

УДК 532.546

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ, СВЯЗАННЫХ С ИЗМЕНЕНИЕМ РАСХОДА В КОНЦЕ УЧАСТКА ТРУБОПРОВОДА, С УЧЕТОМ И БЕЗ УЧЕТА СИЛЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ

^{1*} *Хожжикулов Ш.Ш.*, ² *Бегимов О.М.*, ¹ *Обиджонов А.Ж.*

**hojiqulovshaxzod@mail.ru*

¹Ташкентский государственный университет транспорта,
100167, Узбекистан, Ташкент, ул. Темирйулчилар, 1;

²Институт механики и сейсмостойкости сооружений им. М.Т. Уразбаева,
100125, Узбекистан, Ташкент, Ул. Дурмон Йули, 33.

В работе в рамках неконсервативной постановки квазиодномерных линеаризованных уравнений сохранения массы и импульса исследуются переходные процессы в элементарном рельефном участке трубопровода, возникающие при скачкообразном изменении граничных скоростей несжимаемой жидкости. Для определения осреднённой скорости потока получено неполное телеграфное уравнение, решение которого найдено методом разделения переменных. Распределение давления вычислено путём интегрирования исходной системы уравнений с использованием найденного выражения для скорости потока. Выполнены численные эксперименты при постоянных значениях функций, входящих в начальные и граничные условия. Исследованы режимы течения, соответствующие постоянному, увеличивающемуся и уменьшающемуся среднему давлению на рассматриваемом участке трубопровода. Показаны особенности распространения ударных волн как с учётом силы трения, так и без её учёта.

Ключевые слова: жидкость, трубопровод, скорость, давление, метод Фурье, скорость звука, сила сопротивления, вычислительный эксперимент.

Цитирование: *Хожжикулов Ш.Ш., Бегимов О.М., Обиджонов А.Ж.* Исследование динамики переходных процессов, связанных с изменением расхода в конце участка трубопровода, с учетом и без учета силы сопротивления // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2026. – № 3(73). – С. 75-89.

DOI: https://doi.org/10.71310/pcam.3_73.2026.06

1 Введение

В инженерной практике расчеты трубопроводов обычно основаны на установившемся потоке, однако анализ нестационарных режимов позволяет выявить уязвимые участки системы [1]. Одной из таких задач является исследование переходных процессов, где одновременно учитываются скорость потока и скорость распространения малых возмущений в системе «трубопровод – среда».

Процессы возникновения и распространения волн возмущений рассматриваются на основе квазиодномерных уравнений Н.Е. Жуковского [2, 3]. Эта модель учитывает как гидродинамическую скорость жидкости, так и скорость возмущений, и служит базой для теоретических и экспериментальных исследований волн сжатия и разрежения в трубопроводах.

Исследование волн сжатия и разрежения имеет важное значение как для науки, так и для инженерной практики. Многократное воздействие подобных волн может

приводить к нарушению целостности трубопровода. Так, запуск и остановка насосных агрегатов сопровождаются возникновением значительных колебаний давления, способных вызвать разрушительные последствия [4].

Изучение закономерностей ударных волн представляет большой интерес, но усложняется скачкообразными изменениями параметров. В теории это создает трудности с применением функции Хевисайда [5], введением бегущих волн и созданием численных методов [6, 7]. На практике же требуется разработка малоинерционных измерительных систем на базе компьютерных технологий [8, 9, 15].

С учетом этих особенностей рассматривается элементарный рельефный участок *quvici*, где на концах заданы законы изменения скорости от времени. Изменение плотности жидкости и деформация тонкостенной трубы учтены через скорость распространения малых возмущений давления, а само давление определяется градиентом скорости по длине. Начальные распределения скорости и ее производной известны. Задача решается методом Фурье в рамках квазиодномерной обобщенной модели Н.Е. Жуковского.

Предложен общий подход, учитывающий силы трения, гравитацию и локальную инерцию при переменных скоростях на входе и выходе. Численные результаты получены для постоянных значений в начальных и граничных условиях. Главное отличие от известных аналогов — дополнительный учет рельефа трассы прокладки трубопровода.

2 Постановка и метод решения задачи

Нестационарное течение жидкости в элементарном участке трубопровода при определяется системой уравнений [2, 10, 11]:

$$\begin{cases} -\frac{\partial P}{\partial x} = \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + 2au \right), \\ -\frac{\partial P}{\partial t} = \rho c^2 \frac{\partial u}{\partial x}. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь $P(x, t) = p(x, t) + \rho g y(x)$ — полное гидростатическое давление, представляющее меру потери энергии жидкости; $p(x, t)$, $u(x, t)$ — средние по сечению x значения давления и скорости потока в момент времени t ; $a = \frac{\lambda u_*}{4D}$; u_* — характерная скорость процесса; λ — коэффициент сопротивления трения; $c = \left(\frac{\rho_0}{k} + \frac{D\rho_0}{E\delta} \right)^{-1/2}$ — скорость звука; ρ_0 , D — плотность жидкости и диаметр трубопровода; k , E — модули упругости транспортируемой жидкости и трубы; δ — толщина трубы [10].

Исключение полного напора $P(x, t)$ при постоянном значении площади поперечного сечения трубы $f = \pi D^2/4$ позволяет построить отдельное уравнение относительно скорости:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2a \frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Это — неполное телеграфное уравнение [11].

Рассматривается вариант начальных условий:

$$u(x, 0) = u^{(0)}(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = u^{(1)}(x).$$

Граничные условия заданы в виде

$$u(0, t) = u^{(0)}(t), \quad u(l, t) = u^{(1)}(t).$$

Согласно этим данным и первому уравнению исходной системы начальным условием для полного напора служит

$$P(x, 0) = p_{00} - \rho \int_0^x [u^{(1)}(\eta) + 2au^{(0)}(\eta)] d\eta,$$

где p_{00} – начальное давление во входном сечении.

Для приведения граничных условий к однородному виду введём новую искомую функцию $u(x, t)$, определяемую следующим соотношением:

$$u(x, t) = C_0(t) + xC_1(t) + w(x, t),$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2a \frac{\partial w}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - H(t) - xR(t).$$

Для определения множителя в виде собственной функции от времени имеем уравнение

$$Y_n''(t) + 2aY_n'(t) + c^2\lambda_n^2 Y_n(t) = 0. \quad (2)$$

Подстановка выражения $Y_n(t) = e^{s_n t}$ в это уравнение приведет к характеристическому уравнению

$$s_n^2 + 2as_n + c^2\lambda_n^2 = 0.$$

Дискриминант данного уравнения составляет

$$D_n = a^2 - c^2\lambda_n^2,$$

а решениями квадратного уравнения будут:

$$(s_n)_{1,2} = -a \pm \sqrt{D_n}.$$

С учетом этих возможных вариантов $D_n > 0$, $D_n = 0$ и $D_n < 0$ для $Y_n(t)$ получим решение [14–16, 18]:

$$Y_n(t) = \begin{cases} e^{-at} (A_n \operatorname{ch} \sqrt{D_n} t + B_n \operatorname{sh} \sqrt{D_n} t), & \text{при } D_n > 0, \\ e^{-at} (A_n + B_n t), & \text{при } D_n = 0, \\ e^{-at} (A_n \cos \sqrt{|D_n|} t + B_n \sin \sqrt{|D_n|} t), & \text{при } D_n < 0. \end{cases}$$

Соответственно, общее решение однородного уравнения составляет

$$U(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(t) \sin \lambda_n x.$$

Переходим к реализации граничных условий общего решения однородного уравнения.

Из первого начального условия (при $t = 0$) следует:

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \lambda_n x = u^{(0)}(x) - C_0(0) - xC_1(0).$$

Умножим сторон этого уравнения на $\sin \lambda_m x dx$ и интегрируем от нуля до l . В результате получим

$$A_n \|X_n(x)\|^2 = W_n - C_0(0)S_n - C_1(0)K_n,$$

где

$$\begin{aligned} W_n &= \int_0^l u^{(0)}(x) \sin \lambda_n x dx, \\ S_n &= \int_0^l \sin \lambda_n x dx = \frac{l}{n\pi} [1 - (-1)^n], \\ K_n &= \int_0^l x \sin \lambda_n x dx = \frac{l^2}{n\pi} (-1)^{n+1}. \end{aligned}$$

Отсюда определим

$$A_n = \frac{2}{l} [W_n - C_0(0)S_n - C_1(0)K_n].$$

Второе начальное условие связано с производной от функции $U(x, t)$ по времени при $t = 0$. Находим

$$Y_n'(t) = \begin{cases} e^{-at} \left[(-aB_n + \sqrt{D_n}A_n) \operatorname{sh} \sqrt{D_n}t + \right. \\ \quad \left. + (-aA_n + \sqrt{D_n}B_n) \operatorname{ch} \sqrt{D_n}t \right], & \text{при } D_n > 0, \\ e^{-at} [-a(A_n + B_n t) + B_n], & \text{при } D_n = 0, \\ e^{-at} \left[(-aB_n - \sqrt{|D_n|}A_n) \sin \sqrt{|D_n|}t + \right. \\ \quad \left. + (-aA_n + \sqrt{|D_n|}B_n) \cos \sqrt{|D_n|}t \right], & \text{при } D_n < 0. \end{cases}$$

Вычислим

$$Y_n'(0) = \begin{cases} -aA_n + \sqrt{D_n}B_n, & \text{при } D_n > 0, \\ -aA_n + B_n = -aA_n + \gamma_n B_n, & \text{при } D_n = 0, \\ -aA_n + \sqrt{|D_n|}B_n, & \text{при } D_n < 0, \end{cases}$$

где

$$\gamma_n = \begin{cases} \sqrt{D_n}, & \text{при } D_n > 0, \\ 1, & \text{при } D_n = 0, \\ \sqrt{|D_n|}, & \text{при } D_n < 0. \end{cases}$$

$$u(x, t) = C_0(t) + xC_1(t) + \sum_{n=1}^{\infty} [Y_n(t) + L_n(t)] \sin \lambda_n x.$$

Решение задачи относительно давления находим, интегрируя исходную систему квазиодномерных уравнений.

В первом шаге решения $P(x, t)$ обратимся ко второму уравнению $\frac{\partial P}{\partial t} = -\rho c^2 \frac{\partial u}{\partial x}$ исходной системы.

Находим

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = C_1(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n [Y_n(t) + L_n(t)] \cos \lambda_n x.$$

В результате интегрирования второго уравнения исходной системы получим формулу для давления:

$$P(x, t) = -\rho c^2 \left[C_1^{(0)}(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n [Y_n^{(0)}(t) + L_n^{(0)}(t)] \cos \lambda_n x \right] + p_r(x).$$

Здесь

$$\int_0^t C_1(\theta) d\theta = C_1^{(0)}(t) \quad \text{и} \quad \int_0^t L_n(\theta) d\theta = L_n^{(0)}(t),$$

$$Y_n^{(0)}(t) = \int_0^t Y_n(\theta) d\theta = \begin{cases} \frac{1}{c^2 \lambda_n^2} [(-A_n a - B_n \sqrt{D_n})(e^{-at} \operatorname{ch} \sqrt{D_n} t - 1) + & \text{при } D_n > 0, \\ + (-A_n \sqrt{D_n} - B_n a) e^{-at} \operatorname{sh} \sqrt{D_n} t], \\ A_n \frac{1 - e^{-at}}{a} + B_n \left(\frac{t e^{-at}}{a} + \frac{1 - e^{-at}}{a^2} \right), & \text{при } D_n = 0, \\ \frac{1}{c^2 \lambda_n^2} [(-A_n a - B_n \sqrt{|D_n|})(e^{-at} \cos \sqrt{|D_n|} t - 1) + & \text{при } D_n < 0. \\ + (A_n \sqrt{|D_n|} - B_n a) e^{-at} \sin \sqrt{|D_n|} t], \end{cases}$$

Надо определить значение $p_r(x)$ – постоянного интегрирования по времени. Для определения его обратимся к первому уравнению $-\frac{\partial P}{\partial x} = \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + 2au \right)$ исходной системы.

Вычислим

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial x} = \rho c^2 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 [Y_n^{(0)}(t) + L_n^{(0)}(t)] \sin \lambda_n x + p_r'(x)$$

и

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = C_0'(t) + x C_1'(t) + \sum_{n=1}^{\infty} [Y_n'(t) + L_n'(t)] \sin \lambda_n x.$$

При $t = 0$ члены, выделенные верхним индексом (0) и заглавными буквами, превращаются в нуль. В связи с этим для определения значения интеграла получим равенство:

$$\begin{aligned} p_{00} - \rho \int_0^x [u^{(t)}(\eta) + 2au^{(0)}(\eta)] d\eta = \\ = -\rho [C_0'(t) + 2aC_0(t)] x - \rho [C_1'(t) + 2aC_1(t)] \frac{x^2}{2} + \rho \int_0^x E(\eta) d\eta. \end{aligned}$$

Отсюда находим значение интеграла и вставим в формулу для давления:

$$\begin{aligned} P(x, t) = p_{00} - \rho \int_0^x [u^{(t)}(\eta) + 2au^{(0)}(\eta)] d\eta - \\ - \rho c^2 \left\{ C_1^{(0)}(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n [Y_n^{(0)}(t) + L_n^{(0)}(t)] \cos \lambda_n x \right\}. \end{aligned}$$

Здесь $C_1^{(0)}(t) = \frac{1}{l} \int_0^t [u^{(1)}(\theta) - u^{(0)}(\theta)] d\theta$.

В данной работе представлен формальный подход к решению поставленной задачи. В ходе вывода решения предполагалось, что соответствующие производные и интегралы по переменным и являются известными. Однако при выполнении вычислений основное внимание уделяется задачам, связанным с переходными процессами. Для каждого рассматриваемого случая отдельно приводятся конкретные значения соответствующих производных и интегралов.

3 Обсуждение результатов

В варианте I расчёты выполнялись при условиях $u_{00} = 0 \text{ м/с}$, $u^{(0)} = u^{(1)} = 5 \text{ м/с}$. То есть в изначально покоящемся участке под действием высокого давления 7.0 МПа через входное сечение поступает жидкость со скоростью 5 м/с, а через выходное сечение начинается отбор жидкости с той же скоростью. При этом масса жидкости на участке считается постоянной.

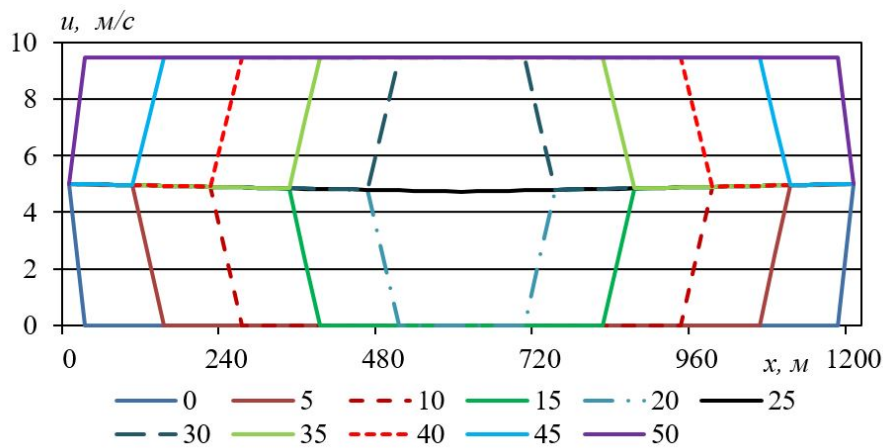


Рис. 1 Графики скорости по длине участка, полученные в первых десяти шагах времени с интервалом $l/(10c)$. $l = 1200 \text{ м}$, $D = 0.2 \text{ м}$, $\lambda = 0.018$, $u_* = 5 \text{ м/с}$, $c = 1200 \text{ м/с}$, $u_{00} = 0 \text{ м/с}$, $u^{(0)} = u^{(1)} = 5 \text{ м/с}$, $p_{00} = 7.00 \text{ МПа}$

На рис. 1 приведены кривые распределения скорости для различных моментов времени первого условного периода. В рассматриваемом случае условный период процесса по соответствующему параметру составляет l/c . Нижние кривые при $tc/(10l) = 0, 5, 10, 15, 20$ отражают первую половину данного периода.

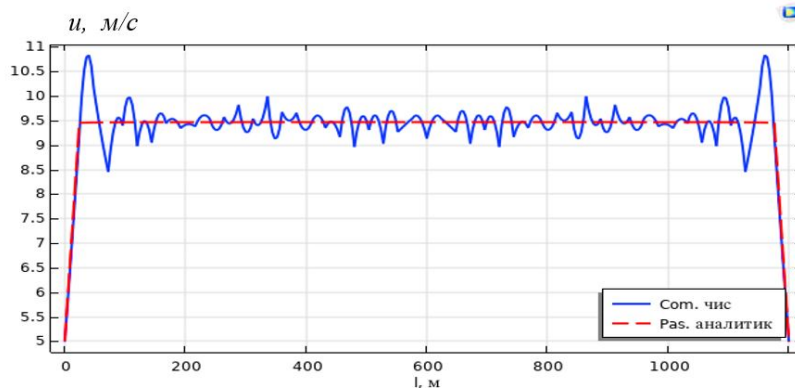


Рис. 2 График изменения скорости по длине за 1 сек. Остальные данные см. рис. 1

Процесс увеличения скорости начинается одновременно с двух концов участка: от нулевого значения до 5 м/с. Волны постепенно распространяются навстречу друг другу. При $tc/(10l) = 25$ происходит их взаимодействие, в результате чего формируется практически прямая линия с постоянной скоростью 5 м/с. Вместе с тем при приближении к центральной части участка наблюдается снижение определяющей скорости. Суперпозиция этих импульсов приводит скорость к новому значению, которое оказывается меньше $2 \cdot 5 \text{ м/с} = 10 \text{ м/с}$. После этого волны сжатия и разрежения продолжают распространяться к концам участка. При этом вновь наблюдается уменьшение величины скачка скорости до определённого уровня.

Достигнув концы участка, волны переворачиваются и стремятся обратно к взаимной встрече. В отличие от первых четырех нижних графиков, здесь в нижних звеньях скорость имеет уже не нулевое, а приблизительно единичное значение. При возвращении волн повторяется процесс, но с меньшим наибольшим значением. И т.д. В нечетных условных периодах преобразуется верхняя огибающая линия кривых давления, а в четных – нижняя огибающая. Это суждение подтверждается также графиками рис. 3, которые представляют результатов изменения скорости по времени для сечений $x = 24, 600, 912$ и 1176 м . Здесь можно наблюдать за характером постепенного перехода к режиму с постоянной скоростью 5 м/с.

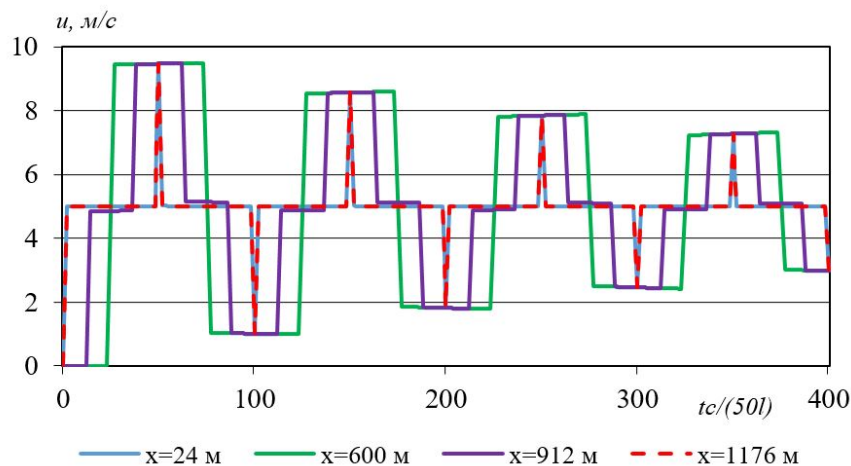


Рис. 3 Графики скорости потока в различных сечениях участка. Данные см. рис. 1

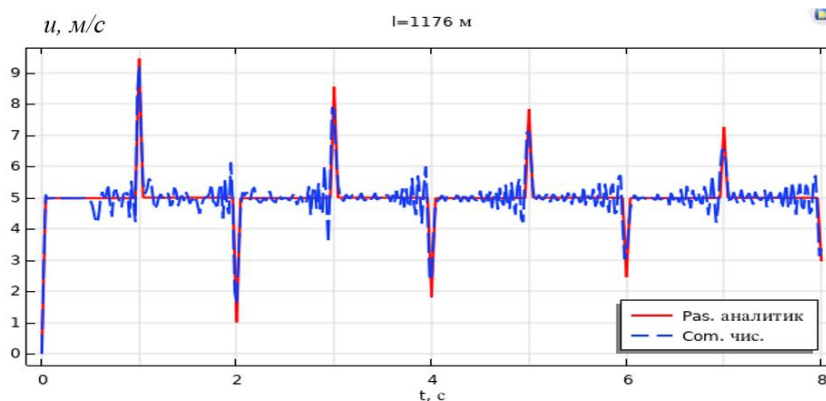


Рис. 4 Сравнение результатов изменения скорости со временем на расстоянии $x = 1176 \text{ м}$ согласно аналитическому решению и расчету по Comsol Multiphysics. Данные см. рис. 1

На рис. 4 приведены графики временного изменения скорости потока в сечении $x = 1176$ м, полученные согласно аналитическому решению и расчета по Comsol Multiphysics. Как и на рис. 2, учет первых 1000 членов функционального ряда решения Фурье обеспечивает скачкообразных переходов через волны уплотнения и разряжения. В то же время расчеты в среде Comsol Multiphysics с тем же шагом времени приводит образованию осцилляций при переходе через скачков.

При использовании более крупного интервала времени (рис. 5) проявляется экспоненциальное убывание амплитуды давления. При этом предельные значения давления в концах и середине участка согласуются новыми значениями скорости потока. В середине участка установилось значение, которое было принято в начале процесса.

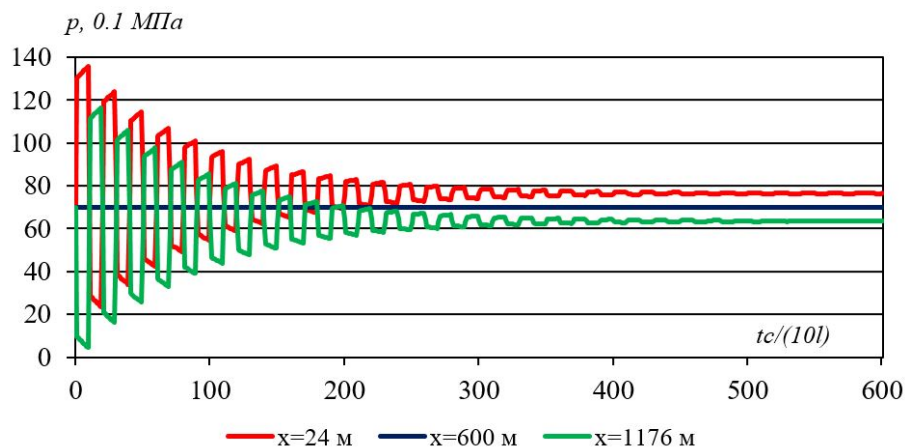


Рис. 5 Изменение давления по времени в различных сечениях трубопровода. Данные см. рис. 1

Представлены результаты расчёта распределения скорости при начальных условиях: $u_{00} = 0$ м/с, входная скорость в переходном режиме составила $u^{(0)} = 5$ м/с, выходная скорость — $u^{(1)} = 0$ м/с (вариант I), при этом вдоль участка давление оставалось постоянным и равным $p_{00} = 7.00$ МПа.

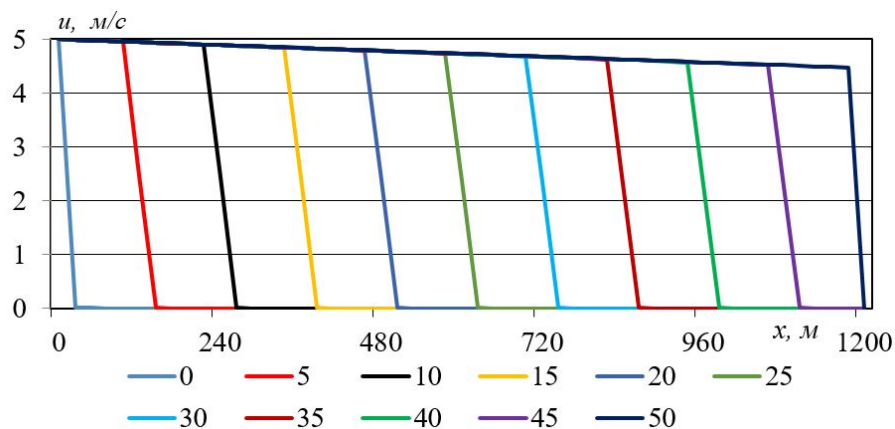


Рис. 6 Графики скорости по длине участка, полученные в 0, 5, ..., 50-м шагах времени с интервалом $l/(10c)$. $l = 1200$ м, $D = 0.2$ м, $\lambda = 0.018$, $u_* = 5$ м/с, $c = 1200$ м/с, $u_{00} = u^{(1)} = 0$ м/с, $u^{(0)} = 5$ м/с, $p_{00} = 7.00$ МПа

На рис. 6 показаны кривые распределения скорости по длине участка, полученные 0, 5, ..., 50-м для временных шагов при интервале $l/(50c)$. Разрывы скорости соответствуют волновым фронтам на графиках по мере их распространения слева направо. Первая кривая отражает начальный момент, когда во входном сечении скорость равна 5 м/с, тогда как в остальной части участка она равна нулю. Далее наблюдается резкое уменьшение и перераспределение скорости: в левой части она изменяется, тогда как в правой зоне сохраняется исходное значение. Таким образом, во времени на правой стороне участка волновой процесс сохраняет первоначальное состояние. Уменьшение верхней огибающей кривых скорости связано с влиянием силы трения. При этом поведение графиков показывает, что в противоположных направлениях формируются волны разрежения. Верхняя огибающая температуроподобной функции практически не изменяется, тогда как нижняя огибающая имеет отрицательный наклон, что указывает на рост скорости в противоположном направлении.

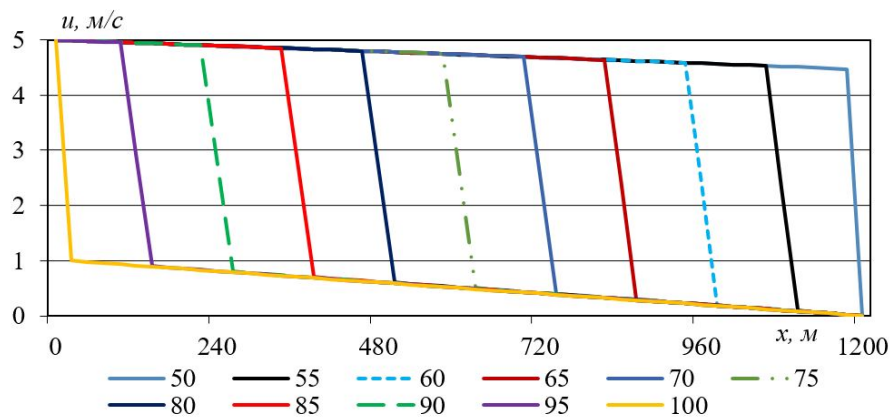


Рис. 7 Графики скорости по длине участка в 50, 55 ... 100-х шагах времени с интервалом $l/(10c)$. Остальные данные см. рис. 6

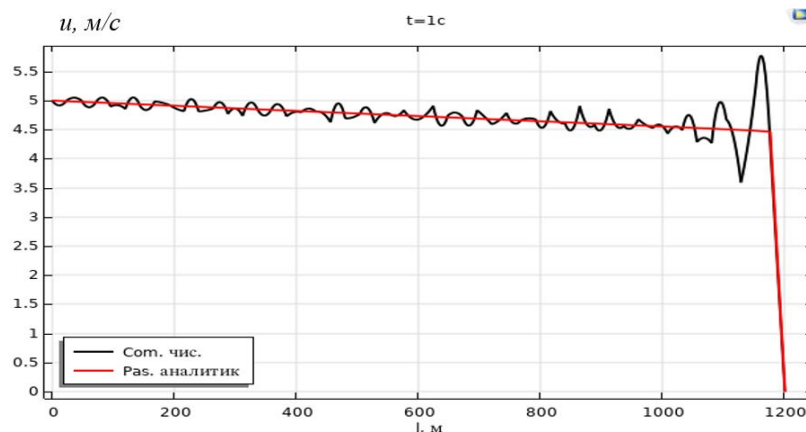


Рис. 8 График изменения скорости по длине за 1 сек согласно аналитическому решению и расчету по Comsol Multiphysics. Остальные данные см. рис. 6

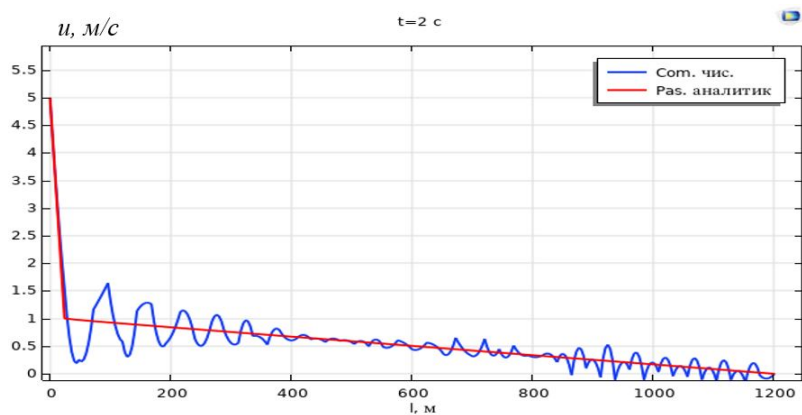


Рис. 9 График изменения скорости по длине за 2 сек согласно аналитическому решению и расчету по Comsol Multiphysics. Остальные данные см. рис. 6

На рисунках 2, 8, 9 представлено распределение скорости по длине в моменты времени 1 и 2 с. На данных графиках приведено сопоставление предложенного аналитического решения с результатами, полученными численным методом. Красная линия соответствует аналитическому решению, найденному методом Фурье. Синяя линия отображает результат численного расчета по явной схеме, выполненного в программном комплексе COMSOL Multiphysics. При их сравнении выявлено, что в численном решении в области скачка скорости возникают колебания (осцилляции). Результаты для обоих методов получены при одинаковых граничных условиях и с идентичным шагом по времени.

Как показали расчеты, в первой половине условного периода $2l/c$ предыдущая нижняя огибающая кривых остается без изменения (рис. 6 и 10), а верхняя (верхняя) огибающая перестраивается. Во второй половине условного периода наблюдается обратная картина (рис. 7). В целом, наблюдается тенденция перехода к конечному состоянию, когда входная скорость составляет $u^{(0)}$, а выходная — $u^{(1)}$. Данная тенденция более ярко выражена в изменениях скорости по времени в разных сечениях ($x = 24, 600, 912$ и 1176 м) на участке с общей длиной 1200 м (рис. 11). Здесь верхняя кривая соответствует первому внутреннему узлу расчета ($x = 24$ м), а нижняя — к последнему внутреннему узлу ($x = 1176$ м).

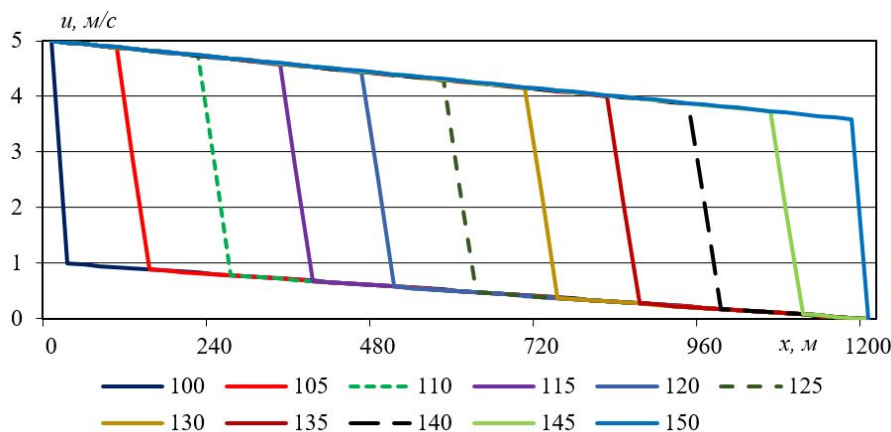


Рис. 10 Графики скорости в первой половине второго условного периода. Данные см. рис. 6

Верхние ступеньки в графиках соответствуют зонам волны уплотнения, а нижние – зонам волн разряжения. В первом внутреннем узле график скорости без нижней ступеньки, а в последнем внутреннем узле – без верхней ступеньки, т.к. между этими и граничными узлами скорость терпит разрыв. Значение скорости в верхних ступеньках с истечением времени снижается, а на нижних – возрастает. При больших значениях времени скорость убывает линейным законом от $u^{(0)}$ в начале участка до $u^{(1)}$ в конце участка.

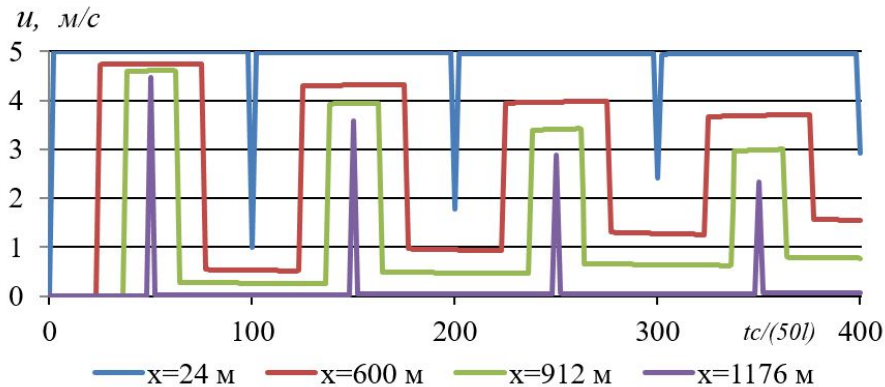


Рис. 11 Графики скорости потока в различных сечениях участка. Данные см. рис. 6

На рис. 11 приведены графики изменения скорости потока во времени в различных сечениях участка. По абсциссе расположены номера шагов с интервалом $\tau = l/(50c)$, т.е. каждый 100 шагов представляет условный период процесса $T = 2l/c$.

Верхняя кривая получена для сечения $x = 24$ м. В целом она постепенно убывает. Локальные минимумы, достигающиеся в кратных условному периоду значениях времени, постепенно возрастают.

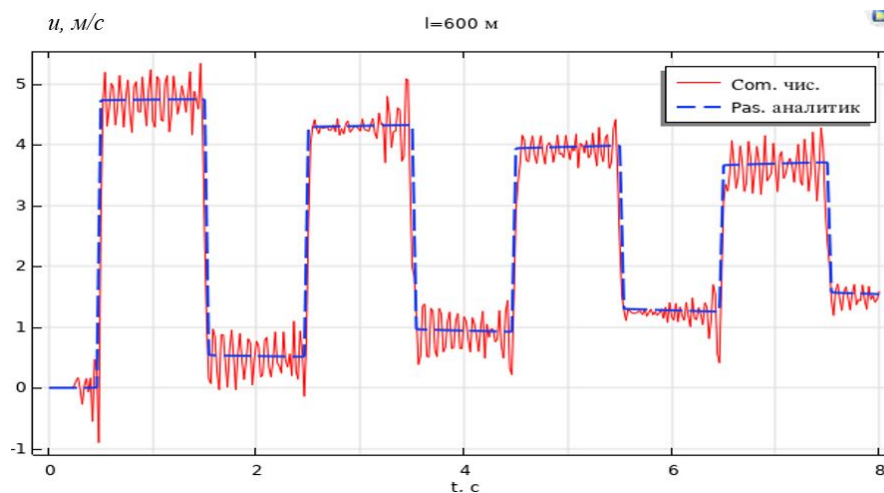


Рис. 12 600m длины графика изменения скорости со временем. Данные см. рис. 6

Нижняя кривая соответствует расстоянию 1176 м, т.е. эта близкая к концу участка точка. Она постепенно возрастает. А её локальные максимумы соответствуют точкам $(n + 0.5)T$. Левые склоны локальных максимумов соответствуют волнам уплотнения, а правые – волнам разряжения. В промежуточных кривых такая закономер-

ность остается в силе. Но для них образуются верхние ступеньки, которые сохраняются в течении времени от достижения прямой и обратной волн.

Во всех вариантах относительно скорости потока получены периодические решения. При $u^{(0)} \neq u^{(1)}$ получили решения с периодом $2c/l$, а при $u^{(0)} = u^{(1)}$ – с периодом c/l . В случае $a \neq 0$ эти величины составляли условные период, выражающие характер изменения показателей в участке. При этом ступеньки в графиках скорости, отделяемые скачками скорости и граничными условиями, получились строго горизонтальными. Т.е. интервал изменения скорости при скачках остается одинаковым при распространении односторонних возмущений. При встрече волн уплотнения и разряжения, образованных одинаковыми граничными скоростями, наблюдается мгновенная взаимная компенсация и опрокидывания волн, которые продолжают распространяться дальше без потерь (рис. 13).

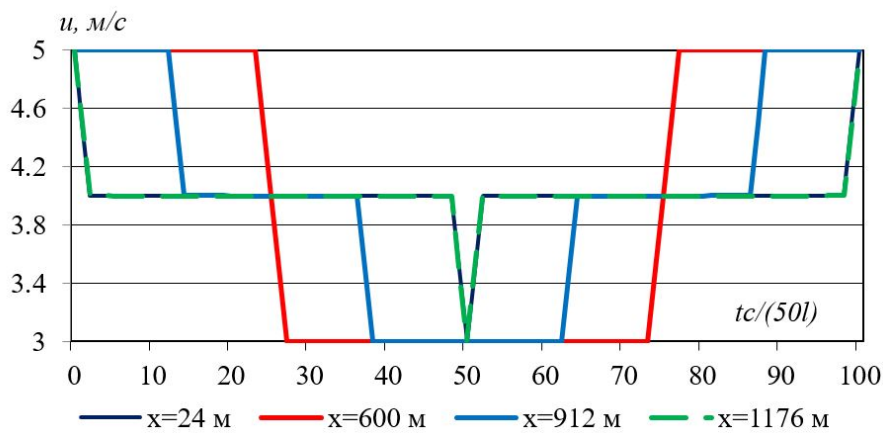


Рис. 13 Графики скорости во времени в разных сечениях участка при $a = 0, u_{00} = 5 \text{ м/с}, u^{(0)} = u^{(1)} = 4 \text{ м/с}$

Как видно из рисунка, при переходе к новому значению скорости с обеих сторон участка интервал изменения скорости строго составляет. Амплитуда изменений скорости при односторонних возмущениях находится в интервале с длиной. Типичные для такого случая графики приведены рис. 14.

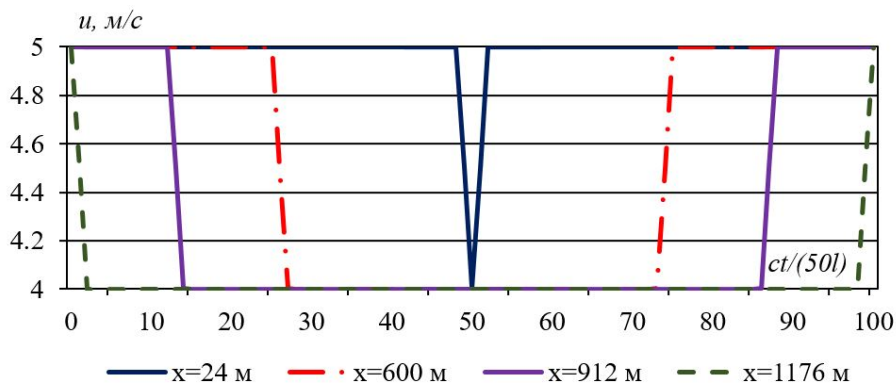


Рис. 14 Изменения скорости потока по времени в одном периоде в различных сечениях. $a = 0, u_{00} = u^{(0)} = 5 \text{ м/с}, u^{(1)} = 4 \text{ м/с}$

Постоянство значений в ступеньках графиков остается в силе и для результатов расчета по давлению. Периодичность решения по давлению наблюдается при происходит повсеместное возрастание давления в конце каждого периода (рис. 15).

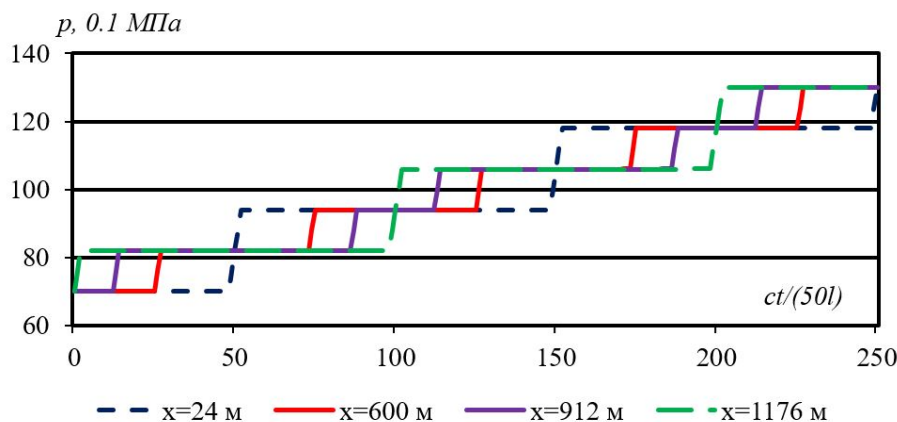


Рис. 15 Повсеместное возрастание давления при $a = 0$, $u_{00} = u^{(0)} = 5$ м/с, $u^{(1)} = 4$ м/с

При наблюдается противоположный эффект. Но в обоих случаях при исключении члена со множителем получается одинаковое решение для отдельно взятых периодов.

4 Заключение

Решение для скорости потока получено методом Фурье в виде функционального ряда; распределение давления определено путем интегрирования исходной системы уравнений на основе найденного выражения для скорости. Для сценариев с постоянными значениями граничных условий разработан алгоритм и проведены численные эксперименты с варьированием фактора силы трения.

Исследованы закономерности переходных процессов в условиях линеаризованного квадратичного закона сопротивления при постоянной, линейно возрастающей и линейно убывающей массе жидкости на расчетном участке. Выявлены особенности динамики распространения и отражения одно- и двусторонних возмущений скорости, обуславливающих перестройку полей скорости и давления под воздействием новых граничных условий и формирование характерных огибающих кривых.

На основе полученного аналитического решения выведено выражение для полного напора, трансформирующееся в классическое давление для горизонтального профиля трубопровода. Установлено, что положительная разность между входной и выходной скоростями приводит к монотонному возрастанию давления на исследуемом участке, тогда как отрицательная разность вызывает его монотонное снижение. При этом скорость изменения среднего давления определяется величиной разности входной и выходной скоростей, вследствие чего задачу целесообразно рассматривать на малых временных интервалах.

Полученные результаты соответствуют развитому турбулентному режиму течения в трубопроводе круглого поперечного сечения. Для трубопроводов иной формы вместо диаметра может использоваться удвоенный эквивалентный радиус.

Литература

- [1] Lewandowski A. New Numerical Methods For Transient Modeling of Gas Pipeline Networks. – New Mexico: Pipeline Simulation Interest Group, 1995.

- [2] *Чарный И.А.* Неустановившееся движение реальной жидкости в трубах. Изд. 2-е. – М.: Недра, 1975. – 296 с.
- [3] *Селезнев В.Е., Алешин В.В., Прялов С.Н.* Современные компьютерные тренажеры в трубопроводном транспорте. Математические методы моделирования и практическое применение / Под ред. В.Е. Селезнева. – М.: МАКС Пресс, 2007. – 200 с.
- [4] *Ражабов У.М., Жонкobilов У.У.* Расчет гасителей гидравлического удара в длинных напорных трубопроводах насосных станций. – Ташкент: Интеллект наприёт, 2022. – 130 с.
- [5] *Бобровский С.А., Щербаков С.Г., Гусейнзаде М.А.* Движение газа в газопроводах с путевым отбором. – М.: Наука, 1972. – 192 с.
- [6] *Бозоров О.Ш., Маматкулов М.М.* Аналитические исследования нелинейных гидродинамических явлений в средах с медленно меняющимися параметрами. – Ташкент: ТИТЛП, 2015. – 96 с.
- [7] *Ермолаева Н.Н.* Математическое моделирование нестационарных неизотермических процессов в движущихся многофазных средах: Дис. ... докт. физ.-мат. наук. – СПб., 2017. – 323 с.
- [8] *Figueiredo A.B., Baptista R.M., Rachid F.B.F., Bodstein G.C.R.* Numerical simulation of stratified-pattern two-phase flow in gas pipelines using a two-fluid model // International Journal of Multiphase Flow. – 2017. – Vol. 88. – P. 30–49.
- [9] *Zemenkov Yu.D., Shalay V.V., Zemenkova M.Yu.* Immediate analyses and calculation of saturated steam pressure of gas condensates for transportation conditions // Procedia Engineering. – 2015. – Vol. 113. – P. 254–258.
- [10] *Zienkiewicz O.C., Taylor R.L.* The Finite Element Method for Fluid Dynamics. – Oxford: Butterworth-Heinemann, 2000.
- [11] *Тихонов А.Н., Самарский А.А., Будаг Б.М.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1977. – 736 с.
- [12] *Бронштейн И.Н., Семендяев К.А.* Справочник по математике. – М.: Наука, 1964. – 608 с.
- [13] *Штеренлихт Д.В.* Гидравлика. Учеб. пособие для ВУЗов. – М.: Энергоатомиздат, 1991. – 351 с.
- [14] *Хужаев И.К., Хожикулов Ш.Ш., Шамсутдинова Н.Ш.* Задача Штурма–Лиувилля для произвольной комбинации неоднородных граничных условий первого, второго и третьего родов // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2023. – №2(47). – С. 125–128.
- [15] *Khojikulov Sh.Sh.* Dynamics of the transient process caused by a change in flow rate at the end of a pipe section for the case with and without taking into account the resistance force // International Journal of Informatics and Data Science Research. – 2025. – Vol. 2. – №8. – P. 30–43.
- [16] *Khojikulov Sh.* Numerical method for solving pipeline transport equations of real fluid under given laws of change of pressure at inlet and mass flow at outlet of pipeline // AIP Conference Proceedings. – 2025. – Vol. 3265. – Art. 060004.
- [17] *Tijsseling A.S.* Fluid-structure interaction in liquid-filled pipe systems: a review // Journal of Fluids and Structures. – 1996. – Vol. 10. – №2. – P. 109–146.
- [18] *Stephenson D.* Sizing of air vessels for water hammer protection // Journal of Hydraulic Engineering. – 2002. – Vol. 128. – №7. – P. 713–716.

UDC 532.546

INVESTIGATION INTO THE DYNAMICS OF TRANSIENT PROCESSES ASSOCIATED WITH FLOW RATE CHANGES AT THE END OF A PIPELINE SECTION, BOTH WITH AND WITHOUT RESISTANCE FORCE

^{1*} *Khozhikulov Sh.Sh.* ^{2*} *Begimov O.M.*, ¹ *Obidjonov A.J.*

*xojiqulovshaxzod@mail.ru

¹Tashkent state transport university,

1, Temiryolchilar street, Tashkent, 100167 Uzbekistan;

²Institute of mechanics and seismic stability of structures named after M.T. Urazbaev,
33, str. Durman yuli, Tashkent, 100125, Uzbekistan.

Within a non-conservative formulation of the quasi-one-dimensional linearized mass and momentum conservation equations, transient processes are studied in an elementary undulating pipeline section caused by step-like changes in the boundary velocities of an incompressible fluid. To determine the average flow velocity, an incomplete telegrapher's equation is derived and solved by separation of variables. The pressure distribution is then obtained by integrating the original system using the resulting velocity expression. Numerical experiments are carried out for constant values of the functions in the initial and boundary conditions. Flow regimes with constant, increasing, and decreasing mean pressure along the section are examined. The features of shock-wave propagation are demonstrated both with and without the friction force.

Keywords: fluid, pipeline, velocity, pressure, Fourier method, speed of sound, resistance force, computational experiment.

Citation: Khozhikulov Sh.Sh., Begimov O.M., Obidjonov A.J. 2026. Investigation into the dynamics of transient processes associated with flow rate changes at the end of a pipeline section, both with and without resistance force. *Problems of Computational and Applied Mathematics*. 3(73): 75-89.

DOI: https://doi.org/10.71310/pcam.3_73.2026.06

HISOBLASH VA AMALIY МАТЕМАТИКА MUAMMOLARI

ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ
И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
PROBLEMS OF COMPUTATIONAL
AND APPLIED MATHEMATICS

ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

№ 3(73) 2026

Журнал основан в 2015 году.

Издается 6 раз в год.

Учредитель:

Научно-исследовательский институт развития цифровых технологий и
искусственного интеллекта.

Главный редактор:

Равшанов Н.

Заместители главного редактора:

Арипов М.М., Шадиметов Х.М., Ахмедов Д.Д.

Ответственный секретарь:

Убайдуллаев М.Ш.

Редакционный совет:

Азамов А.А., Алоев Р.Д., Амиргалиев Е.Н. (Казахстан), Арушанов М.Л.,
Бурнашев В.Ф., Джумаёзов У.З., Загребина С.А. (Россия), Задорин А.И. (Россия),
Игнатъев Н.А., Ильин В.П. (Россия), Иманкулов Т.С. (Казахстан),
Исмагилов И.И. (Россия), Кабанихин С.И. (Россия), Курбонов Н.М., Маматов Н.С.,
Мирзаев Н.М., Мурадов Ф.А., Назирова Э.Ш., Нормуродов Ч.Б., Нуралиев Ф.М.,
Опанасенко В.Н. (Украина), Расулмухамедов М.М., Садуллаева Ш.А.,
Старовойтов В.В. (Беларусь), Хаётов А.Р., Халджигитов А., Хамдамов Р.Х.,
Хужаев И.К., Хужаеров Б.Х., Эшмаматова Д.Б., Дустмуродова Ш.Ж.,
Чье Ен Ун (Россия), Шабозов М.Ш. (Таджикистан), Dimov I. (Болгария),
Li Y. (США), Mascagni M. (США), Min A. (Германия), Singh M. (Южная Корея).

Журнал зарегистрирован в Агентстве информации и массовых коммуникаций при
Администрации Президента Республики Узбекистан.

Свидетельство №0856 от 5 августа 2015 года.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

При перепечатке материалов ссылка на журнал обязательна.

За точность фактов и достоверность информации ответственность несут авторы.

Адрес редакции:

100125, г. Ташкент, м-в. Буз-2, 17А.

Тел.: +(998) 71 263-41-98.

Э-почта: journals@airi.uz.

Веб-сайт: <https://journals.airi.uz>.

Дизайн и вёрстка:

Шарипов Х.Д.

Отпечатано в типографии НИИ РЦТИИ.

Подписано в печать 25.06.2026 г.

Формат 60x84 1/8. Заказ №3. Тираж 100 экз.

Содержание

Яхшибаев Д.С., Боборахимов Б.И.

Математическое моделирование поступления многофазного потока смеси в стратифицированное водохранилище и разрушения слоистой структуры . . . 7

Бахтиёрв Б.Б., Хужаев И.К., Туропова Н.В.

Математическая модель и анализ гашения гидравлического удара с помощью воздушного колпака 25

Бегимов О.М., Хужаев И.К., Мамадалиев Х.А.

Исследование скорости распространения малых возмущений давления в газожидкостной среде с учетом массовой концентрации газа и деформации стенки трубопровода 37

Эргашев Д.Й., Хужаев Ж.И., Ахмаджонов С.С.

Математическая модель процесса теплоотдачи от жидкого теплоносителя, текущего по оребренному прямоугольными ребрами цилиндрическому трубопроводу 50

Музаффаров С.А., Маратов Х.У., Хамдамов А.А.

Вычислительное моделирование вертикально-осевой ветроэнергетической установки с пассивным изменением шага лопастей для условий слабых ветров 61

Хожжикулов Ш.Ш., Бегимов О.М., Обиджонов А.Ж.

Исследование динамики переходных процессов, связанных с изменением расхода в конце участка трубопровода, с учетом и без учета силы сопротивления 75

Равшанов Ш.А., Боборахимова М.И., Чулмиев Ш.И.

Моделирование тепло- и массообмена в рельефном трубопроводе с постоянными и изменяющимися диаметрами 90

Равшанов Н., Боборахимов Б.И., Бердиёров Ш.Ш.

Характеристики загрязнения мембраны в процессе фильтрации и транспортировки в цилиндрическом пористом фильтре 104

Халджигитов А.А., Бобоназаров А.А., Рахмонова Р.А., Тиловов О.О.

Численное моделирование задач теории упругости в напряжениях методом конечных элементов 125

Тиловов М.А.

Численное исследование динамики производных различного порядка уравнения Фолкнера–Скэна в зависимости от градиента давления 139

Жумаев З.З.

Приближённое решение задач с начальными условиями для дифференциальных уравнений первого порядка с использованием комбинированного метода Рунге–Кутты и метода с кусочно-постоянным аргументом 153

Contents

<i>Yakhshibaev D.S., Boborakhimov B.I.</i> Mathematical modeling of multiphase mixture inflow into a stratified reservoir and the breakdown of the layered structure	7
<i>Bakhtiyorov B.B., Khujaev I.K., Turapova N.V.</i> Mathematical model and analysis of water hammer damping using an air vessel .	25
<i>Begimov O.M., Khujaev I.K., Mamadaliev Kh.A.</i> Investigation of the propagation velocity of small pressure disturbances in a gas–liquid medium with account for gas mass concentration and pipeline wall deformation	37
<i>Ergashev D.Y., Khujaev J.I., Akhmadjonov S.S.</i> A mathematical model of heat transfer from a liquid coolant flowing through a cylindrical pipeline finned with rectangular fins	50
<i>Muzaffarov S.A., Maratov Kh.U., Hamdamov M.M.</i> Computational modeling of a passive-pitch low-wind vertical-axis wind turbine .	61
<i>Khozhikulov Sh.Sh., Begimov O.M., Obidjonov A.J.</i> Investigation into the dynamics of transient processes associated with flow rate changes at the end of a pipeline section, both with and without resistance force .	75
<i>Ravshanov Sh.A., Boborakhimova M.I., Chulliev Sh.I.</i> Modelling heat and mass transfer in a relief pipeline with constant and varying diameters	90
<i>Ravshanov N., Boborakhimov B.I., Berdiyev Sh.Sh.</i> Membrane fouling characteristics during filtration and transport processes in a cylindrical porous filter	104
<i>Khaldjigitov A.A., Bobonazarov A.A., Rakhmonova R.A., Tilovov O.O.</i> Numerical modeling of elasticity theory problems in terms of stresses using the finite element method	125
<i>Tilovov M.A.</i> Numerical study of the dynamics of derivatives of various orders of the Falkner–Skan equation depending on the pressure gradient	139
<i>Jumaev Z.Z.</i> Approximate solution of initial value problems for first-order differential equations using a combined Runge-Kutta and piecewise constant argument method .	153