задавать в билинейной форме с использованием метода Галёркина. С практической точки зрения построение билинейного функционала для системы дифференциальных уравнений можно выполнить в следующем порядке:

- умножить каждое дифференциальное уравнение на соответствующую базисную функцию и проинтегрировать по частям по заданной области;
- при этом, необходимо учесть в интеграле граничные условия и равенство нулю базисных функций на границе области;

– найти сумму интегралов, полученных для каждого дифференциального уравнения.

Ниже приведены билинейные формы-функционалы, полученные для краевой задачи (7–9):

$$\Phi = \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} \frac{\partial \bar{\sigma}_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial y} \frac{\partial \bar{\sigma}_{22}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x} \frac{\partial \bar{\sigma}_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial y} \frac{\partial \bar{\sigma}_{12}}{\partial y} + \right. \\ \left. + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} \frac{\partial \bar{\sigma}_{12}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial y} \frac{\partial \bar{\sigma}_{12}}{\partial x} + \frac{1}{1+\nu} \left( \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} \frac{\partial \bar{\sigma}_{12}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial y} \frac{\partial \bar{\sigma}_{12}}{\partial x} \right) \right] d\Omega. \quad (20)$$

Для численного решения задачи с использованием FreeFEM++ требуется разбить область на конечные элементы и, с учётом билинейной формы и граничных условий, написать программу на C++.

#### 4 Задача Кирша

В предыдущих параграфах были сформулированы плоские краевые задачи теории упругости в напряжениях. Для численного решения этих задач применяем метод конечных элементов Галеркина. Для обоснования справедливости применения метода МКЭ Галеркина для решения краевых задач теории упругости в напряжениях, в качестве примера рассмотрим известную задачу Кирша.

Как известно, задача Кирша представляет растяжение бесконечной или достаточно большой упругой пластинки размерами  $(2l, 2h)$  с круглой полостью радиуса  $r$ , расположенной в центре (рис.1). Предполагается, что пластина изготовлена из однородного, изотропного и линейно-упругого материала, и требуется определить её напряжённое состояние.

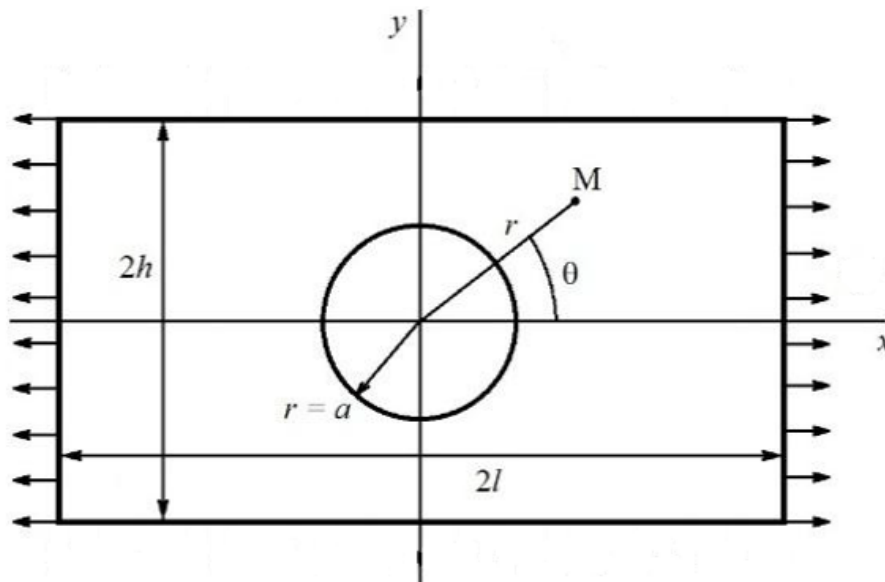


Рис. 1 Растяжение пластины с круглым отверстием в центре

На рисунке 2 представлено разбиение пластины с круглым отверстием с  $N$  треугольными конечными элементами и узлами. Дискретизация области на треугольные

конечные элементы произведена с помощью пакета FreeFEM, причем вблизи отверстия сетка сгущена для более точного учета концентрации напряжений. Далее по координатам узловых точек построенной сетки был реализован численный алгоритм решения задачи.

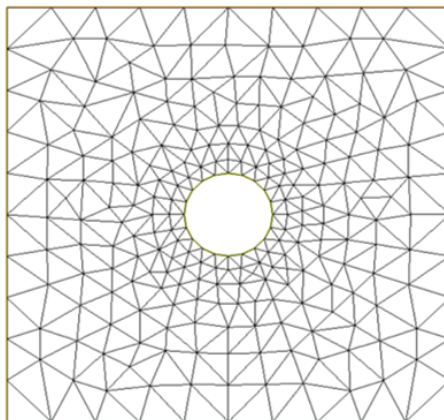


Рис. 2 Разбиение на конечные элементы треугольной формы

При этом граничные условия имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
 x = \pm l : \quad & \sigma_{11} = S, \quad \sigma_{12} = 0, \quad \sigma_{22} = 0, \\
 y = \pm h : \quad & \sigma_{22} = 0, \quad \sigma_{12} = 0, \quad \sigma_{23} = 0, \\
 r = a : \quad & \sigma_{rr}(r = a, \theta) = 0, \quad \sigma_{r\theta}(r = a, \theta) = 0,
 \end{aligned}
 \tag{21}$$

где  $\theta$  – угол, отсчитываемый от оси  $x$  от центра окружности,  $S = 1$ .

Глобальная матрица, образованная с помощью локальной матрицы жесткости (19), была решена численно методом Гаусса на алгоритмическом языке C++. На рис. 3а. показано распределение напряжения  $\sigma_{11}$  в пластине с центральным отверстием. А на рис. 3б показано распределение напряжения  $\sigma_{11}$  по численному решению задачи Кирша с помощью FreeFEM++, используя билинейный функционал (20).

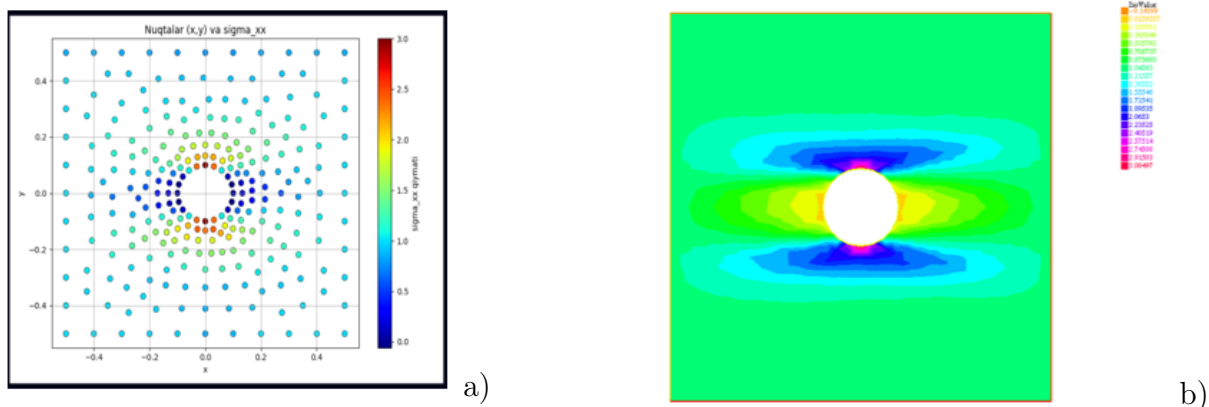
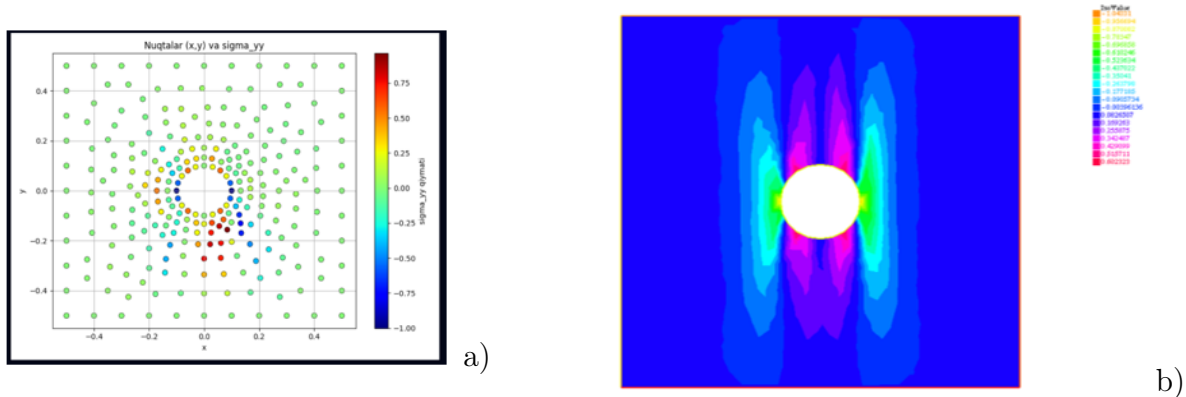
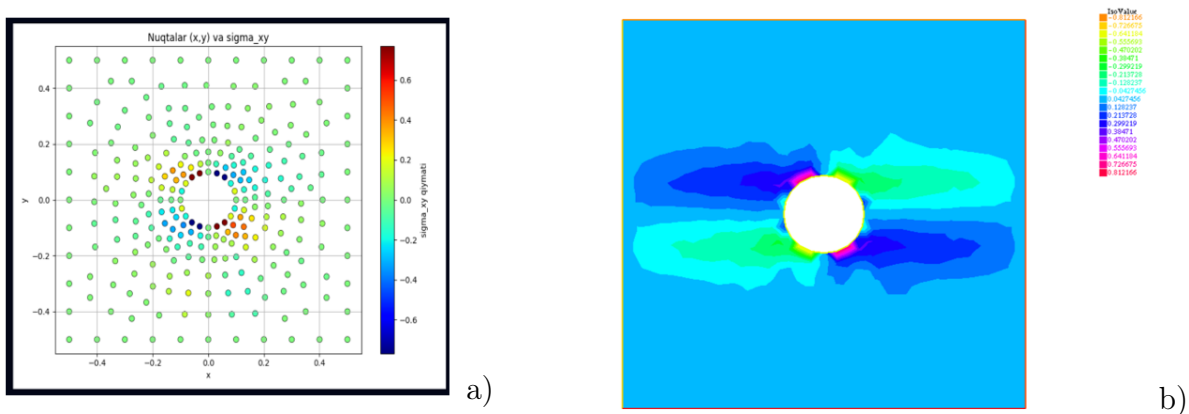


Рис. 3 а – распределение напряжения  $\sigma_{11}$  по методу МКЭ Галеркина, б – распределение напряжения  $\sigma_{11}$  по пакету FreeFEM++

Как видно из рисунков 3 *a, b*, при приложении равномерной нагрузки с двух боковых сторон максимальное напряжение в верхней и нижней точках отверстия наблюдается именно по компоненте  $\sigma_{11}$ , и его значение равно  $3S$ . По мере удаления от окружности значение напряжения становится равным нагрузке, заданной на границе. Аналогичное сравнение проведено для напряжений  $\sigma_{22}$  на *рис. 4 a, b*.



**Рис. 4** а – распределение напряжения  $\sigma_{22}$  по методу МКЭ Галеркина, б – распределение напряжения  $\sigma_{22}$  по пакету FreeFEM++



**Рис. 5** а – распределение напряжения  $\sigma_{12}$  по методу МКЭ Галеркина, б – распределение напряжения  $\sigma_{12}$  по пакету FreeFEM++

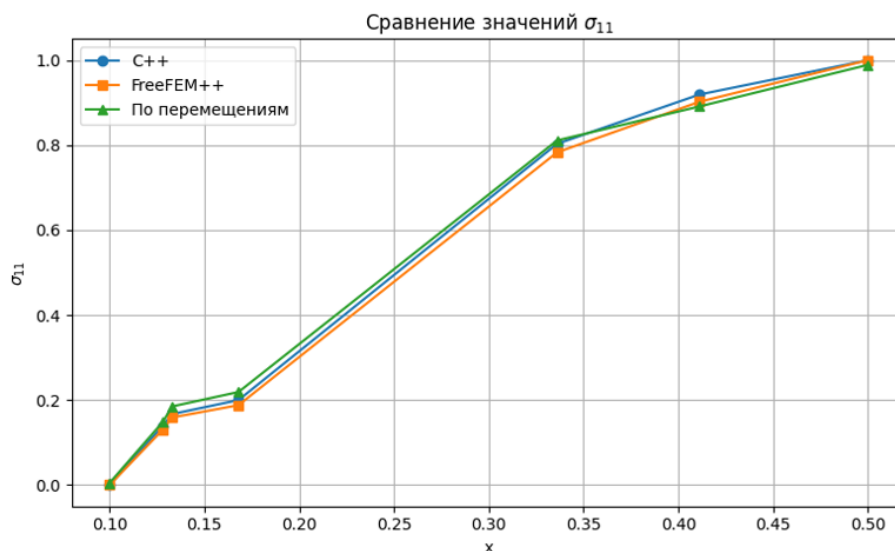
На рисунках 4а и 5а, представлены результаты, полученные на С++ по решению систему линейных уравнений с матрицей жёсткости  $K$  (18) построенных методом конечных элементов Галёркина. На рисунках *b* приведены результаты, полученные по FreeFEM++ с использованием функционала (20) построенного на основе метода Галёркина.

В таблице 1 сопоставлены численные значения напряжения  $\sigma_{11}$ , в узловых точках, наиболее близких к центральной линии параллельной оси  $Ox$  проходящей через центр отверстия, полученные на основе программ написанных на языках программирования С++ и FreeFEM++, соответственно. На третьей строчке приведены также результаты решения задачи Кирша сформулированной относительно перемещений по FreeFEM++.

**Таблица 1.** Значения напряжений  $\sigma_{11}$  на центральной линии параллельной оси ОХ.

(x,y)	(0.1; 0)	(0.128;0.037)	(0.133; 0.0)	(0.168;0.009)	(0.336;0.013)	(0.411;0.0)	(0.5; 0.0)
C++	0	0.139	0.167	0.200	0.803	0.919	1
FreeFEM	0	0.130	0.159	0.188	0.783	0.902	1
В перемеще- ниях	0.005	0.148	0.185	0.219	0.811	0.891	0.989

Как видно из таблицы 1, значения напряжения  $\sigma_{11}$ , полученные тремя способами очень близки, что показывает на справедливость полученных численных результатов.



**Рис. 6** Сравнение значений напряжений  $\sigma_{11}$  полученных по C++ и FreeFEM+

На рис.6 проведено сравнение значений  $\sigma_{11}$  в точках, расположенных по близости центральной линии, проходящей по центру отверстия начиная с точки пересечения до конца правой границы. Из рисунка видно, что кривые по построенные численным результатам задачи, полученные тремя методами, почти совпадают.

Сравнением графиков и численных результатов, полученных различными методами, обеспечивается адекватность построенных математических моделей относительно напряжений, и справедливость применения метода конечных элементов Галеркина для их численного решения.

## 5 Заключение

В настоящей работе была рассмотрена краевая задача теории упругости, сформулированная непосредственно в напряжениях, и предложен эффективный численный подход к её решению на основе метода конечных элементов Галёркина. Исходная математическая модель построена на базе уравнений равновесия и уравнений совместности Бельтрами-Митчелла, что позволило получить систему дифференциальных уравнений второго порядка относительно компонент тензора напряжений. Такая постановка задачи даёт возможность непосредственно исследовать поле напряжений без использования промежуточных переменных перемещений, что имеет важное зна-

чение при анализе напряжённого состояния конструктивных элементов со сложной геометрией и неоднородными условиями нагружения.

Для численного решения сформулированной краевой задачи применён метод Галёркина, позволяющий перейти от исходной дифференциальной постановки к вариационной форме. На основе данного подхода были построены соответствующие билинейные функционалы и получены локальные матрицы жёсткости конечных элементов, которые далее использовались для формирования глобальной системы алгебраических уравнений. Дискретизация рассматриваемой области произведена с использованием треугольных конечных элементов, а аппроксимация искомых функций осуществлена с помощью линейных базисных функций.

В качестве тестового примера для проверки корректности рассмотренной математической модели и численного метода была рассмотрена классическая задача Кирша о растяжении упругой пластинки с круговым отверстием в центре. Численное решение данной задачи было получено методом конечных элементов Галёркина. Для реализации алгоритма разработаны программные средства на языке программирования C++, а также на языке FreeFEM++ (язык C++ интегрированный методом конечных элементов) предназначенном для решения дифференциальных уравнений математической физики. Проведённое сравнение результатов, полученных с использованием разработанной программы на C++ и FreeFEM++, показало их высокую степень согласованности. Полученные распределения напряжений хорошо согласуются как между собой, так и с известными теоретическими закономерностями для задачи Кирша. Это подтверждает корректность предложенной постановки краевой задачи в напряжениях и эффективность применения метода конечных элементов Галёркина для её численного решения.

Результаты проведённого исследования демонстрируют практическую применимость предложенного подхода для анализа напряжённого состояния упругих тел. Разработанная методика может быть использована при решении более сложных задач механики сплошных сред, включая статические и динамические задачи теории упругости и пластичности, а также с учетом температуры и свойств анизотропии материалов при различных граничных условиях.

## Литература

- [1] *Kirsch G.* Die Theorie der Elastizität und die Bedürfnisse der Festigkeitslehre // Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure. – 1898. – Vol. 42. – P. 797–807.
- [2] *Ritz W.* Theorie der Transversalschwingungen einer quadratischen Platte mit freien Rändern // Annalen der Physik. – 1909. – Vol. 333 (4). – P. 737–786. doi: <http://dx.doi.org/10.1002/andp.19093330403>.
- [3] *Nowacki W.* Theory of Elasticity. – Oxford; New York: Pergamon Press, 1970.
- [4] *Timoshenko S.P., Goodier J.N.* Theory of Elasticity. – 3rd ed. – New York: McGraw-Hill, 1970.
- [5] *Филоненко-Бородич М.М.* Теория упругости. – М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1959.
- [6] *Лехницкий С.Г.* Теория упругости анизотропного тела. – М.: Наука, 1977.
- [7] *Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Zhu J.Z.* The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals. – 7th ed. – Oxford: Butterworth-Heinemann, 2013. doi: <http://dx.doi.org/10.1016/C2009-0-24909-9>.
- [8] *Победря Б.Е.* Численные методы в теории упругости и пластичности. – М.: Издательство МГУ, 1981. – 569 с.

- [9] *Borodachev N.M.* Three-dimensional problem of the theory of elasticity in strains // Strength of Materials. – 1995. – Vol. 27. – P. 296–299. doi: <http://dx.doi.org/10.1007/BF02208501>.
- [10] *Kucher V., Markenscoff X., Paukshto M.* Some Properties of the Boundary Value Problem of Linear Elasticity in Terms of Stresses // Journal of Elasticity. – 2004. – Vol. 74. – P. 135–145.
- [11] *Li S., Gupta A., Markenscoff X.* Conservation laws of linear elasticity in stress formulations // Proceedings of the Royal Society A. – 2005. – Vol. 461. – P. 99–116. doi: <http://dx.doi.org/10.1098/rspa.2004.1347>.
- [12] *Georgievskii D.V.* General solutions of weakened equations in terms of stresses in the theory of elasticity // Moscow University Mechanics Bulletin. – 2013. – Vol. 68. – P. 1–5. doi: <http://dx.doi.org/10.3103/S0027133013010019>.
- [13] *Patnaik S.N., Hopkins D.A.* Completed Beltrami–Michell formulation for analyzing radially symmetrical bodies // International Journal of Physical Sciences. – 2007. – Vol. 9(5). doi: <http://dx.doi.org/10.2514/6.2006-2124>.
- [14] *Andrianov I., Topol H.* Compatibility conditions: number of independent equations and boundary conditions // Mechanics and Physics of Structured Media. – 2022. – P. 123–140. doi: <http://dx.doi.org/10.1016/B978-0-32-390543-5.00011-6>.
- [15] *Лурье А.И.* Теория упругости. – М.: Наука, 1970. – 376 с.
- [16] *Rezini D., Khaldi A., Rahmani Y.* On the Boundary Value Kirsch’s Problem // Journal of Mechanics. – 2016. – Vol. 32. – № 1. – P. 1–10. doi: <http://dx.doi.org/10.1017/jmech.2015.93>.
- [17] *Desai Y.M., Eldho T.I., Shah A.H.* Finite element method with applications in engineering. – Cambridge: Cambridge University Press, 2010. – 816 p.
- [18] *Eslami M.R., Hetnarski R.B., Ignaczak J., Noda N., Sumi N., Tanigawa Y.* Theory of Elasticity and Thermal Stresses: Explanations, Problems and Solutions. – Cham: Springer, 2013. doi: <http://dx.doi.org/10.1007/978-94-007-6356-2>.
- [19] *Sadd M.H.* Elasticity: Theory, Applications, and Numerics. – Amsterdam: Elsevier Academic Press, 2005. doi: <http://dx.doi.org/10.1016/B978-0-12-374446-3.X0001-6>.
- [20] *Жуков М.Ю., Ширяева Е.В.* Использование пакета конечных элементов FreeFem++ для задач гидродинамики, электрофореза и биологии. – Ростов-на-Дону: Изд-во Южного федерального университета, 2008. – 256 с.
- [21] *Ректорис И.* Вариационные методы в математической физике и технике. – М.: Мир, 1985. – 352 с.
- [22] *Халджигитов А.А., Тиловов О.У., Саломов Н.О.* О численном решении плоских задач теории упругости в напряжениях // XIII Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике. – Санкт-Петербург, 2023.
- [23] *Khaldjigitov A., Tilovov O., Xasanova Z.* A new approach to problems of thermoelasticity in stresses // Journal of Thermal Stresses. – 2024. – Vol. 47. – № 9. – P. 1228–1241. doi: <http://dx.doi.org/10.1080/01495739.2024.2379803>.
- [24] *Khaldjigitov A., Xasanova Z., Djumayozov U., Tilovov O., Bobonazarov A.* Plane problems in strains for orthotropic bodies // AIP Conference Proceedings. – 2025. – Vol. 3265. doi: <http://dx.doi.org/10.1063/5.0265086>.

UDC 519.63

## NUMERICAL MODELING OF ELASTICITY THEORY PROBLEMS IN TERMS OF STRESSES USING THE FINITE ELEMENT METHOD

<sup>1</sup>*Khaldjigitov A.A.*, <sup>1\*</sup>*Bobonazarov A.A.*, <sup>2</sup>*Rakhmonova R.A.*, <sup>1</sup>*Tilovov O.O.*

\*akmalbobo1991@gmail.com

<sup>1</sup>National university of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek,

4, University street, Tashkent, 100174 Uzbekistan;

<sup>2\*</sup>Samarkand branch of Tashkent university of information technologies,

140100, st. Shokhrukh Mirzo 47A, Samarkand, Uzbekistan.

The paper addresses the formulation of plane elasticity problems in terms of stresses and their numerical solution by the Galerkin finite element method. Based on the equilibrium equations, geometric relations, and physical laws of elasticity, a system of differential equations describing the plane stress state of an elastic medium is derived. The Galerkin method yields the weak form of the boundary value problem and a discrete model suitable for computer implementation. The bilinear forms and local finite element matrices required to assemble the global algebraic system are constructed. The algorithms are implemented in C++ and FreeFEM++. The approach is verified on the classical Kirsch problem of stress distribution around a circular hole in an elastic plate: both implementations agree well with each other and with known analytical solutions, confirming the correctness of the formulation and the applicability of the method.

**Keywords:** stress-based formulation, variational problem, Galerkin method, finite element method, basis functions, Kirsch problem, FreeFEM++.

**Citation:** Khaldjigitov A.A., Bobonazarov A.A., Rakhmonova R.A., Tilovov O.O. 2026. Numerical modeling of elasticity theory problems in terms of stresses using the finite element method. *Problems of Computational and Applied Mathematics*. 3(73): 125-138.

**DOI:** [https://doi.org/10.71310/pcam.3\\_73.2026.09](https://doi.org/10.71310/pcam.3_73.2026.09)

# HISOBLASH VA AMALIY МАТЕМАТИКА MUAMMOLARI

ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ  
И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
PROBLEMS OF COMPUTATIONAL  
AND APPLIED MATHEMATICS

# ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

№ 3(73) 2026

Журнал основан в 2015 году.

Издается 6 раз в год.

**Учредитель:**

Научно-исследовательский институт развития цифровых технологий и  
искусственного интеллекта.

**Главный редактор:**

Равшанов Н.

**Заместители главного редактора:**

Арипов М.М., Шадиметов Х.М., Ахмедов Д.Д.

**Ответственный секретарь:**

Убайдуллаев М.Ш.

**Редакционный совет:**

Азамов А.А., Алоев Р.Д., Амиргалиев Е.Н. (Казахстан), Арушанов М.Л.,  
Бурнашев В.Ф., Джумаёзов У.З., Загребина С.А. (Россия), Задорин А.И. (Россия),  
Игнатъев Н.А., Ильин В.П. (Россия), Иманкулов Т.С. (Казахстан),  
Исмагилов И.И. (Россия), Кабанихин С.И. (Россия), Курбонов Н.М., Маматов Н.С.,  
Мирзаев Н.М., Мурадов Ф.А., Назирова Э.Ш., Нормуродов Ч.Б., Нуралиев Ф.М.,  
Опанасенко В.Н. (Украина), Расулмухамедов М.М., Садуллаева Ш.А.,  
Старовойтов В.В. (Беларусь), Хаётов А.Р., Халджигитов А., Хамдамов Р.Х.,  
Хужаев И.К., Хужаеров Б.Х., Эшмаматова Д.Б., Дустмуродова Ш.Ж.,  
Чье Ен Ун (Россия), Шабозов М.Ш. (Таджикистан), Dimov I. (Болгария),  
Li Y. (США), Mascagni M. (США), Min A. (Германия), Singh M. (Южная Корея).

Журнал зарегистрирован в Агентстве информации и массовых коммуникаций при  
Администрации Президента Республики Узбекистан.

Свидетельство №0856 от 5 августа 2015 года.

**ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X**

При перепечатке материалов ссылка на журнал обязательна.

За точность фактов и достоверность информации ответственность несут авторы.

**Адрес редакции:**

100125, г. Ташкент, м-в. Буз-2, 17А.

Тел.: +(998) 71 263-41-98.

Э-почта: [journals@airi.uz](mailto:journals@airi.uz).

Веб-сайт: <https://journals.airi.uz>.

**Дизайн и вёрстка:**

Шарипов Х.Д.

Отпечатано в типографии НИИ РЦТИИ.

Подписано в печать 25.06.2026 г.

Формат 60x84 1/8. Заказ №3. Тираж 100 экз.

## Содержание

*Яхшибаев Д.С., Боборахимов Б.И.*

Математическое моделирование поступления многофазного потока смеси в стратифицированное водохранилище и разрушения слоистой структуры . . . 7

*Бахтиёрв Б.Б., Хужаев И.К., Туропова Н.В.*

Математическая модель и анализ гашения гидравлического удара с помощью воздушного колпака . . . . . 25

*Бегимов О.М., Хужаев И.К., Мамадалиев Х.А.*

Исследование скорости распространения малых возмущений давления в газожидкостной среде с учетом массовой концентрации газа и деформации стенки трубопровода . . . . . 37

*Эргашев Д.Й., Хужаев Ж.И., Ахмаджонов С.С.*

Математическая модель процесса теплоотдачи от жидкого теплоносителя, текущего по оребренному прямоугольными ребрами цилиндрическому трубопроводу . . . . . 50

*Музаффаров С.А., Маратов Х.У., Хамдамов А.А.*

Вычислительное моделирование вертикально-осевой ветроэнергетической установки с пассивным изменением шага лопастей для условий слабых ветров 61

*Хожжикулов Ш.Ш., Бегимов О.М., Обиджонов А.Ж.*

Исследование динамики переходных процессов, связанных с изменением расхода в конце участка трубопровода, с учетом и без учета силы сопротивления 75

*Равшанов Ш.А., Боборахимова М.И., Чулмиев Ш.И.*

Моделирование тепло- и массообмена в рельефном трубопроводе с постоянными и изменяющимися диаметрами . . . . . 90

*Равшанов Н., Боборахимов Б.И., Бердиёров Ш.Ш.*

Характеристики загрязнения мембраны в процессе фильтрации и транспортировки в цилиндрическом пористом фильтре . . . . . 104

*Халджигитов А.А., Бобоназаров А.А., Рахмонова Р.А., Тиловов О.О.*

Численное моделирование задач теории упругости в напряжениях методом конечных элементов . . . . . 125

*Тиловов М.А.*

Численное исследование динамики производных различного порядка уравнения Фолкнера–Скэна в зависимости от градиента давления . . . . . 139

*Жумаев З.З.*

Приближённое решение задач с начальными условиями для дифференциальных уравнений первого порядка с использованием комбинированного метода Рунге–Кутты и метода с кусочно-постоянным аргументом . . . . . 153

# Contents

<i>Yakhshibaev D.S., Boborakhimov B.I.</i> Mathematical modeling of multiphase mixture inflow into a stratified reservoir and the breakdown of the layered structure . . . . .	7
<i>Bakhtiyorov B.B., Khujaev I.K., Turapova N.V.</i> Mathematical model and analysis of water hammer damping using an air vessel .	25
<i>Begimov O.M., Khujaev I.K., Mamadaliev Kh.A.</i> Investigation of the propagation velocity of small pressure disturbances in a gas–liquid medium with account for gas mass concentration and pipeline wall deformation . . . . .	37
<i>Ergashev D.Y., Khujaev J.I., Akhmadjonov S.S.</i> A mathematical model of heat transfer from a liquid coolant flowing through a cylindrical pipeline finned with rectangular fins . . . . .	50
<i>Muzaffarov S.A., Maratov Kh.U., Hamdamov M.M.</i> Computational modeling of a passive-pitch low-wind vertical-axis wind turbine .	61
<i>Khozhikulov Sh.Sh., Begimov O.M., Obidjonov A.J.</i> Investigation into the dynamics of transient processes associated with flow rate changes at the end of a pipeline section, both with and without resistance force .	75
<i>Ravshanov Sh.A., Boborakhimova M.I., Chulliev Sh.I.</i> Modelling heat and mass transfer in a relief pipeline with constant and varying diameters . . . . .	90
<i>Ravshanov N., Boborakhimov B.I., Berdiyev Sh.Sh.</i> Membrane fouling characteristics during filtration and transport processes in a cylindrical porous filter . . . . .	104
<i>Khaldjigitov A.A., Bobonazarov A.A., Rakhmonova R.A., Tilovov O.O.</i> Numerical modeling of elasticity theory problems in terms of stresses using the finite element method . . . . .	125
<i>Tilovov M.A.</i> Numerical study of the dynamics of derivatives of various orders of the Falkner–Skan equation depending on the pressure gradient . . . . .	139
<i>Jumaev Z.Z.</i> Approximate solution of initial value problems for first-order differential equations using a combined Runge-Kutta and piecewise constant argument method .	153