

УДК 532.546

## ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ГРАНИЧНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ РЕЛАКСАЦИОННОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

<sup>1\*</sup>Холияров Э.Ч., <sup>1</sup>Тураев Д.Ш., <sup>2</sup>Буриев Ж.Н.

\*e.kholiyarov@mail.ru

<sup>1</sup>Термезский университет экономики и сервиса,  
190111, Узбекистан, г. Термез, ул. Фаровон, массив 1, дом 4-б;

<sup>2</sup>Термезский государственный университет,  
г. Термез, ул. Баркамол авлод, 43.

В данной статье приводится численное решение граничной обратной задачи для уравнения релаксационной фильтрации в пористых средах при упругом режиме. Для решения задачи применен маршевый метод Де Сузы. Показано, что с увеличением расстояния между точкой измерения «начальных данных» и границей области, погрешность результатов увеличивается. Для получения устойчивых решений использованы шаговые регуляризации и сглаживающие сплайны.

**Ключевые слова:** обратная задача, аппроксимация, регуляризация, устойчивость решения, сглаживающие сплайны.

**Цитирование:** Холияров Э.Ч., Тураев Д.Ш., Буриев Ж.Н. Численное решение граничной обратной задачи для уравнения релаксационной фильтрации // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2024. – № 3(57). – С. 36-46.

### 1 Введение

Движение жидкостей в пористой среде описывается законом фильтрации, связывающим между собой скорость фильтрации и градиент давления. При фильтрации обычных жидкостей это, как правило, стационарная зависимость, обусловленная вязкими и вязкопластичными свойствами жидкостей и их взаимодействием с породой пористой среды. При фильтрации многих высоковязких однородных жидкостей и их смесей с газами наблюдаются релаксационные явления, которые в конечном итоге приводят к неравновесности фильтрационного потока [1].

Релаксационная теория фильтрации жидкости впервые исследованы в работах [2, 3]. В литературах [4, 5] было описано дальнейшее развитие этой теории.

В работе [3] рассматриваются нестационарные задачи фильтрации при упругом режиме [6] в предположении отставания градиента давления от скорости фильтрации. Тогда закон Дарси принимает вид

$$v = -\frac{k}{\mu} \left( \frac{\partial p}{\partial x} + \lambda \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial t} \right), \quad (1)$$

где  $v$  - скорость фильтрации,  $k$  - коэффициент проницаемости,  $\mu$  - коэффициент вязкости,  $p(x, t)$  - текущее давление (МПа),  $\lambda$  - релаксационное время градиента давления,  $x$  - координата,  $t$  - время.

В работе [3] также с использованием (1) на основе теории упругого режима [6] выведено уравнение пьезопроводности

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \varkappa \left( \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \lambda \frac{\partial^3 p}{\partial x^2 \partial t} \right), \quad \varkappa = \frac{k}{\mu (m\beta_{\Phi} + \beta_c)}, \quad (2)$$

где  $\varkappa$  - коэффициент пьезопроводности,  $m$  - пористость,  $\beta_\Phi$ ,  $\beta_c$  - коэффициенты сжимаемости жидкости и пласта соответственно.

В работе [2] обобщен закон (1) с учетом запаздывания скорости фильтрации

$$v + \lambda_v \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{k}{\mu} \left( \frac{\partial p}{\partial x} + \lambda_p \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial t} \right), \quad (3)$$

где  $\lambda_v$  - время релаксации скорости фильтрации.

В [2] на основе закона (3) выведено уравнение нестационарной фильтрации

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \lambda_v \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \varkappa \left( \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \lambda_p \frac{\partial^3 p}{\partial x^2 \partial t} \right). \quad (4)$$

Теоретические основы некорректных задач было рассмотрен в работе [9]. Обычно для решения математических задач рассматриваются прямые задачи. При этом решение определяется из уравнений с частными производными, которые дополняются определенными краевыми и начальными условиями. В обратных задачах некоторые из этих условий могут быть неизвестными, т.е. начальные условия, граничные режимы, коэффициенты и правые части уравнений. Обратные задачи имеют 4 вида: коэффициентные, граничные, эволюционные (ретроспективные) и геометрические. Они обычно являются некорректными. Для приближенного решения нужно применять методы регуляризации [10]

В [11] изложены методы исследования и решения обратных и некорректных задач линейной алгебры, интегральных и операторных уравнений, интегральной геометрии, спектральных обратных задач и обратных задач рассеяния. Коэффициентные обратные задачи упругого режима фильтрации флюидов в пористых и трещиновато-пористых средах в области нефтегазодобычи рассмотрены в [12]. В [13] изложены построения и обоснования регуляризирующих градиентных алгоритмов в области решения некорректно поставленных задач - итерационной регуляризации. В работе [?] решалась обратная коэффициентная задача для релаксационной фильтрации жидкости в пористых средах. В [19] поставлена и численно решена обратная задача по определению коэффициента релаксации в упрощенной модели релаксационной фильтрации однородной жидкости в трещиновато-пористых средах. В работе [20] численно решена граничная обратная задача фильтрации жидкости в пористых средах в упругом режиме.

В данной работе решается граничная обратная задача релаксационной фильтрации для уравнения (2).

## 2 Постановка граничной обратной задачи

Рассмотрим гранично-обратную задачу для уравнения релаксационной фильтрации. Известно в точке  $x = L$  граничные условия и в точке  $x = d$ ,  $d \in (0, L)$  заданы значения давления жидкости, а также начальное распределение давления  $p(x, 0) = p_0$  где  $p_0 = const$ . Это подстановка может быть интерпретирована как определение характерных параметров в нефтедобывающей скважине ДС (Рис. 1) на основе значений, полученных на наблюдательной скважине - НС. Задача сводится к определению поля давления области  $(0, d)$  и ДС ( $x = 0$ ) на основе измерений давления в НС ( $x = d$ ). Требуется найти давление жидкости в ДС.

На основе модели [3] пусть нам дано уравнение релаксационной фильтрации

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \varkappa \left( \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \lambda \frac{\partial^3 p}{\partial x^2 \partial t} \right), \quad \varkappa = \frac{k}{\mu (m\beta_\Phi + \beta_c)}, \quad t \in (0, t_m], \quad 0 < x < L \quad (5)$$

и дополнительные условия

$$p(x, 0) = p_0, \quad x \in (0, L], \quad (6)$$

$$p(d, t) = z(t), \quad t \in (0, t_m], \quad (7)$$

$$p(L, t) = p_0, \quad t \in (0, t_m], \quad (8)$$

где  $p$  - текущее давление (МПа);  $t$  - время;  $x$  - координата;  $\lambda$  - релаксационное время градиента давления;  $t_m$  - время, в течение которого исследуется процесс;  $\varkappa$  - коэффициент пьезопроводности;  $k$  - коэффициент проницаемости;  $\mu$  - коэффициент вязкости;  $m$  - пористость;  $\beta_f, \beta_c$  - коэффициенты сжимаемости жидкости и пласта соответственно.

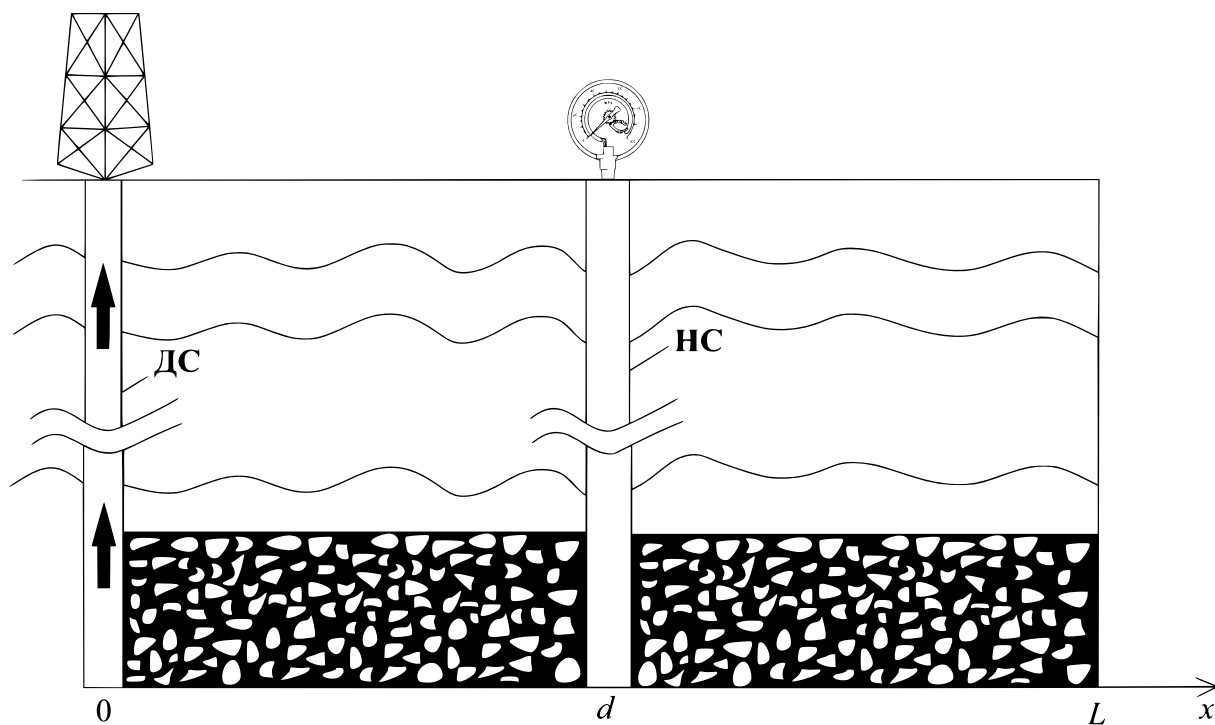


Рис. 1 Схема расположения добывающей и наблюдательной скважин (ДС, НС).

Для решения обратной задачи подробно напишем дополнительные данные, т.е.  $z(t)$  в (7). Для этого в  $[0, L]$  для (5) решим прямую задачу. Поэтому граничное условие пишется следующим образом:

$$v(0, t) = v_0 = -\frac{k}{\mu} \left( \frac{\partial p}{\partial x} + \lambda \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial t} \right), \quad t \in [0, t_m], \quad (9)$$

где  $v$  - скорость фильтрации.

### 3 Численное решение задачи

#### 3.1 Численное решение прямой задачи

Для решения прямых задач (5), (6), (8), (9) применим метод конечных разностей [14]. Для начала определяем область  $D$ , т.е.  $D = D_1 \cup D_2 = \{0 \leq x \leq d, 0 \leq t \leq t_m\} \cup \{d \leq x < \infty, 0 \leq t \leq t_m\}$ , затем вводим туда сетку

$$\omega_{h\tau} = \{(x_i, t_j), x_i = ih, x_n = nh = d, t_j = j\tau, \\ h = \frac{L}{N}, \tau = \frac{t_m}{M}, i = 0, 1, \dots, n, n+1, \dots, N; j = \overline{0, M}\}$$

где  $L$  - некоторая характерная длина пласта, которая принимается так, чтобы граница возмущенной зоны не доходила до  $x = L$ . Сначала аппроксимируем задачи (5), (6), (8), (9):

$$\frac{p_i^{j+1} - p_i^j}{\tau} = \varkappa \left[ \frac{p_{i+1}^{j+1} - 2p_i^{j+1} + p_{i-1}^{j+1}}{h^2} + \frac{\lambda}{\tau} \left( \frac{p_{i+1}^{j+1} - 2p_i^{j+1} + p_{i-1}^{j+1}}{h^2} - \frac{p_{i+1}^j - 2p_i^j + p_{i-1}^j}{h^2} \right) \right],$$

$$j = 0, 1, \dots, M-1, i = 1, 2, \dots, N-1, \quad (10)$$

$$p_i^0 = p_0, \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad (11)$$

$$v_0 = -\frac{k}{\mu} \left[ \frac{p_0^{j+1} - p_1^{j+1}}{h} + \frac{\lambda}{\tau} \left( \frac{p_0^{j+1} - p_1^{j+1}}{h} - \frac{p_0^j - p_1^j}{h} \right) \right], \quad j = 0, 1, \dots, M-1, \quad (12)$$

$$p_N^{j+1} = p_0, \quad j = 0, 1, \dots, M-1. \quad (13)$$

Напишем разностное уравнение (10) следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\varkappa}{h^2} (\tau + \lambda) p_{i-1}^{j+1} - \left[ \frac{2\varkappa}{h^2} (\tau + \lambda) + 1 \right] p_i^{j+1} + \frac{\varkappa}{h^2} (\tau + \lambda) p_{i+1}^{j+1} = \\ = -p_i^j + \frac{\varkappa\lambda}{h^2} (p_{i+1}^j - 2p_i^j + p_{i-1}^j), \end{aligned}$$

что приводит к системе линейных уравнений

$$Ap_{i-1}^{j+1} - Cp_i^{j+1} + Bp_{i+1}^{j+1} = -F_i^j, \quad i = 0, 1, \dots, N-1, \quad j = 0, 1, \dots, M-1, \quad (14)$$

где

$$A = B = \frac{\varkappa(\tau + \lambda)}{h^2}, \quad C = \frac{2\varkappa}{h^2} (\tau + \lambda) + 1, \quad F_i^j = p_i^j - \frac{\varkappa\lambda}{h^2} (p_{i+1}^j - 2p_i^j + p_{i-1}^j).$$

Система (14) при (11), (12), (13) решается методом прогонки.

Уравнения (12) можно написать следующим образом:

$$-\frac{v_0\mu h}{k} = \left(1 + \frac{\lambda}{\tau}\right) p_0^{j+1} - \left(1 + \frac{\lambda}{\tau}\right) p_1^{j+1} - \frac{\lambda}{\tau} (p_0^j - p_1^j),$$

отсюда находим  $p_0^{j+1}$  т.е.

$$p_0^{j+1} = p_1^{j+1} - \frac{v_0\mu h\tau}{k(\tau + \lambda)} - \frac{\lambda}{\tau + \lambda} (p_1^j - p_0^j).$$

Здесь определяем коэффициенты прогонки т.е.

$$p_0^{j+1} = \alpha_1 p_1^{j+1} + \beta_1,$$

$$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_{i+1} = \frac{B}{C - A\alpha_i}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad (15)$$

$$\beta_1 = -\frac{v_0\mu h\tau}{k(\tau + \lambda)} - \frac{\lambda}{\tau + \lambda} (p_1^j - p_0^j), \quad \beta_{i+1} = \frac{A\beta_i + F_i^j}{C - A\alpha_i}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad (16)$$

и вычисляем значение давления

$$p_N^{j+1} = p_0,$$

$$p_i^{j+1} = \alpha_{i+1} p_{i+1}^{j+1} + \beta_{i+1}, \quad i = N-1, N-2, \dots, 1, 0. \quad (17)$$

Для численного решения задачи (5), (6), (8), (9) использованы следующие значения исходных данных:  $L = 200\text{м}$ ,  $T = 7200\text{с}$ ,  $k = 1 \cdot 10^{-12}\text{М}^2$ ,  $\varkappa = 1 \cdot 10^{-1}\text{М}^2/\text{с}$ ,  $p_0 = 25\text{МПа}\cdot\text{с}$ ,  $\mu = 0.1 \cdot 10^{-8}\text{МПа}\cdot\text{с}$ ,  $v_0 = 1 \cdot 10^{-4}\text{М}/\text{с}$ ,  $\lambda = 1000\text{с}$ .

### 3.2 Численное решение граничной обратной задачи

В качестве исходных данных для обратной задачи принимаются значения давления в точке  $d$ , т.е.  $z(t_j) = p_n^j$ . Чтобы оценить влияние ошибок в исходных данных на решение обратной задачи функции  $z(t)$  «зашумляем» следующим образом

$$z^\delta(t) = z(t) + 2\delta \left( \sigma(t) - \frac{1}{2} \right),$$

где  $\delta$  - погрешность,  $\sigma(t)$  - равномерно распределенная случайная величина на отрезке  $[0, 1]$ . На Рис. 2 представлены графики функций  $z^\delta(t)$  при различных значениях  $d$  и  $\delta$ .

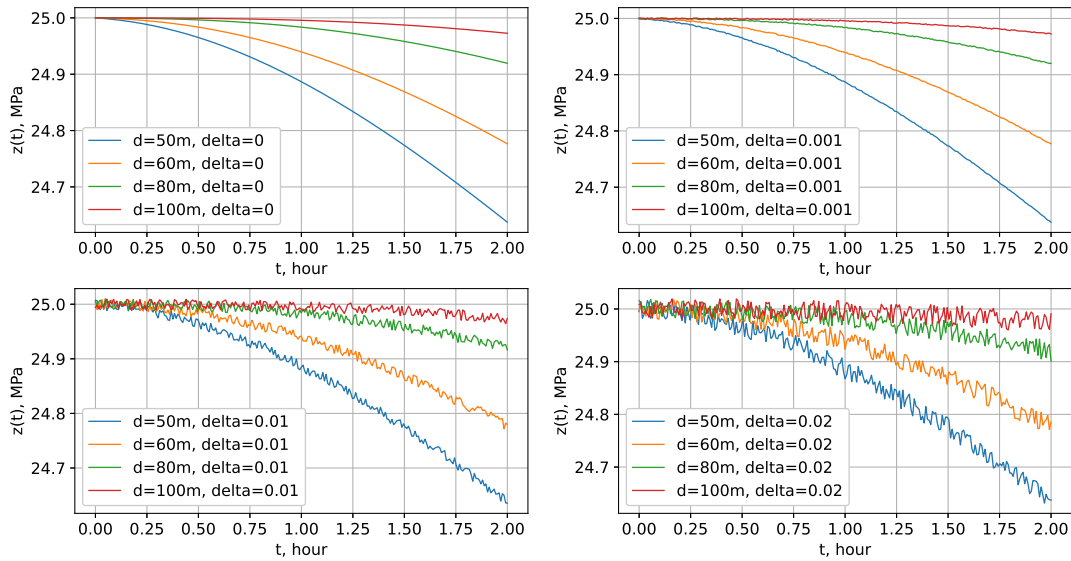


Рис. 2 Графики функций  $z(t)$ .

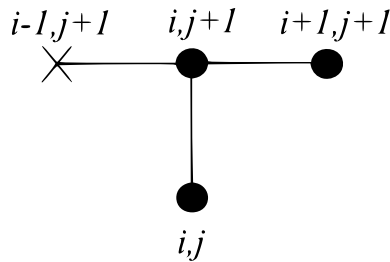


Рис. 3 Шаблон схемы Де Сузы, где требуется найти искомое значение давления.

Метод Де Сузы используется для вычисления обратных задач математической физики [9]. В нём используется чисто неявная разностная аппроксимация уравнения (5), которое решается методом прогонки.

Чтобы решить обратную задачу воспользуемся шаблоном Де Сузы (Рис. 3). Из уравнения (10) находим  $p_{i-1}^{j+1}$  т.е.

$$p_{i-1}^{j+1} = \left(2 + \frac{h^2}{\varkappa(\tau + \lambda)}\right) p_i^{j+1} - p_{i+1}^{j+1} - \frac{h^2 p_i^j}{\varkappa(\tau + \lambda)} + \frac{\varkappa \lambda}{\varkappa(\tau + \lambda)} (p_{i+1}^j - 2p_i^j + p_{i-1}^j), \quad (18)$$

или можно написать следующим образом

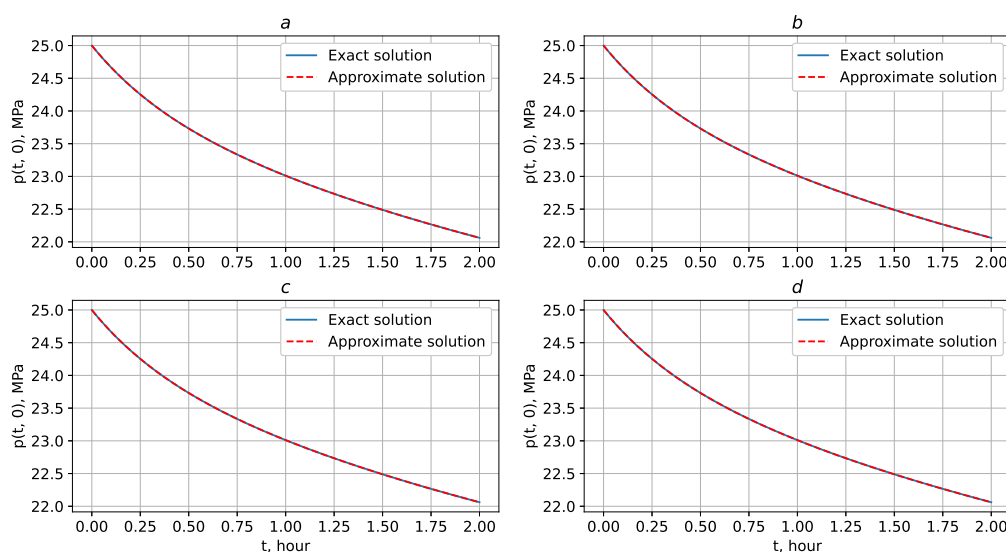
$$p_{i-1}^{j+1} = \frac{C}{A} p_i^{j+1} - p_{i+1}^{j+1} - \frac{F_i^j}{A}, \quad i = n, n-1, \dots, 1, \quad j = 0, 1, \dots, M-1. \quad (18')$$

Отсюда можно найти значение давления в ДС.

## 4 Результаты и обсуждение

Теперь будем обсуждать результаты обратной задачи. Чтобы получить более точные результаты применили сглаживающий сплайн и шаговую регуляризацию. Сглаживающий параметр в сплайновой интерполяции — это настраиваемый параметр, который контролирует компромисс между точностью аппроксимации и гладкостью интерполированной кривой. Он определяет степень сглаживания, применяемого к данным [15–17]. Значение *smoothing parameter* (параметр сглаживания) зависит от требуемого уровня сглаживания данных. Оно контролирует величину сглаживания и может быть выбрано в зависимости от конкретных требований и предпочтений. Значение *smoothing parameter* должно быть положительным числом. Чем больше значение *smoothing parameter*, тем более гладким будет результат сглаживания. Однако, слишком большое значение может привести к потере важных деталей в данных [18].

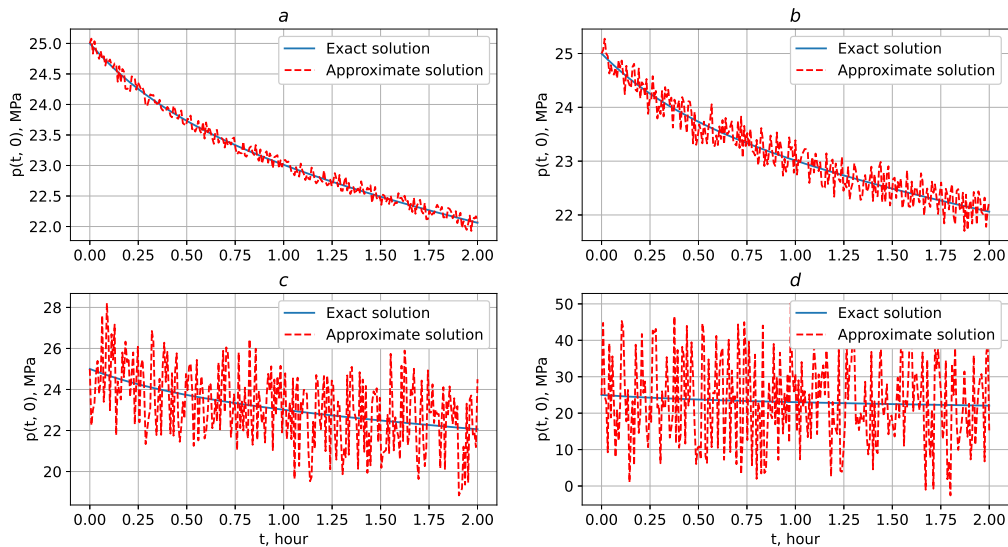
На рис. 4 представлены результаты расчетов точных и приближенных решений  $p(t, 0)$  при  $\delta = 0$  и различных значениях  $d$ . Из рис. 4 видно, что точные и приближенные решения обратной задачи при  $\delta = 0$  и различных значениях  $d$  полностью совпадают.



**Рис. 4** Результаты решения обратной задачи при  $\delta = 0$ ,  $\tau_1 = 2\tau$ : (a) при  $d = 50\text{m}$ ; (b) при  $d = 60\text{m}$ ; (c) при  $d = 80\text{m}$ ; (d) при  $d = 100\text{m}$ .

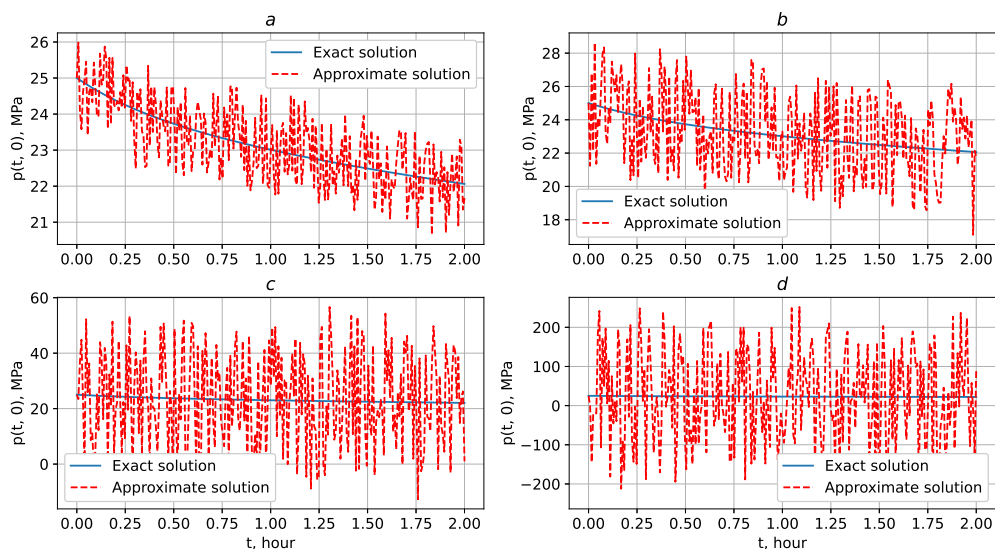
На рис. 5-7 представлены результаты расчетов при различных значениях  $\delta$ .

На рис. 5 представлены результаты расчетов точных и приближенных решений  $p(t, 0)$  при  $\delta = 0,001$  и различных значениях  $d$ . Из рис. 5 видно, что точные и приближенные решения обратной задачи при  $\delta = 0,001$  и с увеличением значения  $d$  возмущение приближенных решений возрастает.



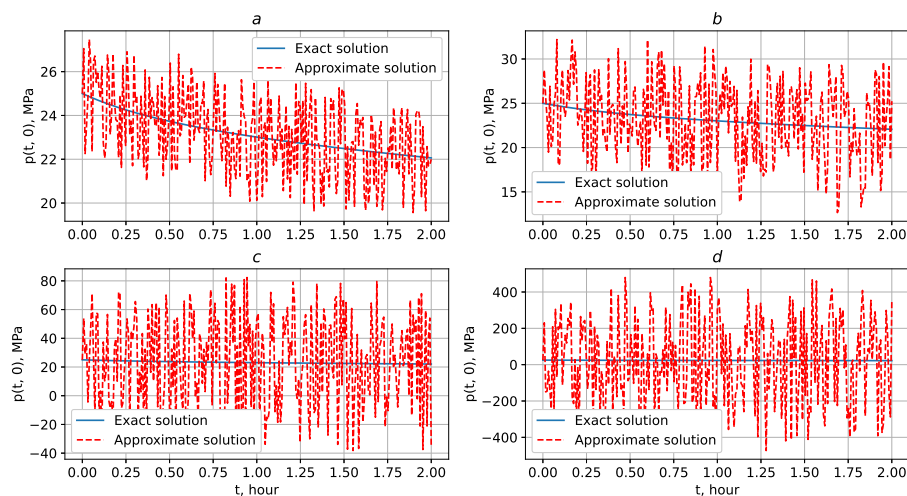
**Рис. 5** Результаты решения обратной задачи при  $\delta = 0.001$ ,  $\tau_1 = 2\tau$ : (a) при  $d = 50\text{m}$ ; (b) при  $d = 60\text{m}$ ; (c) при  $d = 80\text{m}$ ; (d) при  $d = 100\text{m}$ .

На рис. 6 представлены результаты расчетов  $p(t, 0)$  при  $\delta = 0,01$  и различных значениях  $d$ . Из рис. 7 видно, что возмущение приближенных решений еще больше возрастает чем  $\delta = 0,001$ .



**Рис. 6** Результаты решения обратной задачи при  $\delta = 0.01$ ,  $\tau_1 = 2\tau$ : (a) при  $d = 50\text{m}$ ; (b) при  $d = 60\text{m}$ ; (c) при  $d = 80\text{m}$ ; (d) при  $d = 100\text{m}$ .

На рис. 7 представлены результаты расчетов  $p(t, 0)$  при  $\delta = 0,02$  и различных значениях  $d$ . Из рис. 9 видно, что возмущение приближенных решений еще больше возрастает чем  $\delta = 0,01$ .

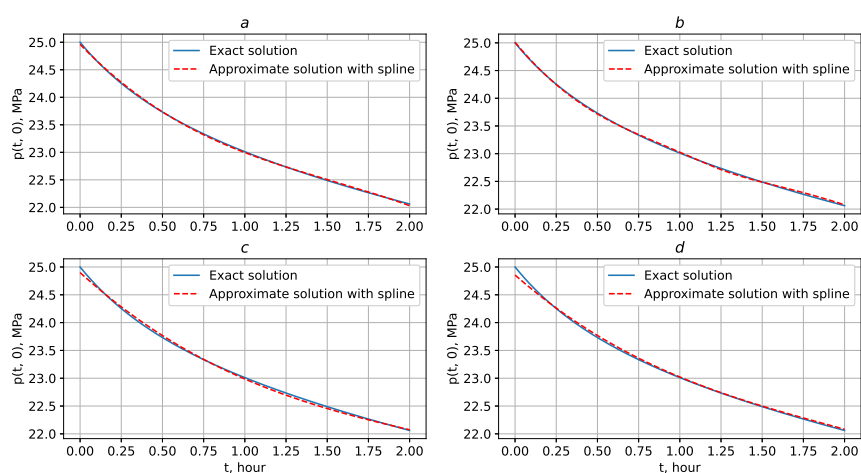


**Рис. 7** Результаты решения обратной задачи при  $\delta = 0.02$ ,  $\tau_1 = 2\tau$ : (a) при  $d = 50\text{m}$ ; (b) при  $d = 60\text{m}$ ; (c) при  $d = 80\text{m}$ ; (d) при  $d = 100\text{m}$ .

На рис. 8-10 представлены результаты расчетов при различных значениях  $\delta$  с использованием шаговой регуляризации и сглаживающих сплайнов.

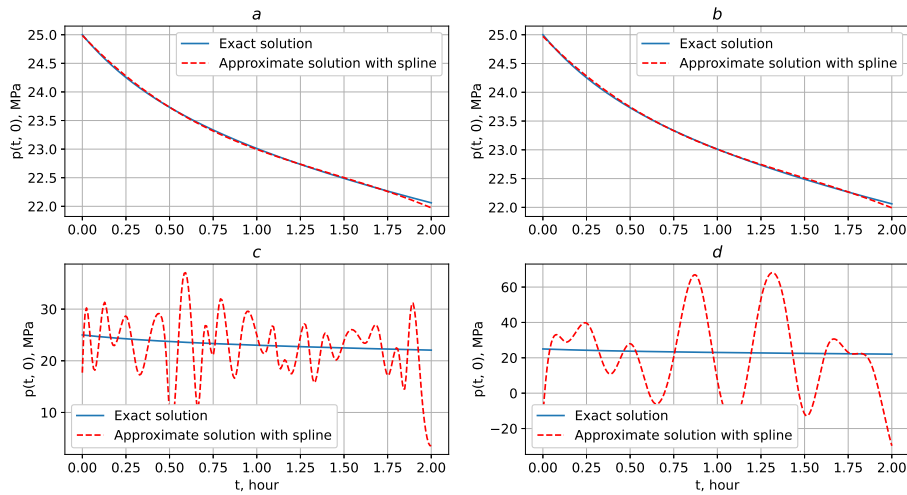
На рис. 8 представлены результаты расчетов точных и приближенных решений  $p(t, 0)$  при  $\delta = 0,001$  и различных значениях  $d$  с использованием шаговой регуляризации и сглаживающих сплайнов.

Из рис. 8 видно, что точные и приближенные решения обратной задачи при  $\delta = 0,001$  и различных значениях  $d$  с помощью шаговой регуляризации и сглаживающих сплайнов при определенных значениях получены более устойчивые решения.



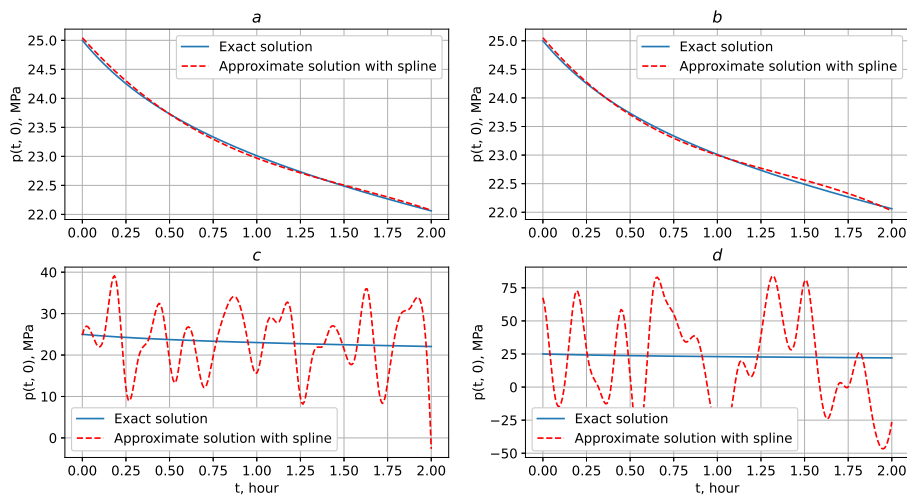
**Рис. 8** Результаты решения обратной задачи со сглаживающим сплайном при  $\delta = 0.001$ ,  $\tau_1 = 2\tau$ : (a) при  $d = 50\text{m}$ , smoothing parameter = 2; (b) при  $d = 60\text{m}$ , smoothing parameter = 13.5; (c) при  $d = 80\text{m}$ , smoothing parameter = 780; (d) при  $d = 100\text{m}$ , smoothing parameter = 51000.

На рис. 9 представлены результаты расчетов  $p(t, 0)$  при  $\delta = 0,01$  и различных значениях  $d$ . Из рис. 9 видно, что с помощью шаговой регуляризации и сглаживающих сплайнов при определенных значениях получены более устойчивые решения. Однако, в больших значениях  $d$  не удалось полностью восстановить граничное решение.



**Рис. 9** Результаты решения обратной задачи со сглаживающим сплайном при  $\delta = 0.01$ ,  $\tau_1 = 2\tau$ : (a) при  $d = 50\text{m}$ , smoothing parameter = 190; (b) при  $d = 60\text{m}$ , smoothing parameter = 1930; (c) при  $d = 80\text{m}$ , smoothing parameter = 50000; (d) при  $d = 100\text{m}$ , smoothing parameter = 3600000.

На рис. 10 представлены результаты расчетов  $p(t, 0)$  при  $\delta = 0,02$  и различных значениях  $d$ . В больших значениях  $d$  не удалось полностью восстановить граничное решение.



**Рис. 10** Результаты решения обратной задачи со сглаживающим сплайном при  $\delta = 0.02$ ,  $\tau_1 = 2\tau$ : (a) при  $d = 50\text{m}$ , smoothing parameter = 768.8; (b) при  $d = 60\text{m}$ , smoothing parameter = 7681.1; (c) при  $d = 80\text{m}$ , smoothing parameter = 270000; (d) при  $d = 100\text{m}$ , smoothing parameter = 14000000.

## 5 Заключение

Поставлена и численно решена граничная обратная задача релаксационной фильтрации в пористой среде. Для решения поставленной задачи применен маршевый метод Де Сузы. Дополнительная информация для решения обратной задачи подготовлена с помощью квазиреального вычислительного эксперимента, т.е. решением прямой задачи методом конечных разностей. На исходные данные внесены возмущения со случайными погрешностями. В случае с возмущенными исходными данными искомое решение давления дается с ошибками соответствующими порядкам возмущения. Чтобы исправить такое положение одновременно использованы шаговые регуляризации и сглаживающие сплайны. При необходимых значениях параметра регуляризации и сплайнов можно получить достаточно устойчивое решение.

## Литература

- [1] *Хужаёров Б.Х.* Фильтрация неоднородных жидкостей в пористых средах. – Ташкент: Фан, 2012.
- [2] *Алишаев М.Г., Мирзаджанзаде А.Х.* К учету явлений запаздывания в теории фильтрации // Изд. Вузов. Нефть и газ. – 1975. – №6. – С. 71-74.
- [3] *Алишаев М.Г.* О нестационарной фильтрации с релаксацией давления // Тр. Московского обл. пед.ин-та им. Н.К.Крупской. Гидромеханика. – 1974. – Вып. 111. – С. 166-177.
- [4] *Молокович Ю.М., Непримеров Н.Н., Пикуза В.И., Штанин А.В.* Релаксационная фильтрация. – Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1980. – 136 с.
- [5] *Молокович Ю.М.* Неравновесная фильтрация и ее применение в нефтепромысловой практике / НИЦ Регулярная и хаотическая динамика; Институт компьютерных исследований. – М., 2006. – 214 с.
- [6] *Щелкачев В.Н.* Разработка нефтоводоносных пластов при упругом режиме. – М.: Гостехиздат. – 1959. – 468 с.
- [7] *Нармурадов Ч.Б., Холияров Э.Ч., Гуломжодиров К.А.* Численное моделирование обратной задачи релаксационной фильтрации однородной жидкости в пористой среде // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2017. – №2. – С. 12-19.
- [8] *Beck J.V., Blackwell B., Clair C.R.* Inverse Heat Conduction: Ill-Posed Problems. – Wiley, 1985. – 312 p.
- [9] *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1979.
- [10] *Самарский А.А., Вабищевич П.Н.* Численные методы решения обратных задач математической физики: учеб. пособ. – изд. 3-е. – М.: ЛКИ, 2009. – 480 с.
- [11] *Кабанихин С.И.* Обратные и некорректные задачи. – Новосибирск: Сиб. науч. изд-во, 2009. – 457 с.
- [12] *Хайруллин М.Х., Хисамов Р.С., Шамсиев М.Н., Фархуллин Р.Г.* Интерпретация результатов гидродинамических исследований скважин методами регуляризации / НИЦ Регулярная и хаотическая динамика. – М.: Ижевск, 2006. – 172 с.
- [13] *Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Румянцев С.В.* Экстремальные методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1988. – 288 с.
- [14] *Самарский А.А.* Теория разностных схем. – М.: Наука, 1989. – 616 с.
- [15] *Носач В.В.* Решение задач аппроксимации с помощью персональных компьютеров. – М.: МИКАП, 1994. – 382 с.
- [16] *Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н.* Сплайны в вычислительной математике. – М.: Наука, 1976. – 248 с.

- [17] *Вершинин В.В., Завьялов Ю.С., Павлов Н.Н.* Экстремальные свойства сплайнов и задача сглаживания. – Новосибирск: Наука, 1988.
- [18] *Титов А.Н., Тазиева Р.Ф.* Решение задач линейной алгебры и прикладной математики в Python. Работа с библиотекой SciPy. – Казань: Изд-во КНИТУ, 2023. – 124 с.
- [19] *Хужаёров Б.Х., Холияров Э.Ч.* Определение коэффициента релаксации при фильтрации однородной жидкости в трещиновато-пористых средах // Инженерно-физический журнал. – 2023. – Т. 96, №4. – С. 964-977.
- [20] *Kholiyarov E., Toyirov A., Turaev D., Gulomkodirov K.* Solution of boundary inverse problem of fluid filtration in elastic mode // AIP Conf. Proc. – 2024. – Vol. 3147. – doi: <http://dx.doi.org/10.1063/5.0210321>.

Поступила в редакцию 22.05.2024

UDC 532.546

## NUMERICAL SOLUTION OF THE BOUNDARY INVERSE PROBLEM FOR THE RELAXATION FILTRATION EQUATION

<sup>1\*</sup>*Kholiyarov E.Ch.*, <sup>1</sup>*Turaev D.Sh.*, <sup>2</sup>*Buriev J.N.*

\*[e.kholiyarov@mail.ru](mailto:e.kholiyarov@mail.ru)

<sup>1</sup>Termiz University of Economics and Service,  
4-b, Farovon str., Termiz, 190111 Uzbekistan;

<sup>2</sup>Termiz State University,  
43, Barkamol avlod str., Termez, Uzbekistan.

This article presents a numerical solution to the boundary inverse problem for the equation of relaxation filtration in porous media under elastic conditions. To solve the problem, the marching method of De Sousa was used. It is shown that with increasing distance between the “initial data” measurement point and the boundary of the region, the error in the results increases. To obtain stable solutions, step regularization and smoothing splines were used.

**Keywords:** inverse problem, approximation, regularization, solution stability, smoothing splines.

**Citation:** Kholiyarov E.Ch., Turaev D.Sh., Buriev J.N. 2024. Numerical solution of the boundary inverse problem for the relaxation filtration equation. *Problems of Computational and Applied Mathematics*. 3(57): 36-46.

HISOBLASH VA AMALIY  
МАТЕМАТИКА  
MUAMMOLARI

ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ  
И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

PROBLEMS OF COMPUTATIONAL  
AND APPLIED MATHEMATICS



# ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

№ 3(57) 2024

Журнал основан в 2015 году.

Издается 6 раз в год.

**Учредитель:**

Научно-исследовательский институт развития цифровых технологий и  
искусственного интеллекта.

**Главный редактор:**

Равшанов Н.

**Заместители главного редактора:**

Азамов А.А., Арипов М.М., Шадиметов Х.М.

**Ответственный секретарь:**

Ахмедов Д.Д.

**Редакционный совет:**

Азамова Н.А., Алоев Р.Д., Амиргалиев Е.Н. (Казахстан), Бурнашев В.Ф.,  
Загребина С.А. (Россия), Задорин А.И. (Россия), Игнатъев Н.А.,  
Ильин В.П. (Россия), Исмагилов И.И. (Россия), Кабанихин С.И. (Россия),  
Карачик В.В. (Россия), Курбонов Н.М., Маматов Н.С., Мирзаев Н.М.,  
Мирзаева Г.Р., Мухамадиев А.Ш., Назирова Э.Ш., Нормуродов Ч.Б.,  
Нуралиев Ф.М., Опанасенко В.Н. (Украина), Расулмухамедов М.М., Расулов А.С.,  
Садуллаева Ш.А., Старовойтов В.В. (Беларусь), Хаётов А.Р., Халджигитов А.,  
Хамдамов Р.Х., Хужаев И.К., Хужаеров Б.Х., Чье Ен Ун (Россия),  
Шабозов М.Ш. (Таджикистан), Dimov I. (Болгария), Li Y. (США),  
Mascagni M. (США), Min A. (Германия), Schaumburg H. (Германия),  
Singh D. (Южная Корея), Singh M. (Южная Корея).

Журнал зарегистрирован в Агентстве информации и массовых коммуникаций при  
Администрации Президента Республики Узбекистан.

Регистрационное свидетельство №0856 от 5 августа 2015 года.

**ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X**

При перепечатке материалов ссылка на журнал обязательна.

За точность фактов и достоверность информации ответственность несут авторы.

**Адрес редакции:**

100125, г. Ташкент, м-в. Буз-2, 17А.

Тел.: +(998) 712-319-253, 712-319-249.

Э-почта: journals@airi.uz.

Веб-сайт: <https://journals.airi.uz>.

**Дизайн и вёрстка:**

Шарипов Х.Д.

Отпечатано в типографии НИИ РЦТИИ.

Подписано в печать 28.06.2024 г.

Формат 60x84 1/8. Заказ №3. Тираж 100 экз.

# Содержание

<i>Равшанов Н., Ахмедов Д., Убайдуллаев М., Насруллаев П.</i> Лагранжева модель движения дисперсной фазы в турбулентной атмосфере . . . . .	5
<i>Маликов З.М., Назаров Ф.Х., Абдухамидов С.К.</i> Численный расчет турбулентного течения в канале с препятствием на основе программы Comsol Multiphysics . . . . .	26
<i>Холияров Э.Ч., Тураев Д.Ш., Буриев Ж.Н.</i> Численное решение граничной обратной задачи для уравнения релаксационной фильтрации . . . . .	36
<i>Равшанов Н., Муродуллаев Б.Т., Боборахимов Б.И.</i> Численное моделирование фильтрации подземных вод на орошаемых территориях . . . . .	47
<i>Анарова Ш.А., Шокиров Д.А.</i> Вычислительный алгоритм расчета трёхслойных стержней при пространственных нагрузках . . . . .	57
<i>Хусаинова Б.Б., Хусаинов С.Б., Хусаинов Р.Б.</i> Колебания систем, состоящих из подземных трубопроводов и колодцев, при действии сейсмической волны . . . . .	77
<i>Равшанов Н., Набиева И., Жапаров Б.Т.</i> Сопряженная задача для оптимального размещения промышленных объектов	91
<i>Юсупов М.</i> Математическое моделирование нелинейных колебаний виброзащитных устройств лежащих на вязкоупругом слое . . . . .	106
<i>Рахмонов З.Р., Урунбаев Ж.Э.</i> Численное решение задачи кросс диффузии с нелинейными граничными условиями и источником . . . . .	114
<i>Юсупов Ф.А.</i> Моделирование динамики распространения компьютерных вирусов с помощью композиций отображений Лотки – Вольтерры . . . . .	122