

УДК 532.546

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И АНАЛИЗ ГАШЕНИЯ ГИДРАВЛИЧЕСКОГО УДАРА С ПОМОЩЬЮ ВОЗДУШНОГО КОЛПАКА

^{1,2*} *Бахтиёров Б.Б.*, ¹ *Хужаев И.К.*, ^{1,2} *Туропова Н.В.*

*bozorov.bobur1992@gmail.com

¹Институт механики и сейсмостойкости сооружений им. М.Т. Уразбаева,
100125, Узбекистан, Ташкент, Ул. Дурмон Йули, 33;²Ташкентский университет информационных технологий имени Мухаммада ал-Хоразмий,
100202, Узбекистан, Ташкент, ул. Амира Темура, 108.

Представлена усовершенствованная квазиодномерная математическая модель нестационарного движения сжимаемой жидкости в магистральных трубопроводах для исследования гашения гидравлического удара. Научная новизна заключается в формулировке строгого нелинейного граничного условия, основанного на законе сохранения массы заземлённого газа в воздушном колпаке (демпфере). Численное интегрирование определяющих уравнений выполнено методом бегущих волн с применением неявной конечно-разностной схемы. Верификация алгоритма с эталонной динамической моделью в MATLAB Simulink подтвердила высокую точность подхода (погрешность 5–8%). Многофакторный анализ детально раскрывает влияние объёма демпфера, начального давления газа и диаметра трубопровода на инерционность системы. Установлены критические пороги разрушительной кавитации и эффекта «передемпфирования», что доказывает необходимость индивидуальной калибровки защитных устройств для надёжной эксплуатации трубопроводных сетей.

Ключевые слова: гидравлический удар, газогидравлический демпфер, воздушный колпак, математическое моделирование, метод бегущих волн, нестационарный поток, кавитация, магистральный трубопровод.

Цитирование: *Бахтиёров Б.Б., Хужаев И.К., Туропова Н.В.* Математическая модель и анализ гашения гидравлического удара с помощью воздушного колпака // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2026. – № 3(73). – С. 25-36.

DOI: https://doi.org/10.71310/psam.3_73.2026.02

1 Введение

Обеспечение эксплуатационной надёжности и технической безопасности магистральных трубопроводных систем, транспортирующих воду, нефть и другие жидкие среды, является одной из центральных задач современной прикладной гидромеханики и энергетики [1, 2]. В процессе эксплуатации таких систем часто возникают переходные гидродинамические режимы, вызываемые внезапным отключением насосных агрегатов, быстрым закрытием запорно-регулирующей арматуры или изменением потребления [3]. Эти явления инициируют возникновение гидравлического удара — процесса быстрого распространения высокочастотных волн повышенного и пониженного давления [4]. Фундаментальные основы теории гидравлического удара были заложены в классических трудах Н.Е. Жуковского, чьи уравнения до сих пор служат базой для расчета гидродинамических систем.

Особую опасность при гидравлическом ударе представляют фазы разрежения (отрицательные полуволны давления). Когда локальное давление в трубопроводе падает ниже давления насыщенных паров перекачиваемой жидкости, происходит нарушение сплошности потока и интенсивное образование кавитационных пузырей [5, 6].

Последующее жесткое схлопывание каверн при возврате волны генерирует вторичные микроудары колоссальной разрушительной силы, что приводит к усталостному разрушению стенок трубы и серьезным авариям [7].

Для эффективной защиты трубопроводных сетей от подобных динамических перегрузок в мировой инженерной практике широко применяются газогидравлические демпферы, в частности — воздушные колпаки [8, 9]. В последние годы исследователи уделяют значительное внимание оптимизации параметров таких устройств. Ряд авторов использовали метод характеристик (МОС) для моделирования переходных процессов в водоводах с воздушными колпаками, анализируя влияние объема воздуха на максимальное давление [10, 11]. В работах других исследователей применяются сложные методы вычислительной гидродинамики (CFD) в формате 3D-моделирования для изучения локальных турбулентных структур внутри демпфера [12, 13].

Несмотря на обширную литературу в данной области, большинство существующих квазиодномерных математических моделей опираются на ряд упрощений. Зачастую плотность жидкой среды принимается строго постоянной, а термодинамическое состояние газа в демпфере описывается эмпирическим политропическим процессом с постоянным показателем степени [14, 19]. Более того, многие модели пренебрегают строгим условием сохранения массы заземленного газа и не учитывают комплексное влияние диаметра трубопровода на эффективность гашения инерционной энергии. Использование громоздких 3D-CFD моделей, с другой стороны, требует огромных вычислительных ресурсов и не всегда удобно для многофакторной инженерной оптимизации протяженных магистральных сетей.

В связи с этим возникает острая необходимость в разработке строгих, но вычислительно эффективных математических моделей, способных прецизионно описывать динамическое взаимодействие сжимаемой жидкости и газового демпфера.

Целью данного исследования является разработка усовершенствованной квазиодномерной математической модели и алгоритма численного решения на основе метода бегущих волн для анализа процесса гашения гидравлического удара с помощью воздушного колпака. В работе впервые предложено нелинейное граничное условие, строго базирующееся на законе сохранения массы газа в демпфере. На основе верификации с эталонной моделью в среде MATLAB Simulink проведен глубокий анализ влияния объема демпфера, начального давления газа и диаметра трубопровода на риски возникновения кавитации и общую инерционность гидравлической системы.

2 Постановка задачи

Трубопровод имеет длину l и внутренний диаметр D . Рассматривается развитый режим течения, когда коэффициент сопротивления трения имеет постоянную величину, которая определяется по формуле Блазиуса:

$$\lambda = 0.11(k/D)^{0.25},$$

где k — эквивалентная шероховатость границы живого сечения трубопровода.

При транспортировке жидкостей, которые имеют большую плотность, необходимо учитывать переменность нивелирной высоты оси $y(x)$ трубопровода от расстояния x . Для этой цели пользуемся уклоном трассы $\alpha = \frac{dy}{dx}$, который построен относительно длины трубопровода.

Нестационарное состояние жидкости в поле сил инерции, градиента давления, сопротивления и гравитации описывается квазиодномерными уравнениями сохранения

и переноса импульса [15, 16]:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\lambda}{2D} \rho u |u| - \rho g \sin \alpha,$$

и уравнением неразрывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0.$$

Зачастую, в частности в первичной модели Н.Е. Жуковского, плотность жидкой среды принимается постоянной. В нашем случае для описания состояния жидкости использована зависимость:

$$p - p_* = \frac{k}{\rho_*} (\rho - \rho_*),$$

где k – коэффициент объемного сжатия рассматриваемой жидкости; p_* , ρ_* – давление и плотность жидкости в невозмущенном состоянии. В частности, для воды при $T = 293.15$ К принимается $p_* = 101325$ Па, $\rho_* = 998.15$ кг/м³ и $k = 2.12$ ГПа. Эти данные используются также при вычислении скорости распространения малых возмущений давления (звука) в жидкости $c_f = \sqrt{k/\rho_*}$ [17].

Начальные условия задачи формируются для скорости потока и давления по длине участка:

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= u^0(x), \\ p(x, 0) &= p^0(x). \end{aligned}$$

В частности, если в качестве начального условия принимается стационарный режим работы с постоянным массовым расходом жидкости

$$M(x, 0) = f \rho(x, 0) u(x, 0) = M^0(x) = const,$$

(здесь $f = \pi D^2/4$ – площадь поперечного сечения трубопровода), то начальные условия задачи формулируется численным решением уравнения:

$$\frac{dp^0}{dx} + \rho^0 g \sin \alpha + \frac{\lambda}{2D} \rho^0 (u^0)^2 + \rho^0 u^0 \frac{du^0}{dx} = 0,$$

относительно $p^0(x)$.

Используя зависимости $u^0 = \frac{M^0}{f\rho^0}$, $\frac{dp^0}{dx} = c^{-2} \frac{dp^0}{dx}$, $\frac{du^0}{dx} = -\frac{M^0}{f(\rho^0)^2 c^2} \frac{dp^0}{dx}$, уравнение представляется в виде:

$$\frac{dp^0}{dx} + \rho^0 g \sin \alpha + \frac{\lambda(M^0)^2}{2D f^2} \frac{1}{\rho^0} - \frac{(M^0)^2}{f^2 c^2 (\rho^0)^2} \frac{dp^0}{dx} = 0.$$

Здесь и далее

$$\rho^0 = \rho_* \left(1 + \frac{p^0 - p_*}{k} \right).$$

Из последнего уравнения находим:

$$\frac{dp^0}{dx} = \left(-\rho^0 g \sin \alpha - \frac{\lambda(M^0)^2}{2D f^2 \rho^0} \right) \Bigg/ \left(1 - \frac{(M^0)^2}{f c \rho^0} \right).$$

Интегрируем данное уравнение численно от 0 до x ($\leq l$) при условии $p^0(0) = p_0^0$.

При известных сеточных значениях p_i^0 плотность жидкости в расчетных точках по формуле, а скорость потока жидкости по формуле:

$$u_i^0 = \frac{M^0}{f\rho_* \left(1 + \frac{p_i^0 - p_*}{k}\right)}.$$

В качестве первого граничного условия принимали

$$M(0, t) = Q^0(t).$$

Второе граничное условие задачи должно отражать сжимаемость жидкости и газа в воздушном колпаке, а также интенсивность отбора жидкости из участка $Q_l(t)$.

В отличие от известных математических моделей воздушного колпака, в нашем случае исходим из того, что масса воздуха в воздушном колпаке имеет постоянное значение [18]:

$$m_g = V_g(t)\rho_g(t) = const,$$

с другой стороны, состояние реального газа подчиняется уравнению:

$$p = z\rho_g R_g T,$$

где z – коэффициент сжимаемости воздуха; R_g – приведенная газовая постоянная воздуха; T – температура газа. Из уравнения (2) с учетом уравнения состояния жидкости, находим:

$$V_g(t) = \frac{m_g}{\rho_g(t)} = \frac{c_g^2 m_g}{p(l, t)} = \frac{c_g^2 m_g}{p_* - k + c^2 \rho(l, t)}.$$

Здесь пользовались обозначением $c_g^2 = zR_g T$ и приняли, что значение давления одинаково для воздушного колпака и для сечения трубопровода $x = l$.

Дошедший до конца участка массовый расход жидкости

$$M(l, t) = f\rho(l, t)u(l, t)$$

частично отбирается пользователем с интенсивностью $Q_l(t)$. Разница между двумя этими величинами приводит к изменению плотности газа в воздушном колпаке:

$$f\rho(l, t)u(l, t) = \Delta M_l(t) + Q_l(t),$$

где $\Delta M_l(t)$ – скорость приращения массы жидкости в моменте времени t .

Здесь плотность газа можно выразить через плотность жидкости в сечении с воздушным колпаком, тогда:

$$\rho_g(t) = \frac{p(l, t)}{zR_g T} = \frac{p_* - k + c^2 \rho(l, t)}{zR_g T}.$$

В связи с этим баланс массы в сечении $x = l$ приобретает окончательный вид второго граничного условия:

$$f\rho(l, t)u(l, t) = Q_l(t) + \frac{m_g}{\frac{p_* - k}{c^2} + \rho(l, t)} \frac{\partial \rho(l, t)}{\partial t}.$$

3 Метод решения

Для численного решения задачи использовали метод, который ранее использован при решении задач для магистральных газопроводов. Уравнения и условия безразмерны и преобразованы к нелинейным уравнениям переноса односторонних возмущений. В качестве масштабных величин принимали: длину участка l , скорости распространения малых возмущений давления c , масштаб времени l/c , плотности ρ_* . Скорость звука в жидкости:

$$c = \sqrt{\frac{\rho_* - p_0 + k}{\rho_*}}.$$

Введением вспомогательной функции

$$\varphi = \ln(\rho/\rho_*),$$

где ρ_* – характерная плотность жидкости, уравнения представлены в безразмерной форме:

Начальные условия представлялись как:

$$\bar{u}(\bar{x}, 0) = u^0(\bar{x})/c, \quad \bar{p}(\bar{x}, 0) = p^0(\bar{x})/\rho_*.$$

Аналоги бегущих волн вводили через $f_1 = \bar{u} + \varphi$, и $f_2 = \bar{u} - \varphi$, применение которых приводит к уравнениям:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial \bar{t}} + (1 + \bar{u}) \frac{\partial f_1}{\partial \bar{x}} &= -\frac{\lambda l}{2D} |\bar{u}| \bar{u} - \frac{l_0 g}{c^2} \sin \alpha, \\ \frac{\partial f_2}{\partial \bar{t}} + (\bar{u} - 1) \frac{\partial f_2}{\partial \bar{x}} &= -\frac{\lambda l}{2D} |\bar{u}| \bar{u} - \frac{l_0 g}{c^2} \sin \alpha. \end{aligned}$$

Согласно выражениям f_1 и f_2 были преобразованы начальные и граничные условия.

Шаг по безразмерному расстоянию принимали как $h = 1/N_x$ ($N_x = 1000$), а по безразмерному времени – $\tau = 1/5000$.

Уравнения аппроксимированы неявной по времени схемой первого порядка точности, а конвективные члены их по схеме против потока. Коэффициент и правая часть первого уравнения принимали из результатов предыдущего временного шага, что позволило составить рекуррентную зависимость:

$$f_{1i}^{n+1} = \frac{f_{1i}^n + \sigma (1 + \bar{u}_i^n) f_{1,i-1}^{n+1} + \tau \Phi(\bar{u}_i^n, \alpha_i)}{1 + \sigma (1 + \bar{u}_i^n)},$$

где $\sigma = \tau/h$, $\Phi(\bar{u}_i^n, \alpha_i) = -\frac{\lambda l}{2D} \bar{u}_i^n |\bar{u}_i^n| - \frac{l_0 g}{c^2} \sin \alpha_i$ при $i = 1, 2, \dots, N_x$.

Граничное условие при $i = N_x$ реализовано методом касательных. С учетом известного значения решение трансцендентного уравнения приведено к поиску нуля функции:

$$E(\bar{u}) = e^{f_{1N_x}^{n+1}} Q_r - e^{\bar{u}} (\bar{u} - s).$$

Качественный анализ функции позволили выяснить, что нулевое приближение должно соответствовать $\bar{u}^0 = -1$. Рекуррентная формула для последовательного приближения имела вид:

$$\bar{u}^{k+1} = \bar{u}^k + \frac{e^{\bar{u}^k} - f_{1N_x}^{n+1} Q_r - \bar{u}^k + s}{1 - \bar{u}^k + s}.$$

При $i = N_x - 1, N_x - 2, \dots, 0$ значения второй вспомогательной функции определены по формуле

$$f_{2i}^{n+1} = \frac{f_{2i}^n + \sigma (1 + \bar{u}_i^n) f_{2,i+1}^{n+1} + \tau \Phi(\bar{u}_i^n, \alpha_i)}{1 + \sigma (1 - \bar{u}_i^n)}.$$

Ниже представлены примеры приближения результатов при применении предложенного алгоритма.

4 Результаты и обсуждение

На основе созданной модели в Simscape (MATLAB) были проведены симуляционные эксперименты по динамическому режиму работы гидравлической системы. С целью оценки точности полученных результатов, эталонные данные, полученные в среде Simulink, были сопоставлены с результатами программного комплекса Pascal. Графики показывают динамику относительных колебаний давления во времени при резком изменении режима работы насоса.

Период возврата волн в обеих моделях полностью совпал. Это подтверждает правильность выбора параметров системы и скорости распространения волны. Разница в максимальных амплитудах давления составляет 5-8%. Это полностью отвечает допустимым инженерным нормам в 10-15% и объясняется тем, что в MATLAB трение потока рассчитывается через более сложные эмпирические закономерности. Поглощение энергии удара и стабилизация процесса произошли в одинаковые промежутки времени при обоих методах.

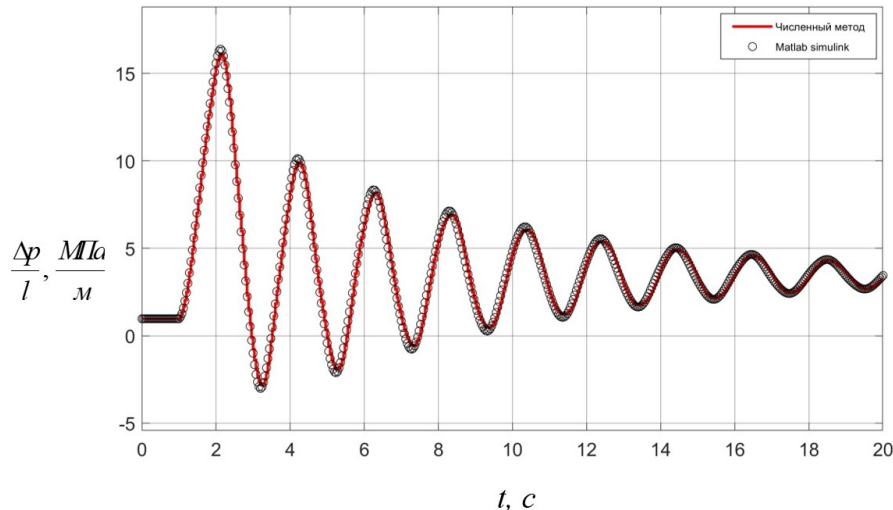


Рис. 1 График сравнения результатов эталонной модели (Simulink) и предлагаемой численной модели (Pascal ABC). $l = 500$ м, $D = 0.2$ м, $V_{\text{BK}}^0 = 0.2$ м³, $M = 76.2056$ кг/с, $p_0 = 7.5$ МПа, $p_d = 7$ МПа

Однако с увеличением объема демпфера (от $V_{\text{BK}}^0 = 0.5$ до $V_{\text{BK}}^0 = 4.0$ м³) четко проявилось снижение максимальной амплитуды волны и сглаживание колебаний. В частности, демпферы большого объема, поглощая в себя энергию резкого удара потока, превращают опасные колебания в безопасную, низкочастотную пульсацию. В то же время динамика процесса показала, что чрезмерное увеличение объема демпфера (например, при $V_{\text{BK}}^0 = 4.0$ м³) повысило инерцию системы и значительно увеличило

время выхода гидравлической цепи на новый стабильный рабочий режим с массовым расходом 152 кг/с.

Полученные результаты научно обосновали, что для обеспечения технической безопасности системы и при этом сохранения ее скоростных рабочих характеристик выбор демпфера путем оптимального расчета его объема является важнейшей задачей в инженерной практике.

На рис. 2 представлена динамика затухания колебаний давления в системе во время гидравлического удара под влиянием демпферов различного объема. Данные графика наглядно отражают распределение динамических напряжений, приходящихся на стенки трубы.

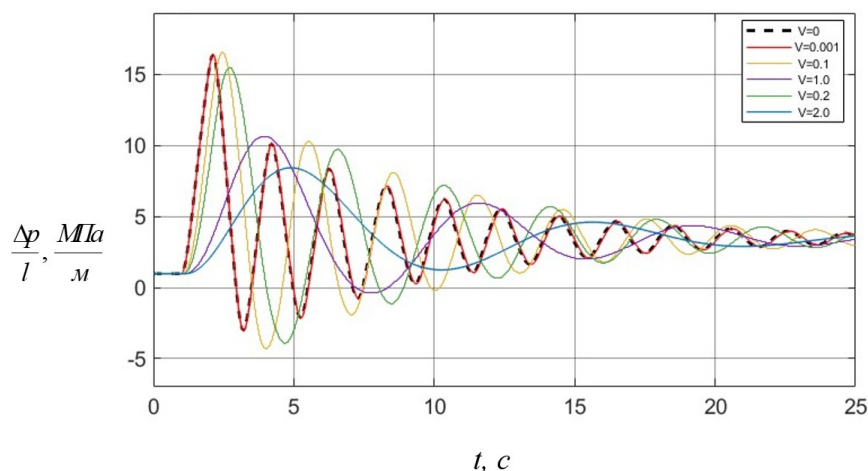


Рис. 2 Влияние объема демпфера на колебания давления. $l = 500$ м, $D = 0.2$ м, $M = 76.2056$ кг/с, $p_0 = 7.5$ МПа, $p_d = 7$ МПа

В ситуациях, когда в системе не установлен демпфер или его объем очень мал (от $V_{\text{БК}}^0 = 0.001$ до $V_{\text{БК}}^0 = 0.1$ м³), амплитуда относительных колебаний перепада давления возрастала вплоть до 1.6 МПа/м. Кроме того, в фазе возврата волны наблюдалась амплитуда относительных колебаний давления до -0.4 МПа/м. Это свидетельствует не только о риске разрыва в трубопроводной системе, но и о возможности возникновения разрыва сплошности жидкости и появления кавитации. В данном режиме частота колебаний очень высока, что становится причиной быстрого выхода материала системы из строя.

С увеличением объема демпфера от $V_{\text{БК}}^0 = 0.5$ до $V_{\text{БК}}^0 = 2.0$ м³ максимальные скачки перепада давления резко снизились. В частности, в крупногабаритных демпферах острые пики волны сгладились, амплитуда колебаний сократилась более чем вдвое, а риск перехода давления в отрицательную зону был полностью устранен.

Динамика графика показала, что с увеличением объема демпфера до $V_{\text{БК}}^0 = 2.0$ м³ собственная частота колебаний системы снижается. Однако, как уже отметили, чрезмерное увеличение поглощающего объема повышает инерционные свойства системы, что удлиняет время полного затухания колебаний и выхода системы на собственное постоянное давление.

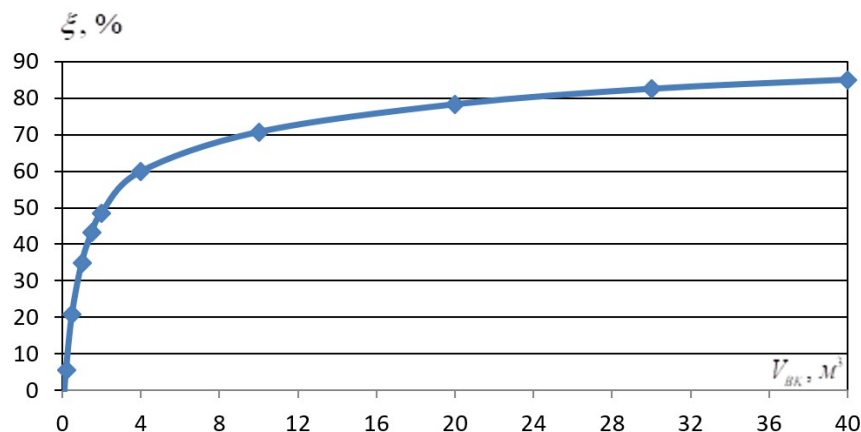


Рис. 3 Оценка и оптимизация эффективности демпфера по объему

По результатам проведенных компьютерных симуляций представлен график зависимости эффективности демпфера по гашению гидродинамического удара от его объема (рис. 3). Известно, что наибольшая амплитуда колебаний наблюдается в первой фазе распространения и отражения возмущений. Поэтому под эффективностью демпфера подразумевали отношение амплитуд первых фаз волны массового расхода (импульса) жидкости, образованных в трубопроводе с демпфером и без демпфера. Анализ данного графика показывает, что показатель эффективности изменялся не по линейной, а по асимптотической закономерности.

Когда демпфер установлен, но давление газа внутри него невысокое, газ в демпфере оказывает слишком мягкое сопротивление. В результате энергия удара чрезмерно быстро сжимает газ, и в системе сохранился сильный вторичный скачок до 1.3 МПа.

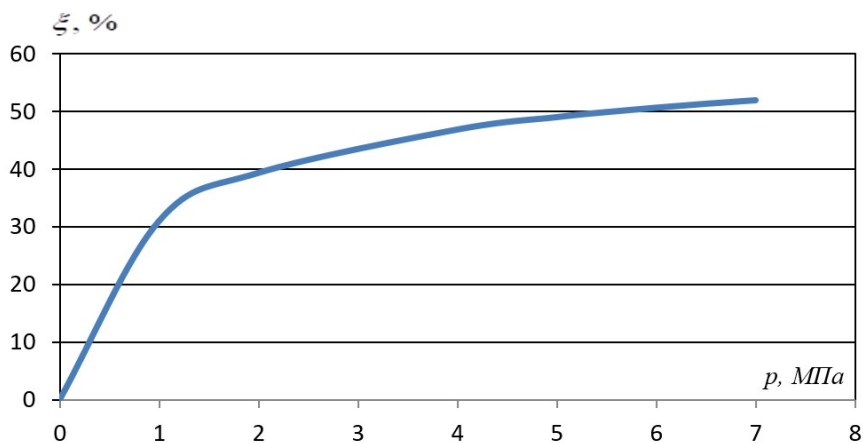


Рис. 4 Влияние начального давления газа на эффективность демпфера

При увеличении начального давления газа в демпфере до оптимального уровня резкий скачок давления был полностью устранен. Самое главное, при правильной калибровке давления газа колебания потеряли свой опасный волнообразный характер, и перешли в режим монотонного затухания. В этом состоянии система достигла своего постоянного стабильного рабочего давления без излишних ударов, по плавной и безопасной траектории.

На рис. 4 представлен график эффективности гашения возмущений в зависимости от начального давления газа в демпфере. График показывает, что полученные результаты носят нелинейный характер с выходом на асимптотический режим. Анализируя его, можно выделить следующие закономерности.

Фаза резкого роста эффективности: при начальных значениях аргумента от 0 до 1.5–2 МПа наблюдается крутой подъем кривой. При возрастании начального давления в демпфере от 0.1 МПа до 2 МПа эффективность его возросла с нулевой отметки до 40%. Это означает, что даже на низких начальных давлениях демпфер способен обеспечить безопасность системы на 40% по сравнению с трубой без демпфера.

Анализ черной пунктирной линии показывает, что в результате перекрытия потока максимальное значение давления в системе резко возросло почти до $16 \cdot 10^5$ Па/м. Кроме того, можно видеть, что в фазе возврата волны давление резко упало в отрицательную область примерно до показателя $-5 \cdot 10^5$ Па/м. Это крайне опасная ситуация, означающая начало образования кавитации и возможного разрушения стенки трубопровода.

Демпфер с объемом $V_{\text{БК}}^0 = 1.0 \text{ м}^3$, который на 100% эффективно отработал в трубе с диаметром $D = 0.1 \text{ м}$, при диаметре $D = 0.3 \text{ м}$ перестал выполнять свою защитную функцию. По красной сплошной линии видно, что демпфер смог снизить первый максимальный пик давления лишь до $12.5 \cdot 10^5$ Па. Опасный аспект заключается в том, что в данном случае в обратной фазе получили отрицательные значения давления. Это означает, что демпфер с объемом $V_{\text{БК}}^0 = 1.0 \text{ м}^3$ не смог поглотить огромную энергию инерции в большой трубе и не устранил риск появления кавитационных очагов разрушения в системе.

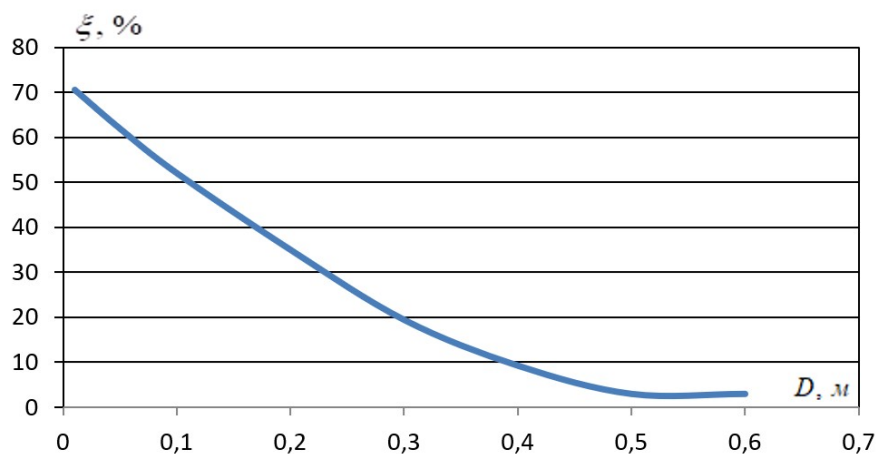


Рис. 5 Влияние изменения диаметра трубы на эффективность демпфера

На рис. 5, как логическое завершение предыдущих многофакторных компьютерных симуляций и экспериментальных исследований, представлена зависимость эффективности поглощения гидравлического удара $\xi, \%$ демпфером объемом $V_{\text{БК}}^0 = 1.0 \text{ м}^3$ от диаметра поперечного сечения трубы D .

На оси абсцисс графика отложены диаметры труб, а на оси ординат – коэффициент эффективности снижения давления.

5 Заключение

Традиционные методы расчета систем защиты от гидравлического удара часто опираются на упрощенные статические или линеаризованные зависимости, которые не способны в полной мере учесть сложную нелинейную динамику взаимодействия сжимаемой жидкости и газа. В данном исследовании предложен усовершенствованный численный алгоритм, основанный на методе бегущих волн, который строго учитывает постоянство массы воздуха в воздушном колпаке и позволяет с высокой точностью моделировать нестационарные гидродинамические процессы в магистральных трубопроводах.

Результаты проведенных симуляций, верифицированные с помощью эталонной модели MATLAB Simulink, убедительно доказывают, что оптимизация параметров газогидравлического демпфера является критическим фактором технической безопасности. Установлено, что отсутствие демпфера или его недостаточный объем (до 0.1 м^3) приводят к экстремальным перепадам, где в фазе разрежения давление падает до -0.4 МПа/м . Это создает высокий риск разрыва сплошности потока и возникновения разрушительной кавитации. В то же время, показано, что экстенсивное увеличение объема демпфера (например, до 4.0 м^3) вызывает эффект «передемпфирования», неоправданно повышая инерционность системы и многократно затягивая время ее выхода на стабильный рабочий режим (152 кг/с).

Ключевым научным выводом исследования является доказательство строгой масштабируемой зависимости эффективности демпфера от диаметра трубопровода. Выявлено, что объем газа (1.0 м^3), обеспечивающий 100% поглощение удара для трубы диаметром 0.1 м , абсолютно неэффективен при увеличении диаметра до 0.3 м , допускающая падение давления до критических $-5 \cdot 10^5 \text{ МПа/м}$. Это физически обосновано тем, что кинетическая энергия потока возрастает пропорционально квадрату диаметра, что требует строго индивидуального проектирования защитных устройств.

Таким образом, разработанная математическая модель предоставляет инженерам надежный и вычислительно эффективный инструмент для прецизионного расчета систем противоударной защиты. Предложенный подход закладывает фундаментальную базу для безопасного проектирования насосных станций и магистральных водоводов, а в перспективе может быть расширен для исследования более сложных геометрических конфигураций трубопроводных сетей, многофазных сред и переходных температурных режимов.

Литература

- [1] *Chaudhry M.H.* Applied Hydraulic Transients // Springer: New York, NY, USA. – 2014. – 3rd ed.
- [2] *Wylie E.B., Streeter V.L., Suo L.* Fluid Transients in Systems // Prentice Hall: Englewood Cliffs, NJ, USA. – 1993.
- [3] *Ghidaoui M.S., Zhao M., McInnis D.A., Axworthy D.H.* A review of water hammer theory and practice // Applied Mechanics Reviews. – 2005. – Vol. 58. – № 1. – P. 49–76.
- [4] *Bergant A., Simpson A.R., Tijsseling A.S.* Water hammer with column separation: A historical review // Journal of Fluids and Structures. – 2006. – Vol. 22. – № 2. – P. 135–171.
- [5] *Adamkowski A., Lewandowski M.* Experimental examination of unsteady friction models for transient pipe flow simulation // Journal of Fluids Engineering. – 2006. – Vol. 128. – № 6. – P. 1351–1363.
- [6] *Urbanowicz K.* Analytical expression for transient fluid friction in water hammer flows // Journal of Fluids Engineering. – 2017. – Vol. 139. – № 3. – P. 031102.

- [7] *Tijsseling A.S.* Fluid-structure interaction in liquid-filled pipe systems: a review // Journal of Fluids and Structures. – 1996. – Vol. 10. – № 2. – P. 109–146.
- [8] *Stephenson D.* Sizing of air vessels for water hammer protection // Journal of Hydraulic Engineering. – 2002. – Vol. 128. – № 7. – P. 713–716.
- [9] *Zhu M., Zhou L., Wang P.* Optimal design of air vessels in pumping stations using a genetic algorithm // Water. – 2018. – Vol. 10. – № 9. – P. 1182.
- [10] *Lee N.H., Su S.C.* Simulation of water hammer in a pipeline system with an air chamber // Journal of the Chinese Institute of Engineers. – 2008. – Vol. 31. – № 5. – P. 841–848.
- [11] *Bozorg Haddad O., Parsa H.A., Mariño M.A.* Optimum design of air vessels for water hammer mitigation using genetic algorithms // Journal of Water Resources Planning and Management. – 2012. – Vol. 138. – № 6. – P. 611–617.
- [12] *Martins S.C., Martins J.C.* Water hammer phenomena: A CFD approach // International Journal of Pressure Vessels and Piping. – 2015. – Vol. 132. – P. 32–41.
- [13] *Li Z., Wang H., Chen Y.* 3D CFD simulation of the transient flow in an air vessel during pump trip // Engineering Applications of Computational Fluid Mechanics. – 2021. – Vol. 15. – № 1. – P. 102–115.
- [14] *Soares A.K., Covas D.I.C., Reis L.F.R.* Analysis of the polytropic index in air vessels during hydraulic transients // Journal of Hydraulic Research. – 2014. – Vol. 52. – № 1. – P. 140–144.
- [15] *Шестаков Р.А., Резанов К.С., Матвеева Ю.С., Ванчургов И.М.* Усовершенствованная математическая модель участка магистрального трубопровода с лупингом // Известия Томского политехнического университета. Инжиниринг георесурсов. – 2022. – Т. 333. – № 2. – С. 123–131. doi: <http://dx.doi.org/10.18799/24131830/2022/2/3325>
- [16] *Shestakov R.A.* Research of distribution of oil flow in the pipeline with looping // J. Phys. Conf. Ser. – 2020. – Vol. 1679. – P. 052035. doi: <http://dx.doi.org/10.1088/1742-6596/1679/5/052035>
- [17] *Obaseki M., Elijah P.T.* Dynamic modeling and prediction of wax deposition thickness in crude oil pipelines // J. King Saud Univ. Eng. Sci. – 2021. – Vol. 33. – P. 437–445.
- [18] *Zhang B., Wan W., Shi M.* Experimental and Numerical Simulation of Water Hammer in Gravitational Pipe Flow with Continuous Air Entrainment // Water. – 2018. – Vol. 10. – P. 928. doi: <http://dx.doi.org/10.3390/w10070928>
- [19] *Sun Z., Liu D., Yuan H., Sun Z., Pan W., Zhang Z., Ma B., Jiang Z.* The water hammer in the long-distance steam supply pipeline: a computational fluid dynamics simulation // Cogent Eng. – 2022. – Vol. 9. – P. 2127472. doi: <http://dx.doi.org/10.1080/23311916.2022.2127472>

UDC 532.546

MATHEMATICAL MODEL AND ANALYSIS OF WATER HAMMER DAMPING USING AN AIR VESSEL

^{1,2}*Bakhtiyorov B.B., ¹Khujjaev I.K., ^{1,2}Turapova N.V.*

*bozorov.bobur1992@gmail.com

¹Institute of mechanics and seismic stability of structures named after M.T. Urazbaev, 33, str. Durman yuli, Tashkent, 100125, Uzbekistan;

²Tashkent university of information technologies named after Muhammad al-Khwarizmi, 100200, 108, Amir Temur str., Tashkent, Uzbekistan.

This paper presents an improved quasi-one-dimensional model of unsteady compressible fluid flow in main pipelines for studying water hammer damping. Its novelty lies in a rigorous nonlinear boundary condition based on the conservation of mass of the trapped gas in the air vessel (damper). The governing equations are integrated by the traveling-wave method with an implicit finite-difference scheme. Verification against a reference MATLAB Simulink model confirmed high accuracy (5–8% error). A multivariate analysis details how damper volume, initial gas pressure, and pipeline diameter affect the system's inertia. Critical thresholds for destructive cavitation and “overdamping” are established, demonstrating the need for individual calibration of protective devices for reliable pipeline operation.

Keywords: water hammer, gas-hydraulic damper, air vessel, mathematical modeling, traveling wave method, unsteady flow, cavitation, main pipeline.

Citation: Bakhtiyorov B.B., Khujaev I.K., Turapova N.V. 2026. Mathematical model and analysis of water hammer damping using an air vessel. *Problems of Computational and Applied Mathematics*. 3(73): 25-36.

DOI: https://doi.org/10.71310/pcam.3_73.2026.02

HISOBLASH VA AMALIY МАТЕМАТИКА MUAMMOLARI

ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ
И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
PROBLEMS OF COMPUTATIONAL
AND APPLIED MATHEMATICS

ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

№ 3(73) 2026

Журнал основан в 2015 году.

Издается 6 раз в год.

Учредитель:

Научно-исследовательский институт развития цифровых технологий и
искусственного интеллекта.

Главный редактор:

Равшанов Н.

Заместители главного редактора:

Арипов М.М., Шадиметов Х.М., Ахмедов Д.Д.

Ответственный секретарь:

Убайдуллаев М.Ш.

Редакционный совет:

Азамов А.А., Алоев Р.Д., Амиргалиев Е.Н. (Казахстан), Арушанов М.Л.,
Бурнашев В.Ф., Джумаёзов У.З., Загребина С.А. (Россия), Задорин А.И. (Россия),
Игнатъев Н.А., Ильин В.П. (Россия), Иманкулов Т.С. (Казахстан),
Исмагилов И.И. (Россия), Кабанихин С.И. (Россия), Курбонов Н.М., Маматов Н.С.,
Мирзаев Н.М., Мурадов Ф.А., Назирова Э.Ш., Нормуродов Ч.Б., Нуралиев Ф.М.,
Опанасенко В.Н. (Украина), Расулмухамедов М.М., Садуллаева Ш.А.,
Старовойтов В.В. (Беларусь), Хаётов А.Р., Халджигитов А., Хамдамов Р.Х.,
Хужаев И.К., Хужаеров Б.Х., Эшмаматова Д.Б., Дустмуродова Ш.Ж.,
Чье Ен Ун (Россия), Шабозов М.Ш. (Таджикистан), Dimov I. (Болгария),
Li Y. (США), Mascagni M. (США), Min A. (Германия), Singh M. (Южная Корея).

Журнал зарегистрирован в Агентстве информации и массовых коммуникаций при
Администрации Президента Республики Узбекистан.

Свидетельство №0856 от 5 августа 2015 года.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

При перепечатке материалов ссылка на журнал обязательна.

За точность фактов и достоверность информации ответственность несут авторы.

Адрес редакции:

100125, г. Ташкент, м-в. Буз-2, 17А.

Тел.: +(998) 71 263-41-98.

Э-почта: journals@airi.uz.

Веб-сайт: <https://journals.airi.uz>.

Дизайн и вёрстка:

Шарипов Х.Д.

Отпечатано в типографии НИИ РЦТИИ.

Подписано в печать 25.06.2026 г.

Формат 60x84 1/8. Заказ №3. Тираж 100 экз.

Содержание

Яхшибаев Д.С., Боборахимов Б.И.

Математическое моделирование поступления многофазного потока смеси в стратифицированное водохранилище и разрушения слоистой структуры . . . 7

Бахтиёрв Б.Б., Хужаев И.К., Туропова Н.В.

Математическая модель и анализ гашения гидравлического удара с помощью воздушного колпака 25

Бегимов О.М., Хужаев И.К., Мамадалиев Х.А.

Исследование скорости распространения малых возмущений давления в газожидкостной среде с учетом массовой концентрации газа и деформации стенки трубопровода 37

Эргашев Д.Й., Хужаев Ж.И., Ахмаджонов С.С.

Математическая модель процесса теплоотдачи от жидкого теплоносителя, текущего по оребренному прямоугольными ребрами цилиндрическому трубопроводу 50

Музаффаров С.А., Маратов Х.У., Хамдамов А.А.

Вычислительное моделирование вертикально-осевой ветроэнергетической установки с пассивным изменением шага лопастей для условий слабых ветров 61

Хожжикулов Ш.Ш., Бегимов О.М., Обиджонов А.Ж.

Исследование динамики переходных процессов, связанных с изменением расхода в конце участка трубопровода, с учетом и без учета силы сопротивления 75

Равшанов Ш.А., Боборахимова М.И., Чулмиев Ш.И.

Моделирование тепло- и массообмена в рельефном трубопроводе с постоянными и изменяющимися диаметрами 90

Равшанов Н., Боборахимов Б.И., Бердиёров Ш.Ш.

Характеристики загрязнения мембраны в процессе фильтрации и транспортировки в цилиндрическом пористом фильтре 104

Халджигитов А.А., Бобоназаров А.А., Рахмонова Р.А., Тиловов О.О.

Численное моделирование задач теории упругости в напряжениях методом конечных элементов 125

Тиловов М.А.

Численное исследование динамики производных различного порядка уравнения Фолкнера–Скэна в зависимости от градиента давления 139

Жумаев З.З.

Приближённое решение задач с начальными условиями для дифференциальных уравнений первого порядка с использованием комбинированного метода Рунге–Кутты и метода с кусочно-постоянным аргументом 153

Contents

<i>Yakhshibaev D.S., Boborakhimov B.I.</i> Mathematical modeling of multiphase mixture inflow into a stratified reservoir and the breakdown of the layered structure	7
<i>Bakhtiyorov B.B., Khujaev I.K., Turapova N.V.</i> Mathematical model and analysis of water hammer damping using an air vessel .	25
<i>Begimov O.M., Khujaev I.K., Mamadaliev Kh.A.</i> Investigation of the propagation velocity of small pressure disturbances in a gas–liquid medium with account for gas mass concentration and pipeline wall deformation	37
<i>Ergashev D.Y., Khujaev J.I., Akhmadjonov S.S.</i> A mathematical model of heat transfer from a liquid coolant flowing through a cylindrical pipeline finned with rectangular fins	50
<i>Muzaffarov S.A., Maratov Kh.U., Hamdamov M.M.</i> Computational modeling of a passive-pitch low-wind vertical-axis wind turbine .	61
<i>Khozhikulov Sh.Sh., Begimov O.M., Obidjonov A.J.</i> Investigation into the dynamics of transient processes associated with flow rate changes at the end of a pipeline section, both with and without resistance force .	75
<i>Ravshanov Sh.A., Boborakhimova M.I., Chulliev Sh.I.</i> Modelling heat and mass transfer in a relief pipeline with constant and varying diameters	90
<i>Ravshanov N., Boborakhimov B.I., Berdiyev Sh.Sh.</i> Membrane fouling characteristics during filtration and transport processes in a cylindrical porous filter	104
<i>Khaldjigitov A.A., Bobonazarov A.A., Rakhmonova R.A., Tilovov O.O.</i> Numerical modeling of elasticity theory problems in terms of stresses using the finite element method	125
<i>Tilovov M.A.</i> Numerical study of the dynamics of derivatives of various orders of the Falkner–Skan equation depending on the pressure gradient	139
<i>Jumaev Z.Z.</i> Approximate solution of initial value problems for first-order differential equations using a combined Runge-Kutta and piecewise constant argument method .	153