

УДК 519.644

ОБ ОДНОЙ ДИСКРЕТНОЙ СИСТЕМЕ ДЛЯ НАХОЖДЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ВЕСОВЫХ ОПТИМАЛЬНЫХ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛ

^{1,2}*Болтаев А.К.*

aziz_boltayev@mail.ru.

¹Международный Университет Нордик,

100043, Узбекистан, г. Ташкент, ул. Бунёдкор, 8/2;

²Институт математики им. В.И. Романовского АН РУз,

100174, Узбекистан, г. Ташкент, ул. Университетская, 9.

Интегралы Фурье функций встречаются в основном в теории специальных функций и анализе Фурье, но также и в других прикладных и вычислительных науках и технике, например, в теоретической физике, акустическом рассеянии, квантовой химии, теории процессов переноса, электромагнетизме, телекоммуникациях, механике и т.д. В данной работе рассматривается задача о нахождении коэффициентов весовых оптимальных квадратурных формул. При этом сначала решим краевую задачу для экстремальной функции квадратурной формулы. С помощью экстремальной функции находится вид нормы функционала погрешности. Норма функционала погрешности зависит от коэффициентов и узлов. Используя метод Лагранжа мы получим систему линейных алгебраических уравнений для нахождения коэффициентов весовых оптимальных квадратурных формул.

Ключевые слова: пространство Гильберта, экстремальная функция, квадрат нормы функционала погрешности, коэффициенты Фурье, весовые квадратурные формулы.

Цитирование: *Болтаев А.К.* Об одной дискретной системе для нахождения коэффициентов весовых оптимальных квадратурных формул // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2026. – № 2(72). – С. 136-146.

DOI: https://doi.org/10.71310/psam.2_72.2026.09

1 Введение и постановка задач

На практике очень важно построить квадратурную формулу в гильбертовом пространстве для приближенного вычисления интегралов. Полученные результаты построения квадратурных формул позволяют разрабатывать совершенные математические модели различных природных процессов.

Существуют различные методы построения оптимальных квадратурных формул для приближенного вычисления определенных интегралов, среди которых можно выделить метод Соболева, сплайн-функции и методы φ -функции [1–11].

В [10] для приближенного вычисления интегралов использовалась сплайн - квазиинтерполяция. Кроме того, при интегрировании сильных осциллирующих функциями занимались такие ученые, как С. Олвер, Т. Холл, А. Изерлес, С.П. Норсетт, Д.Р. Яндрлич, А.В. Пейчев, М.М. Спалевич, Градимир В. Милованович, Тереза Лаудаддио, Никола Мастронарди, Донателлы Оккорсио, Хомейера, Шривастава, Х.М., Масьеда-Джамай, М., Моалеми (см. [1, 2, 6, 12, 13]).

Следует отметить, что в последующие годы в гильбертовых пространствах $L_2^{(m)}$ и $W_2^{(m,m-1)}$ С.Джеон, Ч.О. Ли, Г.В. Милованович, Х.М. Шадиметов, А.Р. Хаётов,

Н.Д. Болтаев, С.С. Бабаев, Б.И. Бозоров, У.Н. Хайриев провел и научные исследования по построению оптимальных квадратурных формул и их применению для приближенного вычисления осциллирующих интегралов (см. [14–18]).

В [15, 16] периодических функций в гильбертовом пространстве $\widetilde{W}_2^{(m,m-1)}(0,1)$ в $m \geq 2$ построены оптимальные квадратурные формулы для приближенного вычисления коэффициентов Фурье в следующих случаях: $\omega \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ и $\omega h \notin \mathbb{Z}$, в $\omega \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ и $\omega h \in \mathbb{Z}$ и $\omega = 0$.

С этой целью одним из основных вопросов вычислительной математики считается выполнение научных исследований по следующим направлениям:

- 1) Численный расчет коэффициентов Фурье.
- 2) Построение оптимальных квадратурных формул в различных гильбертовых пространствах и оценка их погрешностей.

Обозначим через $W_2^{(m,0)}(0,1)$ класс функций φ , определенных на интервале $[0,1]$, который обладает абсолютно непрерывной $(m-1)$ -й производной на отрезке $[0,1]$ и m -я производная находится в $L_2(0,1)$. Класс $W_2^{(m,0)}(0,1)$ со скалярным произведением

$$\langle f, g \rangle_{W_2^{(m,0)}} = \int_0^1 (f^{(m)}(x) + f(x)) (\bar{g}^{(m)}(x) + \bar{g}(x)) dx. \quad (1)$$

является гильбертовым пространством, если мы отождествляем функции, которые отличаются от решения уравнения $f^{(m)}(x) + f(x) = 0$. Следовательно, $W_2^{(m,0)}(0,1)$ это гильбертово пространство, снабженной полу-нормой основанной на скалярном произведении (1)

$$\|f\|_{W_2^{(m,0)}} = \langle f, f \rangle_{W_2^{(m,0)}}^{1/2}. \quad (2)$$

Для функции f из пространства $W_2^{(m,0)}(0,1)$ рассмотрим квадратурную формулу вида

$$\int_0^1 f(x) e^{2\pi i \omega x} dx \cong \sum_{\beta=0}^N C[\beta] f[\beta], \quad (3)$$

где $\omega \in \mathbb{R}$, $\omega \neq 0$, $C[\beta]$ – неизвестные коэффициенты квадратурной формулы вида (3), $[\beta] = h\beta$ ($\beta = \overline{0, N}$, $h = \frac{1}{N}$), N – натуральное число.

Известно, что при построении квадратурных формул в конкретном пространстве изучается сходимость квадратурной суммы к интегралу. В этом случае необходимо оценить полученную погрешность. Погрешностью квадратурной формулы (3) называется следующим разность

$$(\ell, f) = \int_0^1 e^{2\pi i \omega x} f(x) dx - \sum_{\beta=0}^N C[\beta] f[\beta] \quad (4)$$

и она определяет функционал

$$\ell(x) = e^{2\pi i \omega x} \varepsilon_{[0,1]}(x) - \sum_{\beta=0}^N C[\beta] \delta(x - h\beta), \quad (5)$$

который называется функционалом погрешности квадратурной формулы (3), где $\varepsilon_{[0,1]}(x)$ — характеристическая функция отрезка $[0,1]$ и $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака.

Погрешность квадратурной формулы в виде (5) равна значению функционала погрешности ℓ в f . Этот функционал непрерывен и ограничен, его норма конечна и определяется следующим образом

$$\|\ell|W_2^{(m,0)*}\| = \sup_{f, \|f\| \neq 0} \frac{|(\ell, f)|}{\|f|W_2^{(m,0)}\|}. \quad (6)$$

Из (6) получаем приведенную выше оценку погрешности (5) квадратурной формулы (3)

$$|(\ell, f)| \leq \|\ell|W_2^{(m,0)*}\| \cdot \|f|W_2^{(m,0)}\|. \quad (7)$$

Из неравенства (7) видно, что погрешность формулы оценивается сверху с нормой функционала погрешности. В свою очередь, в пространстве $W_2^{(m,0)}(0,1)$ норма элементов, не принадлежащих ядру нормы (2) и принадлежащих этому пространству, есть положительное конечное число. Поэтому нам необходимо найти выражение нормы функционала погрешности ℓ . Очевидно, норма ℓ является ограниченной функцией, зависящей от коэффициентов C_β квадратурной формулы (3). Коэффициенты C_β , дающие наименьшее значение нормы функционала погрешности называются оптимальными коэффициентами квадратурной формулы вида (3) в пространстве $W_2^{(m,0)}(0,1)$ и обозначаются $\overset{\circ}{C}[\beta]$, $\beta = 0, 1, \dots, N$. Таким образом, для построения оптимальной квадратурной формулы с $\omega \in \mathbb{R}$, $\omega \neq 0$ в гильбертовом пространстве $W_2^{(m,0)}(0,1)$, нам необходимо решить следующие две основные задачи.

Задача 1. Сначала для функционала погрешности ℓ вида (5), определенного в гильбертовом пространстве, найти норму $\|\ell\|$.

Задача 2. Во-вторых, найти коэффициенты $C[\beta]$, $\beta = 0, 1, \dots, N$ (если они есть), которые дают минимум значению нормы $\|\ell\|_{W_2^{(m,0)*}}$.

2 Нахождение экстремальной функции и выражение нормы функционала погрешности

Для решения задачи 1, то есть для нахождения формы нормы функционала погрешности (5), мы используем понятие экстремальной функции.

Определение. [19] Функция ψ_ℓ удовлетворяющее следующему равенству

$$(\ell, \psi_\ell) = \|\ell|W_2^{(m,0)*}(0,1)\| \cdot \|\psi_\ell|W_2^{(m,0)}(0,1)\|, \quad (8)$$

называется экстремальной функцией квадратурной формулы (3).

В этом случае, поскольку пространство $W_2^{(m,0)}(0,1)$ является гильбертовым, воспользуемся теоремой Рисса об общем виде линейного непрерывного функционала (см. [20]).

По теореме Рисса для всех функций f в пространстве $W_2^{(m,0)}(0,1)$ существует единственная функция ψ_ℓ , удовлетворяющая следующему уравнению

$$(\ell, f) = \langle \psi_\ell, f \rangle \quad (9)$$

и имеет место следующее равенство

$$\|\ell|W_2^{(m,0)*}\| = \|\psi_\ell|W_2^{(m,0)}\|,$$

где $\langle \psi_\ell, f \rangle$ – скалярное произведение этих двух функций из пространства $W_2^{(m,0)}(0,1)$.

Отсюда мы получаем следующее

$$(\ell, \psi_\ell) = \ell(\psi_\ell) = \langle \psi_\ell, \psi_\ell \rangle_{W_2^{(m,0)}(0,1)} = \left\| \psi_\ell | W_2^{(m,0)} \right\|^2 = \left\| \ell | W_2^{(m,0)*} \right\|^2. \quad (10)$$

Интегрируя правую часть уравнения (10) по частям, приходим к этому уравнению и краевой задаче со следующими условиями

$$\psi_\ell^{(2m)}(x) - \psi_\ell(x) = (-1)^m \bar{\ell}(x), \quad (11)$$

$$\left(\psi_\ell^{(m+s)}(x) + \psi_\ell^{(s)}(x) \right) \Big|_{x=0}^{x=1} = 0, \quad s = 0, 1, \dots, m-1, \quad (12)$$

где m – нечетное натуральное число, $\bar{\ell}$ – это сопряженный функционал к функционалу ℓ .

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Решение приведенного выше уравнения (11) при условиях (12) является экстремальной функцией для весовой квадратурной формулы вида (3) и определяется следующим образом

$$\psi_\ell(x) = (-1)^m \bar{\ell}(x) * G_m(x) + Y_m(x), \quad (13)$$

где

$$G_m(x) = \frac{\operatorname{sgn} x}{2m} \left[\operatorname{sh}(x) + \sum_{k=1}^{m-1} e^{x \cos \frac{\pi k}{m}} \cos \left(x \sin \frac{\pi k}{m} + \frac{\pi k}{m} \right) \right], \quad (14)$$

является решением уравнения

$$G_m^{(2m)} - G_m(x) = \delta(x), \quad (15)$$

а

$$Y_m(x) = d_0 e^{-x} + \sum_{k=1}^{\frac{m-1}{2}} e^{-x \cos \frac{2\pi k}{m}} \left[d_{1k} \cos \left(x \sin \frac{2\pi k}{m} \right) + d_{2k} \sin \left(x \sin \frac{2\pi k}{m} \right) \right],$$

где d_0, d_{1k} и d_{2k} – любые комплексные числа, $*$ – операция свертки.

Теорему можно доказать так же, как и теорему 2.1 в [21].

Поскольку функционал погрешности (5) определен на пространстве $W_2^{(m,0)}(0,1)$, он удовлетворяет следующим условиям:

$$(\ell, e^{-x}) = 0, \quad (16)$$

$$\left(\ell, e^{-x \cos \frac{2\pi k}{m}} \cos \left(x \sin \frac{2\pi k}{m} \right) \right) = 0, \quad \left(\ell, e^{-x \cos \frac{2\pi k}{m}} \sin \left(x \sin \frac{2\pi k}{m} \right) \right) = 0. \quad (17)$$

Из этого ясно, что для существования весовых квадратурных формул вида (3) должно выполняться условие $N + 1 \geq m$. Равенства (16) – (17) означают, что наша весовая квадратурная формула точна для функций $e^{-x \cos \frac{2\pi k}{m}} \cos \left(x \sin \frac{2\pi k}{m} \right)$, $e^{-x \cos \frac{2\pi k}{m}} \sin \left(x \sin \frac{2\pi k}{m} \right)$ ($k = 1, \frac{m-1}{2}$) и e^{-x} .

Теперь, используя теорему, мы получаем представление квадрата нормы функционала погрешности (5). Учитывая определение свертки и равенство (5), мы вычисляем свертку $\bar{\ell}(x) * G_m(x)$, т.е.

$$\bar{\ell}(x) * G_m(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\ell}(y) G_m(x-y) dy = \int_0^1 e^{-2\pi i \omega y} G_m(x-y) dy - \sum_{\beta=0}^N \bar{C}_\beta G_m(x-h\beta),$$

где $\bar{\ell}$ и \bar{C}_β сопряжены с ℓ и C_β соответственно.

Затем, принимая во внимание (1), (9) и теорему, получаем

$$\|\ell\|^2 = (\ell, \psi_\ell) = \langle \psi_\ell, \psi_\ell \rangle_{W_2^{(m,0)}} = \int_{-\infty}^{\infty} \ell(x) \psi_\ell(x) dx = (-1)^m \int_{-\infty}^{\infty} \ell(x) \cdot (\bar{\ell}(x) * G_m(x)) dx,$$

т.е.

$$\begin{aligned} \|\ell\|^2 &= (-1)^m \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{2\pi i \omega x} \varepsilon_{[0,1]}(x) - \sum_{\beta=0}^N C_\beta(x-h\beta) \right) \times \\ &\times \left(\int_0^1 e^{-2\pi i \omega y} G_m(x-y) dy - \sum_{\beta=0}^N \bar{C}_\beta G_m(x-h\beta) \right) dx. \end{aligned}$$

Отсюда мы получаем

$$\begin{aligned} \|\ell\|^2 &= (-1)^m \left[\sum_{\beta=0}^N \sum_{\gamma=0}^N C_\beta \bar{C}_\gamma G_m(h\beta - h\gamma) - \sum_{\beta=0}^N \int_0^1 (\bar{C}_\beta e^{2\pi i \omega x} + C_\beta e^{-2\pi i \omega x}) \times \right. \\ &\left. \times G_m(x-h\beta) dx + \int_0^1 \int_0^1 e^{2\pi i \omega x} e^{-2\pi i \omega y} G_m(x-y) dx dy \right]. \quad (18) \end{aligned}$$

Теперь покажем, что правая сторона (18) является действительной. Действительно, пусть $C_\beta = C_\beta^R + iC_\beta^I$, где $i^2 = -1$, C_β^R и C_β^I являются действительными числами. Используя формулу Эйлера $e^{2\pi i \omega x} = \cos(2\pi \omega x) + i \sin(2\pi \omega x)$, мы получаем следующие равенства

$$\begin{aligned} \sum_{\beta=0}^N \sum_{\gamma=0}^N C_\beta \bar{C}_\gamma G_m(h\beta - h\gamma) &= \sum_{\beta=0}^N \sum_{\gamma=0}^N (C_\beta^R C_\gamma^R + C_\beta^I C_\gamma^I) G_m(h\beta - h\gamma), \\ \bar{C}_\beta e^{2\pi i \omega x} + C_\beta e^{-2\pi i \omega x} &= 2C_\beta^R \cos(2\pi \omega x) + 2C_\beta^I \sin(2\pi \omega x), \\ \int_0^1 \int_0^1 e^{2\pi i \omega x} e^{-2\pi i \omega y} G_m(x-y) dx dy &= \int_0^1 \int_0^1 \cos[2\pi \omega(x-y)] G_m(x-y) dx dy. \end{aligned}$$

Учитывая последние три равенства, из (18) для нормы функционала погрешности получаем:

$$\|\ell\|^2 = (-1)^m \left[\sum_{\beta=0}^N \sum_{\gamma=0}^N (C_\beta^R C_\gamma^R + C_\beta^I C_\gamma^I) G_m(h\beta - h\gamma) - \right.$$

$$\begin{aligned}
& -2 \sum_{\beta=0}^N C_{\beta}^R \int_0^1 \cos(2\pi\omega x) G_m(x - h\beta) dx - 2 \sum_{\beta=0}^N C_{\beta}^I \int_0^1 \sin(2\pi\omega x) G_m(x - h\beta) dx + \\
& \left. + \int_0^1 \int_0^1 \cos[2\pi\omega(x - y)] G_m(x - y) dx dy \right] \quad (19)
\end{aligned}$$

и из (16) - (17) мы имеем следующие равенства

$$\sum_{\beta=0}^N C_{\beta}^R e^{-h\beta} = \int_0^1 e^{-x} \cos(2\pi\omega x) dx, \quad (20)$$

$$\sum_{\beta=0}^N C_{\beta}^R e^{-h\beta \cos \frac{2\pi k}{m}} \cos\left(h\beta \sin \frac{2\pi k}{m}\right) = \int_0^1 e^{-x \cos \frac{2\pi k}{m}} \cos\left(x \sin \frac{2\pi k}{m}\right) \cos(2\pi\omega x) dx, \quad (21)$$

$$\sum_{\beta=0}^N C_{\beta}^R e^{-h\beta \cos \frac{2\pi k}{m}} \sin\left(h\beta \sin \frac{2\pi k}{m}\right) = \int_0^1 e^{-x \cos \frac{2\pi k}{m}} \sin\left(x \sin \frac{2\pi k}{m}\right) \cos(2\pi\omega x) dx, \quad (22)$$

$$\sum_{\beta=0}^N C_{\beta}^I e^{-h\beta} = \int_0^1 e^{-x} \sin(2\pi\omega x) dx, \quad (23)$$

$$\sum_{\beta=0}^N C_{\beta}^I e^{-h\beta \cos \frac{2\pi k}{m}} \cos\left(h\beta \sin \frac{2\pi k}{m}\right) = \int_0^1 e^{-x \cos \frac{2\pi k}{m}} \cos\left(x \sin \frac{2\pi k}{m}\right) \sin(2\pi\omega x) dx, \quad (24)$$

$$\sum_{\beta=0}^N C_{\beta}^I e^{-h\beta \cos \frac{2\pi k}{m}} \sin\left(h\beta \sin \frac{2\pi k}{m}\right) = \int_0^1 e^{-x \cos \frac{2\pi k}{m}} \sin\left(x \sin \frac{2\pi k}{m}\right) \sin(2\pi\omega x) dx. \quad (25)$$

Таким образом, задача 1 решена. Далее мы решим задачу 2.

3 Дискретная система для нахождения оптимальных коэффициентов весовых квадратурных формул

Квадрат нормы (19) функционала погрешности (5) является многомерной квадратичной функцией коэффициентов C_{β}^R и C_{β}^I . Чтобы найти минимум нормы (19) функционала погрешности (5) по коэффициентам C_{β}^R и C_{β}^I при условиях (20)–(25), мы применяем метод Лагранжа для нахождения условного экстремума.

Рассмотрим функцию

$$\begin{aligned}
\Psi \left(C_0^R, \dots, C_N^R, C_0^I, \dots, C_N^I, d_0^R, d_0^I, d_{11}^R, \dots, d_{1 \frac{m-1}{2}}^R, d_{11}^I, \dots, d_{1 \frac{m-1}{2}}^I, d_{21}^R, \dots, d_{2 \frac{m-1}{2}}^R, d_{21}^I, \dots, d_{2 \frac{m-1}{2}}^I \right) = \\
= \|\ell\|^2 - 2(-1)^m d_0^R \left(\int_0^1 e^{-x} \cos(2\pi\omega x) dx - \sum_{\beta=0}^N C_{\beta}^R e^{-h\beta} \right) - \\
- 2(-1)^m d_0^I \left(\int_0^1 e^{-x} \sin(2\pi\omega x) dx - \sum_{\beta=0}^N C_{\beta}^I e^{-h\beta} \right) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2(-1)^m d_{1k}^R \left(\int_0^1 e^{-x \cos \frac{2\pi k}{m}} \cos \left(x \sin \frac{2\pi k}{m} \right) \cos (2\pi \omega x) dx - \right. \\
& \quad \left. - \sum_{\beta=0}^N C_\beta^R e^{-h\beta \cos \frac{2\pi k}{m}} \cos \left(h\beta \sin \frac{2\pi k}{m} \right) \right) - \\
& -2(-1)^m d_{1k}^I \left(\int_0^1 e^{-x \cos \frac{2\pi k}{m}} \cos \left(x \sin \frac{2\pi k}{m} \right) \sin (2\pi \omega x) dx - \right. \\
& \quad \left. - \sum_{\beta=0}^N C_\beta^I e^{-h\beta \cos \frac{2\pi k}{m}} \cos \left(h\beta \sin \frac{2\pi k}{m} \right) \right) - \\
& -2(-1)^m d_{2k}^R \left(\int_0^1 e^{-x \cos \frac{2\pi k}{m}} \sin \left(x \sin \frac{2\pi k}{m} \right) \cos (2\pi \omega x) dx - \right. \\
& \quad \left. - \sum_{\beta=0}^N C_\beta^R e^{-h\beta \cos \frac{2\pi k}{m}} \sin \left(h\beta \sin \frac{2\pi k}{m} \right) \right) - \\
& -2(-1)^m d_{2k}^I \left(\int_0^1 e^{-x \cos \frac{2\pi k}{m}} \sin \left(x \sin \frac{2\pi k}{m} \right) \sin (2\pi \omega x) dx - \right. \\
& \quad \left. - \sum_{\beta=0}^N C_\beta^I e^{-h\beta \cos \frac{2\pi k}{m}} \sin \left(h\beta \sin \frac{2\pi k}{m} \right) \right).
\end{aligned}$$

Приравнявая к нулю частные производные функции Ψ по C_β^R, C_β^I ($\beta = \overline{0, N}$), $d_0^R, d_0^I, d_{1k}^R, d_{1k}^I, d_{2k}^R$ и d_{2k}^I ($k = \overline{1, \frac{m-1}{2}}$), получаем следующую систему линейных уравнений для $\beta = 0, 1, \dots, N$,

$$\begin{aligned}
& \sum_{\gamma=0}^N C_\gamma^R G_m(h\beta - h\gamma) + d_0^R e^{-h\beta} + d_{1k}^R e^{-h\beta \cos \frac{2\pi k}{m}} \cos \left(h\beta \sin \frac{2\pi k}{m} \right) + \\
& + d_{2k}^R e^{-h\beta \cos \frac{2\pi k}{m}} \sin \left(h\beta \sin \frac{2\pi k}{m} \right) = \int_0^1 \cos (2\pi \omega x) G_m(x - h\beta) dx, \quad (26)
\end{aligned}$$

$$\sum_{\gamma=0}^N C_\gamma^R e^{-h\gamma} = \int_0^1 e^{-x} \cos (2\pi \omega x) dx, \quad (27)$$

$$\sum_{\gamma=0}^N C_\gamma^R e^{-h\gamma \cos \frac{2\pi k}{m}} \cos \left(h\gamma \sin \frac{2\pi k}{m} \right) = \int_0^1 e^{-x \cos \frac{2\pi k}{m}} \cos \left(x \sin \frac{2\pi k}{m} \right) \cos (2\pi \omega x) dx, \quad (28)$$

$$\sum_{\gamma=0}^N C_\gamma^R e^{-h\gamma \cos \frac{2\pi k}{m}} \sin \left(h\gamma \sin \frac{2\pi k}{m} \right) = \int_0^1 e^{-x \cos \frac{2\pi k}{m}} \sin \left(x \sin \frac{2\pi k}{m} \right) \cos (2\pi \omega x) dx, \quad (29)$$

$$\sum_{\gamma=0}^N C_{\gamma}^I G_m(h\beta - h\gamma) + d_0^I e^{-h\beta} + d_{1k}^I e^{-h\beta \cos \frac{2\pi k}{m}} \cos \left(h\beta \sin \frac{2\pi k}{m} \right) +$$

$$+ d_{2k}^I e^{-h\beta \cos \frac{2\pi k}{m}} \sin \left(h\beta \sin \frac{2\pi k}{m} \right) = \int_0^1 \sin(2\pi\omega x) G_m(x - h\beta) dx, \quad (30)$$

$$\sum_{\gamma=0}^N C_{\gamma}^I e^{-h\gamma} = \int_0^1 e^{-x} \sin(2\pi\omega x) dx, \quad (31)$$

$$\sum_{\gamma=0}^N C_{\gamma}^I e^{-h\gamma \cos \frac{2\pi k}{m}} \cos \left(h\gamma \sin \frac{2\pi k}{m} \right) = \int_0^1 e^{-x \cos \frac{2\pi k}{m}} \cos \left(x \sin \frac{2\pi k}{m} \right) \sin(2\pi\omega x) dx, \quad (32)$$

$$\sum_{\gamma=0}^N C_{\gamma}^I e^{-h\gamma \cos \frac{2\pi k}{m}} \sin \left(h\gamma \sin \frac{2\pi k}{m} \right) = \int_0^1 e^{-x \cos \frac{2\pi k}{m}} \sin \left(x \sin \frac{2\pi k}{m} \right) \sin(2\pi\omega x) dx. \quad (33)$$

Теперь, умножив обе стороны равенств (30) - (33) на i и добавив к обеим сторонам (26) - (29) соответственно, используя обозначения $C_{\beta} = C_{\beta}^R + C_{\beta}^I$, $d_0 = d_0^R + id_0^I$, $d_{1k} = d_{1k}^R + id_{1k}^I$ и $d_{2k} = d_{2k}^R + id_{2k}^I$ ($k = \overline{1, \frac{m-1}{2}}$) для коэффициентов оптимальных весовых квадратурных формул вида (3), мы получаем следующую систему $N+m+1$ линейных уравнений и $\beta = 0, 1, \dots, N$,

$$\sum_{\gamma=0}^N C_{\gamma} G_m(h\beta - h\gamma) + d_0 e^{-h\beta} + d_{1k} e^{-h\beta \cos \frac{2\pi k}{m}} \cos \left(h\beta \sin \frac{2\pi k}{m} \right) +$$

$$+ d_{2k} e^{-h\beta \cos \frac{2\pi k}{m}} \sin \left(h\beta \sin \frac{2\pi k}{m} \right) = f_m(h\beta), \quad \beta = 0, 1, \dots, N, \quad (34)$$

$$\sum_{\gamma=0}^N C_{\gamma} e^{-h\gamma} = \int_0^1 e^{2\pi i\omega x} e^{-x} dx, \quad (35)$$

$$\sum_{\gamma=0}^N C_{\gamma} e^{-h\gamma \cos \frac{2\pi k}{m}} \cos \left(h\gamma \sin \frac{2\pi k}{m} \right) = \int_0^1 e^{2\pi i\omega x} e^{-x \cos \frac{2\pi k}{m}} \cos \left(x \sin \frac{2\pi k}{m} \right) dx, \quad (36)$$

$$\sum_{\gamma=0}^N C_{\gamma} e^{-h\gamma \cos \frac{2\pi k}{m}} \sin \left(h\gamma \sin \frac{2\pi k}{m} \right) = \int_0^1 e^{2\pi i\omega x} e^{-x \cos \frac{2\pi k}{m}} \sin \left(x \sin \frac{2\pi k}{m} \right) dx, \quad (37)$$

где $G_m(x)$ определяется равенством (14),

$$f_m(h\beta) = \int_0^1 e^{2\pi i\omega x} G_m(x - h\beta) dx. \quad (38)$$

Следует отметить, что система (34) - (37) имеет единственное решение, и это решение дает минимум квадрата нормы (19) функционала погрешности (5) при условиях (35) - (37). Единственность решения этой системы получена в [22].

Из (19) и из работы [22] следует, что квадрат нормы функционала погрешности ℓ , который является квадратичной функцией коэффициентов C_β , имеет единственный минимум при некотором конкретном значении $C_\beta = \overset{\circ}{C}_\beta$. Весовая квадратурная формула и коэффициенты $\overset{\circ}{C}_\beta$ ($\beta = 0, 1, \dots, N$), соответствующие этому минимуму, называются оптимальной весовой квадратурной формулой, а $\overset{\circ}{C}_\beta$ называются оптимальными коэффициентами.

4 Заключение

Таким образом, в настоящей работе мы с использованием метода Соболева решили первую часть задачи, т.е. нашли явное выражение квадрата нормы функционала погрешности. Для нахождения условного минимума квадрата нормы функционала погрешности (5) при условиях (16) - (17) применяя метод неопределенных множителей Лагранжа и приравнивая к нулю частные производные от $\Psi(\mathbf{C}, \mathbf{d})$ по коэффициентам C_β ($\beta = 0, 1, \dots, N$), d_{1k} и d_{2k} ($k = 1, \frac{m-1}{2}$) мы получили дискретную систему линейных уравнений для коэффициентов оптимальных весовых квадратурных формул в гильбертовом пространстве $W_2^{m,0}(0, 1)$.

Литература

- [1] *Laudadio T., Mastronardi N., Occorsio D.* Computing integrals with an exponential weight on the real axis in floating point arithmetic // Applied Numerical Mathematics. – 2024. – Vol. 200. – P. 309-317.
- [2] *Bultheel A., Cantero M.J., Cruz-Barroso R.* Matrix methods for quadrature formulas on the unit circle. A survey // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2015. – Vol. 284. – P. 78-100.
- [3] *Hinrichs A., Krieg D., Novak E., Vybíral J.* Lower bounds for the error of quadrature formulas for Hilbert spaces // Journal of Complexity. – 2021. – Vol. 65. – 101544.
- [4] *Ogbereyivwe O. and Ojo-Orobosa V.* High Order Quadrature Based Iterative Method for Approximating the Solution of Nonlinear Equations // Caspian Journal of Mathematical Sciences. – 2020. – Vol. 9. – Issue 2. – P. 243-255.
- [5] *Gander M.J., Lunet T.* ParaStieltjes: Parallel computation of Gauss quadrature rules using a Parareal-like approach for the Stieltjes procedure // Numerical linear Algebra with Applications. – 2020. – Vol. 28. – Issue 3. – P. 1-17.
- [6] *Homeier H.H.H., Srivastava H.M., Masjed Jamei M., Moalemi Z.* Some weighted quadrature methods based upon the mean value theorems // Mathematical Methods in the Applied Sciences. – 2020. – Vol. 44. – Issue 5. – P. 3840-3856.
- [7] *Bellet J.B., Brachet M., Croisille J.P.* Quadrature and symmetry on the cubed sphere // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2022. – Vol. 409. – Issue 2. – P. 1-17.
- [8] *Mahesar S., Shaikh M.M., Chandio M.S. and Shaikh A.W.* Some New Time and Cost Efficient Quadrature Formulas to Compute Integrals Using Derivatives with Error Analysis // Symmetry. – 2022. – Vol. 14. – Issue 12. – 2611.
- [9] *Huda J.S., Noori Y.A.* An Efficient Three-step Iterative Methods Based on Bernstein Quadrature Formula for Solving Nonlinear Equations // Basrah Journal of Science. – 2021. – Vol. 39. – Issue 3. – P. 355-383.
- [10] *Shivaram K.T., Prakasha H.T.* Numerical Evaluation of Highly Oscillatory Integrals of Arbitrary Function Using Gauss-Legendre Quadrature Rule // International conference on mobile computing and sustainable Informatics. – 2020. – P. 211-216. doi: http://dx.doi.org/10.1007/978-3-030-49795-8_20.

- [11] *Aimi A., Calabrò F., Falini A., Sampoli M. L., and Sestini A.* Quadrature formulas based on spline quasi-interpolation for hypersingular integrals arising in IgA-SGBEM // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 2020. – Vol. 372. – 113441.
- [12] *Iserles A. and Norsett S. P.* Efficient quadrature of highly oscillatory integrals using derivatives // Proceedings of the Royal Society A. – 2005. – Vol. 461. – Issue 2057. – P. 1383-1399.
- [13] *Trefethen L.N.* Exactness of Quadrature Formulas // SIAM Review. – 2022. – Vol. 64. – P. 1-17.
- [14] *Shadimetov Kh.M., Hayotov A.R. and Bozarov B.* Optimal quadrature formulas for oscillatory integrals in the Sobolev space // Journal of Inequalities and Applications. – 2022. – Vol. 103. – P. 1-21. doi: <http://dx.doi.org/10.1186/s13660-022-02839-4>.
- [15] *Hayotov A.R., Khayriev U.N.* Optimal quadrature formulas in the space $\widetilde{W}_2^{m,m-1}$ of periodic functions // Vestnik KRAUNC. Fiz.-Mat. nauki. – 2022. – Vol. 40. – Issue 3. – P. 211-226.
- [16] *Hayotov A.R., Khayriev U.N.* Construction of an Optimal Quadrature Formula in the Hilbert Space of Periodic Functions // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2022. – Vol. 43. – № 11. – P. 3151-3160.
- [17] *Alberg J., Nilson E. and Walsh J.* Spline theory and its applications. – 3rd ed. – Moscow: Mir, 1972. – 316 p.
- [18] *Boltaev N.D., Hayotov A.R., Milovanović G.V. and Shadimetov Kh.M.* Optimal quadrature formulas for Fourier coefficients in $W_2^{(m,m-1)}$ space // Journal of Applied Analysis and Computation. – 2017. – Vol. 7. – № 4. – P. 1233-1266.
- [19] *Соболев С.Л.* Введение в теорию кубатурных формул. – М.: Наука, 1974. – 808 с.
- [20] *Atkinson K. and Han W.* Theoretical Numerical Analysis. – USA: Springer, 2000. – 467 p.
- [21] *Boltaev A.K., Hayotov A.R., Shadimetov Kh.M.* Construction of optimal quadrature formulas exact for exponential-trigonometric functions by Sobolev's method // Acta Mathematica Sinica, English series. – 2021. – Vol. 37. – Issue 7. – P. 1066-1088.
- [22] *Boltaev A.K.* Existence and uniqueness of the solution for a linear system of optimal coefficients // Uzbek Mathematical Journal. – 2023. – Vol. 67. – Issue 2. – P. 31-38.

UDC 519.644

ON A DISCRETE SYSTEM FOR FINDING THE COEFFICIENTS OF WEIGHTED OPTIMAL QUADRATURE FORMULAS

^{1,2}**Boltaev A.K.**

aziz_boltayev@mail.ru.

¹International Nordic University,

8/2 Bunyodkor str., Tashkent, 100043 Uzbekistan,

²V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences,

9 University str., Tashkent, 100174 Uzbekistan.

Fourier integrals of functions appear primarily in the theory of special functions and Fourier analysis, but also in other applied and computational sciences and engineering, such as theoretical physics, acoustic scattering, quantum chemistry, transport theory, electromagnetism, telecommunications, mechanics, and others. This paper considers the problem of finding the coefficients of weighted optimal quadrature formulas. First, we

solve the boundary value problem for the extremal function of the quadrature formula. Using the extremal function, we find the norm of the error functional. The norm of the error functional depends on the coefficients and nodes. Using the Lagrange method, we obtain a system of linear algebraic equations for finding the coefficients of weighted optimal quadrature formulas.

Keywords: Hilbert space, extremal function, squared norm of the error functional, Fourier coefficients, weighted quadrature formulas.

Citation: Boltaev A.K. 2026. On a discrete system for finding the coefficients of weighted optimal quadrature formulas. *Problems of Computational and Applied Mathematics*. 2(72): 136-146.

DOI: https://doi.org/10.71310/pcam.2_72.2026.09

HISOBLASH VA AMALIY МАТЕМАТИКА MUAMMOLARI

ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ
И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
PROBLEMS OF COMPUTATIONAL
AND APPLIED MATHEMATICS

ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

№ 2(72) 2026

Журнал основан в 2015 году.

Издается 6 раз в год.

Учредитель:

Научно-исследовательский институт развития цифровых технологий и
искусственного интеллекта.

Главный редактор:

Равшанов Н.

Заместители главного редактора:

Арипов М.М., Шадиметов Х.М., Ахмедов Д.Д.

Ответственный секретарь:

Убайдуллаев М.Ш.

Редакционный совет:

Азамов А.А., Алоев Р.Д., Амиргалиев Е.Н. (Казахстан), Арушанов М.Л.,
Бурнашев В.Ф., Джумаёзов У.З., Загребина С.А. (Россия), Задорин А.И. (Россия),
Игнатъев Н.А., Ильин В.П. (Россия), Иманкулов Т.С. (Казахстан),
Исмагилов И.И. (Россия), Кабанихин С.И. (Россия), Курбонов Н.М., Маматов Н.С.,
Мирзаев Н.М., Мурадов Ф.А., Назирова Э.Ш., Нормуродов Ч.Б., Нуралиев Ф.М.,
Опанасенко В.Н. (Украина), Расулмухамедов М.М., Садуллаева Ш.А.,
Старовойтов В.В. (Беларусь), Хаётов А.Р., Халджигитов А., Хамдамов Р.Х.,
Хужаев И.К., Хужаеров Б.Х., Эшмаматова Д.Б., Дустмуродова Ш.Ж.,
Чье Ен Ун (Россия), Шабозов М.Ш. (Таджикистан), Dimov I. (Болгария),
Li Y. (США), Mascagni M. (США), Min A. (Германия), Singh M. (Южная Корея).

Журнал зарегистрирован в Агентстве информации и массовых коммуникаций при
Администрации Президента Республики Узбекистан.

Свидетельство №0856 от 5 августа 2015 года.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

При перепечатке материалов ссылка на журнал обязательна.

За точность фактов и достоверность информации ответственность несут авторы.

Адрес редакции:

100125, г. Ташкент, м-в. Буз-2, 17А.

Тел.: +(998) 71 263-41-98.

Э-почта: journals@airi.uz.

Веб-сайт: <https://journals.airi.uz>.

Дизайн и вёрстка:

Шарипов Х.Д.

Отпечатано в типографии НИИ РЦТИИ.

Подписано в печать 22.04.2026 г.

Формат 60x84 1/8. Заказ №2. Тираж 100 экз.

PROBLEMS OF COMPUTATIONAL AND APPLIED MATHEMATICS

No. 2(72) 2026

The journal was established in 2015.
6 issues are published per year.

Founder:

Digital Technologies and Artificial Intelligence Development Research Institute.

Editor-in-Chief:

Ravshanov N.

Deputy Editors:

Aripov M.M., Shadimetov Kh.M., Akhmedov D.D.

Executive Secretary:

Ubaydullaev M.Sh.

Editorial Council:

Azamov A.A., Alov R.D., Amirgaliev E.N. (Kazakhstan), Arushanov M.L.,
Burnashev V.F., Djumayozov U.Z., Zagrebina S.A. (Russia), Zadorin A.I. (Russia),
Ignatiev N.A., Ilyin V.P. (Russia), Imankulov T.S. (Kazakhstan), Ismagilov I.I. (Russia),
Kabanikhin S.I. (Russia), Kurbonov N.M., Mamatov N.S., Mirzaev N.M., Muradov F.A.,
Nazirova E.Sh., Normurodov Ch.B., Nuraliev F.M., Opanasenko V.N. (Ukraine),
Sadullaeva Sh.A., Starovoitov V.V. (Belarus), Khayotov A.R., Khaldjigitov A.,
Khamdamov R.Kh., Khujaev I.K., Khujayorov B.Kh., Eshmamatova D.B.,
Dustmurodova Sh.J., Chye En Un (Russia), Shabozov M.Sh. (Tajikistan),
Dimov I. (Bulgaria), Li Y. (USA), Mascagni M. (USA), Min A. (Germany),
Singh M. (South Korea).

The journal is registered by Agency of Information and Mass Communications under the
Administration of the President of the Republic of Uzbekistan.
Certificate of Registration No. 0856 of 5 August 2015.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

At a reprint of materials the reference to the journal is obligatory.
Authors are responsible for the accuracy of the facts and reliability of the information.

Address:

100125, Tashkent, Buz-2, 17A.

Tel.: +(998) 71 263-41-98.

E-mail: journals@airi.uz.

Web-site: <https://journals.airi.uz>.

Layout design:

Sharipov Kh.D.

DTAIRI printing office.

Signed for print 22.04.2026

Format 60x84 1/8. Order No. 2. Print run of 100 copies.

Содержание

Паровик Р.И., Исраиловжанова Г.С.

FracDynZe – компьютерная программа исследования динамики работы сердца в рамках дробного осциллятора Зимана 5

Очилова Н.К.

Уравнения смешанно-составного типа в качестве модели аномальной диффузии в опухолевых тканях 16

Кодиров Р., Боборахимов Б.

Математическая модель процессов изменения напора подземных вод в неоднородных пористых средах 27

Равшанов Н., Ахмад Тирта Дхару Вахью Памбуди, Мухаммад Сафари, Камолiddинова Ф.

Прогнозирование индекса экологического состояния регионов Узбекистана с использованием методов машинного обучения и искусственного интеллекта 42

Шадманов И.У., Иззатуллоев А.Э., Сухендро Бусоно

Дробная модель и устойчивый численный алгоритм для взаимосвязанного переноса тепла и влаги в неоднородных пористых телах 61

Усмонов Л.С.

Математическое моделирование гидродинамического процесса подземного выщелачивания с учетом изменения гидродинамических параметров пористой среды 89

Шакаева Э.Э.

Численное моделирование задачи Коши для сингулярно возмущенного уравнения третьего порядка 109

Алов Р.Д., Овлаева М.Х., Ильяни Абдуллах, Исаева Н.Т.

Явно-неявная разностная схема для двухмерной линейной гиперболической системы с динамическими граничными условиями 122

Болтаев А.К.

Об одной дискретной системе для нахождения коэффициентов весовых оптимальных квадратурных формул 136

Олимов Н.Н.

Применение оптимальной интерполяционной формулы с производной для приближенного интегрирования 147

Твёрдый Д.А.

Асимптотические оценки сложности гибридных алгоритмов численного решения модельного уравнения объемной активности радона с дробной производной переменного порядка 155

Contents

Parovik R.I., Israyiljanova G.S.

FracDynZe is a computer program for studying the dynamics of cardiac function using the fractional Zeeman oscillator 5

Ochilova N.K.

Mixed-composite-type equations as a model of anomalous diffusion in tumor tissues 16

Qodirov R., Boborakhimov B.

Mathematical model of groundwater head variation processes in heterogeneous porous media 27

Ravshanov N., Achmad Tirta Dharu Wahyu Pambudi, Muhammad Safari, Kamolid-dinova F.

Forecasting the environmental health index of Uzbekistan regions using machine learning and artificial intelligence methods 42

Shadmanov I.U., Izzatulloev A.E., Suhendro Busono

Fractional model and robust numerical algorithm for coupled heat and moisture transfer in heterogeneous porous bodies 61

Usmonov L.S.

Mathematical modeling of the hydrodynamic process of in-situ leaching taking into account the changes in hydrodynamic parameters of a porous medium . . . 89

Shakaeva E.E.

Numerical modeling of the Cauchy problem for a third-order singularly perturbed equation 109

Aloev R.D., Ovlaeva M.Kh., Ilyani Abdullah, Issayeva N.T.

An explicit-implicit difference scheme for a two-dimensional linear hyperbolic system with dynamic boundary conditions 122

Boltaev A.K.

On a discrete system for finding the coefficients of weighted optimal quadrature formulas 136

Olimov N.N.

An application of optimal interpolation formula with derivative to approximate integration 147

Tverdyyi D.A.

Asymptotic complexity estimates of hybrid algorithms for the numerical solution of a model equation of radon volume activity with a variable-order fractional derivative 155