

УДК 532

ИССЛЕДОВАНИЕ СКОРОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ДАВЛЕНИЯ В ГАЗОЖИДКОСТНОЙ СРЕДЕ С УЧЕТОМ МАССОВОЙ КОНЦЕНТРАЦИИ ГАЗА И ДЕФОРМАЦИИ СТЕНКИ ТРУБОПРОВОДА

^{1,2*} *Бегимов О.М.*, ¹ *Хужаев И.К.*, ² *Мамадалиев Х.А.*

*oybek.begimov@mail.ru

¹Институт механики и сейсмостойкости сооружений им. М.Т. Уразбаева,
100125, Узбекистан, Ташкент, Ул. Дурмон Йули, 33;²Ташкентский университет информационных технологий имени Мухаммада ал-Хорезми,
100202, Узбекистан, Ташкент, ул. Амира Темура, 108.

В работе исследуется изменение скорости распространения малых возмущений давления в газожидкостной среде в зависимости от массовой концентрации воздуха. Рассматриваются два случая: недеформируемый трубопровод и трубопровод с учётом деформации стенки. В качестве модели среды принята смесь типа «вода-воздух» с пузырьками газа в жидкости. Выведены формулы для скорости распространения малых возмущений давления без учёта и с учётом деформируемости стенки согласно закону Гука. Анализ проведён для пузырькового и эмульсионного режимов течения при малой массовой концентрации фаз. Получены аналитические зависимости скорости от массовой концентрации воздуха и выполнен их графический анализ. Показано, что даже малые концентрации газа существенно снижают скорость распространения волн, а учёт деформации стенки приводит к дополнительному уменьшению скорости звука.

Ключевые слова: малые возмущения давления, газожидкостная среда, режимы течения, массовая концентрация газа, пузырьковый режим, деформация стенки, трубопровод.

Цитирование: *Бегимов О.М., Хужаев И.К., Мамадалиев Х.А.* Исследование скорости распространения малых возмущений давления в газожидкостной среде с учётом массовой концентрации газа и деформации стенки трубопровода // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2026. – № 3(73). – С. 37-49.

DOI: https://doi.org/10.71310/pcam.3_73.2026.03

1 Введение

В современных трубопроводных системах рабочая среда в большинстве случаев не является строго однофазной. Даже при транспортировке воды в ней практически всегда присутствуют пузырьки воздуха, растворенные газы или пары других веществ, которые могут выделяться при изменениях давления и температуры. В результате формируется двухфазная (газожидкостная) среда, обладающая существенно отличающимися волновыми и акустическими свойствами по сравнению с однородной жидкостью.

Изучение процессов распространения волн давления в газожидкостных средах имеет принципиальное значение для оценки гидродинамической устойчивости трубопроводов, предотвращения гидроударов, вибраций и аварийных режимов работы оборудования. При этом особый интерес представляет анализ малых возмущений

давления, поскольку именно они определяют акустические характеристики среды и служат основой для описания более сложных нестационарных процессов.

Актуальность исследования обусловлена широким применением газонасыщенных жидкостей в энергетике, нефтегазовой и химической промышленности, а также необходимостью повышения надежности и безопасности эксплуатации протяженных трубопроводных систем. Существенную роль в формировании волновых характеристик таких систем играет не только фазовый состав среды, но и механические свойства стенки трубопровода, деформация которой может заметно изменять скорость распространения возмущений давления.

Анализ существующих исследований показывает, что большинство работ посвящено либо волновым процессам в однофазных средах, либо распространению возмущений в двухфазных потоках без учета деформации стенки трубопровода. В то же время комплексный учет газожидкостного характера среды и упругих свойств трубы в рамках единой модели до настоящего времени остается недостаточно разработанным, особенно для случаев малых массовых концентраций одной из фаз, характерных для пузырькового и эмульсионного режимов течения.

В связи с этим целью настоящей работы является исследование скорости распространения малых возмущений давления в газожидкостной среде при фиксированной массовой концентрации газа и деформации стенки трубопровода. В качестве объекта исследования рассматривается смесь типа «вода–воздух», в которой в составе жидкости присутствуют пузырьки газа. Задачами работы являются получение аналитических зависимостей скорости распространения давления от параметров среды и трубопровода, а также анализ влияния фазового состава и упругих свойств стенки на волновые характеристики системы.

Проблема распространения волн давления в жидкостях и газожидкостных средах на протяжении длительного времени привлекает внимание исследователей в области механики сплошных сред и гидродинамики.

Основы теории распространения волн давления в однофазных жидкостях были заложены в классических работах Н.Е. Жуковского, где подробно исследовано явление гидравлического удара и влияние упругих свойств жидкости и стенок трубопровода на параметры волнового процесса [1]. В дальнейшем Л.Г. Лойцянский и А.Ю. Ишлинский развили общую теорию движения жидкости и газа, сформировав фундаментальные представления о волновых процессах в сплошных средах [2, 3].

Существенный вклад в развитие теории многофазных сред внесли Р.И. Нигматулин и ученики, в работах которых детально рассмотрены динамика, термодинамика и волновые свойства газожидкостных смесей [4]. Им были предложены модели усредненных характеристик двухфазных сред, позволяющие описывать распространение малых возмущений давления в условиях сложного фазового взаимодействия.

В зарубежных исследованиях значительное внимание уделялось акустическим свойствам двухфазных потоков. В работах G.B. Wallis разработаны одномерные модели двухфазного течения, в которых показано, что скорость распространения волн давления существенно зависит от структуры потока и объемной концентрации фаз [5].

Влияние газонасыщения жидкости на скорость звука подробно рассмотрено в работах Fox и McDonald, где показано, что даже малые концентрации газа приводят к резкому снижению скорости распространения давления [6].

Отдельное направление исследований связано с учетом деформации стенки трубопровода. Классическая формула Кортвега, связывающая скорость распростране-

ния волн давления с упругими характеристиками трубы, получила развитие в трудах В.Г. Шухова и последующих авторов [7, 8]. Показано, что эластичность стенок может существенно уменьшать скорость распространения возмущений по сравнению с жестким трубопроводом. В то же время комплексные исследования, учитывающие одновременно газожидкостный характер среды и деформацию стенки трубопровода, представлены в литературе в ограниченном объеме [9, 10]. Особенно недостаточно изучены случаи малых массовых концентраций газа и жидкости, характерные для пузырькового и эмульсионного режимов течения.

Современные исследования в этой области развиваются в направлении комплексного анализа структуры смеси и гидроупругого взаимодействия. В частности, в работе [19] показано, что микропузырьки газа вызывают высокую сжимаемость смеси, снижая скорость малых возмущений в разы даже при газосодержании менее 1%, а учет межфазного массообмена [20] позволяет точнее описать затухание волн давления. С другой стороны, учет радиальной деформации стенок по закону Гука при численном моделировании [21] снижает расчетную скорость звука на 15–25%, что особенно выражено для вязкоупругих полимерных труб [22]. Применительно к пузырьковому и эмульсионному режимам, линеаризованные уравнения сохранения [23] и численные модели гидроудара [24] подтверждают, что податливость стенок действует как демпфер, снижая пиковые нагрузки при схлопывании пузырьков воздуха.

Таким образом, анализ литературы подтверждает необходимость разработки моделей, комплексно учитывающих фазовый состав среды и деформацию трубопровода при анализе распространения малых возмущений давления, особенно для случаев малых массовых концентраций одной из фаз.

В связи с этим целью настоящей работы является исследование скорости распространения малых возмущений давления в газожидкостной среде при фиксированной массовой концентрации газа и деформации стенки трубопровода

2 Постановка и метод решения задачи

В книге [11] даны рекомендации по расчету однокомпонентных парожидкостных потоков, двухкомпонентных потоков и многокомпонентных потоков, содержащих сред обоих типов. В первом случае имеется в виду одно вещество в двух агрегатных состояниях: в капельной форме и в виде газа (пара данной жидкости). Во втором случае в составе жидкого вещества существуют пары других веществ. Например, в составе воды содержатся пузырьки воздуха. В третьем варианте многокомпонентная смесь состоит из разных компонент с разными агрегатными состояниями. Этот случай считается достаточно сложным. Первый и третий случаи усложняются, когда в процессе транспортировки происходит изменение агрегатного состояния одной или нескольких компонент.

Предлагаемая нами математическая модель относится ко второму случаю, когда рассматривается двухкомпонентная, газожидкостная среда.

В книге [11] подробно описаны восемь режимов течения двухфазной газожидкостной среды по характеру распределения фаз в трубопроводе. Перечислим их.

Расслоенный режим течения газожидкостной среды характеризуется неполным смачиванием границы живого сечения трубопровода любой из фаз и наличием плоской поверхности раздела фаз.

Расслоенный волновой режим течения газожидкостной среды отличается от предыдущего режима формой поверхности раздела фаз, которая в данном режиме имеет волновой характер.

Расслоенный волновой режим с перемычками является частным случаем второго режима, когда гребни волн достигают верхней границы трубопровода.

Снарядный (или поршневой) режим двухфазной газожидкостной среды характеризуется тем, что чередуются отдельные порции жидкости и газа.

Газ или пар в текущей среде может транспортироваться в виде пузырьков. Этот режим называется пузырьковым. В эмульсионном режиме наблюдается течения эмульсии и пены.

В кольцевом режиме течения газожидкостной среды по ядро течения движется газ, а жидкость в виде пленки медленно перемещается у стенки трубопровода. Если в составе газа, движущегося по ядро потока, имеются капли жидкости, то течение называют дисперсно-кольцевой.

Первый режим, согласно [11] наблюдается в горизонтальных и наклонных нисходящих трубопроводах. Остальные режимы течения могут образоваться во всех случаях работы трубопровода. Условное выделение режимов течения двухфазной газожидкостной среды в горизонтальном трубопроводе осуществляется согласно диаграммам Бейкера или Мандхейма [11], а в вертикальных трубопроводах, например, согласно диаграмме Хьюитта-Робертса [11].

Для перечисленных выше режимов течения предложены формулы для расхода среды, коэффициента сопротивления и трения, например, в работе [11].

В рамках работы обращаемся к пузырьковым и эмульсионным режимам течения двухфазной газожидкостной среды, когда массовая концентрация одной из компонент (в данном случае фаз тоже) достаточно малая.

Приступим к определению скорости распространения малых возмущений давления в жидкости с растворенным газом. Сначала получим формулу скорости распространения малых возмущений давления в трубопроводе с недеформируемой стенкой.

Плотность смеси при известных значениях давления p и температуры T определяется через массовые концентрации θ и $1 - \theta$ составляющих:

$$\rho = \frac{m_g + m_f}{V_g + V_f} = \frac{m_g + m_f}{\frac{m_g z RT}{p} + \frac{m_f}{\rho_* \left(1 + \frac{p - p_*}{k}\right)}} = \frac{1}{\frac{\theta z RT}{p} + \frac{(1 - \theta)k}{\rho_*(k + p - p_*)}}. \quad (1)$$

В зоне, до которой не дошла волна, уравнение состояния жидкости и растворенного в ней газа имеет вид:

$$\rho_0 = \frac{1}{\frac{\theta z_0 RT}{p_0} + \frac{(1 - \theta)k}{\rho_*(k + p_0 - p_*)}}. \quad (2)$$

После ударной волны образовались давление p и плотность смеси ρ согласно (1). Составим разность обратных значений сторон уравнений состояния (1) и (2):

$$\frac{\theta z RT}{p} + \frac{(1 - \theta)k}{\rho_*(k + p - p_*)} - \frac{\theta z_0 RT}{p_0} - \frac{(1 - \theta)k}{\rho_*(k + p_0 - p_*)} = \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}.$$

Преобразуем полученное равенство при $z = z_0$. Такое предположение безусловно выполняется для воздуха, так как в интервале давления 0.1–15.0 интервал изменения z составляет 0.99 – 1.00 (таблица 1). [12].

Таблица 1 Экспериментально определенные значения коэффициента сжимаемости воздуха z при 300 K в зависимости от давления (атм) [12]

1	5	10	20	40	60	80	100	150	200	250	300	400	500
0,9999	0,9987	0,9974	0,9950	0,9917	0,9901	0,9903	0,9930	1,0074	1,0326	1,0669	1,1089	1,2073	1,3163

Для остальных составов растворенного газа приближенно принимаем $z \approx z_0$. При таком допущении получим зависимость между приращениями давления и плотности смеси при переходе через ударной волны:

$$\left[\frac{\theta z RT}{pp_0} + \frac{(1 - \theta)k}{\rho_*(k + p - p_*)(k + p_0 - p_*)} \right] \Delta p = \frac{\Delta \rho}{\rho \rho_0}.$$

Составим отношение

$$\frac{\Delta p}{\Delta \rho} = \frac{1}{\rho \rho_0 \left[\frac{\theta z RT}{pp_0} + \frac{(1 - \theta)k}{\rho_*(k + p - p_*)(k + p_0 - p_*)} \right]}.$$

При подстановке значений плотности смеси (1) и (2) получим

$$\frac{\Delta p}{\Delta \rho} = \frac{\left[\frac{\theta z RT}{p} + \frac{(1 - \theta)k}{\rho_*(k + p - p_*)} \right] \left[\frac{\theta z_0 RT}{p_0} + \frac{(1 - \theta)k}{\rho_*(k + p_0 - p_*)} \right]}{\frac{\theta z RT}{pp_0} + \frac{(1 - \theta)k}{\rho_*(k + p - p_*)(k + p_0 - p_*)}}.$$

Как показали расчеты наших результатов при значениях разности нового и старого значений давления $p - p_0 = \pm 1$ кПа, положительная разность приводит к ускорению скорости распространения малых возмущений давления, а отрицательная разность – к ее замедлению. Такой характер изменения скорости распространения малых возмущений давления сохраняется и для чистой жидкости [13], и для газа [14]. При таком раскладе положений синусоидальное распределение плотности флюида может привести к образованию волны уплотнения со скачками показателей на фронте [15].

Предельный переход $p \rightarrow p_0$ приводит к формуле для скорости распространения малых возмущений давления в жидкости с растворенным газом в недеформируемом трубопроводе:

$$c^2 = \frac{\left[\frac{\theta z RT}{p_0} + \frac{(1 - \theta)k}{\rho_*(k + p_0 - p_*)} \right]^2}{\frac{\theta z RT}{p_0^2} + \frac{(1 - \theta)k}{\rho_*(k + p_0 - p_*)^2}}.$$

Достоверность данной формулы доказывается простым вычислением $\frac{dp}{d\rho} (= c^2)$ непосредственно из уравнения состояния двухфазной смеси:

$$c^2 = \left[\frac{\theta c_g^2}{p_0} + \frac{(1 - \theta)c_f^2}{k + p_0 - p_*} \right]^2 / \left[\frac{\theta c_g^2}{p_0^2} + \frac{(1 - \theta)c_f^2}{(k + p_0 - p_*)^2} \right]. \quad (3)$$

Здесь обеспечивается соответствие результатов для случаев $\theta = 0$ и $\theta = 1$ скоростям звука в реальных жидкостях и газах. При $\theta = 1$ из формулы (3) следует

формула для скорости распространения малых возмущений давления в газовой среде:

$$c_g = \sqrt{\gamma zRT}. \quad (4)$$

Для воздуха принимается $\gamma = 1.4$ [13]. Формула (4) широко известна в физике. В частности, используется при моделировании процессов трубопроводной транспортировки, например, природного газа, по магистральным газопроводам [16, 17].

При $\theta = 0$ получим формулу (5) для скорости распространения малых возмущений давления в жидкой среде:

$$c_f = \sqrt{k/\rho_*}. \quad (5)$$

Эта формула также часто встречается в литературе [16, 18].

Переходим к случаю деформируемой стенки, когда величина модуля Юнга материала трубопровода E большая, но ограниченная.

Внутренний диаметр трубопровода в состоянии покоя составляет $D_0 = 2R_0$, а толщина его стенки постоянная – δ . Полагаем, что материал трубопровода деформируется при изменении давления в трубопроводе согласно закону Гука и модуль его упругости составляет .

В зоне, до которой не дошла волна, уравнение состояния имеет прежний вид (2). После ударной волны образовалось давление p , а плотность и радиус трубопровода терпят изменения. Новая плотность смеси определяется по формуле (1).

Изменение давления от p_0 до p приводит к образованию дополнительной силы давления на полукольца цилиндра с радиусом R и длиной Δx которая определяется по формуле (6).

$$F_p = 2R\Delta x(p - p_0). \quad (6)$$

Принимаем, что деформация стенки малая и подчиняется закону Гука. Если модуль Юнга материала трубопровода составляет E , а толщина стенки δ постоянная, то сила упругости для выделенного участка определяется по формуле (7).

$$F_{pl} = S_{oc}E \frac{\Delta l}{l_0} = 2\delta\Delta xE \frac{\Delta l}{l_0} = 2\delta\Delta xE \frac{R - R_0}{R_0}. \quad (7)$$

Здесь S_{oc} – площадь поперечного сечения стенки выделенного участка трубопровода; l – длина окружности трубопровода.

Из условия равновесия сил $F_p = F_{pl}$ следует взаимосвязь между приращениями давления и радиуса трубопровода:

$$p - p_0 = \delta E \frac{R - R_0}{RR_0} \approx \delta E \frac{R - R_0}{R_0^2}.$$

Выразим приращение площади поперечного сечения $\Delta f \approx 2\pi R_0(R - R_0)$ трубопровода через приращение давления в виде соотношения (8).

$$\Delta f = \frac{2\pi R_0^3}{\delta E} (p - p_0). \quad (8)$$

Эти значения используем для преобразования уравнения сохранения массы

$$\frac{\partial(f\rho)}{\partial t} + \frac{\partial(f\rho u)}{\partial x} = 0, \quad (9)$$

для выделенного элементарного участка трубопровода. Преобразуем первый член уравнения (9):

$$\frac{\partial(f\rho)}{\partial t} = \frac{\partial(f_0 + \Delta f)(\rho_0 + \Delta\rho)}{\partial t} \approx f_0 \frac{\partial\Delta\rho}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial\Delta f}{\partial t}.$$

Здесь учитывали $\frac{\partial(f_0\rho_0)}{\partial t} = 0$ и отбросили члены высокого порядка, оставив члены только первого порядка малости. Подставим значения плотностей и производных, преобразуем полученное:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(f\rho)}{\partial t} &\approx f_0 \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\frac{\theta z RT}{p} + \frac{(1-\theta)k}{\rho_*(k+p-p_*)}}{\left[\frac{\theta z RT}{p} + \frac{(1-\theta)k}{\rho_*(k+p-p_*)} \right]} - \frac{\frac{\theta z_0 RT}{p_0} + \frac{(1-\theta)k}{\rho_*(k+p_0-p_*)}}{\left[\frac{\theta z_0 RT}{p_0} + \frac{(1-\theta)k}{\rho_*(k+p_0-p_*)} \right]} \right] + \\ &+ \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{2f_0 R_0}{\delta E} (p-p_0) \right] \approx f_0 \frac{\frac{\theta z RT}{p_0^2} + \frac{(1-\theta)k}{\rho_*(k+p_0-p_*)^2}}{\left[\frac{\theta z RT}{p_0} + \frac{(1-\theta)k}{\rho_*(k+p_0-p_*)} \right]^2} \frac{\partial(p-p_0)}{\partial t} + \\ &+ \frac{2f_0\rho_0 R_0}{\delta E} \frac{\partial}{\partial t} (p-p_0) = f_0 \left[\frac{\frac{\theta z RT}{p_0^2} + \frac{(1-\theta)k}{\rho_*(k+p_0-p_*)^2}}{\left[\frac{\theta z RT}{p_0} + \frac{(1-\theta)k}{\rho_*(k+p_0-p_*)} \right]^2} + \frac{2\rho_0 R_0}{\delta E} \right] \frac{\partial p}{\partial t}. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь в коэффициентах перед $\frac{\partial(p-p_0)}{\partial t}$ значение p заменили на предельное значение p_0 , а производную p_0 по времени принимали равной нулю.

Аналогично раскрываем второй член уравнения:

$$\frac{\partial(f\rho u)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} \rho u + (f_0 + \Delta f) \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \approx \frac{2\rho_0 f_0}{\delta E} \frac{\partial p}{\partial x} \rho u + f_0 \left[\frac{\partial(\rho_0 u)}{\partial x} + \frac{\rho_0}{k} \frac{\partial u}{\partial x} (p-p_*) \right].$$

Отбрасываем члены, в знаменателях которых фигурируют большие относительно ρu величины E и k , и получим:

$$\frac{\partial(f\rho u)}{\partial x} \approx f_0 \frac{\partial(\rho_0 u)}{\partial x}. \quad (11)$$

Подстановка полученных выражений (10) и (11) в уравнение сохранения массы дает

$$\left\{ \frac{\frac{\theta z RT}{p_0^2} + \frac{(1-\theta)k}{\rho_*(k+p_0-p_*)^2}}{\left[\frac{\theta z RT}{p_0} + \frac{(1-\theta)k}{\rho_*(k+p_0-p_*)} \right]^2} + \frac{2\rho_0 R_0}{\delta E} \right\} \frac{\partial p}{\partial t} = - \frac{\partial(\rho_0 u)}{\partial x}.$$

Сравнивая данное уравнение с традиционным видом уравнения неразрывности через скорости распространения малых возмущений давления [18], представленным формулой (12), получим расчетное выражение для квадрата скорости в виде (13).

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -c^2 \frac{\partial(\rho_0 u)}{\partial x}, \quad (12)$$

$$c^2 = \frac{1}{\frac{\theta z R T}{p_0^2} + \frac{(1-\theta)k}{\rho_*(k+p_0-p_*)^2} + \frac{2\rho_0 R_0}{\delta E}} \cdot \frac{1}{\left[\frac{\theta z R T}{p_0} + \frac{(1-\theta)k}{\rho_*(k+p_0-p_*)} \right]^2} + \frac{2\rho_0 R_0}{\delta E}}. \quad (13)$$

Можно переписать формулу через скорости распространения малых возмущений в газовой и жидкой средах:

$$c^2 = \frac{1}{\frac{\theta c_g^2}{p_0^2} + \frac{(1-\theta)c_f^2}{(k+p_0-p_*)^2} + \frac{2\rho_0 R_0}{\delta E}} \cdot \frac{1}{\left[\frac{\theta c_g^2}{p_0} + \frac{(1-\theta)c_f^2}{k+p_0-p_*} \right]^2} + \frac{2\rho_0 R_0}{\delta E}}.$$

Это облегчает проверку достоверности формулы для частных случаев. Для газовой среды без жидких или твердых примесей из последней формулы получим выражение (14).

$$c_{gc}^2 = \frac{1}{\frac{1}{zRT} + \frac{2\rho_0 R_0}{\delta E}}, \quad (14)$$

а для чистой жидкой среды – соотношение (15).

$$c_{fc}^2 = \frac{1}{\frac{\rho_0}{k} + \frac{2\rho_0 R_0}{\delta E}}. \quad (15)$$

3 Обсуждение результатов

При фиксированных значениях составляющих уравнения состояния скорости распространения малых возмущений давления в реальных газах и жидкостях получают постоянными величинами. В то же время для смеси растворенного газа и жидкости скорость распространения малых возмущений получается зависящей от давления среды.

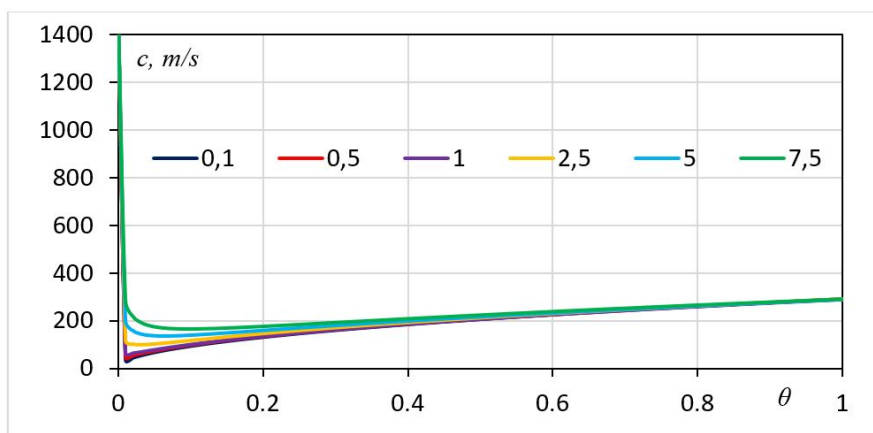


Рис. 1 Изменение скорости распространения малых возмущений давления в зависимости от массовой концентрации воздуха $\theta \in [0; 1]$ в двухфазной среде. $k = 2.12 \cdot 10^9$ Па, $z = 1.0$, $T = 293.15$ К, $\rho_* = 998.23$ кг / м³, $p_* = 101325.0$ Па

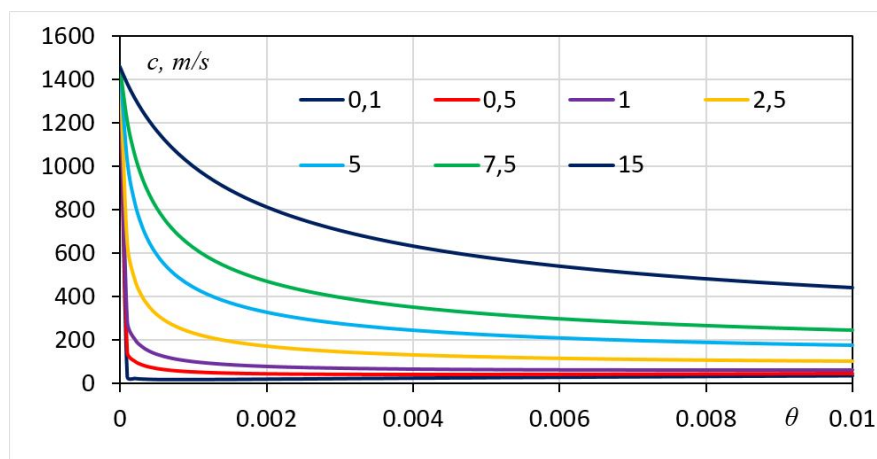


Рис. 2 Изменение скорости распространения малых возмущений давления в зависимости от массовой концентрации воздуха $\theta \in [0; 0.01]$ в двухфазной среде. Данные см. рис. 1

На рис. 1,2,3 приведены графики изменения скорости распространения малых возмущений давления в зависимости от массовой доли газа θ в смеси при $p_0 = 0.1, 0.5, 1.0, 2.5, 5.0, 7.5, 15.0$ МПа без учета деформации стенки трубопровода. На рис. 1 приведены графики для промежутка $0 \leq \theta \leq 1.0$, на рис. 2 - для промежутка $0 \leq \theta \leq 0.01$, а на рис. 3 - для промежутка $10^{-10} \leq \theta \leq 0$ в полулогарифмических координатах.

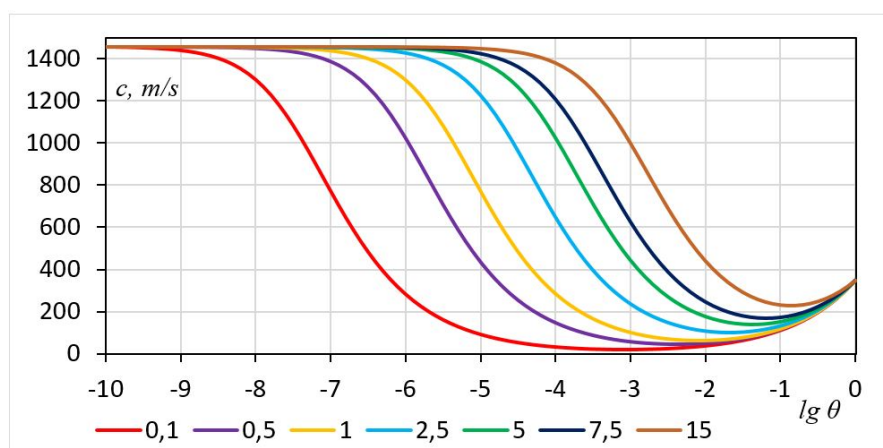


Рис. 3 Изменение скорости распространения малых возмущений давления в зависимости от массовой концентрации воздуха в двухфазной среде в полулогарифмических координатах. Данные см. рис. 1

При малых значениях θ наблюдается убывание скорости распространения малых возмущений давления. Ее убывание интенсивнее при малых значениях давления. Далее убывание замедляется и наступает локальный минимум. При $p_0 = 0.1$ МПа точка минимума имеет координаты $(0.012, 20.0055 \text{ м/с})$. В последующих значениях давления $p_0 = 0.5, 1.0, 2.5, 5.0, 7.5$ МПа точка минимума определены координатами $(0.060, 44.6183 \text{ м/с})$, $(0.01, 63.1645 \text{ м/с})$, $(0.03, 98.4838 \text{ м/с})$, $(0.06, 137.0161 \text{ м/с})$, $(0.10, 164.9591 \text{ м/с})$. Такой характер изменения скорости малых возмущений давления в двухфазной среде отмечен в книгах [11, 13].

При малых значениях массовой доли жидкости скорость распространения малых возмущений давления получилась меньше скорости распространения малых возмущений давления в газовой среде. Это объясняется проявлением эффекта бародиффузии. При прохождении волны уплотнения через смесь газ ускоряется интенсивно, т.к. у него малая инерция и большое миделево сечение. В тоже время капли жидкости более тяжелые и имеют меньшее миделево сечение. Соответственно, они не успевают ускориться под воздействием скачка давления, и тормозят движение газа. Поэтому скорость распространения малых возмущений давления при больших значениях объемной доли газа получилась меньше скорости звука в газовой среде.

Приведенные выше результаты относятся случаю недеформируемой стенки ($E \rightarrow \infty$) трубопровода. Переходим к случаю деформируемой стенки, когда величина модуля Юнга материала трубопровода E большая, но ограниченная.

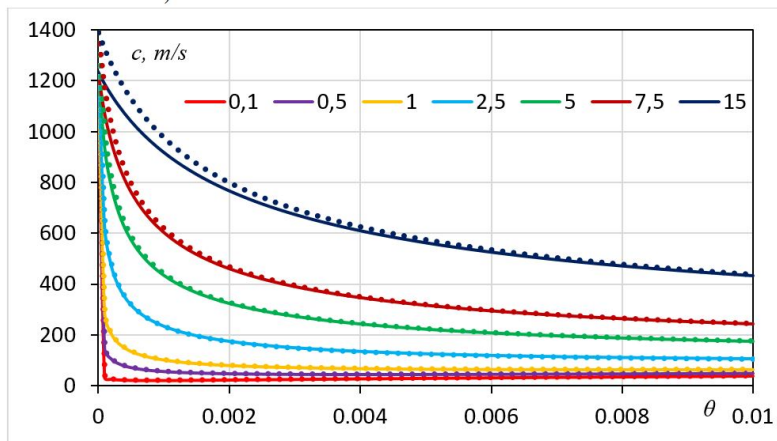


Рис. 4 Изменение скорости малых возмущений давления смеси c в зависимости от массовой концентрации θ при различных значениях давления с учетом деформации стенки. $D_0 = 0.200$ м, $D_0/\delta = 40$, $E = 2.16 \cdot 10^{11}$ Па, $c_f = 1457.31$ м/с, $c_g = 290.11$ м/с. Остальные данные см. рис. 1

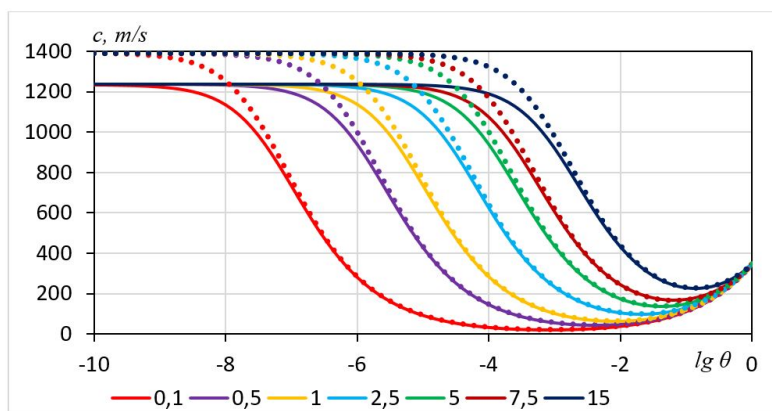


Рис. 5 Изменение скорости малых возмущений давления смеси c в зависимости от логарифма массовой концентрации θ при различных значениях давления с учетом деформации стенки из стали при $D_0/\delta = 10$ и 40 . $D_0 = 0.200$ м, $D_0/\delta = 40$, $E = 2.16 \cdot 10^{11}$ Па, $c_f = 1457.31$ м/с, $c_g = 290.11$ м/с. Остальные данные см. рис. 1

Обычно при моделировании транспортировки газовых сред деформация стенки будет незначительная и в практических целях вместо (14) используется формула (4) [16, 17]. Полученная для жидкости без растворенного газа формула повторяет результат Н.Е. Жуковского [18]. А в целом, когда рассматривается двухфазная среда из газа и жидкости скорость распространения малых возмущений зависит от давления и в расчетах за p_0 и R_0 , то в уравнениях степень неизвестных увеличивается на единицу.

Кривые скорости малых возмущений давления получились аналогичными кривым для недеформируемой стенки (рис. 4). При малых значениях θ также наблюдается убывание скорости распространения малых возмущений давления. При $p_0 = 0.1$ МПа малых значениях давления убывание становится интенсивнее. Далее наступает локальный минимум, в приближении к этой точке убывание замедляется. При точка минимума имеет координаты (0.012, 20.0047 м/с).

На рис. 5 в полулогарифмических координатах приведены графики изменения скорости распространения малых возмущений давления в стальной трубе при $D_0/\delta = 10$ и 40. Как видно из графиков, с уменьшением толщины стенки скорость звука убывает, сохраняя свой характер в зависимости от изменения давления.

4 Заключение

В настоящей работе определена скорость распространения малых возмущений давления в смеси реальных жидкости и газа, транспортируемой по трубопроводу, как без учета, так и с учетом деформируемости тонкой стенки трубопровода. Получены аналитические зависимости, позволяющие оценивать влияние фазового состава среды и механических свойств трубопровода на волновые характеристики газожидкостной системы.

Подтвержден эффект, согласно которому при малых значениях массовой доли жидкости скорость распространения малых возмущений давления в смеси оказывается меньше скорости звука в однородной газовой среде. Данный эффект ранее отмечался в работах [11, 13], что подтверждает корректность и научную состоятельность полученных результатов. В рамках настоящей работы этот эффект объяснен своеобразным проявлением бародиффузии в двухфазной среде и межфазного динамического взаимодействия, приводящего к торможению движения газа более инерционной жидкой фазой.

Представлен графический материал, демонстрирующий изменение скорости распространения малых возмущений давления в зависимости от массовой концентрации воздуха в смеси с водой для недеформируемого и деформируемого трубопроводов. Показано, что учет упругости стенки трубопровода приводит к дополнительному снижению скорости распространения давления по сравнению с жестким трубопроводом, особенно в области малых массовых концентраций одной из фаз.

Полученные результаты могут быть использованы при расчете нестационарных режимов течения, анализе акустических характеристик газожидкостных потоков и проектировании трубопроводных систем, транспортирующих газонасыщенные жидкости.

Литература

- [1] Жуковский Н.Е. О гидравлическом ударе в водопроводных трубах. – М.: Гостехиздат, 1949. – 104 с.
- [2] Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. – М.: Наука, 2003. – 840 с.

- [3] *Ишлинский А.Ю.* Механика сплошных сред. – М.: Физматлит, 2001. – 560 с.
- [4] *Нугматуллин Р.И.* Динамика многофазных сред. – М.: Наука, 1987. – Т.1. – 464 с.
- [5] *Wallis G.B.* One-Dimensional Two-Phase Flow. – New York: McGraw-Hill, 1969. – 408 p.
- [6] *Fox R.W., McDonald A.T.* Introduction to Fluid Mechanics. – 7th ed. – Hoboken: Wiley, 2011. – 896 p.
- [7] *Korteweg D.J.* On the propagation of waves in elastic tubes // *Philosophical Magazine.* – 1878. – Vol. 5. – P. 525–542.
- [8] *Wylie E.B., Streeter V.L.* Fluid Transients in Systems. – Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1993. – 463 p.
- [9] *Ishii M., Hibiki T.* Thermo-Fluid Dynamics of Two-Phase Flow. – New York: Springer, 2011. – 482 p.
- [10] *Drew D.A., Passman S.L.* Theory of Multicomponent Fluids. – New York: Springer, 1999. – 309 p.
- [11] *Муржин А.З., Усиньш В.В.* Трубопроводные системы: Справ. изд. – М.: Химия, 1991. – 256 с.
- [12] Коэффициент сжимаемости воздуха: таблица и значения. – URL: <https://fireman.club/inseklodepia/koefficient-szhimaemosti-vozduha>.
- [13] *Зезин В.Г.* Нестационарные процессы гидродинамики: учебное пособие. – Челябинск: изд-во ЮУрГУ, 2011. – 74 с.
- [14] *Руденко О.В.* Основы нелинейной акустики. – М.: Изд-во МГУ, 1983. – 181 с.
- [15] *Бозоров О.Ш., Маматкулов М.М.* Аналитические исследования нелинейных гидродинамических явлений в средах с медленно меняющимися параметрами (монография). – Ташкент: ТИТЛП, 2015. – 96 с.
- [16] *Чарный И.А.* Введение в механику сплошных сред. – М.: Наука, 1965. – 376 с.
- [17] *Селезнев В.Е., Алешин В.В., Прялов С.Н.* Математическое моделирование трубопроводных сетей и систем каналов: методы, модели, алгоритмы / Под ред. В.Е. Селезнева. – М.: МАКС Пресс, 2007. – 695 с.
- [18] *Будак Б.М., Чарный И.А.* Гидромеханика. – М.: Наука, 1983. – 512 с.
- [19] *Wang L., Zhang J.* Acoustic wave propagation and pressure pulse attenuation in micro-bubble gas-liquid mixtures // *International Journal of Multiphase Flow.* – 2024. – Vol. 171. – P. 104680. doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijmultiphaseflow.2023.104680>
- [20] *Li S., Karney B.W.* The influence of dissolved gas release and pipe wall elasticity on transient pressure wave speed // *Journal of Hydraulic Engineering.* – 2024. – Vol. 150(3). – P. 04024002. doi: <http://dx.doi.org/10.1061/JHEND8.HYENG-13411>
- [21] *Kurbanov A., Axmetov B.* Fluid-structure interaction (FSI) modeling of water-hammer waves in gas-saturated transport pipelines // *Journal of Fluids and Structures.* – 2025. – Vol. 125. – P. 104052. doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2024.104052>
- [22] *Duan H.F., Ghidaoui M.S.* Wave speed and attenuation analysis in viscoelastic and elastic pipes containing air-water mixtures // *Journal of Hydraulic Research.* – 2024. – Vol. 62(1). – P. 89–102. doi: <http://dx.doi.org/10.1080/00221686.2023.2291504>
- [23] *Ramos H.M., Besharat M.* Analytical solution for small pressure perturbations in bubbly and emulsion flow regimes within deformable conduits // *Physics of Fluids.* – 2025. – Vol. 37(2). – P. 024105. doi: <http://dx.doi.org/10.1063/5.0243105>
- [24] *Saeed M., El-Amin M.M.* Numerical simulation of transient two-phase flow and water hammer analysis considering pipe wall compliance // *Computers & Fluids.* – 2025. – Vol. 288. – P. 106110. doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.compfluid.2024.106110>

UDC 532

INVESTIGATION OF THE PROPAGATION VELOCITY OF SMALL PRESSURE DISTURBANCES IN A GAS–LIQUID MEDIUM WITH ACCOUNT FOR GAS MASS CONCENTRATION AND PIPELINE WALL DEFORMATION

^{1,2}*Begimov O.M.*, ¹*Khujaev I.K.*, ²*Mamadaliev Kh.A.*

*oybek.begimov@mail.ru

¹Institute of mechanics and seismic stability of structures named after M.T. Urazbaev, 33, str. Durman yuli, Tashkent, 100125, Uzbekistan;

²Tashkent university of information technologies named after Muhammad al-Khwarizmi, 100200, 108, Amir Temur str., Tashkent, Uzbekistan.

This paper investigates how the propagation velocity of small pressure disturbances in a gas–liquid medium varies with the mass concentration of air. Two cases are considered: a rigid pipeline and a pipeline accounting for wall deformation. A “water–air” mixture, in which gas bubbles are present in the liquid, is adopted as the model of the medium. Formulas for the propagation velocity with and without wall deformability are derived in accordance with Hooke’s law. The analysis covers bubbly and emulsion flow regimes at low mass concentrations of the phases. Analytical dependences of the velocity on the mass concentration of air are obtained and analyzed graphically. It is shown that even small gas concentrations markedly reduce the wave propagation velocity, while accounting for wall deformation further decreases the speed of sound.

Keywords: small pressure disturbances, gas–liquid medium, flow regimes, gas mass concentration, bubbly flow, wall deformation, pipeline.

Citation: Begimov O.M., Khujaev I.K., Mamadaliev Kh.A. 2026. Investigation of the propagation velocity of small pressure disturbances in a gas–liquid medium with account for gas mass concentration and pipeline wall deformation. *Problems of Computational and Applied Mathematics*. 3(73): 37-49.

DOI: https://doi.org/10.71310/pcam.3_73.2026.03

HISOBLASH VA AMALIY МАТЕМАТИКА MUAMMOLARI

ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ
И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
PROBLEMS OF COMPUTATIONAL
AND APPLIED MATHEMATICS

ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

№ 3(73) 2026

Журнал основан в 2015 году.

Издается 6 раз в год.

Учредитель:

Научно-исследовательский институт развития цифровых технологий и
искусственного интеллекта.

Главный редактор:

Равшанов Н.

Заместители главного редактора:

Арипов М.М., Шадиметов Х.М., Ахмедов Д.Д.

Ответственный секретарь:

Убайдуллаев М.Ш.

Редакционный совет:

Азамов А.А., Алоев Р.Д., Амиргалиев Е.Н. (Казахстан), Арушанов М.Л.,
Бурнашев В.Ф., Джумаёзов У.З., Загребина С.А. (Россия), Задорин А.И. (Россия),
Игнатъев Н.А., Ильин В.П. (Россия), Иманкулов Т.С. (Казахстан),
Исмагилов И.И. (Россия), Кабанихин С.И. (Россия), Курбонов Н.М., Маматов Н.С.,
Мирзаев Н.М., Мурадов Ф.А., Назирова Э.Ш., Нормуродов Ч.Б., Нуралиев Ф.М.,
Опанасенко В.Н. (Украина), Расулмухамедов М.М., Садуллаева Ш.А.,
Старовойтов В.В. (Беларусь), Хаётов А.Р., Халджигитов А., Хамдамов Р.Х.,
Хужаев И.К., Хужаеров Б.Х., Эшмаматова Д.Б., Дустмуродова Ш.Ж.,
Чье Ен Ун (Россия), Шабозов М.Ш. (Таджикистан), Dimov I. (Болгария),
Li Y. (США), Mascagni M. (США), Min A. (Германия), Singh M. (Южная Корея).

Журнал зарегистрирован в Агентстве информации и массовых коммуникаций при
Администрации Президента Республики Узбекистан.

Свидетельство №0856 от 5 августа 2015 года.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

При перепечатке материалов ссылка на журнал обязательна.

За точность фактов и достоверность информации ответственность несут авторы.

Адрес редакции:

100125, г. Ташкент, м-в. Буз-2, 17А.

Тел.: +(998) 71 263-41-98.

Э-почта: journals@airi.uz.

Веб-сайт: <https://journals.airi.uz>.

Дизайн и вёрстка:

Шарипов Х.Д.

Отпечатано в типографии НИИ РЦТИИ.

Подписано в печать 25.06.2026 г.

Формат 60x84 1/8. Заказ №3. Тираж 100 экз.

Содержание

Яхшибаев Д.С., Боборахимов Б.И.

Математическое моделирование поступления многофазного потока смеси в стратифицированное водохранилище и разрушения слоистой структуры . . . 7

Бахтиёрв Б.Б., Хужаев И.К., Туропова Н.В.

Математическая модель и анализ гашения гидравлического удара с помощью воздушного колпака 25

Бегимов О.М., Хужаев И.К., Мамадалиев Х.А.

Исследование скорости распространения малых возмущений давления в газожидкостной среде с учетом массовой концентрации газа и деформации стенки трубопровода 37

Эргашев Д.Й., Хужаев Ж.И., Ахмаджонов С.С.

Математическая модель процесса теплоотдачи от жидкого теплоносителя, текущего по оребренному прямоугольными ребрами цилиндрическому трубопроводу 50

Музаффаров С.А., Маратов Х.У., Хамдамов А.А.

Вычислительное моделирование вертикально-осевой ветроэнергетической установки с пассивным изменением шага лопастей для условий слабых ветров 61

Хожжикулов Ш.Ш., Бегимов О.М., Обиджонов А.Ж.

Исследование динамики переходных процессов, связанных с изменением расхода в конце участка трубопровода, с учетом и без учета силы сопротивления 75

Равшанов Ш.А., Боборахимова М.И., Чулмиев Ш.И.

Моделирование тепло- и массообмена в рельефном трубопроводе с постоянными и изменяющимися диаметрами 90

Равшанов Н., Боборахимов Б.И., Бердиёров Ш.Ш.

Характеристики загрязнения мембраны в процессе фильтрации и транспортировки в цилиндрическом пористом фильтре 104

Халджигитов А.А., Бобоназаров А.А., Рахмонова Р.А., Тиловов О.О.

Численное моделирование задач теории упругости в напряжениях методом конечных элементов 125

Тиловов М.А.

Численное исследование динамики производных различного порядка уравнения Фолкнера–Скэна в зависимости от градиента давления 139

Жумаев З.З.

Приближённое решение задач с начальными условиями для дифференциальных уравнений первого порядка с использованием комбинированного метода Рунге–Кутты и метода с кусочно-постоянным аргументом 153

Contents

<i>Yakhshibaev D.S., Boborakhimov B.I.</i> Mathematical modeling of multiphase mixture inflow into a stratified reservoir and the breakdown of the layered structure	7
<i>Bakhtiyorov B.B., Khujaev I.K., Turapova N.V.</i> Mathematical model and analysis of water hammer damping using an air vessel .	25
<i>Begimov O.M., Khujaev I.K., Mamadaliev Kh.A.</i> Investigation of the propagation velocity of small pressure disturbances in a gas-liquid medium with account for gas mass concentration and pipeline wall deformation	37
<i>Ergashev D.Y., Khujaev J.I., Akhmadjonov S.S.</i> A mathematical model of heat transfer from a liquid coolant flowing through a cylindrical pipeline finned with rectangular fins	50
<i>Muzaffarov S.A., Maratov Kh.U., Hamdamov M.M.</i> Computational modeling of a passive-pitch low-wind vertical-axis wind turbine .	61
<i>Khozhikulov Sh.Sh., Begimov O.M., Obidjonov A.J.</i> Investigation into the dynamics of transient processes associated with flow rate changes at the end of a pipeline section, both with and without resistance force .	75
<i>Ravshanov Sh.A., Boborakhimova M.I., Chulliev Sh.I.</i> Modelling heat and mass transfer in a relief pipeline with constant and varying diameters	90
<i>Ravshanov N., Boborakhimov B.I., Berdiyev Sh.Sh.</i> Membrane fouling characteristics during filtration and transport processes in a cylindrical porous filter	104
<i>Khaldjigitov A.A., Bobonazarov A.A., Rakhmonova R.A., Tilovov O.O.</i> Numerical modeling of elasticity theory problems in terms of stresses using the finite element method	125
<i>Tilovov M.A.</i> Numerical study of the dynamics of derivatives of various orders of the Falkner-Skan equation depending on the pressure gradient	139
<i>Jumaev Z.Z.</i> Approximate solution of initial value problems for first-order differential equations using a combined Runge-Kutta and piecewise constant argument method .	153