

УДК 510.52:519.642.2+519.687.1

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ СЛОЖНОСТИ ГИБРИДНЫХ АЛГОРИТМОВ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ МОДЕЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ОБЪЕМНОЙ АКТИВНОСТИ РАДОНА С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ПЕРЕМЕННОГО ПОРЯДКА

Твёрдый Д.А.

dimsolid95@gmail.com

Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН,
684034, Россия, Камчатский край, с. Паратунка, ул. Мирная, д. 7;
Научно-исследовательский институт развития цифровых технологий и искусственного
интеллекта,
100125, Узбекистан, г. Ташкент, м-в Буз-2, д. 17А.

В статье рассмотрены гибридные CPU-GPU параллельные реализации алгоритмов численного решения для эредитарного модельного уравнения объемной активности радона. Тестовый пример представляет собой прямую задачу Коши для нелинейного дробно-дифференциального уравнения с оператором Герасимова-Капуто переменного порядка и переменными коэффициентами. Важность разработки производительных алгоритмов решения прямых задач модели объемной активности радона обусловлена их использованием при решении соответствующих обратных задач на основе данных мониторинга радона с целью решения практических задач по идентификации некоторых параметров геологической среды. На основе данных о среднем времени выполнения тестовой задачи даны асимптотические оценки сложности последовательных и предложенных параллельных алгоритмов. Показано, использование гибридных параллельных CPU-GPU алгоритмов дают прирост производительности до 17 раз и могут дать существенное преимущество при решении задач с большим объёмом экспериментальных данных, за счёт использования узла GPU. Также показано, что асимптотически точные оценки сложности: по памяти для всех гибридных алгоритмов порядка $\Theta(n^2)$; для гибридной реализации нелокальной явной схемы порядка $\Theta(n)$; для гибридной реализации нелокальной неявной схемы порядка $\Theta(n^2)$.

Ключевые слова: дробные производные, нелокальность по времени, переменная нелокальность, конечно-разностные схемы, параллельные вычисления, GPU, асимптотические оценки.

Цитирование: *Твёрдый Д.А.* Асимптотические оценки сложности гибридных алгоритмов численного решения модельного уравнения объемной активности радона с дробной производной переменного порядка // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2026. – № 2(72). – С. 155-167.

DOI: https://doi.org/10.71310/psam.2_72.2026.11

1 Введение

В современной науке большое внимание уделено математическому моделированию процессов в насыщенных средах в задачах экономики, биологии, геофизики и сейсмологии и др. Мониторинг изменения концентрации радиоактивного газа радона, как известно из работ [1, 2] и многих других, может считаться хорошим индикатором

процессов, в том числе аномальных, в геологической среде (геосреде), предшествующих землетрясениям. Особенно это важно для Камчатки, расположенной в одном из наиболее сейсмоопасных регионов Земли. Однако механизмы возникновения таких аномалий всё ещё малоизучены, а прямые наблюдения невозможны. Это обуславливает важность таких задач математического моделирования в области геофизики.

Опуская подробности, связанные с мониторингом, исследованиями радона как предвестника и моделированием различных процессов, прямо или косвенно с ним связанных, с которыми можно ознакомиться в [3–5] и др. исследованиях по теме, отметим только два момента, необходимые для понимания объекта исследований автора. Во-первых, сбор экспериментальных данных по радону осуществляется посредством прибора с газоразрядным счетчиком β -распада в накопительной камере, поэтому далее, говоря о радоне, будет иметься в виду ОАР (объемная активность радона) в накопительной камере. Во-вторых, процесс массопереноса радона по своей природе является нелокальным и обладает свойствами, для описания которых классической диффузии ОДУ недостаточно. Поэтому автором с коллегами в работе [3] предлагаются новые математические (эредитарные) модели ОАР, но с учётом нелокальности по времени, что приводит к эффекту наследственности (памяти, эредитарности) [6] в динамике переноса радона [7].

Математический аппарат эредитарных моделей ОАР опирается на дробное исчисление, теория которого изучена достаточно хорошо [8–10]. В качестве дробной производной рассматриваются операторы типа Герасимова-Капуто [11, 12] как постоянного $0 < \alpha < 1$ порядка, так и переменного $0 < \alpha(t) < 1$ порядка [13]. Предложенные в [3] новые модели ОАР прошли апробацию на экспериментальных данных ОАР с пунктов мониторинга подпочвенных газов на острове Сахалин и на Петропавловск-Камчатском геодинамическом полигоне. Показано [3], что эредитарная α -модель ОАР может хорошо описывать не только процессы накопления при определенном выборе параметров, но и спада. Также показано, что эредитарная $\alpha(t)$ -модель ОАР может описывать сложное аномальное поведение ОАР со временем за счет большой гибкости в выборе функций, входящих в модельные уравнения.

Но в упомянутых работах параметры моделей ОАР подбирались вручную путём сопоставления модельных кривых с обработанными экспериментальными данными, визуальным оценкам при наложении и оценке степени подобия по R — коэффициенту корреляции Пирсона и R^2 — коэффициенту детерминации [14]. Это обуславливает важность решения обратных задач [15] для имеющихся математических моделей динамики переноса радона на основе данных по ОАР, проблему, часто возникающую при работе с геологическими данными. Поэтому авторами в работах [16, 17] формулируется и решается обратная задача с целью идентификации оптимальных значений параметров для эредитарной α -модели ОАР или вида $\alpha(t)$ функции [18] в эредитарной $\alpha(t)$ -модели ОАР. Решаются данные обратные задачи алгоритмом на основе итерационного метода Левенберга-Марквардта, где возникает необходимость циклического пересчета решения прямой задачи при разных значениях параметров эредитарной модели ОАР и сопоставлении результатов с экспериментальными данными. При этом прямая задача может иметь достаточно высокую вычислительную сложность как при увеличении N размера входных данных, например, вслед за изменением частоты дискретизации экспериментальных данных, так и при выборе метода решения. В качестве методов решения выступают известные численные методы, нелокальные: EFDS (явная конечно-разностная схема) и IFDS-MNM (неявная конечно-разностная схема, решаемая модифицированным методом Ньютона).

Что касается подобных исследований, то в статьях [19, 20] исследуются вопросы ускорения вычислений при моделировании некоторых диффузионных процессов на основе нелокальной по пространственным переменным дробной производной типа Герасимова-Капуто и её некоторых подвидов. Авторы предлагают для ускорения снижать вычислительную точность ещё на этапе построения аппроксимации дробной производной. Показано, что при использовании таких подходов можно в разы ускорить вычисление. В работе автора [21] представлен вариант параллельной гибридной реализации EFDS на GPU и приведены оценки эффективности, но на персональной супер ЭВМ и с другим тестовым примером. Для повышения производительности вычислений организуется предварительное вычисление значений всех параметров и функций на расчётной сетке, однако EFDS имеет неустранимую последовательную часть в алгоритме, что при увеличении N делает параллельные алгоритмы EFDS неэффективными. Всё это обуславливает важность разработки и анализа эффективных алгоритмов решения прямых задач математического моделирования ОАР с учетом наследственности. Поэтому в данном исследовании рассматриваются оценки вычислительной сложности для параллельных гибридных CPU-GPU реализаций методов (EFDS-hybrid, IFDS-MNM-hybrid), исполняемых одновременно как на CPU (центральный процессор), так и на GPU (графический ускоритель).

2 Тестовый пример

Рассмотрим эрдитарную $\alpha(t)$ – модель ОАР из работы [3] для описания аномального импульса (всплеска) ОАР в виде задачи Коши:

$$\partial_{0,t}^{\alpha(t)} \bar{A}(t) = -a(t)\bar{A}(t)^2 - b(t)\bar{A}(t) + c(t), \quad \bar{A}(t) = \frac{A(t)}{A_{max}}, \quad \bar{A}(t_0) = \frac{A_0}{A_{max}}, \quad (1)$$

где $\bar{A}(t)$ – ОАР в безразмерном виде; $A(t)$ – ОАР; A_{max} – максимальное значение ОАР, наблюдаемое в данных; A_0 – ОАР в начальный момент времени; $a(t)$ – функция, связанная с выходом радона из камеры; $c(t)$ – функция, связанная с поступлением радона в камеру. $\partial_{0,t}^{\alpha(t)} \bar{A}(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha(t))} \int_0^t \frac{\dot{\bar{A}}(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha(t)}}$ – член модели, описывающий задержку в переносе радона, являющийся дробным оператором типа Герасимова-Капуто [11, 12] переменного порядка $0 < \alpha(t) < 1$. Для упрощения в (1) и далее опустим не нужные размерности величин, за исключением $t \in [t_0, \dot{T}]$ – время процесса в [с]; где t_0 и $\dot{T} > 0$ – начальный и конечный моменты времени. Независимо от схемы, численное решение рассматривается в равномерной сеточной области:

$$h = \dot{T}/N, \quad \hat{\Omega} = \{t_i = ih : 0 \leq i < N\}, \quad (2)$$

$$\bar{A}(t) = \bar{A}_i, \quad 0 < \bar{A}_i < 1, \quad a(t) = a_i, \quad c(t) = c_i, \quad \alpha(t) = \alpha_i.$$

Задачу (1) в области (2) будем рассматривать при следующих значениях параметров, как в (3), но при разном числе N , кратном 100. Это сделано для наглядности, упрощения построения графиков и удобства работы с оценками.

$$\dot{T} = 22, \quad \bar{A}_0 = 0, \quad \bar{A}_{max} = 1, \quad \lambda_0 = 0.05,$$

$$\alpha(t) = 0.99 \left(1 - \left(\frac{(T-t)}{T} \cos \left(\frac{3\pi t}{T} \right)^2 \right) \right), \quad b(t) = \lambda_0,$$

$$a(t) = -2\lambda_0 + 12\lambda_0 \left(\cos \left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{\pi}{11} \right)^2 + 2 \cos \left(\frac{\pi t}{T} \right)^2 \right),$$

$$c(t) = 12\lambda_0 \left(\frac{(T-t)}{T} \sin \left(\frac{3\pi t}{T} \right)^2 + \frac{12(T-t)}{10T} \sin \left(\frac{2\pi t}{T} \right)^2 \right). \quad (3)$$

Пример результатов решения прямой задачи математического моделирования по IFDS-MNM, как в работе [3] при $N = 132$, представлены ниже на (рис. 1), а результат по EFDS будет аналогичен.

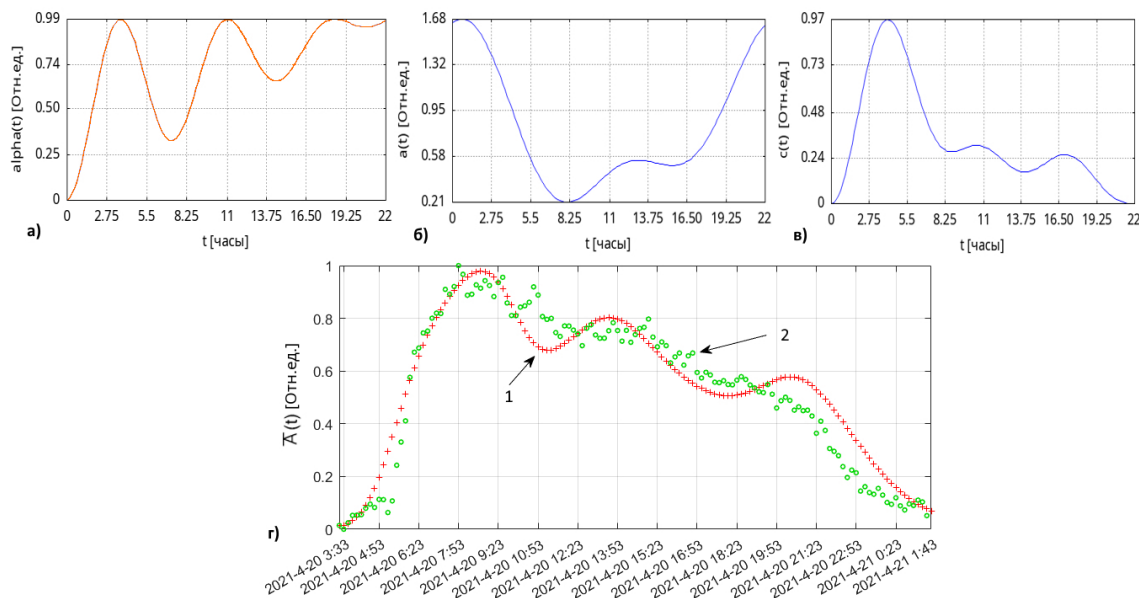


Рис. 1 а,б,в) параметры из (3); г) результаты моделирования (1): 1–модельная кривая, 2–обработанные экспериментальные данные ОАР

3 Гибридные реализации алгоритмов

Все упоминаемые в данной статье алгоритмы и функции интегрированы в программный комплекс FEVO v1.0, разработанный в рамках гранта «Разработка программного комплекса для моделирования и анализа объемной активности радона как предвестника сильных землетрясений Камчатки» для решения прямых и обратных задач моделирования динамики ОАР. В качестве основного языка программирования в программном комплексе FEVO v1.0 выбран язык C по стандарту C99 благодаря его универсальности, широким возможностям для работы с памятью за счёт концепции указателей [22].

Как в случае EFDS, так и IFDS-MNM осуществляется предварительное параллельное вычисление всех возможных значений [23], которые можно вычислить до начала основного цикла, осуществляющего решение модельного уравнения. Но в IFDS-MNM нет неустранимой последовательной части алгоритма, поэтому он прекрасно поддается распараллеливанию, причём как на CPU, так и на GPU. В этом разделе представим параллельные алгоритмы, реализующие численные методы, в виде блок-схем: IFDS-MNM-hybrid (рис. 2) и EFDS-hybrid (рис. 3), написанных на псевдокоде на основе C и его надстройки CUDA C. Некоторые тривиальные операции не приводятся на блок-схемах, так например: `cudaMalloc()` – функции для выделения RAM GPU, большая часть вызовов `cudaFree()` – для освобождения RAM GPU, кроме тех, что важны для эффективной организации вычислений. Подробнее об организации гибридных параллельных вычисления для EFDS можно узнать из работы [21].

При реализации гибридных параллельных алгоритмов важным пунктом является организация работы с RAM GPU таким образом, чтобы свести число операций копирования между RAM CPU и RAM GPU к необходимому минимуму. Например, вычисление на GPU значений функции $\alpha(t)$ на всей сетке из N узлов и сохранение этих данных в RAM GPU до получения итогового результата.

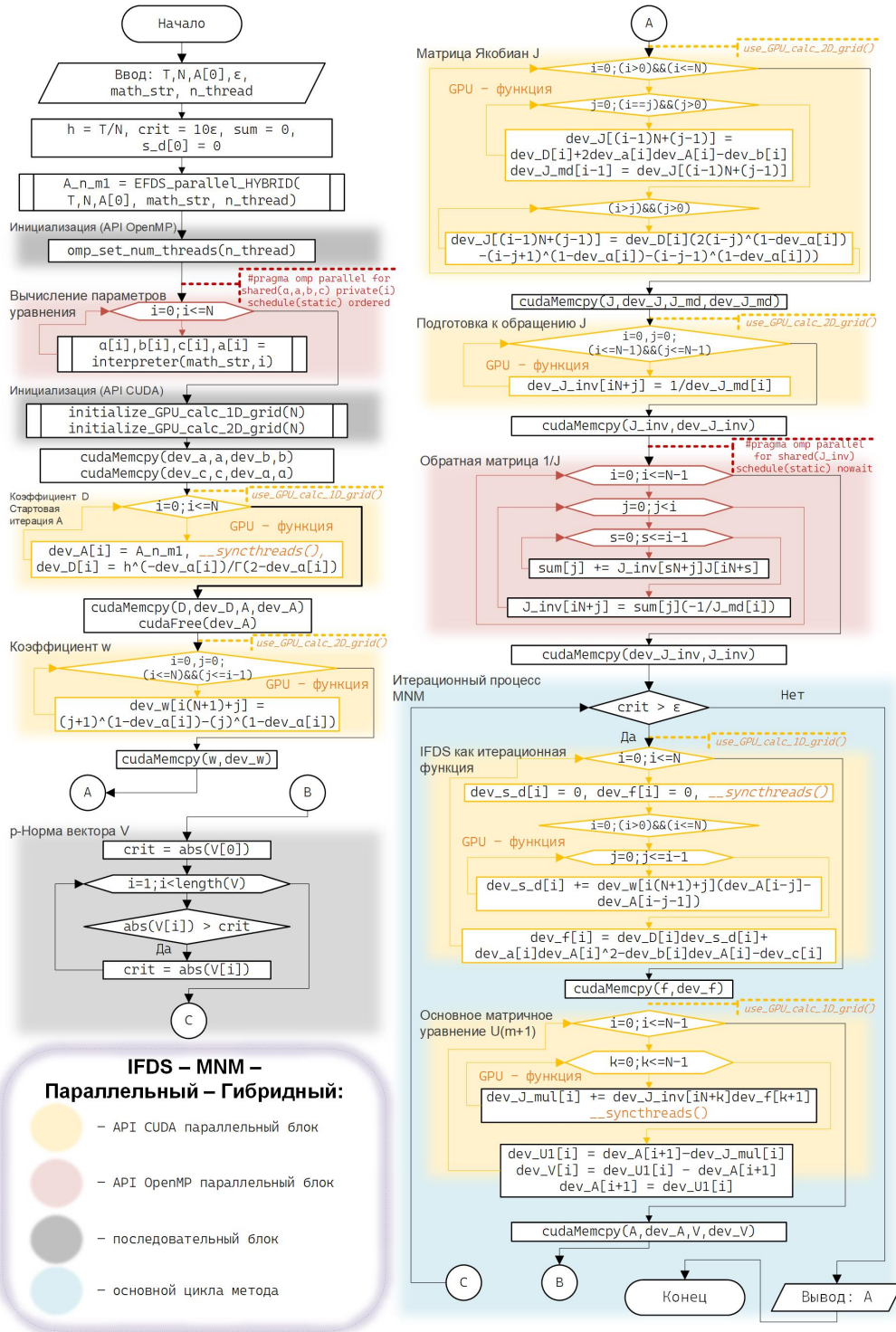


Рис. 2 Блок-схема параллельного гибридного CPU-GPU алгоритма IFDS-MNM-hybrid

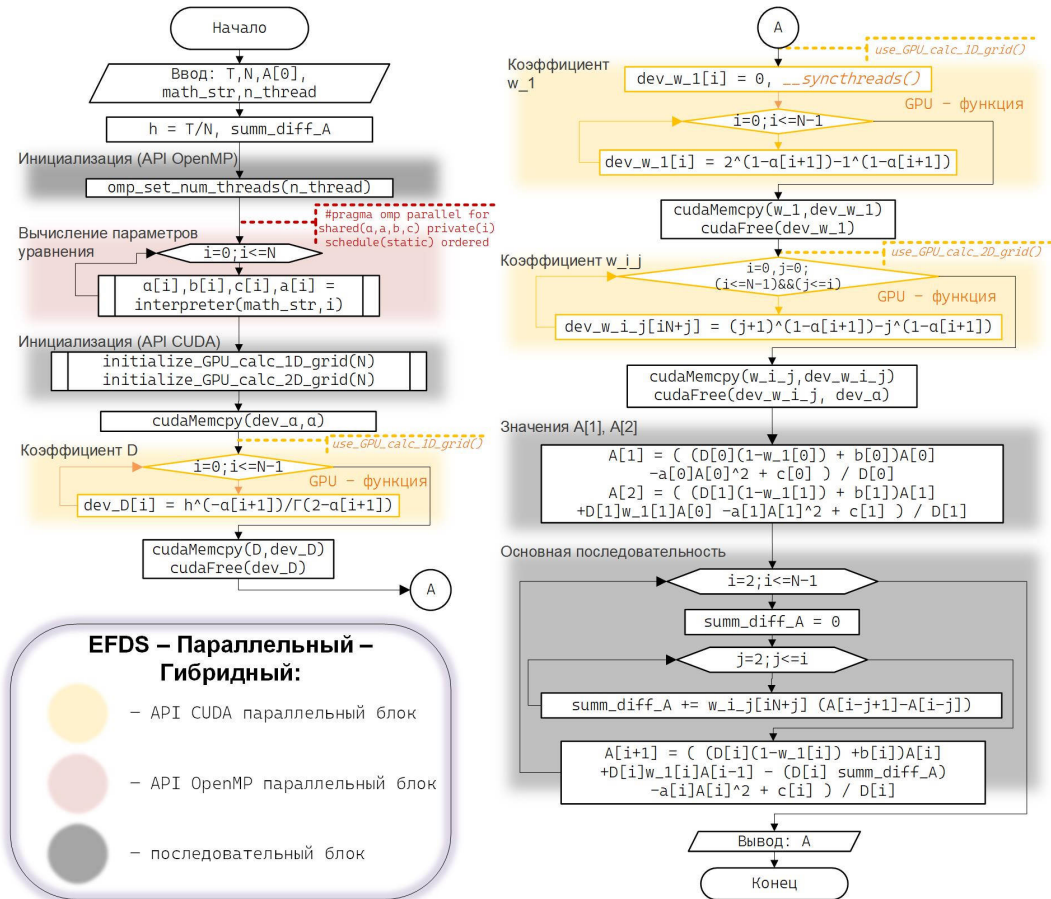


Рис. 3 Блок-схема параллельного гибридного CPU-GPU алгоритма EFDS-hybrid

4 Методика оценки сложности алгоритма на основе среднего времени выполнения

Оценки сложности параллельных гибридных алгоритмов (EFDS-hybrid, IFDS-MNM-hybrid), а также их последовательных (EFDS, IFDS-MNM) версий будем проводить на основе информации о времени выполнения их программных реализаций на языке C, интегрированных в программный комплекс FEVO v1.0. Т. к. при разных численных экспериментах будут получаться немного различные результаты по T – времени выполнения в [сек.], а количество экспериментов конечно, то T можно считать случайной величиной с некоторой функцией распределения, для которой математическое ожидание (среднее значение) дискретной случайной величины:

$$T_{p,g}(N) = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L T_{p,g}^i(N), \quad (4)$$

где N – число узлов (2), т. е. размер входных данных; p – число потоков CPU; g – число мультипроцессоров GPU [25]; N – число узлов (2); i – индекс эксперимента; L – объем выборки. Замеры времени $T_{p,g}^i(N)$ на выполнение кода будем проводить с использованием функции `gettimeofday()` языка C как одним из наиболее точных методов подсчета времени.

Далее, для оценок «сложности по времени» согласно (4) с выборкой в $L = 10$ значений, будем использовать следующие параметры:

- $T_{1,0}(N)$ – время выполнения тестового примера размера N , затрачиваемое последовательными (EFDS, IFDS-MNM) алгоритмами;
- $T_{p,g}(N)$ – время выполнения тестового примера размера N , затрачиваемое гибридными параллельными (EFDS-hybrid, IFDS-MNM-hybrid) алгоритмами на основе API OpenMP [26] и API CUDA [24, 25] на ЭВМ с $p \geq 2$ потоками CPU.

Числом g в рамках программного комплекса FEVO v1.0 пользователь не управляет, но может менять число `thread` на один `block`. Далее функции FEVO v1.0 вычислят оптимальную `grid` задействования CUDA ядер GPU на основе заданного числа `thread`. По умолчанию задаётся `thread = 32`, что, как показывает практика, исключает «артефакты» (ошибки), вызванные неправильной конфигурацией `grid`. Более того, изменение числа `thread` существенно не изменит время выполнения.

Аналогичным образом, для оценок «сложности по памяти» используется понятие использованная память (uRAM) в [Мб] и вводятся следующие параметры:

- $M_{1,0}(N)$ – uRAM при выполнении тестового примера размера N последовательными (EFDS, IFDS-MNM) алгоритмами;
- $M_{p,g}^C(N)$ – uRAM при выполнении тестового примера размера N гибридными параллельными (EFDS-hybrid, IFDS-MNM-hybrid) алгоритмами на ЭВМ с $p \geq 2$ потоками CPU и неким фиксированным числом g ;
- $M_{p,g}^G(N)$ – аналогично, uRAM вычислительного узла GPU при решении задачи EFDS-hybrid и IFDS-MNM-hybrid алгоритмами.

Далее, имея статистику по времени выполнения $T_{p,g}(N)$ примера в зависимости от размера N , для оценки «сложности по времени» можно построить \mathbb{T} – функцию времени выполнения алгоритма, с помощью полиномиальной интерполяции. В таком случае \mathbb{T} представляет собой полином n – й степени, а порядок роста функции времени выполнения определяется ее старшим, $f_{p,g}(N)$, доминирующим членом. Анализировать алгоритмы \mathbb{T} -функциям может быть достаточно трудно. Например, если \mathbb{T} функция имеет большое количество локальных экстремумов или существуют иные зависимости времени выполнения от не очевидных факторов. Поэтому в теории вычислительной сложности [27] алгоритмов используются асимптотические границы (оценки) времени выполнения [28]. Для получения Θ – асимптотически точной оценки сложности необходимо показать, что:

$$\Theta(f_{p,g}(N)) = \left\{ \mathbb{T}_{p,g}(N) : \begin{array}{l} \exists k_1 > 0, k_2 > 0, \quad \exists N_0 \in \{0, 1, 2, \dots\}, \\ 0 \leq k_1 f_{p,g}(N) \leq \mathbb{T}_{p,g}(N) \leq k_2 f_{p,g}(N), \quad \forall N \geq N_0. \end{array} \right\} \quad (5)$$

5 Результаты по оценкам сложности алгоритмов

5.1 Последовательные алгоритмы

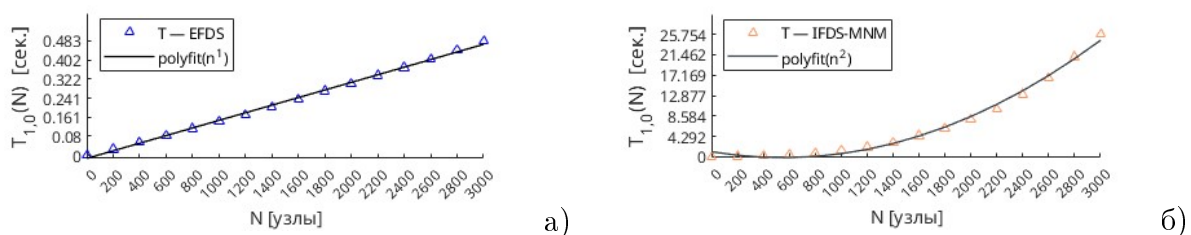


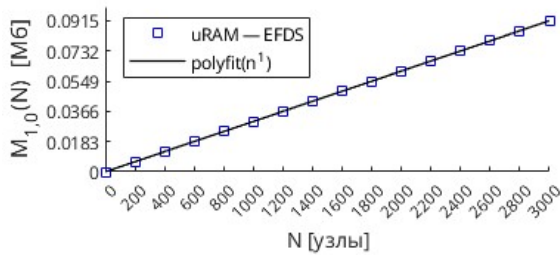
Рис. 4 Время выполнения тестового примера и интерполирующая данные кривая

Действительно, с помощью функции `polyfit()` в пакете MATLAB на основе данных о T – времени выполнения (рис. 4) получаем полиномы $\mathbb{T}_{1,0}^{EFDS}(N)$ и $\mathbb{T}_{1,0}^{IFDS-MNM}(N)$, для которых неравенства (5) выполняются при условиях:

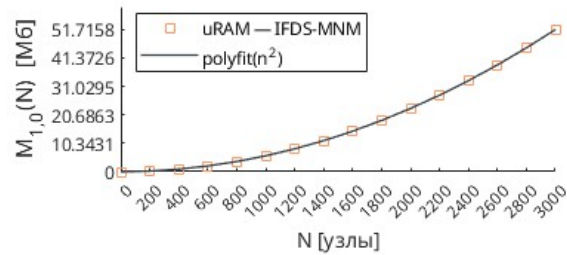
$$\Theta(n) = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{T}_{1,0}^{EFDS}(N) = 0.16028n - 12.51764, \\ \exists k_1 = 0, k_2 > 0.16028, N \geq 78, \end{array} \right\} \quad (6a)$$

$$\Theta(n^2) = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{T}_{1,0}^{IFDS-MNM}(N) = 0.000004n^2 - 0.004518n + 1.077855, \\ \exists k_1 = 0, k_2 > 0.000004, N \geq 749, \end{array} \right\} \quad (6b)$$

следовательно, функция времени выполнения \mathbb{T} последовательного алгоритма $\mathbb{T}_{1,0}(N)$ асимптотически ограничена снизу и сверху полиномиальной функцией $f_{p,g}(N)$ с точностью до постоянного множителя k_2 , коэффициента при старшей степени полинома.



а)



б)

Рис. 5 Затраты памяти uRAM на выполнение примера и интерполирующая кривая

Та же логика оценки применима к данным по затратам памяти. С помощью `polyfit()` на основе M данных uRAM строятся \mathbb{M} – функции использования памяти алгоритмом (рис. 5), для которых неравенства (5) выполняются при условиях:

$$\Theta(n) = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{M}_{1,0}^{EFDS}(N) = 0.030517n + 0.000205, \\ \exists k_1 = 0, k_2 > 0.030517, N \geq 1, \end{array} \right\} \quad (7a)$$

$$\Theta(n^2) = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{M}_{1,0}^{IFDS-MNM}(N) = 0.05722n^2 + 0.724487n + 0.002083, \\ \exists k_1 = 0, k_2 > 0.7833, N \geq 1. \end{array} \right\} \quad (7b)$$

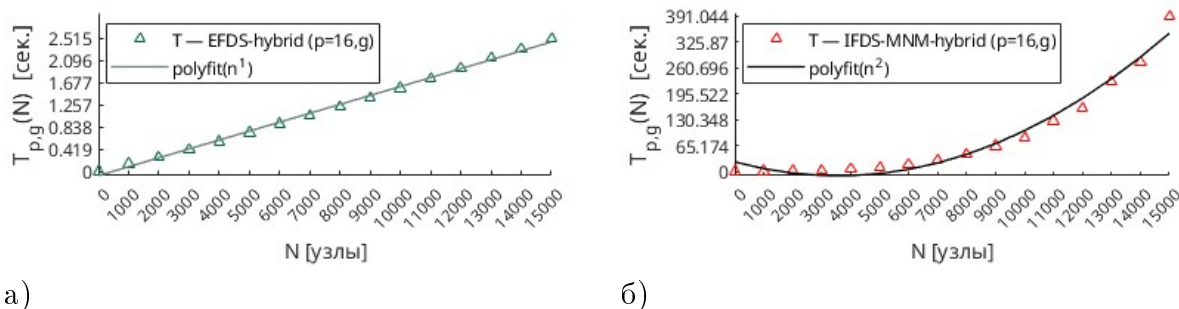
В итоге имеем, что асимптотически точные оценки сложности алгоритмов по времени и по памяти:

- для последовательного алгоритма EFDS – порядка $\Theta(n)$;
- для последовательного алгоритма IFDS-MNM – порядка $\Theta(n^2)$.

6 Гибридные параллельные алгоритмы

При решении подобных задач с помощью гибридного параллельного алгоритма EFDS оптимальное число используемых p потоков CPU, обозначаемых далее [поток], лежит в диапазоне от 15 до 20, что показано из анализа эффективности в работе [21]. Увеличение числа $p > 20$ задействованных в расчётах не даст существенного прироста производительности. Поэтому проведём серию вычислительных экспериментов по решению тестовой задачи (1–3) с помощью описанных выше (рис. 2 и 3) гибридных

параллельных алгоритмов, в том числе IFDS-MNM при $p = 16$, но в 5 раз больше, чем для последовательных алгоритмов, размере входных данных N и шагом между разными примерами.



а)

б)

Рис. 6 Время выполнения примера гибридными алгоритмами и интерполирующая кривая

Аналогично, на основе данных о T времени выполнения (рис. 6) получаем полиномы $\mathbb{T}_{p,g}^{EFDS-hybrid}(N)$ и $\mathbb{T}_{p,g}^{IFDS-MNM-hybrid}(N)$, для которых неравенства (5) выполняются при условиях:

$$\Theta(n) = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{T}_{p,g}^{EFDS-hybrid}(N) = 0.16028n - 12.51764, \\ \exists k_1 = 0, k_2 > Q, N \geq 78, \end{array} \right\} \quad (8a)$$

$$\Theta(n^2) = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{T}_{p,g}^{IFDS-MNM-hybrid}(N) = 0.0000027n^2 - 0.019629n + 23.692790, \\ \exists k_1 = 0, k_2 > 0.0000027, N \geq 5597. \end{array} \right\} \quad (8b)$$

следовательно, функции времени выполнения гибридных алгоритмов $\mathbb{T}_{p,g}(N)$ асимптотически ограничены снизу и сверху соответствующей полиномиальной функцией $f_{p,g}(N)$ с точностью до постоянного множителя k_2 , коэффициента при старшей степени полинома.

С точки зрения затрат RAM алгоритмом, как для CPU, так и для GPU вычислительных узлов, также строятся \mathbb{M} – функции (рис. 10–13), для которых неравенства (5) выполняются при условиях:

$$\Theta(n^2) = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{M}_{p,g}^{C,EFDS-hybrid}(N) = 0.381469n^2 + 3.051763n - 0.000245, \\ \exists k_1 = 0, k_2 > 1.3122, N \geq 1, \end{array} \right\} \quad (9a)$$

$$\Theta(n^2) = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{M}_{p,g}^{G,EFDS-hybrid}(N) = 0.381469n^2 + 2.288813n - 0.003431, \\ \exists k_1 = 0, k_2 > 1.0185, N \geq 1, \end{array} \right\} \quad (9b)$$

$$\Theta(n^2) = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{M}_{p,g}^{C,IFDS-MNM-hybrid}(N) = 1.525878n^2 + 8.010967n - 0.27193, \\ \exists k_1 = 0, k_2 > 14.1296, N \geq 1, \end{array} \right\} \quad (9c)$$

$$\Theta(n^2) = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{M}_{p,g}^{G,IFDS-MNM-hybrid}(N) = 1.525879n^2 + 6.863808n + 4.1022058, \\ \exists k_1 = 0, k_2 > 19.0582, N \geq 1. \end{array} \right\} \quad (9d)$$

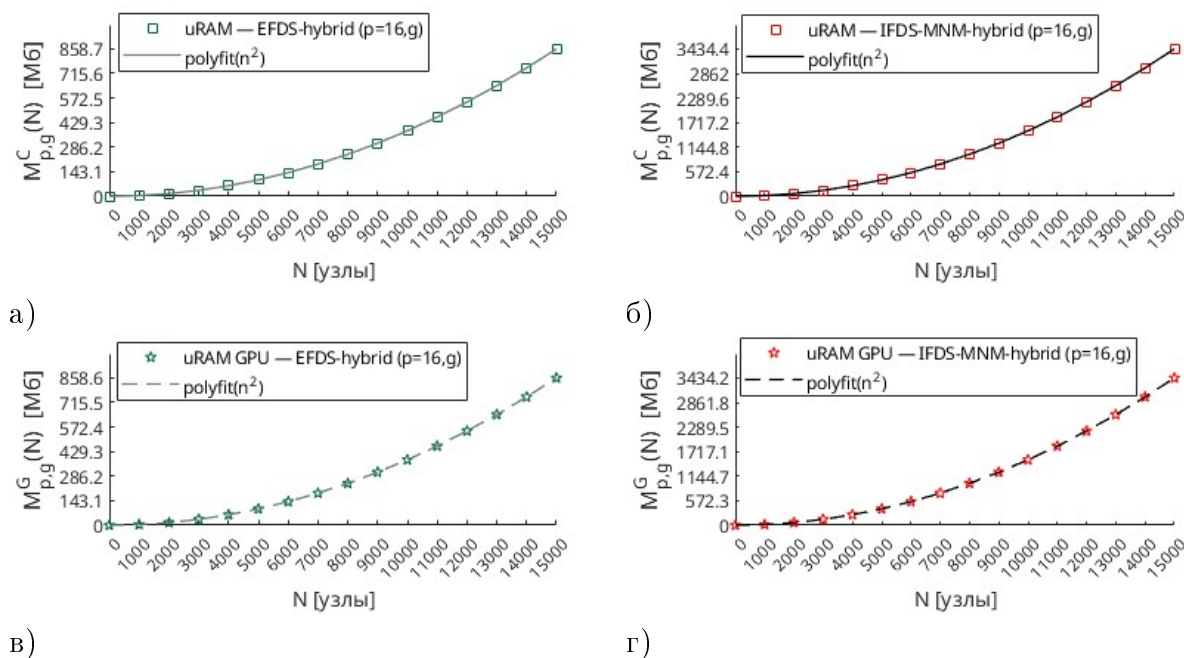


Рис. 7 Затраты памяти uRAM на выполнение примера гибридными алгоритмами и интерполирующая кривая

В итоге имеем, что асимптотически точные оценки сложности по времени:

- для параллельного алгоритма EFDS-hybrid – порядка $\Theta(n)$;
- для параллельного алгоритма IFDS-MNM-hybrid – близки к порядку $\Theta(n^2)$;

асимптотически точные оценки сложности гибридных алгоритмов по памяти:

- для EFDS-hybrid и IFDS-MNM-hybrid – порядка $\Theta(n^2)$.

7 Заключение

В статье рассмотрены программные реализации численных методов решения эрдитарного модельного уравнения объемной активности радона на основе нелинейного дробно-дифференциального уравнения с производной Герасимова-Капуто переменного порядка и переменными коэффициентами. На основе данных о решении тестового примера различными представленными алгоритмами даны оценки сложности алгоритмов. В заключении можно сказать следующее: последовательный EFDS имеет асимптотически точные оценки сложности алгоритма по времени и по памяти порядка $\Theta(n)$; в то время как последовательный IFDS-MNM имеет асимптотически точные оценки сложности алгоритма по времени и по памяти порядка $\Theta(n^2)$; гибридный параллельный EFDS-hybrid имеет асимптотически точную оценку сложности алгоритма по времени порядка $\Theta(n)$; гибридный параллельный IFDS-MNM-hybrid имеет асимптотически точную оценку сложности алгоритма по времени близки к порядку $\Theta(n^2)$; оба алгоритма EFDS-hybrid и IFDS-MNM-hybrid имеют асимптотически точные оценки сложности алгоритмов по памяти порядка $\Theta(n^2)$.

Видно, что EFDS-hybrid не даёт существенного прироста в скорости вычислений (порядка 30%) по сравнению с последовательной реализацией EFDS, но при учёте ограничений по устойчивости EFDS и тем фактом, что для параллельных реализаций необходимо на порядки больше RAM, использование EFDS-hybrid может ускорить вычисления при решении обратных задач; в то же время, IFDS-MNM-hybrid даёт значительный прирост производительности в 17 раз.

Литература

- [1] *Nikolopoulos D., Cantzos D., Alam A., Dimopoulos S., Petraki E.* Electromagnetic and Radon Earthquake Precursors // *Geosciences* – 2024. – Vol. 14. – No. 10. – 271. – doi: <http://dx.doi.org/10.3390/geosciences14100271>
- [2] *Barberio M.D., Gori F., Barbieri M., Billi A., Devoti R., Doglioni C., Petitta M., Riguzzi F., Rusi S.* Diurnal and Semidiurnal Cyclicity of Radon (^{222}Rn) in Groundwater, Giardino Spring, Central Apennines, Italy // *Water* – 2018. – Vol. 10. – No. 9. – 1276. – doi: <http://dx.doi.org/10.3390/w10091276>
- [3] *Tverdyi D.A., Makarov E.O., Parovik R.I.* Hereditary Mathematical Model of the Dynamics of Radon Accumulation in the Accumulation Chamber // *Mathematics* – 2023. – Vol. 11. – No. 4. – 850. – doi: <http://dx.doi.org/10.3390/math11040850>
- [4] *Фирстов П.П., Макаров Е.О.* Динамика подпочвенного радона на Камчатке и сильные землетрясения: монография. – Петропавловск-Камчатский: КамГУ им. Витуса Беринга, 2018. – 148 с.
- [5] *Huang P., Lv W., Huang R., Luo Q., Yang Y.* Earthquake precursors: A review of key factors influencing radon concentration // *Journal of Environmental Radioactivity* – 2024. – Vol. 271. – 107310. – doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.jenvrad.2023.107310>
- [6] *Uchaikin V.V.* Fractional Derivatives for Physicists and Engineers. – Berlin, Heidelberg: Springer, 2013. – Vol. 1. – 373 p.
- [7] *Parovik R.I., Shevtsov B.M.* Radon transfer processes in fractional structure medium // *Mathematical Models and Computer Simulations* – 2010. – Vol. 2. – P. 180-185. – doi: <http://dx.doi.org/10.1134/S2070048210020055>
- [8] *Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J.* Theory and Applications of Fractional Differential Equations. – 1st ed. – Boston: Elsevier Science, 2006. – 540 p.
- [9] *Cai M., Li C.* Theory and Numerical Approximations of Fractional Integrals and Derivatives. – Philadelphia: SIAM, 2020. – 317 p.
- [10] *Нахушев А.М.* Дробное исчисление и его применение. – М.: Физматлит, 2003. – 272 с.
- [11] *Caputo M., Fabrizio M.* On the notion of fractional derivative and applications to the hysteresis phenomena // *Meccanica* – 2017. – Vol. 52. – P. 3043-3052. – doi: <http://dx.doi.org/10.1007/s11012-017-0652-y>
- [12] *Novozhenova O.G.* Life And Science of Alexey Gerasimov, One of the Pioneers of Fractional Calculus in Soviet Union // *Fractional Calculus and Applied Analysis* – 2017. – Vol. 20. – P. 790-809. – doi: <http://dx.doi.org/10.1515/fca-2017-0040>
- [13] *Patnaik S., Hollkamp J.P., Semperlotti F.* Applications of variable-order fractional operators: A review // *Proceedings of the Royal Society A* – 2020. – Vol. 476. – No. 2234. – 20190498. – doi: <http://dx.doi.org/10.1098/rspa.2019.0498>
- [14] *Chicco D., Warrens M.J., Jurman G.* The coefficient of determination R-squared is more informative than SMAPE, MAE, MAPE, MSE and RMSE in regression analysis evaluation // *PeerJ Comp. Sci.* – 2021. – Vol. 7. – 623. – doi: <http://dx.doi.org/10.7717/peerj-cs.623>
- [15] *Mueller J.L., Siltanen S.* Linear and Nonlinear Inverse Problems with Practical Applications. – Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2012. – 351 p.
- [16] *Твёрдый Д.А.* Восстановление порядка дробной производной в задаче математического моделирования накопления радона в избыточном объеме накопительной камеры по данным Петропавловск-Камчатского геодинамического полигона // *Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН* – 2023. – Том 116. – Выпуск 6. – С. 83-94. – doi: <http://dx.doi.org/10.35330/1991-6639-2023-6-116-83-94>

- [17] *Tverdyi D.A., Parovik R.I., Makarov E.O.* Estimation of radon flux density changes in temporal vicinity of the Shipunskoe earthquake with MW = 7.0, 17 August 2024 with the use of the hereditary mathematical model // *Geosciences* – 2025. – Vol. 15. – No. 1. – 30. – doi: <http://dx.doi.org/10.3390/geosciences15010030>
- [18] *Твёрдый Д.А., Паровик Р.И.* О задаче оптимизации для определения вида функциональной зависимости переменного порядка дробной производной типа Герасимова-Капуто // *Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки* – 2024. – Том 47. – Выпуск 2. – С. 35-57. – doi: <http://dx.doi.org/10.26117/2079-6641-2024-47-2-35-57>
- [19] *Bogaenko V.A., Bulavatskiy V.M., Kryvonos I.G.* On Mathematical modeling of Fractional-Differential Dynamics of Flushing Process for Saline Soils with Parallel Algorithms Usage // *Journal of Automation and Information Sciences* – 2016. – Vol. 40. – No. 10. – P. 1-12. – doi: <http://dx.doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v48.i10.10>
- [20] *Bohaienko V.O.* Parallel finite-difference algorithms for three-dimensional space-fractional diffusion equation with phi-Caputo derivatives // *Computational and Applied Mathematics* – 2020. – Vol. 39. – No. 163. – doi: <http://dx.doi.org/10.1007/s40314-020-01191-x>
- [21] *Tverdyi D.A., Parovik R.I.* Hybrid GPU-CPU Efficient Implementation of a Parallel Numerical Algorithm for Solving the Cauchy Problem for a Nonlinear Differential Riccati Equation of Fractional Variable Order // *Mathematics* – 2023. – Vol. 11. – No. 15. – 3358. – doi: <http://dx.doi.org/10.3390/math11153358>
- [22] *Kenneth R.* *Pointers on C*. – 1st ed. – London: Pearson, 1997. – 640 p.
- [23] *Corman T.H., Leiserson C.E., Rivet R.L., Stein C.* *Introduction to Algorithms*. – 3rd ed. – Cambridge: The MIT Press, 2009. – 1292 p.
- [24] *Sanders J., Kandrot E.* *CUDA by Example: An Introduction to General-Purpose GPU Programming*. – London: Addison-Wesley Professional, 2010. – 311 p.
- [25] *Cheng J., Grossman M., McKercher T.* *Professional Cuda C Programming*. – 1st ed. – New-York: Wrox Pr Inc, 2014. – 497 p.
- [26] *Supinski B., Klemm M.* *OpenMP Application Programming Interface Specification Version 5.2*. – North Charleston: Independently published, 2021. – 669 p.
- [27] *Storer J.A.* *An Introduction to Data Structures and Algorithms*. – Boston: Birkhäuser Boston, 2012. – 599 p.
- [28] *Курносков М.Г.* *Введение в структуры и алгоритмы обработки данных: учебное пособие*. – Новосибирск: Автограф, 2015. – 178 с.

UDC 510.52:519.642.2+519.687.1

ASYMPTOTIC COMPLEXITY ESTIMATES OF HYBRID ALGORITHMS FOR THE NUMERICAL SOLUTION OF A MODEL EQUATION OF RADON VOLUME ACTIVITY WITH A VARIABLE-ORDER FRACTIONAL DERIVATIVE

Tverdyi D.A.

`dimsolid95@gmail.com`

Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation FEB RAS,
7, Mirnaya Street, Paratunka, Kamchatka, 684034 Russia;
Digital Technologies and Artificial Intelligence Development Research Institute,
17A, Buz-2, Tashkent, 100125 Uzbekistan.

The article considers hybrid CPU-GPU parallel implementations of numerical solution algorithms for the hereditary model equation of radon volume activity. The test example is a direct Cauchy problem for a nonlinear fractional differential equation with a Gerasimov-Caputo operator of variable order and variable coefficients. The importance of developing efficient algorithms for solving direct problems of the radon volume activity model is due to their use in solving corresponding inverse problems based on radon monitoring data in order to solve practical problems of identifying certain parameters of the geological environment. Based on data on the average execution time of the test problem, asymptotic estimates of the complexity of sequential and proposed parallel algorithms are given. It is shown that the use of hybrid parallel CPU-GPU algorithms provides a performance gain of up to 17 times and can give a significant advantage in solving problems with large amounts of experimental data, due to the use of a GPU node. It is also shown that asymptotically exact complexity estimates are: for memory, for all hybrid algorithms of order $\Theta(n^2)$; for the hybrid implementation of a non-local explicit scheme of order $\Theta(n)$; for the hybrid implementation of a non-local implicit scheme of order $\Theta(n^2)$.

Keywords: fractional derivatives, time nonlocality, variable nonlocality, finite difference schemes, parallel computing, GPU, asymptotic estimates, algorithms efficiency.

Citation: Tverdyi D.A. 2026. Asymptotic complexity estimates of hybrid algorithms for the numerical solution of a model equation of radon volume activity with a variable-order fractional derivative. *Problems of Computational and Applied Mathematics*. 2(72): 155-167.

DOI: https://doi.org/10.71310/pcam.2_72.2026.11

HISOBLASH VA AMALIY МАТЕМАТИКА MUAMMOLARI

ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ
И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
PROBLEMS OF COMPUTATIONAL
AND APPLIED MATHEMATICS

ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

№ 2(72) 2026

Журнал основан в 2015 году.

Издается 6 раз в год.

Учредитель:

Научно-исследовательский институт развития цифровых технологий и
искусственного интеллекта.

Главный редактор:

Равшанов Н.

Заместители главного редактора:

Арипов М.М., Шадиметов Х.М., Ахмедов Д.Д.

Ответственный секретарь:

Убайдуллаев М.Ш.

Редакционный совет:

Азамов А.А., Алоев Р.Д., Амиргалиев Е.Н. (Казахстан), Арушанов М.Л.,
Бурнашев В.Ф., Джумаёзов У.З., Загребина С.А. (Россия), Задорин А.И. (Россия),
Игнатъев Н.А., Ильин В.П. (Россия), Иманкулов Т.С. (Казахстан),
Исмагилов И.И. (Россия), Кабанихин С.И. (Россия), Курбонов Н.М., Маматов Н.С.,
Мирзаев Н.М., Мурадов Ф.А., Назирова Э.Ш., Нормуродов Ч.Б., Нуралиев Ф.М.,
Опанасенко В.Н. (Украина), Расулмухамедов М.М., Садуллаева Ш.А.,
Старовойтов В.В. (Беларусь), Хаётов А.Р., Халджигитов А., Хамдамов Р.Х.,
Хужаев И.К., Хужаеров Б.Х., Эшмаматова Д.Б., Дустмуродова Ш.Ж.,
Чье Ен Ун (Россия), Шабозов М.Ш. (Таджикистан), Dimov I. (Болгария),
Li Y. (США), Mascagni M. (США), Min A. (Германия), Singh M. (Южная Корея).

Журнал зарегистрирован в Агентстве информации и массовых коммуникаций при
Администрации Президента Республики Узбекистан.

Свидетельство №0856 от 5 августа 2015 года.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

При перепечатке материалов ссылка на журнал обязательна.

За точность фактов и достоверность информации ответственность несут авторы.

Адрес редакции:

100125, г. Ташкент, м-в. Буз-2, 17А.

Тел.: +(998) 71 263-41-98.

Э-почта: journals@airi.uz.

Веб-сайт: <https://journals.airi.uz>.

Дизайн и вёрстка:

Шарипов Х.Д.

Отпечатано в типографии НИИ РЦТИИ.

Подписано в печать 22.04.2026 г.

Формат 60x84 1/8. Заказ №2. Тираж 100 экз.

PROBLEMS OF COMPUTATIONAL AND APPLIED MATHEMATICS

No. 2(72) 2026

The journal was established in 2015.
6 issues are published per year.

Founder:

Digital Technologies and Artificial Intelligence Development Research Institute.

Editor-in-Chief:

Ravshanov N.

Deputy Editors:

Aripov M.M., Shadimetov Kh.M., Akhmedov D.D.

Executive Secretary:

Ubaydullaev M.Sh.

Editorial Council:

Azamov A.A., Alov R.D., Amirgaliev E.N. (Kazakhstan), Arushanov M.L.,
Burnashev V.F., Djumayozov U.Z., Zagrebina S.A. (Russia), Zadorin A.I. (Russia),
Ignatiev N.A., Ilyin V.P. (Russia), Imankulov T.S. (Kazakhstan), Ismagilov I.I. (Russia),
Kabanikhin S.I. (Russia), Kurbonov N.M., Mamatov N.S., Mirzaev N.M., Muradov F.A.,
Nazirova E.Sh., Normurodov Ch.B., Nuraliev F.M., Opanasenko V.N. (Ukraine),
Sadullaeva Sh.A., Starovoitov V.V. (Belarus), Khayotov A.R., Khaldjigitov A.,
Khamdamov R.Kh., Khujaev I.K., Khujayorov B.Kh., Eshmamatova D.B.,
Dustmurodova Sh.J., Chye En Un (Russia), Shabozov M.Sh. (Tajikistan),
Dimov I. (Bulgaria), Li Y. (USA), Mascagni M. (USA), Min A. (Germany),
Singh M. (South Korea).

The journal is registered by Agency of Information and Mass Communications under the
Administration of the President of the Republic of Uzbekistan.
Certificate of Registration No. 0856 of 5 August 2015.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

At a reprint of materials the reference to the journal is obligatory.
Authors are responsible for the accuracy of the facts and reliability of the information.

Address:

100125, Tashkent, Buz-2, 17A.

Tel.: +(998) 71 263-41-98.

E-mail: journals@airi.uz.

Web-site: <https://journals.airi.uz>.

Layout design:

Sharipov Kh.D.

DTAIRI printing office.

Signed for print 22.04.2026

Format 60x84 1/8. Order No. 2. Print run of 100 copies.

Содержание

Паровик Р.И., Исрайилжанова Г.С.

FracDynZe – компьютерная программа исследования динамики работы сердца в рамках дробного осциллятора Зимана 5

Очилова Н.К.

Уравнения смешанно-составного типа в качестве модели аномальной диффузии в опухолевых тканях 16

Кодиров Р., Боборахимов Б.

Математическая модель процессов изменения напора подземных вод в неоднородных пористых средах 27

Равшанов Н., Ахмад Тирта Дхару Вахью Памбуди, Мухаммад Сафари, Камолiddинова Ф.

Прогнозирование индекса экологического состояния регионов Узбекистана с использованием методов машинного обучения и искусственного интеллекта 42

Шадманов И.У., Иззатуллоев А.Э., Сухендро Бусоно

Дробная модель и устойчивый численный алгоритм для взаимосвязанного переноса тепла и влаги в неоднородных пористых телах 61

Усмонов Л.С.

Математическое моделирование гидродинамического процесса подземного выщелачивания с учетом изменения гидродинамических параметров пористой среды 89

Шакаева Э.Э.

Численное моделирование задачи Коши для сингулярно возмущенного уравнения третьего порядка 109

Алов Р.Д., Овлаева М.Х., Ильяни Абдуллах, Исаева Н.Т.

Явно-неявная разностная схема для двухмерной линейной гиперболической системы с динамическими граничными условиями 122

Болтаев А.К

Об одной дискретной системе для нахождения коэффициентов весовых оптимальных квадратурных формул 136

Олимов Н.Н.

Применение оптимальной интерполяционной формулы с производной для приближенного интегрирования 147

Твёрдый Д.А.

Асимптотические оценки сложности гибридных алгоритмов численного решения модельного уравнения объемной активности радона с дробной производной переменного порядка 155

Contents

Parovik R.I., Israyiljanova G.S.

FracDynZe is a computer program for studying the dynamics of cardiac function using the fractional Zeeman oscillator 5

Ochilova N.K.

Mixed-composite-type equations as a model of anomalous diffusion in tumor tissues 16

Qodirov R., Boborakhimov B.

Mathematical model of groundwater head variation processes in heterogeneous porous media 27

Ravshanov N., Achmad Tirta Dharu Wahyu Pambudi, Muhammad Safari, Kamolid-dinova F.

Forecasting the environmental health index of Uzbekistan regions using machine learning and artificial intelligence methods 42

Shadmanov I.U., Izzatulloev A.E., Suhendro Busono

Fractional model and robust numerical algorithm for coupled heat and moisture transfer in heterogeneous porous bodies 61

Usmonov L.S.

Mathematical modeling of the hydrodynamic process of in-situ leaching taking into account the changes in hydrodynamic parameters of a porous medium . . . 89

Shakaeva E.E.

Numerical modeling of the Cauchy problem for a third-order singularly perturbed equation 109

Aloev R.D., Ovlaeva M.Kh., Ilyani Abdullah, Issayeva N.T.

An explicit-implicit difference scheme for a two-dimensional linear hyperbolic system with dynamic boundary conditions 122

Boltaev A.K.

On a discrete system for finding the coefficients of weighted optimal quadrature formulas 136

Olimov N.N.

An application of optimal interpolation formula with derivative to approximate integration 147

Tverdyyi D.A.

Asymptotic complexity estimates of hybrid algorithms for the numerical solution of a model equation of radon volume activity with a variable-order fractional derivative 155