

УДК 532

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛО- И МАССООБМЕНА В РЕЛЬЕФНОМ ТРУБОПРОВОДЕ С ПОСТОЯННЫМИ И ИЗМЕНЯЮЩИМИСЯ ДИАМЕТРАМИ

^{1*} *Равшанов Ш.А.*, ^{1,2} *Боборахимова М.И.*, ¹ *Чуллиев Ш.И.*,

*shohjaxonravshanov22@gmail.com

¹Институт механики и сейсмостойкости сооружений им. М.Т. Уразбаева,
100125, Узбекистан, Ташкент, Ул. Дурмон Йули, 33;

²Институт математики имени В.И. Романовского Академии наук Узбекистана,
100174, Узбекистан, Ташкент, ул. Университетская, 9.

В работе выполнено комплексное численное и аналитическое исследование гидродинамических и тепловых процессов в закрытых трубопроводах переменного диаметра с учётом рельефа местности и внешних температурных воздействий. Научная новизна заключается в создании усовершенствованной квазиодномерной модели, позволяющей оценить влияние геометрических параметров (диаметр, угол наклона, шероховатость внутренней поверхности) и теплофизических характеристик (теплопроводность материала, температура среды) на распределение давления и температуры вдоль трубопровода. Модель проверена сравнением с численным моделированием по турбулентной модели SST и расчётами по уравнению Дарси–Вейсбаха; максимальное отклонение не превысило 2%. Установлено, что гидравлические потери в основном зависят от диаметра трубы и скорости потока, а тепловые — от теплопроводности материала и ориентации трубопровода. Предложенный подход даёт надёжную и вычислительно эффективную основу для прогнозирования энергетических характеристик систем транспортировки жидкости и оптимизации тепловых сетей.

Ключевые слова: поток жидкости, теплопередача, течение в трубах.

Цитирование: *Равшанов Ш.А., Боборахимова М.И., Чуллиев Ш.И.* Моделирование тепло- и массообмена в рельефном трубопроводе с постоянными и изменяющимися диаметрами // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2026. – № 3(73). – С. 90-103.

DOI: https://doi.org/10.71310/pcam.3_73.2026.07

1 Введение

Улучшение энергоэффективности, уменьшение потерь воды и тепла, а также обеспечение безопасности технологических процессов являются важными задачами для современной промышленности, энергетики и коммунального хозяйства. Надёжная работа закрытых трубопроводных систем невозможна без точного математического моделирования. Чтобы создавать модели, которые максимально точно показывают реальные условия работы, нужно учитывать внутреннее трение, гравитацию, форму канала и теплообмен с окружающей средой. Использование современных программ, таких как COMSOL Multiphysics, ANSYS и MATLAB, позволяет подробно анализировать эти процессы, предсказывать аварии и разрабатывать лучшие способы управления транспортировкой.

Большой вклад в развитие математического моделирования трубопроводного транспорта внесли такие ученые, как И. А. Чарный, С. К. Годунов, О. Ф. Васильев и другие. Их основные подходы, особенно модель ВБК [8], до сих пор служат

основой для новых исследований. Сегодня ученые активно изучают, как внешние температуры и свойства теплоизоляции влияют на потоки [1, 2], исследуют резонансные явления в трубах [3], а также создают сложные модели для морских газопроводов, учитывая сжимаемость, особенности газовых смесей и рельеф дна [4, 6].

В современной литературе уделяется особое внимание точности термодинамических расчетов, так как слишком простые модели могут приводить к большим ошибкам в прогнозах [5]. Для решения задач перехода газотранспортных систем на новые режимы работы используют модели изменяющегося во времени потока [7]. Одновременно разрабатываются методы, учитывающие случайные изменения параметров внешней среды [9], и способы снижения колебаний давления при переходных процессах с помощью демпферных камер [10].

Несмотря на большое количество теоретических и практических исследований, процессы движения жидкости и передачи тепла в трубах с меняющимся диаметром все еще изучены не полностью. Точное определение параметров потоков нефти, газа и разных теплоносителей в каналах с изменяющейся формой остается важной научной задачей. Дальнейшее развитие математических методов для таких особых условий и применение полученных результатов в инженерной практике является одной из главных и нерешенных задач современного трубопроводного транспорта, что и определяет цель этого исследования.

2 Постановка и метод решения задачи

Рассматривается задача о постоянном состоянии жидкости с изменяющейся температурой в участке трубопровода с неровной поверхностью, при постоянном или меняющемся диаметре трубы, с заданными на входе значениями давления, скорости потока и температуры жидкости.

Заданы геометрические показатели участка трубопровода. Вводится x координата, которая указывает удаление сечения трубопровода от входного сечения. Внутренний диаметр трубопровода изменяется по формуле $D(x)$, а толщина стенки трубопровода составляет δ . Длина участка составляет l . Нивелирная высота оси трубопровода также изменяется по координате и задается как $y(x)$. При этом уклон трассы участка в уравнении сохранения импульса принимается в виде $\sin \alpha = \frac{dy(x)}{dx}$. Гидродинамический режим течения – развитый турбулентный, когда реализуется квадратичный закон сопротивления трения. Коэффициент сопротивления трения принимается согласно формуле Шифринсона [11]:

$$\lambda(x) = 0.11 \left(\frac{k}{D(x)} \right)^{0.25}, \tag{1}$$

где k – эквивалентная шероховатость трубопровода.

Квазиодномерные уравнения сохранения массы, импульса и внутренней энергии описывают неизотермическое стационарное состояние жидкости в трубопроводе [12]:

$$\begin{cases} f \rho u = M = \text{const}, \\ M \frac{du}{dx} + f \frac{dp}{dx} + \frac{\lambda}{2D} M |u| + f \rho g \sin \alpha = 0, \\ M \frac{d\varepsilon}{dx} = \frac{\lambda}{2D} M u |u| - k_{cp} \bar{f}_{op} (T - T_{oc}). \end{cases} \tag{2}$$

Здесь и далее M -массовый расход теплоносителя $\kappa g/c$; $\rho(x), u(x), p(x), T(x)$ – средние значения плотности, скорости, давления и абсолютной температуры жидкости в сечении x $f(x) = \pi D^2(x)/4$ – площадь поперечного сечения трубопровода (m^2); $g = 9.80665 m/c^2$ – ускорение силы гравитации; $\varepsilon = c_b T$ – внутренняя энергия жидкости Дж/К; $c_b = (a + bT + c/T^2)/\mu$ – удельная теплоемкость жидкости Дж/кг/К; μ – молярная масса жидкости; k_{cp} – коэффициент теплоотдачи от жидкости в окружающую среду через стенки трубопровода и изоляции с учетом естественной конвекции Дж/м²сК; $\bar{f}_{op}(x) = \pi(D(x) + 2\delta)$ – площадь наружной поверхности трубопровода, соответствующая на 1 погонный метр (m); T – температура окружающей среды (К).

Первое уравнение отражает закон сохранения массы жидкости, которая движется. Второе уравнение описывает закон сохранения движения: изменение движения жидкости зависит от разницы давлений, трения по формуле Дарси-Вейсбаха и силы тяжести. Третье уравнение показывает, что перенос внутренней энергии связан с потерей кинетической энергии по квадратичному закону сопротивления и передачей тепла от жидкости в окружающую среду через внешнюю поверхность трубы на единицу длины. Для воды в расчетах использовалась формула [13]:

$$c_B(T) = 39.02 + 0.07664T + 1196000/T^2 \text{ [Дж моль}^{-1}\text{К}^{-1}\text{]}, \quad (3)$$

$$\mu = 0.018 \text{ кг/моль.}$$

Взаимосвязь между давлением и плотности, при известных их характерных значениях P_*, ρ_* , выражается через модуль упругости k жидкости [14]:

$$p - p_* = \frac{k}{\rho_*}(\rho - \rho_*). \quad (4)$$

В частности, для воды можно принять $p_* = 101325 \text{ Па}$, $\rho_* = 998.23 \text{ кг/м}^3$ и $k = 2.120 \text{ МПа}$ для температуры $T_* = 293.15 \text{ К}$ [14]. При этом скорость распространения малых возмущений давления (скорость звука) в жидкости определяется в виде $c = \sqrt{k/\rho_*}$.

В качестве исходной информации используются значения скорости потока u_0 , давления p_0 и температуры жидкости T_0 на входе в участок. Значение плотности жидкости на входе в участок ρ_0 определяется в зависимости от p_0 . Тогда массовый расход жидкости составляет $M = f_0 \rho_0 u_0$, где $f_0 = f(0)$. Значение внутренней энергии жидкости во входе в участок определяется с учетом значения входной температуры и составляет $\varepsilon_0 = c_b(T_0)T_0$.

Исследуются гидродинамические и теплофизические показатели потока в рассматриваемом участке рельефного трубопровода. Так как уравнения нелинейные, то для решения задачи требуется разработать численный метод решения задачи при заданном массовом расходе жидкости и температуры окружающей среды.

При соответствующих замыкающих соотношениях из второго уравнения системы составляется дифференциальное уравнение относительно давления.

С введением обозначения $p_\Delta = p_* - k$ составляющих второго уравнения системы выразим через давление:

$$\rho = \frac{p - p_\Delta}{c^2}, \quad (5)$$

$$u = \frac{Mc^2}{f(p - p_\Delta)}, \quad (6)$$

$$\frac{du}{dx} = -\frac{Mc^2}{f^2(p-p_\Delta)^2} \left(f \frac{dp}{dx} + (p-p_\Delta) \frac{df}{dx} \right). \quad (7)$$

Вставим их в уравнение. Учитывая $M \geq 0$, получим:

$$-\frac{M^2c^2}{f^2(p-p_\Delta)^2} \left(f \frac{dp}{dx} + (p-p_\Delta) \frac{df}{dx} \right) + f \frac{dp}{dx} + \frac{\lambda}{2D} \frac{M^2c^2}{f(p-p_\Delta)} + f \frac{p-p_\Delta}{c^2} g \sin \alpha = 0. \quad (8)$$

Последующие преобразования уравнения приводит к дифференциальному уравнению:

$$\frac{dp}{dx} = \frac{\left(\frac{M^2c^2}{f^2(p-p_\Delta)} \right) \frac{df}{dx} - \frac{\lambda}{2D} \frac{M^2c^2}{f(p-p_\Delta)} - f \frac{p-p_\Delta}{c^2} g \sin \alpha}{f \left(1 - \frac{M^2c^2}{f^2(p-p_\Delta)^2} \right)}. \quad (9)$$

Из-за сложности правой части уравнения для интегрирования была использована явная конечно-разностная схема аппроксимации. При значении шага интегрирования Δx в следующей расчетной точке значение давления вычисляли по формуле:

$$p_{i+1} = p_i + \Delta x \frac{\left(\frac{M^2c^2}{f_i^2(p_i-p_\Delta)} \right) \frac{f_{i+1}-f_i}{\Delta x} - \frac{\lambda_i}{2D_i} \frac{M^2c^2}{f_i(p_i-p_\Delta)} - f_i \frac{p_i-p_\Delta}{c^2} g \sin \alpha_i}{f_i \left(1 - \frac{M^2c^2}{f_i^2(p_i-p_\Delta)^2} \right)}. \quad (10)$$

При $\sin \alpha = const$ и $f = const$ аналитическое решение аналогичного (9) уравнения для магистрального газопровода приведено в работах [15, 16]. Кроме того, при дополнительном условии $M = 0$ кг/с стационарное уравнение сохранения импульса приобретает более простой вид:

$$\frac{dp}{dx} = -\rho g \sin \alpha, \quad (11)$$

которое дает своеобразное барометрическое распределение давления в покоящемся участке согласно объемному сжатию жидкости под давлением верхних ее слоев:

$$p(x) = p_\Delta + (p_0 - p_\Delta) e^{-\frac{\rho}{\rho_0} [y(x)-y(0)]}. \quad (12)$$

Апробация численного способа интегрирования с шагом 1 м для общей длины участка 1000 м дала хороший результат. Сравнение давления с результатами приведенных выше частного случая дало отклонение не более 0.1 Па (относительная ошибка не превышает 10^{-6}).

При известном значении давления $p(x)$ плотность жидкости определяли по формуле (5), а скорость жидкости – по формуле (6).

Распределение внутренней энергии транспортируемой жидкости определяется путем решения третьего уравнения системы (2) при условии $\varepsilon_0 = c_b(T_0)T_0$.

Представим уравнение следующим образом:

$$\frac{d\varepsilon}{dx} = \frac{\lambda}{2D} \frac{M^3c^4}{f^2(p-P_\Delta)^2} - \frac{k_{cp}\bar{f}_{op}}{M} (T - T_{oc}). \quad (13)$$

Аппроксимация уравнение (2.13) явной схемой, составлено рекуррентное соотношение:

$$\varepsilon_{i+1} = \varepsilon_i + \Delta x \left(\frac{\lambda_i}{2D_i} \frac{M^3c^4}{f_i^2(p_i - P_\Delta)^2} - \frac{k_{cp}\bar{f}_{op}}{M} (T_i - T_{oc}) \right). \quad (14)$$

Обратный переход к температуре T_{i+1} из ε_{i+1} осуществляется решением кубического уравнения относительно температуры:

$$(39.02 + 0.07664T_{i+1} + 1196000/(T_{i+1})^2)T_{i+1} - \mu\varepsilon_{i+1} = 0, \quad (15)$$

методом деления отрезка пополам (в программе обеспечено строгое выполнение условия с точностью 10^{-10}). Полученное значение для следующего узла используется как T_i .

3 Обсуждения результатов по горизонтальному и наклонному трубопроводам

На первом этапе было проведено сопоставление результатов для трубопроводов постоянного диаметра с различными моделями турбулентности и аналитическими решениями.

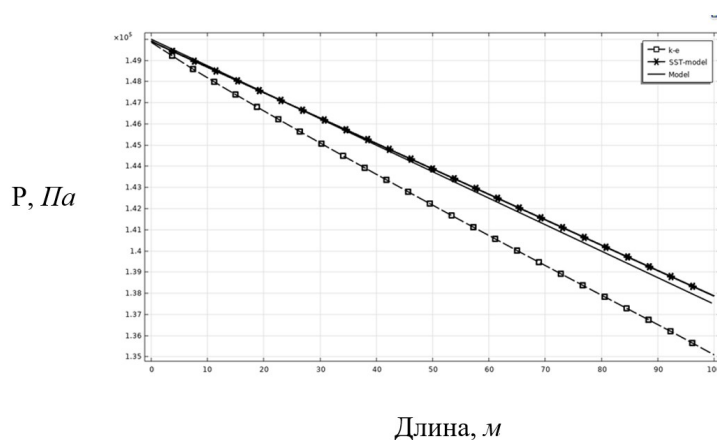


Рис. 1 Сравнение результатов предложенной модели результатами программного обеспечения COMSOL Multiphysics. $\sin a = 0$, $D = 0.03$ м, $u = 0.4$ м / с, $k_{\text{ЭКВ}} = 0.001$ м

На рис. 1 представлены сравнительные результаты, полученные с использованием классической модели $k - \varepsilon$, модели Shear Stress Transport (SST) для описания трехмерных течений, а также предлагаемой нами новой квазиодномерной модели. Результаты получены для данных $\sin a = 0$, $D = 0.03$ м, $u = 0.4$ м / с, $k_{\text{ЭКВ}} = 0.001$ м. На рисунке представлено распределение давления вдоль трубопровода длиной 100 м. Расчёты выполнены в программе COMSOL Multiphysics с использованием турбулентных моделей $k - \varepsilon$ и SST, а также предложенной квазиодномерной модели, результаты которой приведены для сравнения. Из рисунка видно, что давление по длине трубы монотонно снижается, что соответствует устойчивому режиму турбулентного течения. Сравнение результатов показывает, что значения давления, полученные по предложенной модели, близки к данным SST-модели, в то время как модель $k - \varepsilon$ демонстрирует несколько заниженные значения на всём протяжении трубопровода.

Количественный анализ показал следующие результаты:

среднее относительное расхождение между предложенной моделью и SST-моделью составило 1.8%; максимальная погрешность в выходной части трубы 100 м не превысила 3.1% для модели $k - \varepsilon$ расхождение достигало 9.4% что объясняется недостаточно точным учётом приповерхностного слоя и интенсивности турбулентности. Для

оценки адекватности полученного решения проведено сравнение результатов расчёта для горизонтального трубопровода с данными, полученными на основе экспериментально подтверждённой формулы коэффициента сопротивления из [18]:

$$\lambda = \frac{0.25}{\left[\log_{10} \left(\frac{\varepsilon_1}{3.7D} + \frac{5.74}{\text{Re}^{0.9}} \right)\right]^2}, \quad (16)$$

в формуле Дарси–Вейсбаха

$$\Delta p = \frac{\lambda}{2D} \rho u^2 L. \quad (17)$$

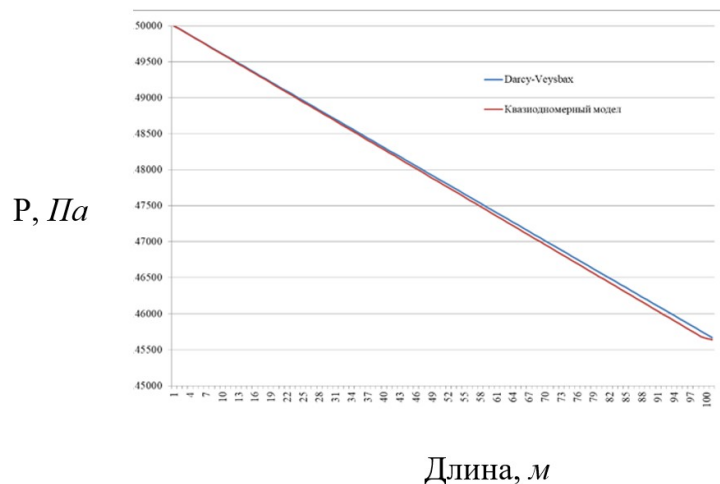


Рис. 2 Сравнение результатов по (1) и (16). $u = 0.2 \text{ м / с}$, $L = 100 \text{ м}$, $\mu = 0.001 \text{ Па}\cdot\text{с}$, $\text{Re} = \rho u D / \mu$, $\rho = 998.23 \text{ кг / м}^3$, $k_{\text{ЭКВ}} = 0.0005 \text{ м}$

Распределение давления, рассчитанное по формуле (16) и представленное на рис. 2, хорошо согласуется с результатами, полученными на основе квазиодномерной модели (16) применением формулы Шифринсона (1). Линейное снижение давления вдоль трубы подтверждает, что поток является установившимся, а потери давления происходят в основном за счёт трения о стенки трубопровода. Максимальное расхождение между двумя методами составляет всего около 1–2 %, что свидетельствует о высокой точности и практической применимости квазиодномерного подхода.

В последующих исследованиях были выполнены расчеты для трубопроводных сетей конфузорного и диффузорного типа с переменным диаметром труб.

В данном разделе представлены результаты численного моделирования конфузорного участка трубопровода длиной 100 м. Согласно заданным геометрическим параметрам (рис. 3), на начальном участке от 0 до 20 радиус трубы остается постоянным и составляет 0.03 м. Затем, в интервале от 20 до 80 происходит плавное сужение радиуса до 0.02 м, после чего на конечном участке от 80 до 100 радиус сохраняется неизменным на уровне 0.02 м.

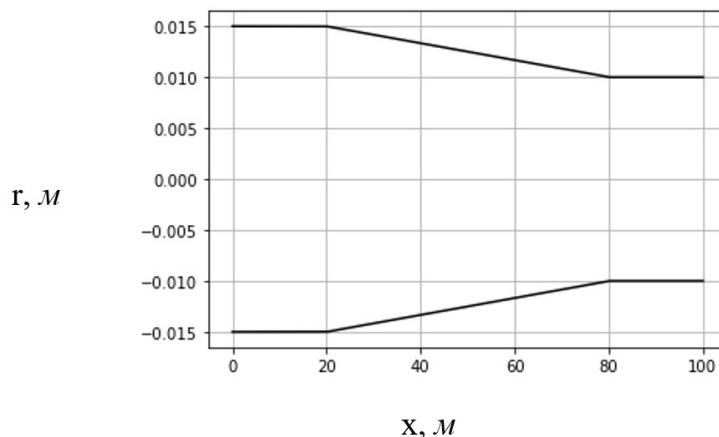


Рис. 3 Изменение диаметра трубопровода с конфузуром

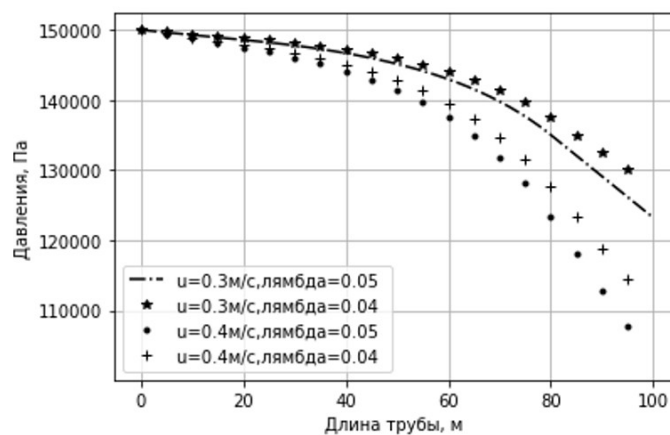


Рис. 4 Графики изменения давления конфузорного трубопровода

Анализ полученных результатов показывает, что распределение гидродинамического давления в сужающихся трубах конфузорного типа подчиняется нелинейной закономерности, и ускорение потока вследствие уменьшения площади поперечного сечения трубы, в свою очередь, приводит к резкому возрастанию потерь на гидравлическое трение, пропорциональному квадрату скорости. Согласно графикам изменения давления (рис. 4), полученным в рамках исследования, в случаях с более высокой скоростью потока наблюдается значительно более интенсивное падение давления, что на практике подтверждает доминирующее влияние данного параметра на формирование градиента давления по сравнению с коэффициентом трения, хотя при одинаковых скоростных режимах увеличение коэффициента гидродинамического сопротивления также ожидаемо обуславливает дополнительные потери давления. В качестве заключения следует отметить, что данный модифицированный подход, примененный для выражения сил давления в уравнении количества движения, позволяет с высокой точностью и адекватно моделировать сложные физические взаимосвязи между скоростью жидкости, гидравлическим сопротивлением и изменением геометрии трубы, а также процессы течения жидкости и теплообмена, выступая полноценным научным обоснованием выбранного алгоритма численного расчета.

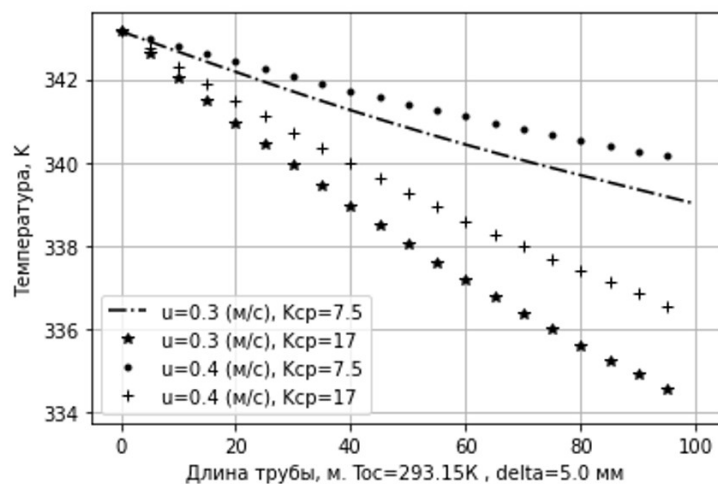


Рис. 5 Изменение температуры конфузорного трубопровода $T_{oc} = 293.15K$, Тол=5мм

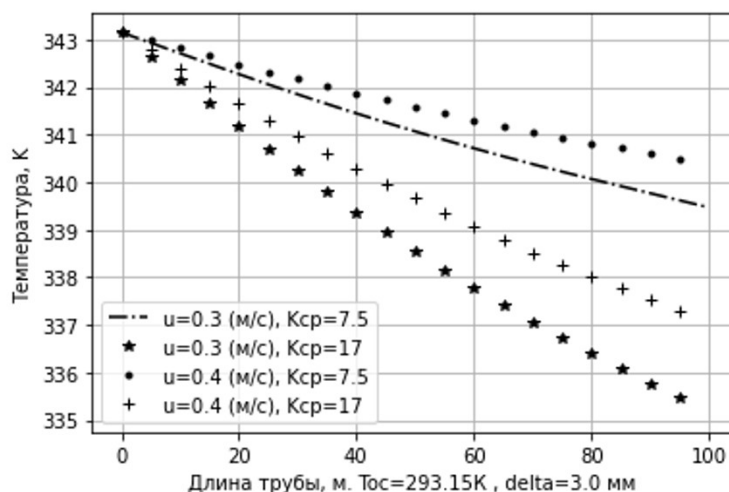


Рис. 6 Изменение температуры в конфузорном трубопроводе $T_{oc} = 293.15K$, Тол=3мм

Изменение температуры жидкости в конфузорной трубе также имеет характерные особенности. Из-за ускорения потока в сужающейся части время пространственного контакта жидкости с охлаждаемыми стенками трубы сокращается. Вследствие этого температурные кривые приобретают заметную кривизну (вогнутость), показывая, что по мере сужения трубы темп потери температуры слегка замедляется по сравнению с равномерным участком. Основные тепловые закономерности сохраняются: повышение начальной скорости потока до 0.4 м/с и снижение теплопроводности трубы до 7.5 способствуют лучшему сохранению внутренней тепловой энергии жидкости.

Внешний температурный фактор и толщина стенки продолжают оказывать существенное влияние на общую интенсивность теплообмена (рис. 5 и рис. 6). При более низких температурах окружающей среды (в частности, при $T_{oc} = 293.15$) общие тепловые потери к выходному сечению трубы оказываются значительно выше по сравнению с более мягкими температурными режимами. Сравнение полученных

графики подтверждает, что увеличение толщины стенки с 3 мм до 5 мм приводит к расширению общей площади наружной поверхности теплоотдачи. Данный геометрический фактор обуславливает более интенсивное охлаждение потока за счет усиления конвективного теплообмена с окружающей средой.

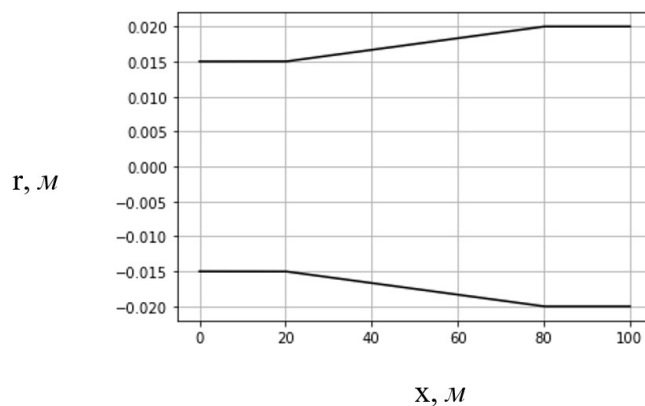


Рис. 7 Изменение диаметра трубопровода с диффузором

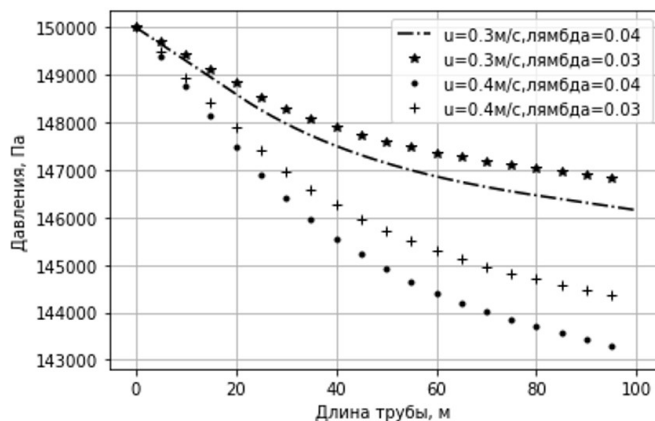


Рис. 8 Изменения давления в трубопроводе с диффузором

Проведены исследования гидродинамических и тепловые показатели жидкости в трубопроводе с диффузором (геометрия которого показана на рис. 7) при общей длине трубопровода 100 м. На начальном участке с длиной 20 м радиус трубы 0.03 м; в интервале от 20 до 80 м происходит плавное расширение сечения до радиуса 0.04 м, а в заключительном участке с длиной 20 м радиус составляет 0.04 м.

Анализ графиков давления демонстрирует реальную гидродинамическую картину течения в диффузорной трубе с учетом сил гидравлического трения. Начальное давление на входе составляет 150000 Па. Вопреки упрощенным теоретическим ожиданиям о росте статического давления за счет эффекта Бернулли (при расширении сечения и замедлении потока), график на рис. 8 показывает стабильное и монотонное падение давления по всей длине трубы. Это объясняется тем, что гидравлические потери энергии на трение о стенки трубы многократно превосходят незначительное восстановление статического давления, вызванное диффузорным эффектом.

Интенсивность падения давления напрямую зависит от параметров потока: наиболее резкое снижение (до уровня около 143000 Па к концу трубы) наблюдается при высокой скорости потока $u = 0.4 \text{ м/с}$ и коэффициенте трения $\lambda = 0.04$. Напротив, при меньшей скорости $u = 0.3 \text{ м/с}$ и сниженном трении $\lambda = 0.03$ поток сохраняет свою энергию значительно лучше (давление опускается лишь до 146500 Па). Тем не менее, общая тенденция к снижению давления за счет естественного гидравлического сопротивления безоговорочно доминирует на всех участках.

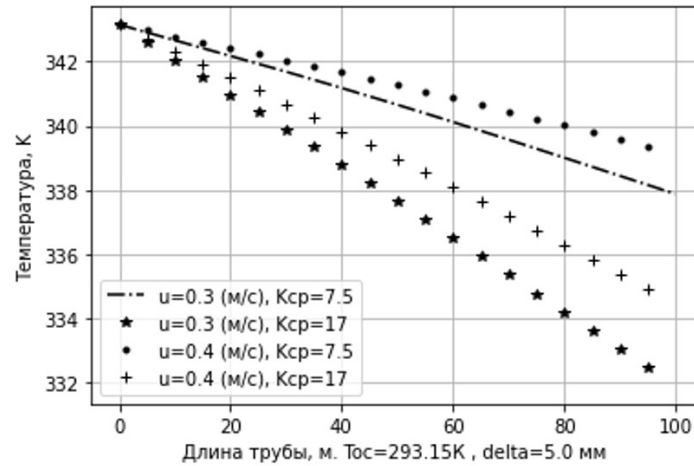


Рис. 9 Изменение температуры в трубопроводе с диффузором $T_{oc} = 293.15 \text{ K}$, Тол=5мм

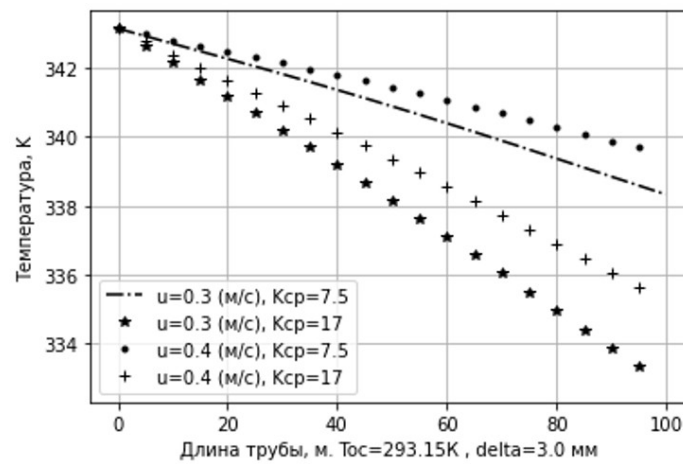


Рис. 10 Изменение давления и температуры в трубопроводе $T_{oc} = 293.15 \text{ K}$, Тол=3мм

Изменение температурного профиля в диффузорной трубе также имеет свои особенности. Из-за замедления потока в расширяющейся части время пространственного контакта жидкости с охлаждаемыми стенками трубы увеличивается (рис. 9, 10). Вследствие этого температурные кривые приобретают слегка выпуклую форму (заметнее на графиках с более низким перепадом температур), показывая, что по мере расширения трубы темп потери температуры незначительно ускоряется по сравнению с равномерным участком. Основные тепловые факторы остаются неизменными:

при более высокой скорости (0.4 м/с) жидкость лучше сохраняет тепловую энергию благодаря уменьшенному времени транзита, а повышение коэффициента теплопроводности до $17 \text{ Дж}/(\text{м}^2 \text{сК})$ приводит интенсивному охлаждению теплоносителя.

Влияние внешней температуры и толщины стенки на динамику теплообмена остается стабильным и предсказуемым. При рассматриваемых внешних условиях с температурой 293.15 К температура жидкости к концу 100-метровой трубы падает до уровня $333.0 - 339.5 \text{ К}$ в зависимости от скорости потока и коэффициента теплопередачи. Сравнение графиков для различной толщины стенки подтверждает, что уменьшение толщины с 5.0 до 3.0 снижает общее термическое сопротивление трубы. Для материалов без высокой степени изоляции это приводит к тому, что жидкость остывает несколько быстрее из-за более интенсивного теплообмена с окружающей средой. Далее представим результаты численного моделирования для участков трубопровода со ступенчатым (внезапным) изменением сечения.

В ходе исследования был проведен анализ процессов течения жидкости и теплообмена, связанных со скачкообразным уменьшением диаметра трубы с 0.1 до 0.05 на отметке 50 метров. В гидродинамическом профиле давления наблюдаются коренные изменения: в соответствии с уравнением неразрывности потока, сокращение площади поперечного сечения в 4 раза приводит к пропорциональному четырехкратному увеличению скорости течения.

В данной точке, согласно закону Бернулли, потенциальная энергия давления преобразуется в кинетическую энергию (скорость), что вызывает резкое локальное падение давления. На узком участке трубы ($50-100 \text{ м}$) потери на гидравлическое трение возрастают пропорционально квадрату скорости, из-за чего график давления характеризуется значительно более крутым наклоном по сравнению с начальным участком. Результаты данного моделирования демонстрируют полное соответствие стандартам вычислительной гидродинамики и бенчмаркам COMSOL.

При резком расширении диаметра в два раза на отметке 50 метров наблюдается обратная гидродинамическая картина. В точке расширения скорость потока падает в 4 раза, в результате чего, согласно закону Бернулли и теореме Борда-Карно, значительная часть кинетической энергии преобразуется в статическое давление (происходит восстановление давления).

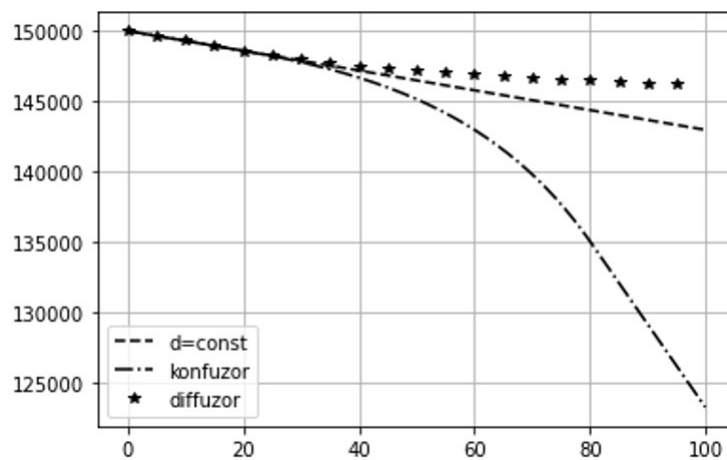


Рис. 11 Распределение давления в трубопроводах с постоянным и переменным диаметрами. $D_0 = 0.03$, $u_0 = 0.3 \text{ м/с}$

На данном графике (рис. 11) представлены зависимости изменения давления в трубопроводах с постоянным и переменным диаметрами. При этом можно заметить, что в диффузоре происходит частичное восстановление давления, тогда как в конфузоре падение давления ускоряется, что объясняется законом Бернулли. В случае постоянного диаметра наблюдается линейное снижение давления.

4 Заключение

Предложена математическая модель установившихся процессов гидродинамики и теплообмена в водяной системе отопления. В условиях постоянного массового расхода на основе закона сохранения импульса разработана квазиодномерная постановка, учитывающая гравитационные силы и силы трения. Выведено уравнение энергии, описывающее изменение внутренней энергии жидкости с учетом диссипации кинетической энергии и теплообмена с окружающей средой. Нелинейные уравнения для давления и температуры решены численно с помощью явной схемы и малых временных шагов. Для определения температуры по обновленной внутренней энергии сформулировано кубическое уравнение, которое решено методом бисекции (деления отрезка пополам). В данном исследовании гидравлические и тепловые характеристики транспорта жидкости в закрытых трубопроводах были проанализированы при различных условиях, включая изменение диаметра трубы, шероховатости внутренней поверхности, угла наклона, теплопроводности материала трубы и температуры окружающей среды. Графический анализ показал, что на потери давления и температуры наиболее влияют диаметр трубы, скорость потока, гравитация и разность температур между жидкостью и окружающей средой. Минимальные потери давления отмечены в гладких горизонтальных трубах большого диаметра. Повышенная шероховатость, малый диаметр и наклонные участки приводят к значительно большим потерям. В ходе анализа теплообмена установлено, что теплопроводность материала трубы и температура окружающей среды являются ключевыми параметрами. Более высокая теплопроводность и расход потока приводят к более интенсивному теплообмену и, как следствие, к большим потерям тепла. Моделирование, выполненное в среде COMSOL Multiphysics, продемонстрировало высокую степень согласия между результатами предложенной модели и моделью турбулентности SST, что подтверждает адекватность разработанного подхода при описании сложных турбулентных потоков. Таким образом, полученные результаты позволяют более точно моделировать движение жидкости в трубопроводных системах и могут быть применены при разработке эффективных энергосберегающих решений, оптимизации технологических процессов и обеспечении надежной работы систем теплоснабжения, водораспределения и промышленного транспорта жидкостей. В данном исследовании проведен комплексный анализ гидравлических и тепловых процессов в закрытых трубопроводах и предложена новая квазиодномерная математическая модель. Разработанная модель основана на уравнениях сохранения массы, импульса и внутренней энергии с учетом гравитационных сил, сопротивления трения и теплообмена с внешней средой. В модели в явном виде учтены эффекты диссипации кинетической энергии и теплопередачи. Результаты исследований показали, что диаметр трубы, скорость потока, угол наклона и температура окружающей среды являются наиболее существенными параметрами, влияющими на движение жидкости и потери тепла. Кроме того, результаты, полученные в COMSOL Multiphysics, были сопоставлены с моделью SST и показали высокую степень согласованности, что подтверждает надежность и адекватность предложенной модели. Таким образом, разработанная модель позволяет

точнее воспроизводить процессы движения жидкости и передачи тепла в закрытых трубопроводах и может эффективно использоваться для создания энергосберегающих технологий, улучшения систем отопления и водоснабжения, а также повышения эффективности транспортировки промышленных жидкостей.

Литература

- [1] *Lapshin V.* Analysis of heat exchange processes on the surface of the aboveground pipeline with heat insulation // Bulletin of Scientific Research Results. – 2023. – Vol. 2023. – № 3. – P. 147–156.
- [2] *Sharikov Y.V., Markus A.A.* Mathematical modeling of heat transfer in pipelines and pipe's objects // Journal of Mining Institute. – 2013. – Vol. 202. – P. 233–238.
- [3] *Bulovich S.V.* Mathematical modeling of gas flow in the vicinity of an open end of a pipe with oscillations of a piston at the other end of the pipe according to the harmonic law at a resonant frequency (in Russian) // Journal Technical Physics. – 2017. – Vol. 87. – № 11. – P. 1632 p.
- [4] *Kurbatova G.I., Filippov B.V., Filippov V.B.* Non-isothermal turbulent flow of compressible gas // Mathematical Modeling. – 2003. – Vol. 15. – № 3. – P. 92–108.
- [5] *Ermolaeva N.N., Kurbatova G.I.* Analysis of approaches to modeling thermodynamic processes in gases at high pressures // Vestnik of St. Petersburg University. Episode 10. Applied mathematics. Informatics. Management Processes. – 2013. – № 2. – P. 36–45.
- [6] *Kurbatova G.I., Popova E.A., Filippov B.V.* Models of offshore gas pipelines // Saint Petersburg. – 2005.
- [7] *Grunicheva Y.V., Kurbatova G.I., Popova Y.A.* Nonstationary nonisothermal flow of gas mix in offshore gas pipelines // Mathematical Models and Computer Simulations. – 2011. – Vol. 3. – № 6. – P. 751–758.
- [8] *Vasiliev O.F., Bondarev E.A., Voevodin A.F., Kanibolotsky M.A.* Non-Isothermal Gas Flow in Pipes // Novosibirsk: Nauka. – 1978.
- [9] *Tevyashv A.D., Smirnova V.S.* Method of approximate solution of the Cauchy problem for the system of equations of steady gas flow in a pipeline // Radioelectronics and Information Science. – 2009. – № 1. – P. 81–87.
- [10] *Khujayev I., Bozorov J., Akhmadjonov S.* Investigation of the propagation of waves of sudden changes in mass flow rate of fluid and gas in a “short” pipeline approach // IEEE Dynamics of Systems, Mechanisms and Machines (Dynamics). – 2019.
- [11] *Charny I.A.* Unsteady Motion of Real Fluid in Pipes // Moscow: Nedra. – 1975.
- [12] *Grachev V.V., Shcherbakov S.G., Yakovlev E.I.* Dynamics of Pipeline Systems // Moscow: Nauka. – 1987.
- [13] *Khuzhaev I.K., Mamadaliev K.A., Kukanova M.A.* Analytical solution of the problem of the propagation of a compaction wave in an inclined pipeline caused by the deceleration of a fluid // Problems of Computational and Applied Mathematics. – 2015. – № 2. – P. 65–79.
- [14] *Khujayev I.K., Akhmadjonov S.S., Mahkamov M.K.* Modeling the stages of verification of the suitability of a short section of a gas pipeline for operation // Mathematical Models and Computer Simulations. – 2022. – Vol. 14. – № 6. – P. 972–983.
- [15] *Zaitsev A.V., Pelenko F.V.* Modeling of viscous fluid flow in a pipe // Scientific journal of SPbGUNIPT. Series: Processes and Equipment of Food Production (Electronic Journal). – 2012.
- [16] *Zaitsev A.V.* Development of an algorithm for solving the Navier-Stokes equations for the flow of cryogenic liquid in a pipe // Bulletin of MAX. – 2011. – № 3. – P. 37–42.

- [17] *Bozorov O.S., Mamatkulov M.M.* Analytical Studies of Nonlinear Hydrodynamic Phenomena in Media with Slowly Changing Parameters // Tashkent: TITLP. – 2015.
- [18] *Chu S., Marensi E., Willis A.P.* Modelling the transition from shear-driven turbulence to convective turbulence in a vertical heated pipe // *Mathematics*. – 2025. – Vol. 13. – №2. – 293 p.
- [19] *Chu S., Willis A.P., Marensi E.* The minimal seed for transition to convective turbulence in heated pipe flow // *Journal of Fluid Mechanics*. – 2024. – Vol. 997. – 46 p.
- [20] *Wibisono A.F., Addad Y., Lee J.I.* Numerical investigation on water deteriorated turbulent heat transfer regime in vertical upward heated flow in circular tube // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. – 2015. – Vol. 83. – P. 173–186.
- [21] *Idelchik I.E.* Handbook of Hydraulic Resistance // Moscow: Mashinostroenie. – 1975.

UDC 532

MODELLING HEAT AND MASS TRANSFER IN A RELIEF PIPELINE WITH CONSTANT AND VARYING DIAMETERS

^{1*}*Ravshanov Sh.A.*, ^{1,2}*Boborakhimova M.I.*, ¹*Chulliev Sh.I.*

*shohjaxonravshanov22@gmail.com

¹Institute of mechanics and seismic stability of structures named after M.T. Urazbaev,
33, str. Durman yuli, Tashkent, 100125 Uzbekistan;

²V.I. Romanovskiy institute of mathematics, Uzbekistan academy of sciences,
9, University street, Tashkent, 100174 Uzbekistan.

This work presents a comprehensive numerical and analytical study of hydrodynamic and thermal processes in closed pipelines of variable diameter, taking into account terrain relief and external thermal influences. The novelty lies in an improved quasi-one-dimensional model that assesses the impact of geometric parameters (diameter, inclination angle, internal roughness) and thermophysical characteristics (material thermal conductivity, ambient temperature) on the pressure and temperature distribution along the pipeline. The model was validated against SST-turbulence-model simulations and Darcy–Weisbach calculations, with a maximum deviation below 2%. Hydraulic losses were found to depend mainly on pipe diameter and flow velocity, whereas thermal losses depend on the material’s thermal conductivity and the pipeline orientation. The proposed approach provides a reliable and computationally efficient basis for predicting the energy characteristics of fluid-transport systems and optimizing thermal networks.

Keywords: fluid flow, heat transfer, pipe flow.

Citation: Ravshanov Sh.A., Boborakhimova M.I., Chulliev Sh.I. 2026. Modelling heat and mass transfer in a relief pipeline with constant and varying diameters. *Problems of Computational and Applied Mathematics*. 3(73):90-103.

DOI: https://doi.org/10.71310/pcam.3_73.2026.07

HISOBLASH VA AMALIY МАТЕМАТИКА MUAMMOLARI

ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ
И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
PROBLEMS OF COMPUTATIONAL
AND APPLIED MATHEMATICS

ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

№ 3(73) 2026

Журнал основан в 2015 году.

Издается 6 раз в год.

Учредитель:

Научно-исследовательский институт развития цифровых технологий и
искусственного интеллекта.

Главный редактор:

Равшанов Н.

Заместители главного редактора:

Арипов М.М., Шадиметов Х.М., Ахмедов Д.Д.

Ответственный секретарь:

Убайдуллаев М.Ш.

Редакционный совет:

Азамов А.А., Алоев Р.Д., Амиргалиев Е.Н. (Казахстан), Арушанов М.Л.,
Бурнашев В.Ф., Джумаёзов У.З., Загребина С.А. (Россия), Задорин А.И. (Россия),
Игнатъев Н.А., Ильин В.П. (Россия), Иманкулов Т.С. (Казахстан),
Исмагилов И.И. (Россия), Кабанихин С.И. (Россия), Курбонов Н.М., Маматов Н.С.,
Мирзаев Н.М., Мурадов Ф.А., Назирова Э.Ш., Нормуродов Ч.Б., Нуралиев Ф.М.,
Опанасенко В.Н. (Украина), Расулмухамедов М.М., Садуллаева Ш.А.,
Старовойтов В.В. (Беларусь), Хаётов А.Р., Халджигитов А., Хамдамов Р.Х.,
Хужаев И.К., Хужаеров Б.Х., Эшмаматова Д.Б., Дустмуродова Ш.Ж.,
Чье Ен Ун (Россия), Шабозов М.Ш. (Таджикистан), Dimov I. (Болгария),
Li Y. (США), Mascagni M. (США), Min A. (Германия), Singh M. (Южная Корея).

Журнал зарегистрирован в Агентстве информации и массовых коммуникаций при
Администрации Президента Республики Узбекистан.

Свидетельство №0856 от 5 августа 2015 года.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

При перепечатке материалов ссылка на журнал обязательна.

За точность фактов и достоверность информации ответственность несут авторы.

Адрес редакции:

100125, г. Ташкент, м-в. Буз-2, 17А.

Тел.: +(998) 71 263-41-98.

Э-почта: journals@airi.uz.

Веб-сайт: <https://journals.airi.uz>.

Дизайн и вёрстка:

Шарипов Х.Д.

Отпечатано в типографии НИИ РЦТИИ.

Подписано в печать 25.06.2026 г.

Формат 60x84 1/8. Заказ №3. Тираж 100 экз.

Содержание

Яхшибаев Д.С., Боборахимов Б.И.

Математическое моделирование поступления многофазного потока смеси в стратифицированное водохранилище и разрушения слоистой структуры . . . 7

Бахтиёрв Б.Б., Хужаев И.К., Туропова Н.В.

Математическая модель и анализ гашения гидравлического удара с помощью воздушного колпака 25

Бегимов О.М., Хужаев И.К., Мамадалиев Х.А.

Исследование скорости распространения малых возмущений давления в газожидкостной среде с учетом массовой концентрации газа и деформации стенки трубопровода 37

Эргашев Д.Й., Хужаев Ж.И., Ахмаджонов С.С.

Математическая модель процесса теплоотдачи от жидкого теплоносителя, текущего по оребренному прямоугольными ребрами цилиндрическому трубопроводу 50

Музаффаров С.А., Маратов Х.У., Хамдамов А.А.

Вычислительное моделирование вертикально-осевой ветроэнергетической установки с пассивным изменением шага лопастей для условий слабых ветров 61

Хожжикулов Ш.Ш., Бегимов О.М., Обиджонов А.Ж.

Исследование динамики переходных процессов, связанных с изменением расхода в конце участка трубопровода, с учетом и без учета силы сопротивления 75

Равшанов Ш.А., Боборахимова М.И., Чулмиев Ш.И.

Моделирование тепло- и массообмена в рельефном трубопроводе с постоянными и изменяющимися диаметрами 90

Равшанов Н., Боборахимов Б.И., Бердиёров Ш.Ш.

Характеристики загрязнения мембраны в процессе фильтрации и транспортировки в цилиндрическом пористом фильтре 104

Халджигитов А.А., Бобоназаров А.А., Рахмонова Р.А., Тиловов О.О.

Численное моделирование задач теории упругости в напряжениях методом конечных элементов 125

Тиловов М.А.

Численное исследование динамики производных различного порядка уравнения Фолкнера–Скэна в зависимости от градиента давления 139

Жумаев З.З.

Приближённое решение задач с начальными условиями для дифференциальных уравнений первого порядка с использованием комбинированного метода Рунге–Кутты и метода с кусочно-постоянным аргументом 153

Contents

<i>Yakhshibaev D.S., Boborakhimov B.I.</i> Mathematical modeling of multiphase mixture inflow into a stratified reservoir and the breakdown of the layered structure	7
<i>Bakhtiyorov B.B., Khujaev I.K., Turapova N.V.</i> Mathematical model and analysis of water hammer damping using an air vessel .	25
<i>Begimov O.M., Khujaev I.K., Mamadaliev Kh.A.</i> Investigation of the propagation velocity of small pressure disturbances in a gas–liquid medium with account for gas mass concentration and pipeline wall deformation	37
<i>Ergashev D.Y., Khujaev J.I., Akhmadjonov S.S.</i> A mathematical model of heat transfer from a liquid coolant flowing through a cylindrical pipeline finned with rectangular fins	50
<i>Muzaffarov S.A., Maratov Kh.U., Hamdamov M.M.</i> Computational modeling of a passive-pitch low-wind vertical-axis wind turbine .	61
<i>Khozhikulov Sh.Sh., Begimov O.M., Obidjonov A.J.</i> Investigation into the dynamics of transient processes associated with flow rate changes at the end of a pipeline section, both with and without resistance force .	75
<i>Ravshanov Sh.A., Boborakhimova M.I., Chulliev Sh.I.</i> Modelling heat and mass transfer in a relief pipeline with constant and varying diameters	90
<i>Ravshanov N., Boborakhimov B.I., Berdiyev Sh.Sh.</i> Membrane fouling characteristics during filtration and transport processes in a cylindrical porous filter	104
<i>Khaldjigitov A.A., Bobonazarov A.A., Rakhmonova R.A., Tilovov O.O.</i> Numerical modeling of elasticity theory problems in terms of stresses using the finite element method	125
<i>Tilovov M.A.</i> Numerical study of the dynamics of derivatives of various orders of the Falkner–Skan equation depending on the pressure gradient	139
<i>Jumaev Z.Z.</i> Approximate solution of initial value problems for first-order differential equations using a combined Runge-Kutta and piecewise constant argument method .	153