УДК 519.624.3

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Шакаева Э.Э.

shakayevae@gmail.com

Термезский государственный университет,

190111 Узбекистан, Термиз, ул. Баркамол авлод, дом 43.

В данной статье представлен высокоточный и эффективный метод - дискретный вариант метода предварительного интегрирования для численного решения задачу Коши для сингулярно возмущенного уравнения третьего порядка. Метод основан на разложение старшей производной дифференциального уравнения в конечный ряд по полиномам Чебышева первого рода с неизвестными коэффициентами разложения. Все низшие производные и приближённое решение дифференциального уравнения определяются путем предварительного интегрирования ряда для старшей производной с применением дискретной формулы интегрирования, понижающий порядок старшей производной. Таким образом, получаются основные алгебраические уравнения в предлагаемом методе. Присоединяя к этим основным уравнениям дополнительные уравнения, полученные из трех начальных условий, получается система линейных алгебраических уравнений для определения неизвестных коэффициентов разложения для предложенного решения. Числа уравнений и числа неизвестных в полученной алгебраической система совпадают. Данная система решается стандартным методом в данной работе она решена методом Гаусса. Результаты расчётов показывают, что при произвольных значениях малого параметра задачи незначительное увеличение количества полиномов Чебышева приводит к уменьшению абсолютных погрешностей со скоростью геометрической прогрессии. Таким образом, предложенный дискретный вариант метода предварительного интегрирования не только является эффективным с вычислительной точки зрения, но являются высокоточным и достаточно универсальным для решения широкого класса задач для сингулярно возмущенных уравнений.

Ключевые слова: полиномы Чебышева, метод предварительного интегрирования, дискретный вариант, задача Коши, сингулярно возмущенные уравнения, алгебраическая система.

Цитирование: *Шакаева Э.Э.* Численное моделирование задачи Коши для сингулярно возмущенного уравнения третьего порядка // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2026. – № 2(72). – С. 109-121.

DOI: https://doi.org/10.71310/pcam.2_72.2026.07

1 Введение

Возмущенная теория ренормализационной группы развита как единый инструмент для глобального асимптотического анализа [1]. На многочисленных примерах авторы данной статье демонстрирует её применение к задачам обыкновенных дифференциальных уравнений, включающих множественные масштабы, граничные слои с технически сложным асимптотическим согласованием. Авторы показывают, что уравнение ренормализационной группы может быть интерпретировано как амплитудное уравнение, и с этой точки зрения развивают редукционную теорию возмущений для уравнений в частных производных, описывающих пространственно- протяжённые системы вблизи точек бифуркации, выводя как амплитудные уравнения, так и центральное многообразие. В работе [2] представлен метод множественных масштабов для решения сингулярно возмущённых задач второго и третьего порядка с пограничным слоем на одном конце - слева или справа. Исходные обыкновенные дифференциальные уравнения второго и третьего порядка преобразуются в уравнения в частных производных. Эти задачи эффективно решаются с использованием метода множественных масштабов, а численные моделирования выполнены на стандартных тестовых примерах для подтверждения надёжности предложенного метода.

В статье [3] разработан новый численный метод для решения класса сингулярно возмущённых краевых задач третьего порядка. Сначала исходная задача преобразуется в систему из двух обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) с соответствующими начальными и граничными условиями. Затем для решения системы ОДУ применяется рациональный спектральный коллокационный метод в барицентрической форме с гиперболическим синусом (sinh-преобразованием). Согласно асимптотическому анализу, положение и ширина пограничного слоя рассматриваемой задачи, которые выбираются в качестве параметров при sinh-преобразовании, могут быть определены. Проведены многочисленные численные эксперименты, демонстрирующие вычислительную эффективность и точность предложенного метода.

В статье [4] представлен численный метод, основанный на методе наименьших квадратов, для решения сингулярно возмущённых дифференциальных уравнений с двухточечными граничными условиями. Кроме того, предлагается интеллектуальный алгоритм, направленный на улучшение данного метода. Этот алгоритм является ключевым, поскольку он определяет неизвестное расположение слоя (пограничного слоя или внутреннего слоя). В рамках оценки эффективности приводится анализ сходимости метода. Численные примеры демонстрируют сверхсходимость интеллектуального алгоритма и подтверждают корректность теоретических результатов.

В работе [5] рассматриваются линейные и нелинейные сингулярно возмущённые задачи с использованием численного подхода, основанного на методе полиномиальной дифференциальной квадратуры. Матрица весовых коэффициентов формируется с использованием полиномов Чебышёва. Для демонстрации точности метода рассматриваются различные классы задач возмущения в качестве тестовых. Результаты квадратурного метода затем сравниваются с аналитическими решениями известных задач.

В работе [6] приведен обзор некоторых асимптотик решений сингулярно возмущенных систем уравнений переноса, а также представлены новые результаты. Особенностью рассмотренных задач является принадлежность к так называемому критическому случаю, когда вырожденное решение является однопараметрическим семейством. При определенных условиях это приводит к быстрому установлению динамического равновесия между компонентами решения и последующему переносу с «осредненной» скоростью. Области больших градиентов начальных условий порождают внутренние слои, которые могут описываться линейными параболическими уравнениями и их обобщениями — уравнениями типа Бюргерса, Бюргерса—Кортевега—де Фриса. В [7] исследованы задачи сингулярного возмущения с большими смешанными сдвигами с использованием двух методов, а также проведён их сравнительный анализ.

В статье [8] рассматривается задача Коши для сингулярно возмущенного обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка с, вообще говоря, нелинейной правой частью, зависящей, помимо искомой функции, еще и от этой же функции, но взятой с запаздыванием по времени. Рассмотренная задача является сингулярно возмущенной благодаря наличию малого параметра перед производной по времени. Для таких задач характерны решения, обладающие большим градиентом в окрестности начального момента времени и в окрестности момента, равного времени запаздывания. Целью статьи является построение асимптотического приближения и доказательство существования гладкого решения задачи.

Целью работы [9] — всесторонне исследовать теоретические и численные методы анализа и решения задач сингулярных возмущений в обыкновенных дифференциальных уравнениях. Особое внимание уделяется пониманию поведения, вызываемого малым параметром, и разработке устойчивых численных методов для точного воспроизведения этих особенностей.

В работе [10] представлена эффективная численная методика для решения сингулярно возмущённых краевых задач третьего порядка типа реакция–диффузия. Метод основан на сочетании перезапускаемого метода разложения Адемана и метода пристрелки. В исследовании даётся полное изложение совмещённого численного подхода и демонстрируется его применение к рассматриваемому классу дифференциальных уравнений третьего порядка. Эффективность предложенного метода подтверждается на тестовых примерах. Наконец, высокий уровень соответствия между полученным приближённым решением и точным решением показан с помощью сравнительных таблиц и графиков.

В исследовании [11] предлагается волновой многомасштабный интерполяционный метод Галеркина (WMIGM) для решения линейных сингулярно возмущённых краевых задач. В отличие от традиционных волновых схем, предложенный алгоритм может быть легко расширен для использования специальных техник генерации узлов, таких как узлы Шишкина. Такой волновой метод позволяет осуществлять высокий уровень локальной детализации распределения узлов для эффективного захвата локализованных резких градиентов. Результаты показывают, что использование модифицированных узлов Шишкина позволяет значительно уменьшить численные колебания вблизи пограничного слоя. По сравнению со многими другими методами, предложенный метод демонстрирует удовлетворительную точность и эффективность. Теоретические и численные результаты показывают, что порядок ε – равномерной сходимости этого волнового метода может достигать 5.

В статье [12] построена асимптотика решения задачи Коши для нелинейного автономного обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка, который является простой математической моделью с внутренним слоем. Для всех теоретических вычислений приведены доказательные вычисления в системе Maple.

В исследовании [13] рассматривается задача численного решения сингулярно возмущённых сингулярных краевых задач третьего порядка. Для учёта сингулярностей применяется метод sinc-аппроксимации, позволяющий свести исходную задачу к системе линейных алгебраических уравнений. Такой подход повышает вычислительную эффективность и обеспечивает простоту реализации метода. Кроме того, исследуются свойства сходимости и приводятся оценки погрешности предложенного метода. Эффективность разработанного подхода демонстрируется на нескольких численных примерах.

В [14] рассматривается обратная задача, связанная с дробным дифференциальным уравнением в частных производных. Данное уравнение связано с дифференциальным уравнением, определяемым многочленами Чебышёва первого рода. Установлены условия существования и единственности решения для заданного дробного эволюционного уравнения.

В [15] представлен численный метод, основанный на коллокации Чебышёва, для решения обобщённых уравнений пантографа с переменными коэффициентами и линейными функциональными аргументами. Нелинейные дифференциальные уравнения пантографа преобразуются в систему нелинейных алгебраических уравнений, имеющих матричное представление и решаемых с использованием численного алгоритма.

В статье [16] рассматривается применение схемы типа Самарского на сетке Шишкина, а также обсуждаются её преимущества по сравнению со встречной схемой при решении линейной одномерной сингулярно возмущённой задачи конвекции–диффузии. Одним из преимуществ является то, что схемы типа Самарского обладают точностью первого порядка, равномерной по параметру возмущения. Кроме того, они обеспечивают почти равномерную точность второго порядка на компоненте решения, соответствующей пограничному слою.

Численное моделирование краевой задачи для неоднородного сингулярно возмущенного уравнения второго порядка непрерывным вариантом метода предварительного интегрирования предлагается в [17]. В статье [18] неоднородное сингулярно возмущенное уравнение четвёртого порядка численно моделируется дискретным вариантом метода предварительного интегрирования. В методах работ [12–18] в качестве базисных функций используются полиномы Чебышева первого рода. Проведенные в этих работах численные расчёты показывают высокую точность и эффективность применяемых методов в значительно малых значениях параметра.

В статье [19] предложен дискретный вариант метода предварительного интегрирования для численного решения неоднородного бигармонического уравнения. Частные производные уравнения представлены в виде конечных двойных рядов по полиномам Чебышева первого рода с неизвестными коэффициентами разложения. Проведенные численные расчеты, выполненные с использованием выбранных различных пробных функций, показывают высокую точность и эффективность предложенного метода. Целью статье [20] является построение высокоточного и эффективного численного метода для исследования динамики производных различных порядков сингулярно возмущенного дифференциального уравнения четвертого порядка. В применяемом непрерывном варианте метода предварительного интегрирования старшая производная и правая часть уравнения представляются в виде конечных рядов по полиномам Чебышева первого рода с неизвестными коэффициентами разложения. Неизвестные коэффициенты определяются из системы алгебраических уравнений и, подставляя их в нужный ряд, исследуются производные различного порядка и решение поставленной задачи.

2 Постановка задачи

В статье [2] задача Коши для сингулярно возмущенного уравнения была исследована на отрезке $[0, 1]$ с применением метода множественных масштабов при следующих значениях малого параметра $\varepsilon = 0,3; 0,4; 0,6; 0,8$, и построено приближённое асимптотическое решение. В данной работе задача рассмотренная в работе [2] исследуется с применением дискретного варианта метода предварительного интегрирования, где в качестве базисных функций используются полиномы Чебышева первого рода.

Таким образом, требуется найти приближённое решение сингулярно возмущенного дифференциального уравнения дискретным вариантом метода предварительного интегрирования:

$$8\varepsilon^{3/2}\frac{d^3y}{dt^3}+4\left(\varepsilon^{1/2}+\varepsilon+\varepsilon^{3/2}\right)\frac{d^2y}{dt^2}+2\left(1+\varepsilon^{1/2}+\varepsilon\right)\frac{dy}{dt}+y=0,\quad t\in(-1,1),\tag{1}$$

при следующих начальных условиях:

$$y(-1)=3,\quad y'(-1)=\frac{-1-\varepsilon^{-1/2}-\varepsilon^{-1}}{2},\quad y''(-1)=\frac{1+\varepsilon^{-1}+\varepsilon^{-2}}{4},\tag{2}$$

где ε – малый параметр.

Точное решение задачи (1)–(2) имеет следующий вид [1]:

$$y(t)=e^{-(t+1)/2}+e^{-(t+1)/(2\varepsilon^{1/2})}+e^{-(t+1)/(2\varepsilon)}.\tag{3}$$

3 Метод решения

Для численного решения поставленной задачи применяем дискретный вариант метода предварительного интегрирования. Основная идея данного метода заключается в следующем. Старшая производная уравнения (1) ищется в виде конечных рядов по полиномам Чебышева первого рода с неизвестными коэффициентами. До решения дифференциальной задачи (1)–(2) ряд для старшей производной предварительно трёхкратно "интегрируется" с применением дискретной формулы, предназначенной для понижения порядка производной. Главным достоинством данного подхода заключается в том, что при интегрировании конечного ряда Чебышева гладкость аппроксимирующих полиномов увеличивается. Например, при однократном интегрировании полином нулевого порядка превращается в полином первого порядка и так далее. А это в свою очередь, положительно влияет на точность расчётов. Начальные условия задачи за счет выбора соответствующих уравнений для неизвестных коэффициентов удовлетворяются точно, таким образом, дискретный вариант метода предварительного интегрирования позволяет найти приближенное решение задачи с достаточно высокой точностью при умеренных значениях малого параметра ε. В коллокационных узлах полиномов Чебышева сравниваются пробная функция (точное решение) поставленной задачи (3) с приближенным решением полученным дискретным вариантом метода предварительного интегрирования.

Изложим алгоритм предлагаемого метода. Третью производную уравнение (1) представим в виде следующего ряда:

$$\frac{d^3y_a}{dt^3}=\sum_{i=0}^{N}a_i^{(3t)}T_i(t),\tag{4}$$

где через y_a обозначено приближённое решение задачи, т.е. $y_a=\sum_{i=0}^{N}a_iT_i(t)$ – полином Чебышёва первого рода i – го порядка, штрих над знаком суммы означает, что коэффициент ряда a_i берутся со множителем $\frac{1}{2}$ когда $i=0$, a_i — неизвестные коэффициенты разложения.

Ряд (4) для приближённого решения трижды интегрируем и находим все низшие производные, а также приближённое решение задачи в виде конечных рядов по полиномам Чебышёва первого рода:

$$\frac{d^2y_a}{dt^2}=\sum_{i=0}^{N}a_i^{(2t)}T_i(t),\quad \frac{dy_a}{dt}=\sum_{i=0}^{N}a_i^{(t)}T_i(t),\quad y_a(t)=\sum_{i=0}^{N}a_iT_i(t). \tag{5}$$

Далее, подставляя ряд (4) и необходимые ряды из (5) в дифференциальное уравнение (1), получаем

$$8\varepsilon^{3/2}\sum_{i=0}^{N}a_i^{(3t)}T_i(t)+4\left(\varepsilon^{1/2}+\varepsilon+\varepsilon^{3/2}\right)\sum_{i=0}^{N}a_i^{(2t)}T_i(t)+$$
$$+2\left(1+\varepsilon^{1/2}+\varepsilon\right)\sum_{i=0}^{N}a_i^{(t)}T_i(t)+\sum_{i=0}^{N}a_iT_i(t)=0,\quad i=3,4,\ldots,N.$$

Затем, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях полиномов, получаем алгебраическую систему следующего вида:

$$8\varepsilon^{3/2}a_i^{(3t)}+4\left(\varepsilon^{1/2}+\varepsilon+\varepsilon^{3/2}\right)a_i^{(2t)}+2\left(1+\varepsilon^{1/2}+\varepsilon\right)a_i^{(t)}+a_i=0,\quad i=3,4,\ldots,N. \tag{6}$$

Для полиномов Чебышёва первого рода имеется следующая дискретная формула предварительного интегрирования, которая понижает порядок производной ряда (4):

$$a_i^{((k-1)t)}=\frac{a_{i-1}^{(kt)}-a_{i+1}^{(kt)}}{2i}. \tag{7}$$

Уравнение (6) интегрируем трижды, используя формулу (7):

а) первое интегрирование

$$8\varepsilon^{3/2}a_i^{(2t)}+4\left(\varepsilon^{1/2}+\varepsilon+\varepsilon^{3/2}\right)a_i^{(t)}+2\left(1+\varepsilon^{1/2}+\varepsilon\right)a_i+\frac{a_{i-1}-a_{i+1}}{2i}=0,\ \ i=3,4,\ldots,N;$$

б) после второго интегрирования имеем основное алгебраическое уравнение относительно неизвестных коэффициентов a_i:

$$8\varepsilon^{3/2}a_i^{(t)}+4\left(\varepsilon^{1/2}+\varepsilon+\varepsilon^{3/2}\right)a_i+2\left(1+\varepsilon^{1/2}+\varepsilon\right)\frac{a_{i-1}-a_{i+1}}{2i}+$$
$$+\frac{a_{i-2}-a_i}{4i(i-1)}-\frac{a_i-a_{i+2}}{4i(i+1)}=0,\ \ i=3,4,\ldots,N;$$

в) и, наконец, после третьего интегрирования имеем искомые основные алгебраические уравнения:

$$\begin{gathered}8\varepsilon^{3/2}a_i+4\left(\varepsilon^{1/2}+\varepsilon+\varepsilon^{3/2}\right)\frac{a_{i-1}-a_{i+1}}{2i}+\\ +2\left(1+\varepsilon^{1/2}+\varepsilon\right)\left(\frac{a_{i-2}-a_i}{4i(i-1)}-\frac{a_i-a_{i+2}}{4i(i+1)}\right)+\\ +\frac{a_{i-3}-a_{i-1}}{8i(i-1)(i-2)}-\frac{a_{i-1}-a_{i+1}}{8i^2(i-1)}-\\ -\frac{a_{i-1}-a_{i+1}}{8i^2(i+1)}+\frac{a_{i+1}-a_{i+3}}{8i(i+1)(i+2)}=0,\quad i=3,4,\ldots,N.\end{gathered} \tag{8}$$

Последний ряд для приближенного решения в (5) имеет $(N+1)$ неизвестных коэффициентов a_i, $(i = 0, 1, 2, \ldots, N)$, основная алгебраическая система (8) имеет $(N-2)$ уравнения, недостающие три уравнения определяются из начальных условий (2), записанные через конечных рядов по полиномам Чебышева. С учетом следующих свойств полиномов Чебышева

$$T_i(-1) = (-1)^i, \qquad T_i'(-1) = (-1)^{i+1} i^2, \qquad T_i''(-1) = (-1)^i \frac{i^2(i^2-1)}{3},$$

начальные условия (2) записываются в виде:

$$\begin{cases} u(-1) = \dfrac{1}{2}a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + a_N = 3, \\ u'(-1) = a_1 - 4a_2 + 9a_3 + \cdots + (-1)^{N+1} N^2 a_N = \dfrac{-1 - \varepsilon^{-1/2} - \varepsilon^{-1}}{2}, \\ u''(-1) = 4a_2 - 24a_3 + 80a_4 + \cdots + (-1)^N \dfrac{N^2(N^2-1)}{3} a_N = \dfrac{1 + \varepsilon^{-1} + \varepsilon^{-2}}{4}. \end{cases} \tag{9}$$

Основные алгебраические уравнения (8) совместно с краевыми условиями (9) образуют систему $(N+1)$ линейных алгебраических уравнений для определения $(N+1)$ неизвестных a_i, $(i = 0, 1, 2, \ldots, N)$.

Данная алгебраическая система имеет вид:

$$\begin{cases} Q_1 a_{i-3} + Q_2 a_{i-2} + Q_3 a_{i-1} + Q_4 a_i + Q_5 a_{i+1} + Q_6 a_{i+2} + Q_7 a_{i+3} = 0, \quad i = 3, 4, \ldots, N, \\ \dfrac{1}{2}a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + a_N = 3, \\ a_1 - 4a_2 + 9a_3 + \cdots + (-1)^{N+1} N^2 a_N = \dfrac{-1 - \varepsilon^{-1/2} - \varepsilon^{-1}}{2}, \\ 4a_2 - 24a_3 + 80a_4 + \cdots + (-1)^N \dfrac{N^2(N^2-1)}{3} a_N = \dfrac{1 + \varepsilon^{-1} + \varepsilon^{-2}}{4}, \end{cases} \tag{10}$$

где

$$Q_1 = i(i+1)(i+2),$$

$$Q_2 = 4\big(1 + \varepsilon^{1/2} + \varepsilon\big)\, i(i+1)(i^2-4),$$

$$Q_3 = 16\big(\varepsilon^{1/2} + \varepsilon + \varepsilon^{3/2}\big)\, i(i^2-1)(i^2-4) - \\ - i(i+1)(i+2) - (i+1)(i^2-4) - (i-1)(i^2-4),$$

$$Q_4 = 64\varepsilon^{3/2} i^2(i^2-1)(i^2-4) - 4\big(1 + \varepsilon^{1/2} + \varepsilon\big) i(i+1)(i^2-4) - \\ - 4\big(1 + \varepsilon^{1/2} + \varepsilon\big) i(i-1)(i^2-4),$$

$$Q_5 = -16\big(\varepsilon^{1/2} + \varepsilon + \varepsilon^{3/2}\big)\, i(i^2-1)(i^2-4) + (i+1)(i^2-4) + \\ + (i-1)(i^2-4) + i(i-1)(i-2),$$

$$Q_6 = 4\big(1 + \varepsilon^{1/2} + \varepsilon\big)\, i(i-1)(i^2-4),$$

$$Q_7 = -i(i-1)(i-2).$$

Систему (10) удобно записать в матричном виде

$$Aa = b, \tag{11}$$

где A — квадратная матрица порядка $M \times M$, здесь $M = (N+1)$, состоящая из коэффициентов системы (10), $a^T = (a_0, a_1, \dots, a_N)$ — искомый вектор для неизвестных коэффициентов, T — знак транспонирования. Решая систему (10), определяются коэффициенты a_i $(i = 0, 1, 2, \dots, N)$, затем по формулам (3) вычисляются значения точного решения, а по формуле (5) значения приближенного решения в коллокационных узлах полиномов Чебышева $y_l = \cos\frac{\pi l}{N}, \quad l = 0, 1, 2, \dots, N$.

4 Обсуждение результатов

Дифференциальная задача (1)–(2) для сравнения с результатами работе [2] решена дискретным методом предварительного интегрирования при значениях малого параметра $\varepsilon = 0.3$; 0.4; 0.6; 0.8 и когда число аппроксимирующих многочленов равно $N = 4$; 8. В табл. 1 приведены результаты вычислений при значении малого параметра $\varepsilon = 0.3$. В табл. 1 приведено сравнение точных и приближённых решений при $N = 4$; 8 в коллокационных узлах многочленов Чебышёва. $\Delta = |u_e - u_a|$ — абсолютная погрешность.

Результаты сравнения точного и приближённого решения в коллокационных узлах t_l $(l = 0, 1, \dots, N)$ при $\varepsilon = 0.3$ и $N = 4$; 8 приведены в табл. 1.

Таблица 1. Сравнение точного и приближенного решения

ε	N	l	$y_e(t_l)$ -точное решение	$y_a(t_l)$ -приближенное решение	Абсолютная погрешность Δ
0.3	4	1	2.2429163470015996	2.2466750802824462	3.759×10^{-3}
		2	1.1967765253084452	1.2538556594490946	5.708×10^{-2}
		3	0.6945020374803231	0.78626736642556	9.177×10^{-2}
		4	0.5646515223453213	0.6685057096743415	1.039×10^{-1}
	8	1	2.7763765568568406	2.7763769298559327	3.73×10^{-7}
		3	1.6610415888721144	1.6610821558479265	4.057×10^{-5}
		5	0.8837424121721379	0.8838461157322888	1.037×10^{-4}
		7	0.5953409784903865	0.5954636548826853	1.227×10^{-4}

Из результатов видно, что абсолютные погрешности и в дискретном варианте метода предварительного интегрирования уменьшаются со скоростью геометрической прогрессии. Графические представления результатов табл. 1, полученных предложенным в этой работе методом, изображены на рис. 1.

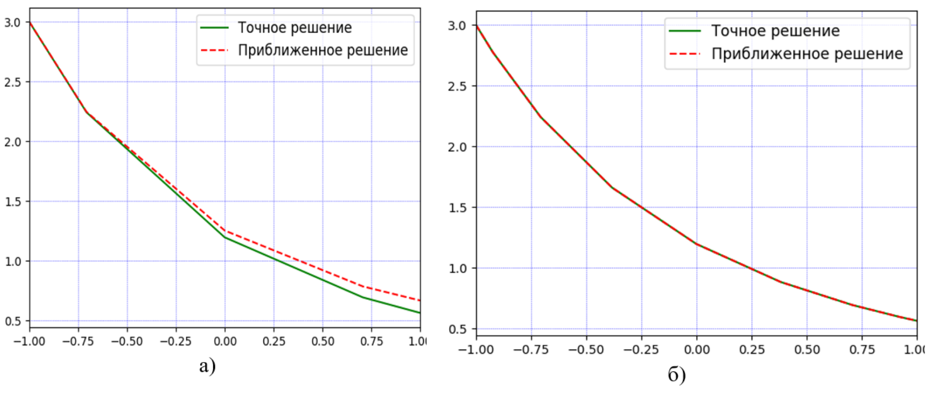


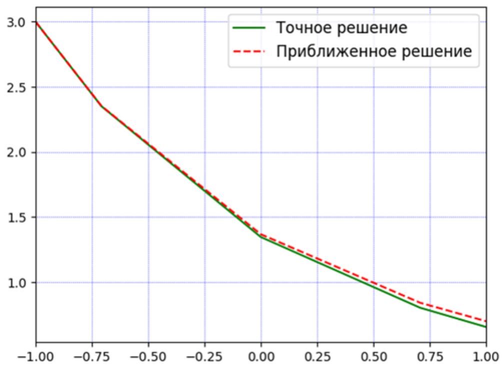
Рис. 1 Сравнение точного и приближенного решения при $\varepsilon = 0.3$: а) $N = 4$; б) $N = 8$.

Результаты сравнения точного и приближенного решения в коллокационных узлах t_l $(l = 0, 1, \dots, N)$ при $\varepsilon = 0.4$ и $N = 4$; 8 приведены в табл. 2.

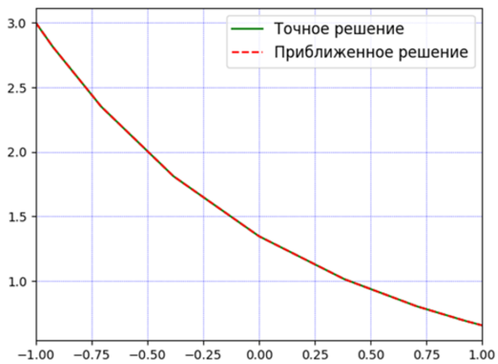
Таблица 2. Сравнение точного и приближенного решения

ε	N	l	$y_e(t_l)$ -точное решение	$y_a(t_l)$ -приближенное решение	Абсолютная погрешность Δ
0.4	4	1	2.350494953967214	2.351780204840561	1.285×10^{-3}
		2	1.3466218993638472	-0.4663711627394989	2.133×10^{-2}
		3	0.8036230440774342	0.841935860684708	3.831×10^{-2}
		4	0.6557051008791557	0.7000200665733444	4.431×10^{-2}
	8	1	2.8134873932163145	2.8134874355754937	4.236×10^{-8}
		3	1.8105168812581744	1.810521901815747	5.021×10^{-6}
		5	1.01365336876735	1.0136677476442513	1.438×10^{-5}
		7	0.690931927476146	0.6909501693386964	1.824×10^{-5}

Из результатов видно, что абсолютные погрешности и в дискретном варианте метода предварительного интегрирования уменьшаются со скоростью геометрической прогрессии. Графические представления результатов табл. 2, полученных предложенным в этой работе методом, изображены на рис. 2.



а)



б)

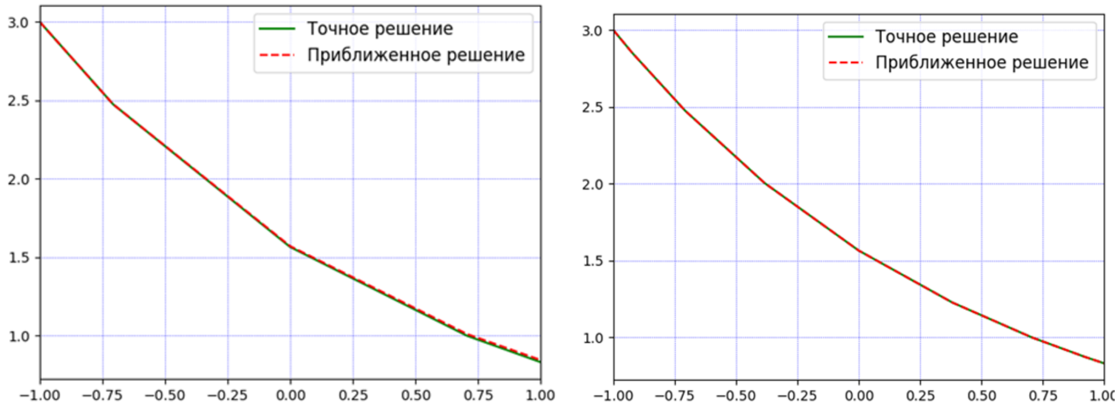
Рис. 2 Сравнение точного и приближенного решения при $\varepsilon = 0.4$: а) $N = 4$; б) $N = 8$.

Результаты сравнения точного и приближенного решения в коллокационных узлах $t_l\,(l = 0, 1, \dots, N)$ при $\varepsilon = 0.6$ и $N = 4$; 8 приведены в табл. 3.

Таблица 3. Сравнение точного и приближенного решения

ε	N	l	$y_e(t_l)$ -точное решение	$y_a(t_l)$ -приближенное решение	Абсолютная погрешность Δ
0.6	4	1	2.4749340062261984	2.4752273022841504	2.933×10^{-4}
		2	1.565530600171399	1.5708954583968258	5.365×10^{-3}
		3	0.9992162561507302	1.0101486756695182	1.093×10^{-2}
		4	0.8317522204829333	0.8448233602499551	1.307×10^{-2}
	8	1	2.853243345365659	2.853243347202623	1.837×10^{-9}
		3	2.0036149832835446	2.0036152220212817	2.387×10^{-7}
		5	1.2264559390996446	1.2264567175225145	7.784×10^{-7}
		7	0.8722425168341825	0.8722435923900204	1.076×10^{-6}

Из результатов видно, что абсолютные погрешности и в дискретном варианте метода предварительного интегрирования уменьшаются со скоростью геометрической прогрессии. Графические представления результатов табл. 3, полученных предложенным в этой работе методом, изображены на рис. 3.



а) б)

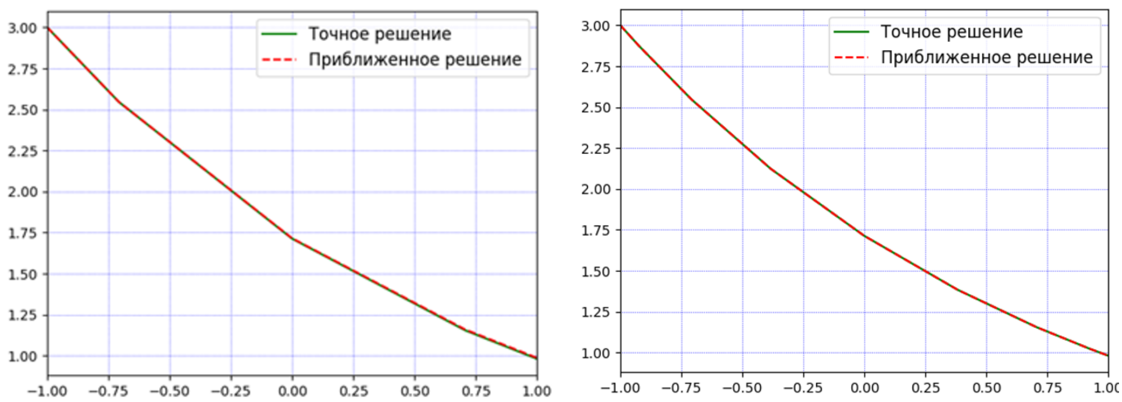
Рис. 3 Сравнение точного и приближенного решения при $\varepsilon = 0.6$: а) $N = 4$; б) $N = 8$.

Результаты сравнения точного и приближенного решения в коллокационных узлах $t_l\,(l = 0, 1, \ldots, N)$ при $\varepsilon = 0.8$ и $N = 4$; 8 приведены в табл. 4.

Таблица 4. Сравнение точного и приближенного решения

ε	N	l	$y_e(t_l)$ -точное решение	$y_a(t_l)$ - приближенное решение	Абсолютная погрешность Δ
0.8	4	1	2.545460758703096	2.545577620407011	1.169×10^{-4}
		2	1.7135629298734112	1.7158130587916516	2.25×10^{-3}
		3	1.1550389398992182	1.1599576672582688	4.919×10^{-3}
		4	0.9813061333833903	0.9873141750564524	6.008×10^{-3}
	8	1	2.874533653274259	2.874533653505867	2.316×10^{-10}
		3	2.1224789450615997	2.122478976680445	3.162×10^{-8}
		5	1.383953883425094	1.3839539942563743	1.108×10^{-7}
		7	1.0237491816534123	1.0237493426054658	1.61×10^{-7}

Из результатов видно, что абсолютные погрешности и в дискретном варианте метода предварительного интегрирования уменьшаются со скоростью геометрической прогрессии. Графические представления результатов табл. 4, полученных предложенным в этой работе методом, изображены на рис. 4.



а) б)

Рис. 4 Сравнение точного и приближенного решения при $\varepsilon = 0.8$: а) $N = 4$; б) $N = 8$.

5 Заключение

Численное моделирование задачу Коши для сингулярно возмущенного уравнения третьего порядка дискретным вариантом метода предварительного интегрирования позволяет вычислить приближенное решение задачи с вычислительной точки зрения эффективно и с высокой точностью, при этом абсолютные погрешности в предлагаемом методе уменьшаются со скоростью геометрической прогрессии при произвольных значениях малого параметра задачи и при незначительном увеличении количества аппроксимирующих полиномов Чебышева первого рода.

Результаты расчётов, полученные в данной работе сравнены с результатами полученными другими авторами [2] в графическом виде с использованием метода множественных масштабов. Обнаружены хорошее согласие динамики графических результатов. Однако, следует подчеркнуть, что точность дискретного варианта метода предварительного интегрирования выше, чем точности метода множественных масштабов.

Литература

[1] *Chen L.Y., Goldenfeld N., Oono Y.* Renormalization group and singular perturbations: Multiple scales, boundary layers, and reductive perturbation theory // Physical Review E. – 1996. – Vol. 54. – No. 1. – P. 376-394. – doi: `http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevE.54.376`

[2] *Gupta P., Kumar M.* Multiple-Scales Method and Numerical Simulation of Singularly Perturbed Boundary Layer Problems // Applied Mathematics Information Sciences: An International Journal. – 2016. – Vol. 10. – No. 3. – P. 1119-1127. – doi: `http://dx.doi.org/10.18576/amis/100330`

[3] *Chen S., Wang Y.* A rational spectral collocation method for third-order singularly perturbed problems // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2016. – Vol. 307. – P. 93-105.

[4] *Ahmadinia M., Safari Z.* Numerical solution of singularly perturbed boundary value problems by improved least squares method // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2018. – Vol. 331. – P. 156-165. – doi: `http://dx.doi.org/10.1016/j.cam.2017.09.023`

[5] *Yigit G., Bayram M.* Chebyshev Differential Quadrature for Numerical Solutions of Third- and Fourth-Order Singular Perturbation Problems // Proceedings of the National Academy of Sciences, India, Section A: Physical Sciences. – 2019. – doi: `http://dx.doi.org/10.1007/s40010-019-00605-8`

[6] *Нестеров А.В.* Об асимптотике решения задачи Коши для сингулярно возмущенной системы уравнений переноса с малой нелинейной диффузией // Итоги науки и техники. Современная математика и её приложения. Тематические обзоры. – 2021. – Т. 192. – С. 84-93. – doi: `http://dx.doi.org/10.36535/0233-6723-2021-192-84-93`

[7] *Hammachukiattikul P., Sekar E., Tamilselvan A., et al.* Comparative study on numerical methods for singularly perturbed advanced-delay differential equations // Journal of Mathematics. – 2021. – Vol. 2021. – 6636607. – doi: `http://dx.doi.org/10.1155/2021/6636607`

[8] *Левашова Н.Т., Михеев Н.А.* Задача Коши для сингулярно возмущенного уравнения с запаздывающим аргументом // Вестник Московского университета. Серия 3: Физика. Астрономия. – 2023. – Т. 78. – № 5. – 2350103.

[9] *Atiyaha N.A.H., Atshanb M.Q.* Theoretical and Numerical Analysis of Singular Perturbation Problems in Ordinary Differential Equations // Journal of Al-Qadisiyah for Computer Science and Mathematics. – 2024. – Vol. 16. – No. 3. – P. 63-70.

[10] *Alzaid N., Alzahrani K., Bakodah H.* Efficient Numerical Technique for Reaction-Diffusion Singularly Perturbed Boundary-Value Problems // European Journal of Pure and Applied Mathematics. – 2024. – Vol. 17. – No. 4. – P. 4211-4224.

[11] *Wang J., Pan G., Zhou Y., Liu X.* Wavelet Multi-Resolution Interpolation Galerkin Method for Linear Singularly Perturbed Boundary Value Problems // Computer Modeling in Engineering Sciences. – 2024. – Vol. 139. – No. 1. – P. 297-318.

[12] *Эркебаев У.З., Сулайманов З.М.* Нелинейная сингулярно возмущенная задача Коши с внутренним слоем // Physical Mathematical Sciences. – 2023. – № 94(1). – С. 8-12. – doi: http://dx.doi.org/10.33619/2414-2948/94/01

[13] *Alipanah A., Mohammadi K., Haji R.M.* Numerical solution of singularly perturbed singular third order boundary value problems with nonclassical sinc method // Results in Applied Mathematics. – 2024. – Vol. 22. – 100459.

[14] *Beroudj M.E., Mennounil A.* Chebyshev polynomials of the first kind for solving a novel fractional inverse problem // Authorea. – 2025. – doi: http://dx.doi.org/10.22541/au.174034993.35305786/v1

[15] *Mohamed O., Rihan F.A.* Chebyshev collocation method for pantograph delay differential equations with linear functional arguments // Interplay of Fractals and Complexity in Mathematical Modelling and Physical Patterns. – Cham: Springer, 2025. – P. 233-251.

[16] *Vulanović R., Nhan T.A.* Advantages of the Samarskii-type schemes on the Shishkin mesh // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2025. – Vol. 470. – 116688. – doi: http://dx.doi.org/10.1016/j.cam.2025.116688

[17] *Normurodov Ch., Djurayeva N., Anuar M.S., Deraman F., Asi S.M.* One Effective Method for Solving Singularly Perturbed Equations // Malaysian Journal of Science. – 2025. – Vol. 44. – No. 1. – P. 62-68. – https://mjs.um.edu.my

[18] *Нормуродов Ч.Б., Шакаева Э.Э., Зиякулова Ш.А.* Дискретный вариант метода предварительного интегрирования и его применение к численному ришению сингулярно возмущенного уравнения // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2025. – № 2(64). – С. 74-86.

[19] *Normurodov Ch., Ziyakulova Sh.A., Murodov S.K.* On the highly accurate and efficient method for solving the biharmonic equation // International Journal of Applied Mathematics. – 2025. – Vol. 38. – No. 4. – P. 437-453. – doi: http://dx.doi.org/10.12732/ijam.v38i4.1

[20] *Нормуродов Ч.Б., Джураева Н.Т., Норматова М.М.* Высокоточный и эффективный метод исследования динамики производных разных порядков сингулярно возмущенного уравнения // Чебышевский сборник. – 2025. – Т. 26. – № 4. – С. 357-369.

UDC 519.624.3

NUMERICAL MODELING OF THE CAUCHY PROBLEM FOR A THIRD-ORDER SINGULARLY PERTURBED EQUATION

Shakaeva E.E.

shakayevae@gmail.com

Termiz state university,

43, Barkamol Avlod Str., Termez, 190111 Uzbekistan.

This article presents a highly accurate and efficient method—a discrete version of the preintegration method—for numerically solving the Cauchy problem for a singularly perturbed third-order equation. The method is based on expanding the highest derivative of the differential equation into a finite series in Chebyshev polynomials of the first kind with unknown expansion coefficients. All lower derivatives and an approximate solution to the differential equation are determined by preintegrating the series for the highest derivative using a discrete integration formula that reduces the order of the highest derivative. This yields the fundamental algebraic equations of the proposed method. By adding additional equations derived from three initial conditions to these fundamental equations, a system of linear algebraic equations is obtained for determining the unknown expansion coefficients for the proposed solution. The number of equations and the number of unknowns in the resulting algebraic system coincide. This system is solved by a standard method; in this paper, it is solved by the Gaussian method. The calculation results show that for arbitrary values of the small problem parameter, a slight increase in the number of Chebyshev polynomials leads to a geometrically progressive reduction in absolute errors. Thus, the proposed discrete version of the pre-integration method is not only computationally efficient but also highly accurate and sufficiently versatile for solving a wide range of problems involving singularly perturbed equations.

Keywords: Chebyshev polynomials, preliminary integration method, discrete version, Cauchy problem, singularly perturbed equations, algebraic system.

Citation: Shakaeva E.E. 2026. Numerical modeling of the Cauchy problem for a third-order singularly perturbed equation. *Problems of Computational and Applied Mathematics.* 2(72): 109-121.

DOI: https://doi.org/10.71310/pcam.2_72.2026.07

№ 2(72) 2026

ISSN 2181-8460

HISOBLASH VA AMALIY MATEMATIKA MUAMMOLARI

ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

PROBLEMS OF COMPUTATIONAL AND APPLIED MATHEMATICS

AiRI
RAQAMLI TEXNOLOGIYALAR VA SUN'IY INTELLEKTNI
RIVOJLANTIRISH ILMIY-TADQIQOT INSTITUTI

ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

№ 2(72) 2026

Журнал основан в 2015 году.
Издается 6 раз в год.

Учредитель:
Научно-исследовательский институт развития цифровых технологий и искусственного интеллекта.

Журнал зарегистрирован в Агентстве информации и массовых коммуникаций при Администрации Президента Республики Узбекистан.
Свидетельство №0856 от 5 августа 2015 года.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

Адрес редакции:
100125, г. Ташкент, м-в. Буз-2, 17А.
Тел.: +(998) 71 263-41-98.
Э-почта: journals@airi.uz.
Веб-сайт: https://journals.airi.uz.

Дизайн и вёрстка:
Шарипов Х.Д.

Отпечатано в типографии НИИ РЦТИИ.
Подписано в печать 22.04.2026 г.
Формат 60x84 1/8. Заказ №2. Тираж 100 экз.

PROBLEMS OF COMPUTATIONAL AND APPLIED MATHEMATICS

No. 2(72) 2026

The journal was established in 2015.
6 issues are published per year.

Founder:
Digital Technologies and Artificial Intelligence Development Research Institute.

The journal is registered by Agency of Information and Mass Communications under the Administration of the President of the Republic of Uzbekistan.
Certificate of Registration No. 0856 of 5 August 2015.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

Address:
100125, Tashkent, Buz-2, 17A.
Tel.: +(998) 71 263-41-98.
E-mail: journals@airi.uz.
Web-site: https://journals.airi.uz.

Layout design:
Sharipov Kh.D.

DTAIRI printing office.
Signed for print 22.04.2026
Format 60x84 1/8. Order No. 2. Print run of 100 copies.

Содержание

Contents