УДК 519.6

ДРОБНАЯ МОДЕЛЬ И УСТОЙЧИВЫЙ ЧИСЛЕННЫЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ ВЗАИМОСВЯЗАННОГО ПЕРЕНОСА ТЕПЛА И ВЛАГИ В НЕОДНОРОДНЫХ ПОРИСТЫХ ТЕЛАХ

[1*] ***Шадманов И.У.***, [1] ***Иззатуллоев А.Э.***, [2] ***Сухендро Бусоно***

*i.u.shadmanov@buxdu.uz

[1]Бухарский государственный университет,
200118, Узбекистан, Бухара, ул. М. Икбол дом 11;
[2]Университет Мухаммадии в Сидоарджо,
61215, Индонезия, г. Сидоарджо, Джл. Моёпахит 666Б.

В работе представлена многомерная математическая модель и устойчивый численный алгоритм второго порядка точности для моделирования связанных процессов переноса тепла и влаги с газовым потоком под давлением. Модель на основе дробных производных Капуто ($0 < \alpha \leqslant 1$) учитывает эффекты памяти и аномальную диффузию в неоднородных пористых средах, объединяя конвекцию, фазовые переходы и динамику давления. Учтены тепло- и влагообмен с внешней средой, внутренние источники, солнечное излучение и пространственная переменность коэффициентов переноса. Для решения системы разработана стабильная разностная схема высокого порядка, обеспечивающая вычислительную эффективность. Численные эксперименты позволяют прогнозировать пространственно-временную эволюцию полей температуры, влажности и давления. Результаты демонстрируют влияние неоднородности материала и суточной радиации на формирование локальных зон перегрева и влагонакопления, определяющих общую динамику процессов хранения и сушки.

Ключевые слова: математическая модель, дробная производная Капуто, теплоперенос, влагоперенос, внутреннее тепловлаговыделение, неоднородное пористое тело.

Цитирование: *Шадманов И.У., Иззатуллоев А.Э., Сухендро Бусоно* Дробная модель и устойчивый численный алгоритм для взаимосвязанного переноса тепла и влаги в неоднородных пористых телах // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2026. – № 2(72). – С. 61-88.

DOI: https://doi.org/10.71310/pcam.2_72.2026.05

1 Введение

Современные процессы хранения и обработки сельскохозяйственной продукции требуют точного количественного описания взаимосвязанных переносных процессов тепла и влаги в пористых средах. В условиях неоднородности материалов, переменной степени влажности и воздействия внешних факторов (солнечное излучение, климатические колебания, режимы хранения) характер эволюции температуры, влажности и давления становится сложным и нередуцируемым к классическим моделям, основанным на локальных и памяти-независимых уравнениях. В таких системах существенную роль играет нелинейная динамика и запаздывающие эффекты, связанные с внутренними и внешними источниками энергии и масс, а также с фазовыми переходами. Это обуславливает необходимость разработки новых математических и численных инструментов, способных захватывать как пространственную неоднородность среды, так и временную зависимость поведения полей переноса.

Интеграция дробных производных в задачи тепло- и массопереноса позволяет исследователям учитывать эффекты памяти и аномальное диффузионное поведение, часто упускаемые из виду в традиционных подходах. Точное предсказание взаимодействия теплообмена и влаги с изменениями потока, вызванного давлением газа, имеет решающее значение для оптимизации эффективности, обеспечения сохранения качества продукции и предотвращения конструктивных сбоев, таких как гниение в процессах хранения и сушки продуктов питания, сельскохозяйственной продукции и строительных материалов [1], [2]. Результаты таких исследований могут дать качественно новые знания о изучаемых процессах и более точные прогнозы изменений показателей, таких как температура и влажность, с целью оптимизации условий хранения и переработки сельскохозяйственного сырья. Сложность этих процессов увеличивается в разнородных пористых материалах, где изменения структуры пор, состава и термофизических свойств приводят к локальным, неоднородным путям транспорта. Простые усреднённые модели не могут адекватно описать эти вариации.

Теоретическая основа для анализа явлений связанного транспорта была заложена в середине XX века. Новаторская работа Филипа и Де Вриса [3] сформулировала систему уравнений с частными производными, связывающих температурные и влажностные градиенты. Позже эта система была расширена Лыковым [4] в комплексную термомеханическую теорию, добавляющую градиенты давления. В [5] предложили аналитический метод решения системы уравнений теплопереноса и массы Лыкова, сосредоточившись на самых общих граничных условиях, использовали метод анализа собственных значений, полученный с помощью матричного исчисления. Рассматривается конкретный пример контактной сушки влажного пористого листа с равномерным исходным распределением температуры и влажности. Классические модели, основанные на законах Фика и Фурье цельного порядка, успешно применялись к многим проблемным областям [6]. Подход Уитакера к усреднению объёма [7] предоставил строгий метод вывода макроскопических уравнений транспорта от физики порового масштаба до теории метода сушки. Однако они часто не учитывают «аномальное» или нефиковское диффузию, долгосрочные эффекты памяти, внутреннее выделение тепла–влаги и распределение времени ожидания, часто наблюдаемое в сложных неоднородных пористых средах [8].

Рассмотрение динамики давления добавляет ключевое третье измерение к задаче связанного переноса. В неоднородных пористых средах градиенты давления, вызванные фазовыми изменениями, тепловым расширением и внешними нагрузками, могут влиять на движение влаги [9]. Конвективные потоки, создаваемые этими градиентами давления, значительно изменяют скорости связанного теплообмена и массы, что является ключевым аспектом изучения конвекции в неоднородных пористых материалах [10], [11]. Кроме того, реальные материалы редко бывают однородными. В [12] применялись передовые методы математического моделирования для большей точности описания этих явлений. С численной точки зрения решение частных разработок с переменными коэффициентами требует надёжных и эффективных алгоритмов [13].

В этом отношении дробное исчисление и моделирование стали мощными инструментами для преодоления этих ограничений, и ведутся активные исследования по дальнейшему развитию методологии математического моделирования для решения ряда вопросов, связанных со хранением и переработкой сельскохозяйственной продукции. Вводя производные нецелочисленного порядка, дробные дифференциальные уравнения эффективно интегрируют пространственную нелокальность и временную память в конститутивные законы связанного транспорта [14]. В [15] исследованиях рассматривались конкретные приложения, такие как течение жидкостей Кассона и жидкостей второго порядка, с использованием дробных производных для получения аналитических решений для полей скорости, концентрации и тепла, с использованием преобразований Лапласа и численных методов, подчеркивают эффективность дробного исчисления в построении моделей, которые реалистично описывают тепло- и массоперенос в неньютоновских жидкостях, подверженных различным граничным условиям.

В [16] применение дробных операторов к физическим задачам было систематизировано, а их внутренняя связь с непрерывными случайными обходами была продемонстрирована, что дало физическое обоснование их использования для моделирования аномальной диффузии. Несмотря на этот прогресс, применение фракционного исчисления к полностью связанной задаче одновременного переноса тепла, влаги и давления в неоднородных пористых средах остаётся заметно недоразвитым. Большинство существующих дробных математических моделей сосредоточены на задаче одного транспорта или упрощённом процессе двухфазного соединения [17]. По сравнению с классической формулировкой целого порядка для связанных уравнений теплообмена и влаги [18], их аналоги дробного порядка (Капуто) более сложны из-за нелокального характера производных, которые предсказывают скорость перераспределения влаги на 25–30% медленнее, указывают на температурную устойчивость в критических зонах на 15–20% дольше и обеспечивают улучшенные временные и вычислительные точки зрения Оценки стоимости в прогнозировании событий термической эскалации. Эта сложность требует хранения и суммирования всей временной истории [19].

Целью настоящего исследования является формализация многомерной математической модели совместного переноса тепла и влаги в пористых телах под газовым потоком с учетом памяти системы и аномального распространения. В рамках модели применяется дробная производная Капуто, что обеспечивает гибкую аппроксимацию памяти и запаздывающих процессов в пористой среде.

2 Постановка задачи

Постановка задачи. Учитывая переменность основных теплофизических показателей процесса сушки и хранения неоднородных пористых телах, в качестве математической модели тепло-и влагопереноса предложена следующая система дробно-дифференциальных уравнений, где учитываются влаго-и теплообмен с окружающей средой, источники выделения тепла и влаги внутри неоднородной пористой среды, и инсоляции потока солнечной радиации:

$$\frac{\partial^\alpha T(x,y,z,\tau)}{\partial\tau^\alpha} = \frac{\partial}{\partial x}\left(a_{11}(x,y,z)\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \\ + \frac{\partial}{\partial y}\left(a_{11}(x,y,z)\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(a_{11}(x,y,z)\frac{\partial T}{\partial z}\right) +$$

$$+\frac{\partial}{\partial x}\left(a_{12}(x,y,z)\frac{\partial M}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(a_{12}(x,y,z)\frac{\partial M}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(a_{12}(x,y,z)\frac{\partial M}{\partial z}\right) + \\ +\frac{\partial}{\partial x}\left(a_{13}(x,y,z)\frac{\partial P}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(a_{13}(x,y,z)\frac{\partial P}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(a_{13}(x,y,z)\frac{\partial P}{\partial z}\right) + f, \tag{1}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial^{\alpha} M(x,y,z,\tau)}{\partial \tau^{\alpha}} = \frac{\partial}{\partial x}\left(a_{21}(x,y,z)\frac{\partial M}{\partial x}\right)+\\+\frac{\partial}{\partial y}\left(a_{21}(x,y,z)\frac{\partial M}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(a_{21}(x,y,z)\frac{\partial M}{\partial z}\right)+\\+\frac{\partial}{\partial x}\left(a_{22}(x,y,z)\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(a_{22}(x,y,z)\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(a_{22}(x,y,z)\frac{\partial T}{\partial z}\right)+\\+\frac{\partial}{\partial x}\left(a_{23}(x,y,z)\frac{\partial P}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(a_{23}(x,y,z)\frac{\partial P}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(a_{23}(x,y,z)\frac{\partial P}{\partial z}\right)+q,\end{gathered} \tag{2}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial^{\alpha} P(x,y,z,\tau)}{\partial \tau^{\alpha}} = \frac{\partial}{\partial x}\left(a_{31}(x,y,z)\frac{\partial P}{\partial x}\right)+\\+\frac{\partial}{\partial y}\left(a_{31}(x,y,z)\frac{\partial P}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(a_{31}(x,y,z)\frac{\partial P}{\partial z}\right)+\\+\frac{\partial}{\partial x}\left(a_{32}(x,y,z)\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(a_{32}(x,y,z)\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(a_{32}(x,y,z)\frac{\partial T}{\partial z}\right)+\\\frac{\partial}{\partial x}\left(a_{33}(x,y,z)\frac{\partial M}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(a_{33}(x,y,z)\frac{\partial M}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(a_{33}(x,y,z)\frac{\partial M}{\partial z}\right).\end{gathered} \tag{3}$$

с начальными

$$T(x,y,z,0) = T_0(x,y,z); \tag{4}$$

$$M(x,y,z,0) = M_0(x,y,z); \tag{5}$$

$$P(x,y,z,0) = P_0(x,y,z) \tag{6}$$

и граничными условиями

$$\lambda_1 \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0} = -\beta_1\left(T_{oc} - T(0,y,z,\tau)\right) + \eta\gamma R_1(\tau); \tag{7}$$

$$\lambda_1 \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=L_x} = \beta_1\left(T_{oc} - T(L_x,y,z,\tau)\right) + \eta\gamma R_1(\tau); \tag{8}$$

$$\lambda_1 \left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=0} = -\beta_1\left(T_{oc} - T(x,0,z,\tau)\right) + \eta\gamma R_2(\tau); \tag{9}$$

$$\lambda_1 \left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=L_y} = \beta_1\left(T_{oc} - T(x,L_y,z,\tau)\right) + \eta\gamma R_2(\tau); \tag{10}$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial z}\right|_{z=0} = 0; \tag{11}$$

$$\lambda_1 \left.\frac{\partial T}{\partial z}\right|_{z=L_z} = \beta_1\left(T_{oc} - T(x,y,L_z,\tau)\right) + \eta\gamma R_3(\tau); \tag{12}$$

$$\lambda_2 \left.\frac{\partial M}{\partial x}\right|_{x=0} = -\beta_2\left(M_{oc} - M(0,y,z,\tau)\right); \tag{13}$$

$$\lambda_2 \left.\frac{\partial M}{\partial x}\right|_{x=L_x} = \beta_2\left(M_{oc} - M(L_x,y,z,\tau)\right); \tag{14}$$

$$\lambda_2 \left.\frac{\partial M}{\partial y}\right|_{y=0} = -\beta_2\left(M_{oc} - M(x,0,z,\tau)\right); \tag{15}$$

$$\lambda_2 \frac{\partial M}{\partial y}\bigg|_{y=L_y} = \beta_2 \left(M_{oc} - M\left(x, L_y, z, \tau\right)\right); \tag{16}$$

$$\frac{\partial M}{\partial z}\bigg|_{z=0} = 0; \tag{17}$$

$$\lambda_2 \frac{\partial M}{\partial z}\bigg|_{z=L_z} = \beta_2 \left(M_{oc} - M\left(x, y, L_z, \tau\right)\right). \tag{18}$$

$$\lambda_3 \frac{\partial P}{\partial x}\bigg|_{x=0} = -\beta_3 \left(P_{am} - P\left(0, y, z, \tau\right)\right); \tag{19}$$

$$\lambda_3 \frac{\partial P}{\partial x}\bigg|_{x=L_x} = \beta_3 \left(P_{am} - P\left(L_x, y, z, \tau\right)\right); \tag{20}$$

$$\lambda_3 \frac{\partial P}{\partial y}\bigg|_{y=0} = -\beta_3 \left(P_{am} - P\left(x, 0, z, \tau\right)\right); \tag{21}$$

$$\lambda_3 \frac{\partial P}{\partial y}\bigg|_{y=L_y} = \beta_3 \left(P_{am} - P\left(x, L_y, z, \tau\right)\right); \tag{22}$$

$$\frac{\partial P}{\partial z}\bigg|_{z=0} = 0; \tag{23}$$

$$\lambda_3 \frac{\partial P}{\partial z}\bigg|_{z=L_z} = \beta_3 \left(P_{am} - P\left(x, y, L_z, \tau\right)\right). \tag{24}$$

Здесь T – температура, M – влага и P – давления пористого тела;
где ∂_τ^α дробная производная Герасимов-Капуто порядка $\alpha \in (0,\, 1]$ по переменной τ в уравнениях (1-3) определяется с помощью:

$$\frac{\partial^\alpha T\left(x, y, z, \tau\right)}{\partial \tau^\alpha} = \frac{1}{\Gamma\left(1-\alpha\right)} \int\limits_0^\tau \frac{T_\tau\left(x, y, z, \xi\right) d\xi}{\left(\tau - \xi\right)^\alpha}, \tag{25}$$

$$\frac{\partial^\alpha M\left(x, y, z, \tau\right)}{\partial \tau^\alpha} = \frac{1}{\Gamma\left(1-\alpha\right)} \int\limits_0^\tau \frac{M_\tau\left(x, y, z, \xi\right) d\xi}{\left(\tau - \xi\right)^\alpha}, \tag{26}$$

$$\frac{\partial^\alpha P\left(x, y, z, \tau\right)}{\partial \tau^\alpha} = \frac{1}{\Gamma\left(1-\alpha\right)} \int\limits_0^\tau \frac{P_\tau\left(x, y, z, \xi\right) d\xi}{\left(\tau - \xi\right)^\alpha}, \tag{27}$$

где $\Gamma\left(\alpha\right)$ – гамма-функция Эйлера определяется с помощью [20]:

$$\Gamma\left(\alpha\right) = \int\limits_0^{+\infty} s^{\alpha-1} e^{-s} ds, \tag{28}$$

a_{11}, a_{22}, a_{32} – коэффициенты температуропроводности; a_{12}, a_{21}, a_{33} – коэффициенты влагопроводности; a_{13}, a_{23}, a_{31} – коэффициенты потенциалопроводности диффузии; $f\left(x, y, z, \tau\right) = \varphi \cdot e^{-\alpha\tau}$ – интенсивность внутреннего тепловыделения массы $(K\ c^{-1})$; $\varphi = \frac{M}{c_1}$ – коэффициент тепловыделения, который зависит от влажность пористых телах, значить $b = f\left(M\left(x, y, z, \tau\right)\right)$; удельных теплоемкости c_1, α – эмпирический параметр; $q\left(x, y, z, \tau\right) = \rho m_0 e^{-\xi\tau}$ – интенсивность внутренних источников влаги; –

плотность тела (кг/м^3); ξ – коэффициент сушки (1/сек); m_0- максимальная интенсивность испарения(кг/м^{2}сек). β_1 – коэффициент теплоотдачи между массой и окружающим его воздухом; β_2 – коэффициент влагоотдачи между массой и окружающим его воздухом; β_3 – коэффициент давление отдачи паров; M_o – влажность окружающей среды; T_{os} – температура окружающей среды; P_{at} – атмосферное давление; η – коэффициенты для проведения граничного условия к размерному виду; γ – коэффициент поглощения солнечных лучей материалом; $R(\tau)$ – инсоляция потока солнечной радиации на поверхности хранимого материала; λ_1 – коэффициент теплопроводности; λ_2 – коэффициент массопроводности; λ_3 – коэффициент потенциалопроводности.

Такая математическая модель позволяет провести исследования, мониторинга и прогнозирования процессов тепло- и влагопереноса в пористых средах при хранении и сушки неоднородных телах, где учтены неоднородность среды, тепло и влагообмен с окружающей средой, суточное изменение солнечной радиации, внутреннее собственное тепловлаговыделение материала.

3 Метод решения

Из постановки задача видно, что объект исследования описывается системой дифференциальной уравнений в частных и дробных производных с источником тепло-и влаговыделения, следовательно получить аналитическое решение затруднительно. С учетом сказанной выше для решения задачи (1)–(24) используем конечно-разностный метод [21], заменяя область непрерывного решения на сеточную.

Введем пространственно-временной сетки:

$$\Omega_{xyz\tau} = \left\{(x_i = i\Delta x,\ y_j = j\Delta y,\ z_k = k\Delta z,\ \tau_n = n\ \Delta\tau);\right.$$
$$\left. i = \overline{1, N_x};\ \ j = \overline{1, M_y},\ \ k = \overline{1, L_z},\ n = \overline{0, N_\tau},\ \ \Delta\tau = 1/N_\tau \right\}.$$

Дробную производную Капуто функции $T(x, y, z, \tau)$ в уравнении (1) можно дискретизировать следующим образом:

$$\frac{\partial^\alpha T(x,y,z,\tau)}{\partial\tau^\alpha} \approx \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)\Delta\tau^\alpha} \sum_{m=0}^{n} b_m \left(T_{i,j,k}^{n-m+1} - T_{i,j,k}^{n-m}\right),\ n \in (0,\ N_\tau),$$

где $\alpha \in (0,\ 1]$,

$$b_m = (1+m)^{1-\alpha} + m^{1-\alpha}.$$

Используя аппроксимацию для дробной производной по времени и конечно-разностный метод второго порядка для пространственной производной, (1) можно переписать в виде

$$\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)\Delta\tau^\alpha} \sum_{m=0}^{n} b_m \left(T_{i,j,k}^{n-m+\frac{1}{3}} - T_{i,j,k}^{n-m}\right) =$$
$$= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)\Delta\tau^\alpha} \left(T_{i,j,k}^{n+\frac{1}{3}} - T_{i,j,k}^{n} + \sum_{m=1}^{n} b_m \left(T_{i,j,k}^{n-m+\frac{1}{3}} - T_{i,j,k}^{n-m}\right)\right) =$$
$$= \frac{a_{11,i+0,5,j,k} T_{i+1,j,k}^{n+\frac{1}{3}} - (a_{11,i+0,5,j,k} + a_{11,i-0,5,j,k}) T_{i,j,k}^{n+\frac{1}{3}} + a_{11,i-0,5,j,k} T_{i-1,j,k}^{n+\frac{1}{3}}}{\Delta x^2} +$$
$$+ \frac{a_{11,i,j+0,5,k} T_{i,j+1,k}^{n} - (a_{11,i,j+0,5,k} + a_{11,i,j-0,5,k}) T_{i,j,k}^{n} + a_{11,i,j-0,5,k} T_{i,j-1,k}^{n}}{\Delta y^2} +$$
$$+ \frac{a_{11,i,j,k+0,5} T_{i,j,k+1}^{n} - (a_{11,i,j,k+0,5} + a_{11,i,j,k-0,5}) T_{i,j,k}^{n} + a_{11,i,j,k-0,5} T_{i,j,k-1}^{n}}{\Delta z^2} +$$

$$+\frac{a_{12,i+0,5,j,k}M^n_{i+1,j,k}-\left(a_{12,i+0,5,j,k}+a_{12,i-0,5,j,k}\right)M^n_{i,j,k}+a_{12,i-0,5,j,k}M^n_{i-1,j,k}}{\Delta x^2}+$$
$$+\frac{a_{12,i,j+0,5,k}M^n_{i,j+1,k}-\left(a_{12,i,j+0,5,k}+a_{12,i,j-0,5,k}\right)M^n_{i,j,k}+a_{12,i,j-0,5,k}M^n_{i,j-1,k}}{\Delta y^2}+$$
$$+\frac{a_{12,i,j,k+0,5}M^n_{i,j,k+1}-\left(a_{12,i,j,k+0,5}+a_{12,i,j,k-0,5}\right)M^n_{i,j,k}+a_{12,i,j,k-0,5}M^n_{i,j,k-1}}{\Delta z^2}+$$
$$+\frac{a_{13,i+0,5,j,k}P^n_{i+1,j,k}-\left(a_{13,i+0,5,j,k}+a_{13,i-0,5,j,k}\right)P^n_{i,j,k}+a_{13,i-0,5,j,k}P^n_{i-1,j,k}}{\Delta x^2}+$$
$$+\frac{a_{13,i,j+0,5,k}P^n_{i,j+1,k}-\left(a_{13,i,j+0,5,k}+a_{13,i,j-0,5,k}\right)P^n_{i,j,k}+a_{13,i,j-0,5,k}P^n_{i,j-1,k}}{\Delta y^2}+$$
$$+\frac{a_{13,i,j,k+0,5}P^n_{i,j,k+1}-\left(a_{13,i,j,k+0,5}+a_{13,i,j,k-0,5}\right)P^n_{i,j,k}+a_{13,i,j,k-0,5}P^n_{i,j,k-1}}{\Delta z^2}+\frac{1}{3}f^{n+\frac{1}{3}}_{i,j,k}.$$

Тогда $T^{n+\frac{1}{3}}_{i,j,k}$ в точке сетки i для временного шага $n+\frac{1}{3}$ приводит к уравнению

$$a_{T,i,j,k}T^{n+\frac{1}{3}}_{i-1,j,k}-b_{T,i,j,k}T^{n+\frac{1}{3}}_{i,j,k}+c_{T,i,j,k}T^{n+\frac{1}{3}}_{i+1,j,k}=-d_{T,i,j,k}, \tag{29}$$

где коэффициенты и свободный член определяются с помощью следующих выражений:

$$a_{T,i,j,k}=\frac{a_{11,i-0,5,j,k}}{\Delta x^2},\quad b_{T,i,j,k}=\frac{1}{\Gamma\left(2-\alpha\right)\Delta\tau^{\alpha}}+\frac{a_{11,i+0,5,j,k}+a_{11,i-0,5,j,k}}{\Delta x^2},$$
$$c_{T,i,j,k}=\frac{a_{11,i+0,5,j,k}}{\Delta x^2},$$
$$d_{T,i,j,k}=\frac{1}{\Gamma\left(2-\alpha\right)\Delta\tau^{\alpha}}\left(T^n_{i,j,k}-\sum_{m=1}^{n}b_{i,j,k}\left(T^{n-m+\frac{1}{3}}_{i,j,k}-T^{n-m}_{i,j,k}\right)\right)+$$
$$+\frac{a_{11,i,j+0,5,k}T^n_{i,j+1,k}-\left(a_{11,i,j+0,5,k}+a_{11,i,j-0,5,k}\right)T^n_{i,j,k}+a_{11,i,j-0,5,k}T^n_{i,j-1,k}}{\Delta y^2}+$$
$$+\frac{a_{11,i,j,k+0,5}T^n_{i,j,k+1}-\left(a_{11,i,j,k+0,5}+a_{11,i,j,k-0,5}\right)T^n_{i,j,k}+a_{11,i,j,k-0,5}T^n_{i,j,k-1}}{\Delta z^2}+$$
$$+\frac{a_{12,i+0,5,j,k}M^n_{i+1,j,k}-\left(a_{12,i+0,5,j,k}+a_{12,i-0,5,j,k}\right)M^n_{i,j,k}+a_{12,i-0,5,j,k}M^n_{i-1,j,k}}{\Delta x^2}+$$
$$+\frac{a_{12,i,j+0,5,k}M^n_{i,j+1,k}-\left(a_{12,i,j+0,5,k}+a_{12,i,j-0,5,k}\right)M^n_{i,j,k}+a_{12,i,j-0,5,k}M^n_{i,j-1,k}}{\Delta y^2}+$$
$$+\frac{a_{12,i,j,k+0,5}M^n_{i,j,k+1}-\left(a_{12,i,j,k+0,5}+a_{12,i,j,k-0,5}\right)M^n_{i,j,k}+a_{12,i,j,k-0,5}M^n_{i,j,k-1}}{\Delta z^2}+$$
$$+\frac{a_{13,i+0,5,j,k}P^n_{i+1,j,k}-\left(a_{13,i+0,5,j,k}+a_{13,i-0,5,j,k}\right)P^n_{i,j,k}+a_{13,i-0,5,j,k}P^n_{i-1,j,k}}{\Delta x^2}+$$
$$+\frac{a_{13,i,j+0,5,k}P^n_{i,j+1,k}-\left(a_{13,i,j+0,5,k}+a_{13,i,j-0,5,k}\right)P^n_{i,j,k}+a_{13,i,j-0,5,k}P^n_{i,j-1,k}}{\Delta y^2}+$$
$$+\frac{a_{13,i,j,k+0,5}P^n_{i,j,k+1}-\left(a_{13,i,j,k+0,5}+a_{13,i,j,k-0,5}\right)P^n_{i,j,k}+a_{13,i,j,k-0,5}P^n_{i,j,k-1}}{\Delta z^2}+\frac{1}{3}f^{n+\frac{1}{3}}_{i,j,k}.$$

Далее, граничную условию (7) аппроксимируем по Ox и получим:

$$\lambda_1\frac{-3T^{n+\frac{1}{3}}_{0,j,k}+4T^{n+\frac{1}{3}}_{1,j,k}-T^{n+\frac{1}{3}}_{2,j,k}}{2\Delta x}=-\beta_1T_{oc}+\beta_1T^{n+\frac{1}{3}}_{0,j,k}+\varphi^{n+\frac{1}{3}}_1, \tag{30}$$

где $\varphi_1 = \eta\gamma R_1(\tau)$.

Из системы уравнении (29), когда $i = 1$, получим:

$$a_{T,1,j,k} T_{0,j,k}^{n+\frac{1}{3}} - b_{T,1,j,k} T_{1,j,k}^{n+\frac{1}{3}} + c_{T,1,j,k} T_{2,j,k}^{n+\frac{1}{3}} = -d_{T,1,j,k}. \tag{31}$$

Поставив $T_{2,j,k}^{n+\frac{1}{3}}$ из (31) в (30), найдем $T_{0,j,k}^{n+\frac{1}{3}}$:

$$T_{0,j,k}^{n+\frac{1}{3}} = \alpha_{T,0,j,k} T_{1,j,k}^{n+\frac{1}{3}} + \beta_{T,0,j,k}, \tag{32}$$

где прогоночные коэффициенты $\alpha_{T,0,j,k}$, $\beta_{T,0,j,k}$ вычисляется с помощью формул:

$$\alpha_{T,0,j,k} = \frac{\lambda_1 b_{T,1,j,k} - 4\lambda_1 c_{T,1,j,k}}{a_{T,1,j,k}\lambda_1 - 3c_{T,1,j,k}\lambda_1 - 2\Delta x c_{T,1,j,k}\beta_1};$$

$$\beta_{T,0,j,k} = \frac{-d_{T,1,j,k}\lambda_1 - 2\Delta x c_{T,1,j,k}\beta_1 T_{oc} + 2\Delta x c_{T,1,j,k}\varphi_1^{n+\frac{1}{3}}}{a_{T,1,j,k}\lambda_1 - 3c_{T,1,j,k}\lambda_1 - 2\Delta x c_{T,1,j,k}\beta_1}.$$

Аналогично аппроксимируя граничное условие (8) по Ox, получим:

$$\lambda_1 \frac{T_{N-2,j,k}^{n+\frac{1}{3}} - 4T_{N-1,j,k}^{n+\frac{1}{3}} + 3T_{N,j,k}^{n+\frac{1}{3}}}{2\Delta x} = \beta_1 T_{oc} - \beta_1 T_{N,j,k}^{n+\frac{1}{3}} + \varphi_1^{n+\frac{1}{3}}, \tag{33}$$

где $\varphi_1 = \eta\gamma R_1(\tau)$.

Применяя метод прогонки для последовательности при $N, N-1$ и $N-2$, найдем $T_{N-1,j,k}^{n+\frac{1}{3}}$ и $T_{N-2,j,k}^{n+\frac{1}{3}}$:

$$T_{N-1,j,k}^{n+\frac{1}{3}} = \alpha_{T,N-1,j,k} T_{N,j,k}^{n+\frac{1}{3}} + \beta_{T,N-1,j,k}; \tag{34}$$

$$T_{N-2,j,k}^{n+\frac{1}{3}} = \alpha_{T,N-2,j,k}\alpha_{T,N-1,j,k} T_{N,j,k}^{n+\frac{1}{3}} + \alpha_{T,N-2,j,k}\beta_{T,N-1,j,k} + \beta_{T,N-2,j,k}. \tag{35}$$

Поставив $T_{N-1,j,k}^{n+\frac{1}{3}}$ из (34) и $T_{N-2,j,k}^{n+\frac{1}{3}}$ из (35) в (33), найдем $T_{N,j,k}^{n+\frac{1}{3}}$:

$$T_{N,j,k}^{n+\frac{1}{3}} = \frac{-\lambda_1\alpha_{T,N-2,j,k}\beta_{T,N-1,j,k} - \lambda_1\beta_{T,N-2,j,k} + 4\lambda_1\beta_{T,N-1,j,k} - 2\Delta x\beta_1 T_{oc} + 2\Delta x\varphi_1^{n+\frac{1}{3}}}{3\lambda_1 - 2\Delta x\beta_1 + \lambda_1\alpha_{T,N-2,j,k}\alpha_{T,N-1,j,k} - 4\lambda_1\alpha_{T,N-1,j,k}}. \tag{36}$$

Значения последовательности температуры $T_{N-1,j,k}^{n+\frac{1}{3}}$, $T_{N-2,j,k}^{n+\frac{1}{3}}$, ..., $T_{1,j,k}^{n+\frac{1}{3}}$ определяются методом обратной прогонки по уменьшению i:

$$T_{i,j,k}^{n+\frac{1}{3}} = \alpha_{T,i,j,k} T_{i+1,j,k}^{n+\frac{1}{3}} + \beta_{T,i,j,k}, \quad i = \overline{N-1,\, 1},\ j = \overline{0,\, M},\ k = \overline{0,\, L}. \tag{37}$$

Аналогично уравнение (2) аппроксимируем по Ox конечно-разностными соотношениями

$$\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)\Delta\tau^{\alpha}} \sum_{m=0}^{n} b_m \left(M_{i,j,k}^{n-m+\frac{1}{3}} - M_{i,j,k}^{n-m}\right) =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)\Delta\tau^{\alpha}} \left(M_{i,j,k}^{n+\frac{1}{3}} - M_{i,j,k}^{n} + \sum_{m=1}^{n} b_m \left(M_{i,j,k}^{n-m+\frac{1}{3}} - M_{i,j,k}^{n-m}\right)\right) =$$

$$= \frac{a_{21,i+0{,}5,j,k} M_{i+1,j,k}^{n+\frac{1}{3}} - \left(a_{21,i+0{,}5,j,k} + a_{21,i-0{,}5,j,k}\right) M_{i,j,k}^{n+\frac{1}{3}} + a_{21,i-0{,}5,j,k} M_{i-1,j,k}^{n+\frac{1}{3}}}{\Delta x^2} +$$

$$+ \frac{a_{21,i,j+0{,}5,k} M_{i,j+1,k}^{n} - \left(a_{21,i,j+0{,}5,k} + a_{21,i,j-0{,}5,k}\right) M_{i,j,k}^{n} + a_{21,i,j-0{,}5,k} M_{i,j-1,k}^{n}}{\Delta y^2} +$$

$$+\frac{a_{21,i,j,k+0,5}M^n_{i,j,k+1}-\left(a_{21,i,j,k+0,5}+a_{21,i,j,k-0,5}\right)M^n_{i,j,k}+a_{21,i,j,k-0,5}M^n_{i,j,k-1}}{\Delta z^2}+$$
$$+\frac{a_{22,i+0,5,j,k}T^n_{i+1,j,k}-\left(a_{22,i+0,5,j,k}+a_{22,i-0,5,j,k}\right)T^n_{i,j,k}+a_{22,i-0,5,j,k}T^n_{i-1,j,k}}{\Delta x^2}+$$
$$+\frac{a_{22,i,j+0,5,k}T^n_{i,j+1,k}-\left(a_{22,i,j+0,5,k}+a_{22,i,j-0,5,k}\right)T^n_{i,j,k}+a_{22,i,j-0,5,k}T^n_{i,j-1,k}}{\Delta y^2}+$$
$$+\frac{a_{22,i,j,k+0,5}T^n_{i,j,k+1}-\left(a_{22,i,j,k+0,5}+a_{22,i,j,k-0,5}\right)T^n_{i,j,k}+a_{22,i,j,k-0,5}T^n_{i,j,k-1}}{\Delta z^2}+$$
$$+\frac{a_{23,i+0,5,j,k}P^n_{i+1,j,k}-\left(a_{23,i+0,5,j,k}+a_{23,i-0,5,j,k}\right)P^n_{i,j,k}+a_{23,i-0,5,j,k}P^n_{i-1,j,k}}{\Delta x^2}+$$
$$+\frac{a_{23,i,j+0,5,k}P^n_{i,j+1,k}-\left(a_{23,i,j+0,5,k}+a_{23,i,j-0,5,k}\right)P^n_{i,j,k}+a_{23,i,j-0,5,k}P^n_{i,j-1,k}}{\Delta y^2}+$$
$$+\frac{a_{23,i,j,k+0,5}P^n_{i,j,k+1}-\left(a_{23,i,j,k+0,5}+a_{23,i,j,k-0,5}\right)P^n_{i,j,k}+a_{23,i,j,k-0,5}P^n_{i,j,k-1}}{\Delta z^2}+\frac{1}{3}q^{n+\frac{1}{3}}_{i,j,k}.$$

Тогда $M^{n+\frac{1}{3}}_{i,j,k}$ в точке сетки i для временного шага $n+\frac{1}{3}$ приводит к систему уравнению

$$a_{M,i,j,k}\,M^{n+\frac{1}{3}}_{i-1,j,k}-b_{M,i,j,k}\,M^{n+\frac{1}{3}}_{i,j,k}+c_{M,i,j,k}\,M^{n+\frac{1}{3}}_{i+1,j,k}=-d_{M,i,j,k}, \tag{38}$$

где коэффициенты и свободный член определяются с помощью следующих выражений:

$$a_{M,i,j,k}=\frac{a_{21,i-0,5,j,k}}{\Delta x^2},$$
$$b_{M,i,j,k}=\frac{1}{\Gamma\left(2-\alpha\right)\Delta\tau^{\alpha}}+\frac{a_{21,i+0,5,j,k}+a_{21,i-0,5,j,k}}{\Delta x^2},$$
$$c_{M,i,j,k}=\frac{a_{21,i+0,5,j,k}}{\Delta x^2},$$
$$d_{M,i,j,k}=\frac{1}{\Gamma\left(2-\alpha\right)\Delta\tau^{\alpha}}\left(M^n_{i,j,k}-\sum_{m=1}^{n}b_{i,j,k}\left(M^{n-m+\frac{1}{3}}_{i,j,k}-M^{n-m}_{i,j,k}\right)\right)+$$
$$+\frac{a_{21,i,j+0,5,k}M^n_{i,j+1,k}-\left(a_{21,i,j+0,5,k}+a_{21,i,j-0,5,k}\right)M^n_{i,j,k}+a_{21,i,j-0,5,k}M^n_{i,j-1,k}}{\Delta y^2}+$$

$$+\frac{a_{21,i,j,k+0,5}M^n_{i,j,k+1}-\left(a_{21,i,j,k+0,5}+a_{21,i,j,k-0,5}\right)M^n_{i,j,k}+a_{21,i,j,k-0,5}M^n_{i,j,k-1}}{\Delta z^2}+$$
$$+\frac{a_{22,i+0,5,j,k}T^n_{i+1,j,k}-\left(a_{22,i+0,5,j,k}+a_{22,i-0,5,j,k}\right)T^n_{i,j,k}+a_{22,i-0,5,j,k}T^n_{i-1,j,k}}{\Delta x^2}+$$
$$+\frac{a_{22,i,j+0,5,k}T^n_{i,j+1,k}-\left(a_{22,i,j+0,5,k}+a_{22,i,j-0,5,k}\right)T^n_{i,j,k}+a_{22,i,j-0,5,k}T^n_{i,j-1,k}}{\Delta y^2}+$$
$$+\frac{a_{22,i,j,k+0,5}T^n_{i,j,k+1}-\left(a_{22,i,j,k+0,5}+a_{22,i,j,k-0,5}\right)T^n_{i,j,k}+a_{22,i,j,k-0,5}T^n_{i,j,k-1}}{\Delta z^2}+$$
$$+\frac{a_{23,i+0,5,j,k}P^n_{i+1,j,k}-\left(a_{23,i+0,5,j,k}+a_{23,i-0,5,j,k}\right)P^n_{i,j,k}+a_{23,i-0,5,j,k}P^n_{i-1,j,k}}{\Delta x^2}+$$
$$+\frac{a_{23,i,j+0,5,k}P^n_{i,j+1,k}-\left(a_{23,i,j+0,5,k}+a_{23,i,j-0,5,k}\right)P^n_{i,j,k}+a_{23,i,j-0,5,k}P^n_{i,j-1,k}}{\Delta y^2}+$$
$$+\frac{a_{23,i,j,k+0,5}P^n_{i,j,k+1}-\left(a_{23,i,j,k+0,5}+a_{23,i,j,k-0,5}\right)P^n_{i,j,k}+a_{23,i,j,k-0,5}P^n_{i,j,k-1}}{\Delta z^2}+\frac{1}{3}q^{n+\frac{1}{3}}_{i,j,k}.$$

Далее, граничную условию (13) аппроксимируем со вторым порядком точности по Ox и получим:

$$\lambda_2 \frac{-3M_{0,j,k}^{n+\frac{1}{3}} + 4M_{1,j,k}^{n+\frac{1}{3}} - M_{2,j,k}^{n+\frac{1}{3}}}{2\Delta x} = -\beta_2 M_{oc} + \beta_2 M_{0,j,k}^{n+\frac{1}{3}}. \tag{39}$$

Из системы уравнений (38), при $i = 1$, получим:

$$a_{M,1,j,k}\, M_{0,j,k}^{n+\frac{1}{3}} - b_{M,1,j,k}\, M_{1,j,k}^{n+\frac{1}{3}} + c_{M,1,j,k}\, M_{2,j,k}^{n+\frac{1}{3}} = -d_{M,1,j,k}. \tag{40}$$

Поставив $M_{2,j,k}^{n+\frac{1}{3}}$ из (40) в (39), найдем значение $M_{0,j,k}^{n+\frac{1}{3}}$:

$$M_{0,j,k}^{n+\frac{1}{3}} = \alpha_{M,0,j,k}\, M_{1,j,k}^{n+\frac{1}{3}} + \beta_{M,0,j,k}. \tag{41}$$

Из соотношения (41) прогоночные коэффициенты определяются в виде:

$$\alpha_{M,0,j,k} = \frac{\lambda_2 b_{M,1,j,k} - 4\lambda_2 c_{M,1,j,k}}{a_{M,1,j,k}\lambda_2 - 3c_{M,1,j,k}\lambda_2 - 2\Delta x c_{M,1,j,k}\beta_2};$$
$$\beta_{M,0,j,k} = \frac{-d_{M,1,j,k}\lambda_2 - 2\Delta x c_{M,1,j,k}\beta_2 M_{oc}}{a_{M,1,j,k}\lambda_2 - 3c_{M,1,j,k}\lambda_2 - 2\Delta x c_{M,1,j,k}\beta_2}.$$

Аналогично аппроксимируя граничному условию (14) по Oz, получим:

$$\lambda_2 \frac{M_{N-2,j,k}^{n+\frac{1}{3}} - 4M_{N-1,j,k}^{n+\frac{1}{3}} + 3M_{N,j,k}^{n+\frac{1}{3}}}{2\Delta x} = \beta_2 M_{oc} - \beta_2 M_{N,j,k}^{n+\frac{1}{3}}. \tag{42}$$

Применяя метод прогонки для последовательности $N, N-1$ и $N-2$, найдем $M_{N-1,j,k}^{n+\frac{1}{3}}$ и $M_{N-2,j,k}^{n+\frac{1}{3}}$:

$$M_{N-1,j,k}^{n+\frac{1}{3}} = \alpha_{M,N-1,j,k} M_{N,j,k}^{n+\frac{1}{3}} + \beta_{M,N-1,j,k}; \tag{43}$$

$$M_{N-2,j,k}^{n+\frac{1}{3}} = \alpha_{M,N-2,j,k}\alpha_{M,N-1,j,k}\, M_{N,j,k}^{n+\frac{1}{3}} + \alpha_{M,N-2,j,k}\beta_{M,N-1,j,k} + \beta_{M,N-2,j,k}. \tag{44}$$

Поставив $M_{N-1,j,k}^{n+\frac{1}{3}}$ из (43) и $M_{N-2,j,k}^{n+\frac{1}{3}}$ из (44) в (42), найдем $M_{N,j,k}^{n+\frac{1}{3}}$:

$$M_{N,j,k}^{n+\frac{1}{3}} = \frac{-\lambda_2\alpha_{M,N-2,j,k}\beta_{M,N-1,j,k} - \lambda_2\beta_{M,N-2,j,k} + 4\lambda_2\beta_{M,N-1,j,k} + 2\Delta x\beta_2 M_{oc}}{3\lambda_2 - 2\Delta x\beta_2 + \lambda_2\alpha_{M,N-2,j,k}\alpha_{M,N-1,j,k} - 4\lambda_2\alpha_{M,N-1,j,k}}.$$

Значения последовательности влаги $M_{N-1,j,k}^{n+\frac{1}{3}}$, $M_{N-2,j,k}^{n+\frac{1}{3}}$, ..., $M_{1,j,k}^{n+\frac{1}{3}}$ определяются методом обратной прогонки по уменьшению i:

$$M_{i,j,k}^{n+\frac{1}{3}} = \alpha_{M,i,j,k}\, M_{i+1,j,k}^{n+\frac{1}{3}} + \beta_{M,i,j,k}\,, \text{ где } i = \overline{N-1,\, 1},\ j = \overline{0,\, M},\ k = \overline{0,\, L}. \tag{45}$$

Аналогично уравнение (3) аппроксимируем по Ox конечно-разностными соотношениями, изменение давление:

$$\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)\Delta\tau^{\alpha}}\sum_{m=0}^{n} b_m\left(P_{i,j,k}^{n-m+\frac{1}{3}}-P_{i,j,k}^{n-m}\right)=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)\Delta\tau^{\alpha}}\left(P_{i,j,k}^{n+\frac{1}{3}}-P_{i,j,k}^{n}+\sum_{m=1}^{n} b_m\left(P_{i,j,k}^{n-m+\frac{1}{3}}-P_{i,j,k}^{n-m}\right)\right)=$$

$$=\frac{a_{31,i+0,5,j,k}P_{i+1,j,k}^{n+\frac{1}{3}}-\left(a_{31,i+0,5,j,k}+a_{31,i-0,5,j,k}\right)P_{i,j,k}^{n+\frac{1}{3}}+a_{31,i-0,5,j,k}P_{i-1,j,k}^{n+\frac{1}{3}}}{\Delta x^2}+$$

$$+\frac{a_{31,i,j+0,5,k}P_{i,j+1,k}^{n}-\left(a_{31,i,j+0,5,k}+a_{31,i,j-0,5,k}\right)P_{i,j,k}^{n}+a_{31,i,j-0,5,k}P_{i,j-1,k}^{n}}{\Delta y^2}+$$

$$+\frac{a_{31,i,j,k+0,5}P_{i,j,k+1}^{n}-\left(a_{31,i,j,k+0,5}+a_{31,i,j,k-0,5}\right)P_{i,j,k}^{n}+a_{31,i,j,k-0,5}P_{i,j,k-1}^{n}}{\Delta z^2}+$$

$$+\frac{a_{32,i+0,5,j,k}T_{i+1,j,k}^{n}-\left(a_{32,i+0,5,j,k}+a_{32,i-0,5,j,k}\right)T_{i,j,k}^{n}+a_{32,i-0,5,j,k}T_{i-1,j,k}^{n}}{\Delta x^2}+$$

$$+\frac{a_{32,i,j+0,5,k}T_{i,j+1,k}^{n}-\left(a_{32,i,j+0,5,k}+a_{32,i,j-0,5,k}\right)T_{i,j,k}^{n}+a_{32,i,j-0,5,k}T_{i,j-1,k}^{n}}{\Delta y^2}+$$

$$+\frac{a_{32,i,j,k+0,5}T_{i,j,k+1}^{n}-\left(a_{32,i,j,k+0,5}+a_{32,i,j,k-0,5}\right)T_{i,j,k}^{n}+a_{32,i,j,k-0,5}T_{i,j,k-1}^{n}}{\Delta z^2}+$$

$$+\frac{a_{33,i+0,5,j,k}M_{i+1,j,k}^{n}-\left(a_{33,i+0,5,j,k}+a_{33,i-0,5,j,k}\right)M_{i,j,k}^{n}+a_{33,i-0,5,j,k}M_{i-1,j,k}^{n}}{\Delta x^2}+$$

$$+\frac{a_{33,i,j+0,5,k}M_{i,j+1,k}^{n}-\left(a_{33,i,j+0,5,k}+a_{33,i,j-0,5,k}\right)M_{i,j,k}^{n}+a_{33,i,j-0,5,k}M_{i,j-1,k}^{n}}{\Delta y^2}+$$

$$+\frac{a_{33,i,j,k+0,5}M_{i,j,k+1}^{n}-\left(a_{33,i,j,k+0,5}+a_{33,i,j,k-0,5}\right)M_{i,j,k}^{n}+a_{33,i,j,k-0,5}M_{i,j,k-1}^{n}}{\Delta z^2}.$$

Тогда $P_{i,j,k}^{n+\frac{1}{3}}$ в точке сетки i для временного шага $n+\frac{1}{3}$ приводит к систему уравнению:

$$a_{P,i,j,k}\,P_{i-1,j,k}^{n+\frac{1}{3}}-b_{P,i,j,k}\,P_{i,j,k}^{n+\frac{1}{3}}+c_{P,i,j,k}\,P_{i+1,j,k}^{n+\frac{1}{3}}=-d_{P,i,j,k}, \tag{46}$$

где коэффициенты и свободный член определяются с помощью следующих выражений:

$$a_{P,i,j,k}=\frac{a_{31,i-0,5,j,k}}{\Delta x^2},\quad b_{P,i,j,k}=\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)\Delta\tau^{\alpha}}+\frac{a_{31,i+0,5,j,k}+a_{31,i-0,5,j,k}}{\Delta x^2},$$

$$c_{P,i,j,k}=\frac{a_{31,i+0,5,j,k}}{\Delta x^2},$$

$$d_{P,i,j,k}=\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)\Delta\tau^{\alpha}}\left(P_{i,j,k}^{n}-\sum_{m=1}^{n} b_{i,j,k}\left(P_{i,j,k}^{n-m+\frac{1}{3}}-P_{i,j,k}^{n-m}\right)\right)+$$

$$+\frac{a_{31,i,j+0,5,k}P_{i,j+1,k}^{n}-\left(a_{31,i,j+0,5,k}+a_{31,i,j-0,5,k}\right)P_{i,j,k}^{n}+a_{31,i,j-0,5,k}P_{i,j-1,k}^{n}}{\Delta y^2}+$$

$$+\frac{a_{31,i,j,k+0,5}P_{i,j,k+1}^{n}-\left(a_{31,i,j,k+0,5}+a_{31,i,j,k-0,5}\right)P_{i,j,k}^{n}+a_{31,i,j,k-0,5}P_{i,j,k-1}^{n}}{\Delta z^2}+$$

$$+\frac{a_{32,i+0,5,j,k}T^n_{i+1,j,k}-\left(a_{32,i+0,5,j,k}+a_{32,i-0,5,j,k}\right)T^n_{i,j,k}+a_{32,i-0,5,j,k}T^n_{i-1,j,k}}{\Delta x^2}+$$
$$+\frac{a_{32,i,j+0,5,k}T^n_{i,j+1,k}-\left(a_{32,i,j+0,5,k}+a_{32,i,j-0,5,k}\right)T^n_{i,j,k}+a_{32,i,j-0,5,k}T^n_{i,j-1,k}}{\Delta y^2}+$$
$$+\frac{a_{32,i,j,k+0,5}T^n_{i,j,k+1}-\left(a_{32,i,j,k+0,5}+a_{32,i,j,k-0,5}\right)T^n_{i,j,k}+a_{32,i,j,k-0,5}T^n_{i,j,k-1}}{\Delta z^2}+$$
$$+\frac{a_{33,i+0,5,j,k}M^n_{i+1,j,k}-\left(a_{33,i+0,5,j,k}+a_{33,i-0,5,j,k}\right)M^n_{i,j,k}+a_{33,i-0,5,j,k}M^n_{i-1,j,k}}{\Delta x^2}+$$
$$+\frac{a_{33,i,j+0,5,k}M^n_{i,j+1,k}-\left(a_{33,i,j+0,5,k}+a_{33,i,j-0,5,k}\right)M^n_{i,j,k}+a_{33,i,j-0,5,k}M^n_{i,j-1,k}}{\Delta y^2}+$$
$$+\frac{a_{33,i,j,k+0,5}M^n_{i,j,k+1}-\left(a_{33,i,j,k+0,5}+a_{33,i,j,k-0,5}\right)M^n_{i,j,k}+a_{33,i,j,k-0,5}M^n_{i,j,k-1}}{\Delta z^2}.$$

Далее, граничную условию (19) аппроксимируем со вторым порядком точности по Ox и получим:

$$\lambda_3\frac{-3P^{n+\frac13}_{0,j,k}+4P^{n+\frac13}_{1,j,k}-P^{n+\frac13}_{2,j,k}}{2\Delta x}=-\beta_3P_{oc}+\beta_3P^{n+\frac13}_{0,j,k}. \tag{47}$$

Из системы уравнений (46), при $i=1$, получим:

$$a_{P,1,j,k}\,P^{n+\frac13}_{0,j,k}-b_{P,1,j,k}\,P^{n+\frac13}_{1,j,k}+c_{P,1,j,k}\,P^{n+\frac13}_{2,j,k}=-d_{P,1,j,k}. \tag{48}$$

Поставив $P^{n+\frac13}_{2,j,k}$ из (48) в (47), найдем значение $P^{n+\frac13}_{0,j,k}$:

$$P^{n+\frac13}_{0,j,k}=\alpha_{P,0,j,k}\,P^{n+\frac13}_{1,j,k}+\beta_{P,0,j,k}. \tag{49}$$

Из соотношения (49) прогоночные коэффициенты определяются в виде:

$$\alpha_{P,0,j,k}=\frac{\lambda_3b_{P,1,j,k}-4\lambda_3c_{P,1,j,k}}{a_{P,1,j,k}\lambda_3-3c_{P,1,j,k}\lambda_3-\ 2\Delta xc_{P,1,j,k}\beta_3};$$
$$\beta_{P,0,j,k}=\frac{-d_{P,1,j,k}\lambda_3-2\Delta xc_{P,1,j,k}\beta_3P_{oc}}{a_{P,1,j,k}\lambda_3-3c_{P,1,j,k}\lambda_3-\ 2\Delta xc_{P,1,j,k}\beta_3}.$$

Аналогично аппроксимируя граничному условию (20) по Ox, получим:

$$\lambda_3\frac{P^{n+\frac13}_{N-2,j,k}-4P^{n+\frac13}_{N-1,j,k}+3P^{n+\frac13}_{N,j,k}}{2\Delta x}=\beta_3P_{oc}-\beta_3P^{n+\frac13}_{N,j,k}. \tag{50}$$

Применяя метод прогонки для последовательности $N, N-1N-2$, найдем $P^{n+\frac13}_{N-1,j,k}$ и $P^{n+\frac13}_{N-2,j,k}$:

$$P^{n+\frac13}_{N-1,j,k}=\alpha_{P,N-1,j,k}P^{n+\frac13}_{N,j,k}+\beta_{P,N-1,j,k}; \tag{51}$$

$$P^{n+\frac13}_{N-2,j,k}=\alpha_{P,N-2,j,k}\alpha_{P,N-1,j,k}\,P^{n+\frac13}_{N,j,k}+\alpha_{P,N-2,j,k}\beta_{P,N-1,j,k}+\beta_{P,N-2,j,k}. \tag{52}$$

Поставив $P^{n+\frac13}_{N-1,j,k}$ из (51) и $P^{n+\frac13}_{N-2,j,k}$ из (52) в (50), найдем $P^{n+\frac13}_{N,j,k}$:

$$P^{n+\frac13}_{N,j,k}=\frac{-\lambda_3\alpha_{P,N-2,j,k}\beta_{P,N-1,j,k}-\lambda_3\beta_{P,N-2,j,k}+4\lambda_3\beta_{P,N-1,j,k}+2\Delta x\beta_3P_{am}}{3\lambda_3-2\Delta x\beta_3+\lambda_3\alpha_{P,N-2,j,k}\alpha_{P,N-1,j,k}-4\lambda_3\alpha_{P,N-1,j,k}}.$$

Значения последовательности влаги $P^{n+\frac{1}{3}}_{N-1,j,k}$, $P^{n+\frac{1}{3}}_{N-2,j,k}$, ..., $P^{n+\frac{1}{3}}_{1,j,k}$ определяются методом обратной прогонки по уменьшению i:

$$P^{n+\frac{1}{3}}_{i,j,k} = \alpha_{P,i,j,k}\, P^{n+\frac{1}{3}}_{i+1,j,k} + \beta_{P,i,j,k}\,, \text{ где } i=\overline{N-1,\,1},\ j=\overline{0,\,M},\ k=\overline{0,\,L}. \tag{53}$$

$$\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)\,\Delta\tau^{\alpha}} \sum_{m=0}^{n} b_m \left(T^{n-m+\frac{2}{3}}_{i,j,k} - T^{n-m+\frac{1}{3}}_{i,j,k}\right) =$$
$$= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)\,\Delta\tau^{\alpha}} \left(T^{n+\frac{2}{3}}_{i,j,k} - T^{n+\frac{1}{3}}_{i,j,k} + \sum_{m=1}^{n} b_m \left(T^{n-m+\frac{2}{3}}_{i,j,k} - T^{n-m+\frac{1}{3}}_{i,j,k}\right)\right) =$$
$$= \frac{a_{11,i+0,5,j,k}T^{n+\frac{1}{3}}_{i+1,j,k} - (a_{11,i+0,5,j,k} + a_{11,i-0,5,j,k})\,T^{n+\frac{1}{3}}_{i,j,k} + a_{11,i-0,5,j,k}T^{n+\frac{1}{3}}_{i-1,j,k}}{\Delta x^2} +$$
$$+ \frac{a_{11,i,j+0,5,k}T^{n+\frac{2}{3}}_{i,j+1,k} - (a_{11,i,j+0,5,k} + a_{11,i,j-0,5,k})\,T^{n+\frac{2}{3}}_{i,j,k} + a_{11,i,j-0,5,k}T^{n+\frac{2}{3}}_{i,j-1,k}}{\Delta y^2} +$$
$$+ \frac{a_{11,i,j,k+0,5}T^{n+\frac{1}{3}}_{i,j,k+1} - (a_{11,i,j,k+0,5} + a_{11,i,j,k-0,5})\,T^{n+\frac{1}{3}}_{i,j,k} + a_{11,i,j,k-0,5}T^{n+\frac{1}{3}}_{i,j,k-1}}{\Delta z^2} +$$
$$+ \frac{a_{12,i+0,5,j,k}M^{n+\frac{1}{3}}_{i+1,j,k} - (a_{12,i+0,5,j,k} + a_{12,i-0,5,j,k})\,M^{n+\frac{1}{3}}_{i,j,k} + a_{12,i-0,5,j,k}M^{n+\frac{1}{3}}_{i-1,j,k}}{\Delta x^2} +$$
$$+ \frac{a_{12,i,j+0,5,k}M^{n+\frac{1}{3}}_{i,j+1,k} - (a_{12,i,j+0,5,k} + a_{12,i,j-0,5,k})\,M^{n+\frac{1}{3}}_{i,j,k} + a_{12,i,j-0,5,k}M^{n+\frac{1}{3}}_{i,j-1,k}}{\Delta y^2} +$$
$$+ \frac{a_{12,i,j,k+0,5}M^{n+\frac{1}{3}}_{i,j,k+1} - (a_{12,i,j,k+0,5} + a_{12,i,j,k-0,5})\,M^{n+\frac{1}{3}}_{i,j,k} + a_{12,i,j,k-0,5}M^{n+\frac{1}{3}}_{i,j,k-1}}{\Delta z^2} +$$
$$+ \frac{a_{13,i+0,5,j,k}P^{n+\frac{1}{3}}_{i+1,j,k} - (a_{13,i+0,5,j,k} + a_{13,i-0,5,j,k})\,P^{n+\frac{1}{3}}_{i,j,k} + a_{13,i-0,5,j,k}P^{n+\frac{1}{3}}_{i-1,j,k}}{\Delta x^2} +$$
$$+ \frac{a_{13,i,j+0,5,k}P^{n+\frac{1}{3}}_{i,j+1,k} - (a_{13,i,j+0,5,k} + a_{13,i,j-0,5,k})\,P^{n+\frac{1}{3}}_{i,j,k} + a_{13,i,j-0,5,k}P^{n+\frac{1}{3}}_{i,j-1,k}}{\Delta y^2} +$$
$$+ \frac{a_{13,i,j,k+0,5}P^{n+\frac{1}{3}}_{i,j,k+1} - (a_{13,i,j,k+0,5} + a_{13,i,j,k-0,5})\,P^{n+\frac{1}{3}}_{i,j,k} + a_{13,i,j,k-0,5}P^{n+\frac{1}{3}}_{i,j,k-1}}{\Delta z^2} + \frac{1}{3} f^{n+\frac{2}{3}}_{i,j,k}.$$

Тогда $T^{n+\frac{2}{3}}_{i,j,k}$ в точке сетки jдля временного шага $n+\frac{2}{3}$ приводит к уравнению

$$\overline{a}_{T,i,j,k}T^{n+\frac{2}{3}}_{i-1,j,k} - \overline{b}_{T,i,j,k}T^{n+\frac{2}{3}}_{i,j,k} + \overline{c}_{T,i,j,k}T^{n+\frac{2}{3}}_{i+1,j,k} = -\overline{d}_{T,i,j,k}, \tag{54}$$

где коэффициенты и свободный член определяются с помощью следующих выражений:

$$\overline{a}_{T,i,j,k} = \frac{a_{11,i,j-0,5,k}}{\Delta y^2}, \quad \overline{b}_{T,i,j,k} = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)\,\Delta\tau^{\alpha}} + \frac{a_{11,i,j+0,5,k} + a_{11,i,j-0,5,k}}{\Delta y^2},$$
$$\overline{c}_{T,i,j,k} = \frac{a_{11,i,j+0,5,k}}{\Delta y^2},$$
$$\overline{d}_{T,i,j,k} = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)\,\Delta\tau^{\alpha}} \left(T^{n+\frac{1}{3}}_{i,j,k} - \sum_{m=1}^{n} b_{i,j,k} \left(T^{n-m+\frac{2}{3}}_{i,j,k} - T^{n-m+\frac{1}{3}}_{i,j,k}\right)\right) +$$
$$+ \frac{a_{11,i+0,5,j,k}T^{n+\frac{1}{3}}_{i+1,j,k} - (a_{11,i+0,5,j,k} + a_{11,i-0,5,j,k})\,T^{n+\frac{1}{3}}_{i,j,k} + a_{11,i-0,5,j,k}T^{n+\frac{1}{3}}_{i-1,j,k}}{\Delta x^2} +$$

$$+\frac{a_{11,i,j,k+0,5}T^{n+\frac{1}{3}}_{i,j,k+1}-\left(a_{11,i,j,k+0,5}+a_{11,i,j,k-0,5}\right)T^{n+\frac{1}{3}}_{i,j,k}+a_{11,i,j,k-0,5}T^{n+\frac{1}{3}}_{i,j,k-1}}{\Delta z^2}+$$

$$+\frac{a_{12,i+0,5,j,k}M^{n+\frac{1}{3}}_{i+1,j,k}-\left(a_{12,i+0,5,j,k}+a_{12,i-0,5,j,k}\right)M^{n+\frac{1}{3}}_{i,j,k}+a_{12,i-0,5,j,k}M^{n+\frac{1}{3}}_{i-1,j,k}}{\Delta x^2}+$$

$$+\frac{a_{12,i,j+0,5,k}M^{n+\frac{1}{3}}_{i,j+1,k}-\left(a_{12,i,j+0,5,k}+a_{12,i,j-0,5,k}\right)M^{n+\frac{1}{3}}_{i,j,k}+a_{12,i,j-0,5,k}M^{n+\frac{1}{3}}_{i,j-1,k}}{\Delta y^2}+$$

$$+\frac{a_{12,i,j,k+0,5}M^{n+\frac{1}{3}}_{i,j,k+1}-\left(a_{12,i,j,k+0,5}+a_{12,i,j,k-0,5}\right)M^{n+\frac{1}{3}}_{i,j,k}+a_{12,i,j,k-0,5}M^{n+\frac{1}{3}}_{i,j,k-1}}{\Delta z^2}+$$

$$+\frac{a_{13,i+0,5,j,k}P^{n+\frac{1}{3}}_{i+1,j,k}-\left(a_{13,i+0,5,j,k}+a_{13,i-0,5,j,k}\right)P^{n+\frac{1}{3}}_{i,j,k}+a_{13,i-0,5,j,k}P^{n+\frac{1}{3}}_{i-1,j,k}}{\Delta x^2}+$$

$$+\frac{a_{13,i,j+0,5,k}P^{n+\frac{1}{3}}_{i,j+1,k}-\left(a_{13,i,j+0,5,k}+a_{13,i,j-0,5,k}\right)P^{n+\frac{1}{3}}_{i,j,k}+a_{13,i,j-0,5,k}P^{n+\frac{1}{3}}_{i,j-1,k}}{\Delta y^2}+$$

$$+\frac{a_{13,i,j,k+0,5}P^{n+\frac{1}{3}}_{i,j,k+1}-\left(a_{13,i,j,k+0,5}+a_{13,i,j,k-0,5}\right)P^{n+\frac{1}{3}}_{i,j,k}+a_{13,i,j,k-0,5}P^{n+\frac{1}{3}}_{i,j,k-1}}{\Delta z^2}+\frac{1}{3}f^{n+\frac{2}{3}}_{i,j,k}.$$

Далее, граничную условию (9) аппроксимируем по Oy и получим:

$$\lambda_1\frac{-3T^{n+\frac{2}{3}}_{i,0,k}+4T^{n+\frac{2}{3}}_{i,1,k}-T^{n+\frac{2}{3}}_{i,2,k}}{2\Delta y}=-\beta_1T_{oc}+\beta_1T^{n+\frac{2}{3}}_{i,0,k}+\varphi_2^{n+\frac{2}{3}}, \tag{55}$$

где $\varphi_2=\eta\gamma R_2\left(\tau\right)$.

Из системы уравнении (54), когда $j=1$, получим:

$$\overline{a}_{T,i,1,k}T^{n+\frac{2}{3}}_{i,0,k}-\overline{b}_{T,i,1,k}T^{n+\frac{2}{3}}_{i,1,k}+\overline{c}_{T,i,1,k}T^{n+\frac{2}{3}}_{i,2,k}=-\overline{d}_{T,i,1,k}. \tag{56}$$

Поставив $T^{n+\frac{2}{3}}_{i,2,k}$ из (56) в (50), найдем $T^{n+\frac{2}{3}}_{i,0,k}$:

$$T^{n+\frac{2}{3}}_{i,0,k}=\overline{\alpha}_{T,i,0,k}T^{n+\frac{2}{3}}_{i,1,k}+\overline{\beta}_{T,i,0,k}, \tag{57}$$

где прогоночные коэффициенты вычисляется с помощью формул:

$$\overline{\alpha}_{T,i,0,k}=\frac{\lambda_1\overline{b}_{T,i,1,k}-4\lambda_1\overline{c}_{T,i,1,k}}{\overline{a}_{T,i,1,k}\lambda_1-3\overline{c}_{T,i,1,k}\lambda_1-2\Delta y\overline{c}_{T,i,1,k}\beta_1};$$

$$\overline{\beta}_{T,i,0,k}=\frac{-\overline{d}_{T,i,1,k}\lambda_1-2\Delta y\overline{c}_{T,i,1,k}\beta_1T_{oc}-2\Delta y\overline{c}_{T,i,1,k}\varphi_1^{n+\frac{2}{3}}}{\overline{a}_{T,i,1,k}\lambda_1-3\overline{c}_{T,i,1,k}\lambda_1-2\Delta y\overline{c}_{T,i,1,k}\beta_1}.$$

Аналогично аппроксимируя граничное условие (10) по Oy, получим:

$$\lambda_1\frac{T^{n+\frac{2}{3}}_{i,M-2,k}-4T^{n+\frac{2}{3}}_{i,M-1,k}+3T^{n+\frac{2}{3}}_{i,M,k}}{2\Delta y}=-\beta_1T_{oc}+\beta_1T^{n+\frac{2}{3}}_{i,M,k}+\varphi_2^{n+\frac{2}{3}}, \tag{58}$$

где $\varphi_2=\eta\gamma R_2\left(\tau\right)$.

Применяя метод прогонки для последовательности при $M, M-1$ и $M-2$, найдем $T^{n+\frac{2}{3}}_{i,M-1,k}$ и $T^{n+\frac{2}{3}}_{i,M-2,k}$:

$$T^{n+\frac{2}{3}}_{i,M-1,k}=\overline{\alpha}_{T,i,M-1,k}\,T^{n+\frac{2}{3}}_{i,M,k}+\overline{\beta}_{T,i,M-1,k}; \tag{59}$$

$$T_{i,M-2,k}^{n+\frac{2}{3}}=\overline{\alpha}_{T,i,M-2,k}\,\overline{\alpha}_{T,i,M-1,k}\,T_{i,M,k}^{n+\frac{2}{3}}+\overline{\alpha}_{T,i,M-2,k}\,\overline{\beta}_{T,i,M-1,k}+\overline{\beta}_{T,i,M-2,k}. \tag{60}$$

Поставив $T_{i,M-1,k}^{n+\frac{2}{3}}$ из (59) и $T_{i,M-2,k}^{n+\frac{2}{3}}$ из (60) в (58), найдем $T_{i,M,k}^{n+\frac{2}{3}}$:

$$T_{i,M,k}^{n+\frac{2}{3}}=\frac{-\lambda_1\overline{\alpha}_{T,i,M-2,k}\,\overline{\beta}_{T,i,M-1,k}-\lambda_1\overline{\beta}_{T,i,M-2,k}+4\lambda_1\overline{\beta}_{T,i,M-1,k}-2\Delta y\beta_1T_{oc}+2\Delta y\varphi_2^{n+\frac{2}{3}}}{3\lambda_1-2\Delta y\beta_1+\lambda_1\overline{\alpha}_{T,i,M-2,k}\,\overline{\alpha}_{T,i,M-1,k}-4\lambda_1\overline{\alpha}_{T,i,M-1,k}}. \tag{61}$$

Значения последовательности температуры $T_{i,M-1,k}^{n+\frac{2}{3}}$, $T_{i,M-2,k}^{n+\frac{2}{3}}$, ..., $T_{i,1,k}^{n+\frac{2}{3}}$ определяются методом обратной прогонки по уменьшению j:

$$T_{i,j,k}^{n+\frac{2}{3}}=\overline{\alpha}_{T,i,j,k}T_{i,j+1,k}^{n+\frac{2}{3}}+\overline{\beta}_{T,i,j,k}\;,\; i=\overline{0,N},\;\; j=\overline{M-1,\,1},\;\; k=\overline{0,\,L}. \tag{62}$$

Аналогично уравнение (2) аппроксимируем по Oy конечно-разностными соотношениями

$$\frac{1}{\Gamma\left(2-\alpha\right)\Delta\tau^{\alpha}}\sum_{m=0}^{n}b_m\left(M_{i,j,k}^{n-m+\frac{2}{3}}-M_{i,j,k}^{n-m+\frac{1}{3}}\right)=$$
$$=\frac{1}{\Gamma\left(2-\alpha\right)\Delta\tau^{\alpha}}\left(M_{i,j,k}^{n+\frac{2}{3}}-M_{i,j,k}^{n+\frac{1}{3}}+\sum_{m=1}^{n}b_m\left(M_{i,j,k}^{n-m+\frac{2}{3}}-M_{i,j,k}^{n-m+\frac{1}{3}}\right)\right)=$$
$$=\frac{a_{21,i+0,5,j,k}M_{i+1,j,k}^{n+\frac{1}{3}}-\left(a_{21,i+0,5,j,k}+a_{21,i-0,5,j,k}\right)M_{i,j,k}^{n+\frac{1}{3}}+a_{21,i-0,5,j,k}M_{i-1,j,k}^{n+\frac{1}{3}}}{\Delta x^2}+$$
$$+\frac{a_{21,i,j+0,5,k}M_{i,j+1,k}^{n+\frac{2}{3}}-\left(a_{21,i,j+0,5,k}+a_{21,i,j-0,5,k}\right)M_{i,j,k}^{n+\frac{2}{3}}+a_{21,i,j-0,5,k}M_{i,j-1,k}^{n+\frac{2}{3}}}{\Delta y^2}+$$
$$+\frac{a_{21,i,j,k+0,5}M_{i,j,k+1}^{n+\frac{1}{3}}-\left(a_{21,i,j,k+0,5}+a_{21,i,j,k-0,5}\right)M_{i,j,k}^{n+\frac{1}{3}}+a_{21,i,j,k-0,5}M_{i,j,k-1}^{n+\frac{1}{3}}}{\Delta z^2}+$$
$$+\frac{a_{22,i+0,5,j,k}T_{i+1,j,k}^{n+\frac{1}{3}}-\left(a_{22,i+0,5,j,k}+a_{22,i-0,5,j,k}\right)T_{i,j,k}^{n+\frac{1}{3}}+a_{22,i-0,5,j,k}T_{i-1,j,k}^{n+\frac{1}{3}}}{\Delta x^2}+$$
$$+\frac{a_{22,i,j+0,5,k}T_{i,j+1,k}^{n+\frac{1}{3}}-\left(a_{22,i,j+0,5,k}+a_{22,i,j-0,5,k}\right)T_{i,j,k}^{n+\frac{1}{3}}+a_{22,i,j-0,5,k}T_{i,j-1,k}^{n+\frac{1}{3}}}{\Delta y^2}+$$
$$+\frac{a_{22,i,j,k+0,5}T_{i,j,k+1}^{n+\frac{1}{3}}-\left(a_{22,i,j,k+0,5}+a_{22,i,j,k-0,5}\right)T_{i,j,k}^{n+\frac{1}{3}}+a_{22,i,j,k-0,5}T_{i,j,k-1}^{n+\frac{1}{3}}}{\Delta z^2}+$$
$$+\frac{a_{23,i+0,5,j,k}P_{i+1,j,k}^{n+\frac{1}{3}}-\left(a_{23,i+0,5,j,k}+a_{23,i-0,5,j,k}\right)P_{i,j,k}^{n+\frac{1}{3}}+a_{23,i-0,5,j,k}P_{i-1,j,k}^{n+\frac{1}{3}}}{\Delta x^2}+$$
$$+\frac{a_{23,i,j+0,5,k}P_{i,j+1,k}^{n+\frac{1}{3}}-\left(a_{23,i,j+0,5,k}+a_{23,i,j-0,5,k}\right)P_{i,j,k}^{n+\frac{1}{3}}+a_{23,i,j-0,5,k}P_{i,j-1,k}^{n+\frac{1}{3}}}{\Delta y^2}+$$
$$+\frac{a_{23,i,j,k+0,5}P_{i,j,k+1}^{n+\frac{1}{3}}-\left(a_{23,i,j,k+0,5}+a_{23,i,j,k-0,5}\right)P_{i,j,k}^{n+\frac{1}{3}}+a_{23,i,j,k-0,5}P_{i,j,k-1}^{n+\frac{1}{3}}}{\Delta z^2}+\frac{1}{3}q_{i,j,k}^{n+\frac{2}{3}}.$$

Тогда $M_{i,j,k}^{n+\frac{2}{3}}$ в точке сетки j для временного шага $n+\frac{2}{3}$ приводит к системе уравнению

$$\overline{a}_{M,i,j,k}M_{i,j-1,k}^{n+\frac{2}{3}}-\overline{b}_{M,i,j,k}M_{i,j,k}^{n+\frac{2}{3}}+\overline{c}_{M,i,j,k}\,M_{i,j+1,k}^{n+\frac{2}{3}}=-\overline{d}_{M,i,j,k}, \tag{63}$$

где коэффициенты и свободный член определяются с помощью следующих выражений:

$$\overline{a}_{M,i,j,k}=\frac{a_{21,i,j-0,5,k}}{\Delta y^2},\quad \overline{b}_{M,i,j,k}=\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)\,\Delta\tau^{\alpha}}+\frac{a_{21,i,j+0,5,k}+a_{21,i,j-0,5,k}}{\Delta y^2},$$
$$\overline{c}_{M,i,j,k}=\frac{a_{21,i,j+0,5,k}}{\Delta x^2},$$
$$\overline{d}_{M,i,j,k}=\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)\,\Delta\tau^{\alpha}}\left(M_{i,j,k}^{n+\frac{1}{3}}-\sum_{m=1}^{n}b_{i,j,k}\left(M_{i,j,k}^{n-m+\frac{2}{3}}-M_{i,j,k}^{n-m+\frac{1}{3}}\right)\right)+$$
$$+\frac{a_{21,i+0,5,j,k}M_{i+1,j,k}^{n+\frac{1}{3}}-\left(a_{21,i+0,5,j,k}+a_{21,i-0,5,j,k}\right)M_{i,j,k}^{n+\frac{1}{3}}+a_{21,i-0,5,j,k}M_{i-1,j,k}^{n+\frac{1}{3}}}{\Delta x^2}+$$
$$+\frac{a_{21,i,j,k+0,5}M_{i,j,k+1}^{n+\frac{1}{3}}-\left(a_{21,i,j,k+0,5}+a_{21,i,j,k-0,5}\right)M_{i,j,k}^{n+\frac{1}{3}}+a_{21,i,j,k-0,5}M_{i,j,k-1}^{n+\frac{1}{3}}}{\Delta z^2}+$$
$$+\frac{a_{22,i+0,5,j,k}T_{i+1,j,k}^{n+\frac{1}{3}}-\left(a_{22,i+0,5,j,k}+a_{22,i-0,5,j,k}\right)T_{i,j,k}^{n+\frac{1}{3}}+a_{22,i-0,5,j,k}T_{i-1,j,k}^{n+\frac{1}{3}}}{\Delta x^2}+$$
$$+\frac{a_{22,i,j+0,5,k}T_{i,j+1,k}^{n+\frac{1}{3}}-\left(a_{22,i,j+0,5,k}+a_{22,i,j-0,5,k}\right)T_{i,j,k}^{n+\frac{1}{3}}+a_{22,i,j-0,5,k}T_{i,j-1,k}^{n+\frac{1}{3}}}{\Delta y^2}+$$
$$+\frac{a_{22,i,j,k+0,5}T_{i,j,k+1}^{n+\frac{1}{3}}-\left(a_{22,i,j,k+0,5}+a_{22,i,j,k-0,5}\right)T_{i,j,k}^{n+\frac{1}{3}}+a_{22,i,j,k-0,5}T_{i,j,k-1}^{n+\frac{1}{3}}}{\Delta z^2}+$$
$$+\frac{a_{23,i+0,5,j,k}P_{i+1,j,k}^{n+\frac{1}{3}}-\left(a_{23,i+0,5,j,k}+a_{23,i-0,5,j,k}\right)P_{i,j,k}^{n+\frac{1}{3}}+a_{23,i-0,5,j,k}P_{i-1,j,k}^{n+\frac{1}{3}}}{\Delta x^2}+$$
$$+\frac{a_{23,i,j+0,5,k}P_{i,j+1,k}^{n+\frac{1}{3}}-\left(a_{23,i,j+0,5,k}+a_{23,i,j-0,5,k}\right)P_{i,j,k}^{n+\frac{1}{3}}+a_{23,i,j-0,5,k}P_{i,j-1,k}^{n+\frac{1}{3}}}{\Delta y^2}+$$
$$+\frac{a_{23,i,j,k+0,5}P_{i,j,k+1}^{n+\frac{1}{3}}-\left(a_{23,i,j,k+0,5}+a_{23,i,j,k-0,5}\right)P_{i,j,k}^{n+\frac{1}{3}}+a_{23,i,j,k-0,5}P_{i,j,k-1}^{n+\frac{1}{3}}}{\Delta z^2}+\frac{1}{3}q_{i,j,k}^{n+\frac{2}{3}}.$$

Далее, граничную условию (15) аппроксимируем со вторым порядком точности по Oy и получим:

$$\lambda_2\frac{-3M_{i,0,k}^{n+\frac{2}{3}}+4M_{i,1,k}^{n+\frac{2}{3}}-M_{i,2,k}^{n+\frac{2}{3}}}{2\Delta y}=-\beta_2M_{oc}+\beta_2M_{i,0,k}^{n+\frac{2}{3}}. \tag{64}$$

Из системы уравнений (38), при $j=1$, получим:

$$\overline{a}_{M,i,1,k}M_{i,0,k}^{n+\frac{2}{3}}-\overline{b}_{M,i,1,k}M_{i,1,k}^{n+\frac{2}{3}}+\overline{c}_{M,i,1,k}\,M_{i,2,k}^{n+\frac{2}{3}}=-\overline{d}_{M,i,1,k}. \tag{65}$$

Поставив $M_{i,2,k}^{n+\frac{2}{3}}$ из (40) в (39), найдем значение $M_{i,0,k}^{n+\frac{2}{3}}$:

$$M_{i,0,k}^{n+\frac{2}{3}}=\overline{\alpha}_{M,i,0,k}\,M_{i,1,k}^{n+\frac{2}{3}}+\overline{\beta}_{M,i,0,k}. \tag{66}$$

Из соотношения (41) прогоночные коэффициенты определяются в виде:

$$\overline{\alpha}_{M,i,0,k}=\frac{\lambda_2\overline{b}_{M,i,1,k}-4\lambda_2\overline{c}_{M,i,1,k}}{\overline{a}_{M,i,1,k}-3\overline{c}_{M,i,1,k}\,\lambda_2-2\Delta y\overline{c}_{M,i,1,k}\beta_2},$$
$$\overline{\beta}_{M,i,0,k}=\frac{-\overline{d}_{M,i,1,k}-2\Delta y\overline{c}_{M,i,1,k}\beta_2M_{oc}}{\overline{a}_{M,i,1,k}-3\overline{c}_{M,i,1,k}\,\lambda_2-2\Delta y\overline{c}_{M,i,1,k}\beta_2}.$$

Аналогично аппроксимируя граничному условию (16) по Oy, получим:

$$\lambda_2 \frac{M_{i,M-2,k}^{n+\frac{2}{3}} - 4M_{i,M-1,k}^{n+\frac{2}{3}} + 3M_{i,M,k}^{n+\frac{2}{3}}}{2\Delta y} = \beta_2 M_{oc} - \beta_2 M_{i,M,k}^{n+\frac{2}{3}}. \qquad (67)$$

Применяя метод прогонки для последовательности $M, M-1$ и $M-2$, найдем $M_{i,M-1,k}^{n+\frac{2}{3}}$ и $M_{i,M-2,k}^{n+\frac{2}{3}}$:

$$M_{i,M-1,k}^{n+\frac{2}{3}} = \overline{\alpha}_{M,i,M-1,k}\, M_{i,M,k}^{n+\frac{2}{3}} + \overline{\beta}_{M,i,M-1,k}, \qquad (68)$$

$$M_{i,M-2,k}^{n+\frac{2}{3}} = \overline{\alpha}_{M,i,M-2,k}\overline{\alpha}_{M,i,M-1,k}\, M_{i,M,k}^{n+\frac{2}{3}} + \overline{\alpha}_{M,i,M-2,k}\overline{\beta}_{M,i,M-1,k} + \overline{\beta}_{M,i,M-2,k}. \qquad (69)$$

Поставив $M_{i,M-1,k}^{n+\frac{2}{3}}$ из (68) и $M_{i,M-2,k}^{n+\frac{2}{3}}$ из (69) в (67), найдем $M_{i,M,k}^{n+\frac{2}{3}}$:

$$M_{i,M,k}^{n+\frac{2}{3}} = \frac{-\lambda_2\overline{\alpha}_{M,i,M-2,k}\overline{\beta}_{M,i,M-1,k} - \lambda_2\overline{\beta}_{M,i,M-2,k} + 4\lambda_2\overline{\beta}_{M,i,M-1,k} + 2\Delta y\beta_2 M_{oc}}{3\lambda_2 - 2\Delta y\beta_2 + \lambda_2\overline{\alpha}_{M,i,M-2,k}\overline{\alpha}_{M,i,M-1,k} - 4\lambda_2\overline{\alpha}_{M,i,M-1,k}}.$$

Значения последовательности влаги $M_{i,M-1,k}^{n+\frac{2}{3}}$, $M_{i,M-2,k}^{n+\frac{2}{3}}$, ..., $M_{i,1,k}^{n+\frac{2}{3}}$, определяются методом обратной прогонки по уменьшению i:

$$M_{i,j,k}^{n+\frac{2}{3}} = \overline{\alpha}_{M,i,j,k}\, M_{i,j+1,k}^{n+\frac{2}{3}} + \overline{\beta}_{M,i,j,k} \text{ где } i = \overline{0, N},\ j = \overline{M-1,\, 1},\ k = \overline{0,\, L}. \qquad (70)$$

Аналогично уравнение (3) аппроксимируем по конечно-разностными соотношениями, изменение давление:

$$\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)\,\Delta\tau^{\alpha}} \sum_{m=0}^{n} b_m \left(P_{i,j,k}^{n-m+\frac{2}{3}} - P_{i,j,k}^{n-m+\frac{1}{3}}\right) =$$

$$= \frac{a_{31,i+0,5,j,k}P_{i+1,j,k}^{n+\frac{1}{3}} - (a_{31,i+0,5,j,k} + a_{31,i-0,5,j,k})\, P_{i,j,k}^{n+\frac{1}{3}} + a_{31,i-0,5,j,k}P_{i-1,j,k}^{n+\frac{1}{3}}}{\Delta x^2} +$$

$$+ \frac{a_{31,i,j+0,5,k}P_{i,j+1,k}^{n+\frac{2}{3}} - (a_{31,i,j+0,5,k} + a_{31,i,j-0,5,k})\, P_{i,j,k}^{n+\frac{2}{3}} + a_{31,i,j-0,5,k}P_{i,j-1,k}^{n+\frac{2}{3}}}{\Delta y^2} +$$

$$+ \frac{a_{31,i,j,k+0,5}P_{i,j,k+1}^{n+\frac{1}{3}} - (a_{31,i,j,k+0,5} + a_{31,i,j,k-0,5})\, P_{i,j,k}^{n+\frac{1}{3}} + a_{31,i,j,k-0,5}P_{i,j,k-1}^{n+\frac{1}{3}}}{\Delta z^2} +$$

$$+ \frac{a_{32,i+0,5,j,k}T_{i+1,j,k}^{n+\frac{1}{3}} - (a_{32,i+0,5,j,k} + a_{32,i-0,5,j,k})\, T_{i,j,k}^{n+\frac{1}{3}} + a_{32,i-0,5,j,k}T_{i-1,j,k}^{n+\frac{1}{3}}}{\Delta x^2} +$$

$$+ \frac{a_{32,i,j+0,5,k}T_{i,j+1,k}^{n+\frac{1}{3}} - (a_{32,i,j+0,5,k} + a_{32,i,j-0,5,k})\, T_{i,j,k}^{n+\frac{1}{3}} + a_{32,i,j-0,5,k}T_{i,j-1,k}^{n+\frac{1}{3}}}{\Delta y^2} +$$

$$+ \frac{a_{32,i,j,k+0,5}T_{i,j,k+1}^{n+\frac{1}{3}} - (a_{32,i,j,k+0,5} + a_{32,i,j,k-0,5})\, T_{i,j,k}^{n+\frac{1}{3}} + a_{32,i,j,k-0,5}T_{i,j,k-1}^{n+\frac{1}{3}}}{\Delta z^2} +$$

$$+ \frac{a_{33,i+0,5,j,k}M_{i+1,j,k}^{n+\frac{1}{3}} - (a_{33,i+0,5,j,k} + a_{33,i-0,5,j,k})\, M_{i,j,k}^{n+\frac{1}{3}} + a_{33,i-0,5,j,k}M_{i-1,j,k}^{n+\frac{1}{3}}}{\Delta x^2} +$$

$$+ \frac{a_{33,i,j+0,5,k}M_{i,j+1,k}^{n+\frac{1}{3}} - (a_{33,i,j+0,5,k} + a_{33,i,j-0,5,k})\, M_{i,j,k}^{n+\frac{1}{3}} + a_{33,i,j-0,5,k}M_{i,j-1,k}^{n+\frac{1}{3}}}{\Delta y^2} +$$

$$+ \frac{a_{33,i,j,k+0,5}M_{i,j,k+1}^{n+\frac{1}{3}} - (a_{33,i,j,k+0,5} + a_{33,i,j,k-0,5})\, M_{i,j,k}^{n+\frac{1}{3}} + a_{33,i,j,k-0,5}M_{i,j,k-1}^{n+\frac{1}{3}}}{\Delta z^2}.$$

Тогда $P^{n+\frac{2}{3}}_{i,j,k}$ в точке сетки k для временного шага $n+\frac{2}{3}$ приводит к систему уравнению:

$$\overline{a}_{P,i,j,k}\,P^{n+\frac{2}{3}}_{i,j-1,k}-\overline{b}_{P,i,j,k}\,P^{n+\frac{2}{3}}_{i,j,k}+\overline{c}_{P,i,j,k}\,P^{n+\frac{2}{3}}_{i,j+1,k}=-\overline{d}_{P,i,j,k}, \tag{71}$$

где коэффициенты и свободный член определяются с помощью следующих выражений:

$$\overline{a}_{P,i,j,k}=\frac{a_{31,i,j-0,5,k}}{\Delta y^2},\quad \overline{b}_{P,i,j,k}=\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)\,\Delta\tau^{\alpha}}+\frac{a_{31,i,j+0,5,k}+a_{31,i,j-0,5,k}}{\Delta y^2},$$
$$\overline{c}_{P,i,j,k}=\frac{a_{31,i,j+0,5,k}}{\Delta y^2},$$
$$\overline{d}_{P,i,j,k}=\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)\,\Delta\tau^{\alpha}}\left(P^{n+\frac{1}{3}}_{i,j,k}-\sum_{m=1}^{n}b_{i,j,k}\left(P^{n-m+\frac{2}{3}}_{i,j,k}-P^{n-m+\frac{1}{3}}_{i,j,k}\right)\right)+$$
$$+\frac{a_{31,i+0,5,j,k}P^{n+\frac{1}{3}}_{i+1,j,k}-\left(a_{31,i+0,5,j,k}+a_{31,i-0,5,j,k}\right)P^{n+\frac{1}{3}}_{i,j,k}+a_{31,i-0,5,j,k}P^{n+\frac{1}{3}}_{i-1,j,k}}{\Delta x^2}+$$
$$+\frac{a_{31,i,j,k+0,5}P^{n+\frac{1}{3}}_{i,j,k+1}-\left(a_{31,i,j,k+0,5}+a_{31,i,j,k-0,5}\right)P^{n+\frac{1}{3}}_{i,j,k}+a_{31,i,j,k-0,5}P^{n+\frac{1}{3}}_{i,j,k-1}}{\Delta z^2}+$$
$$+\frac{a_{32,i+0,5,j,k}T^{n+\frac{1}{3}}_{i+1,j,k}-\left(a_{32,i+0,5,j,k}+a_{32,i-0,5,j,k}\right)T^{n+\frac{1}{3}}_{i,j,k}+a_{32,i-0,5,j,k}T^{n+\frac{1}{3}}_{i-1,j,k}}{\Delta x^2}+$$
$$+\frac{a_{32,i,j+0,5,k}T^{n+\frac{1}{3}}_{i,j+1,k}-\left(a_{32,i,j+0,5,k}+a_{32,i,j-0,5,k}\right)T^{n+\frac{1}{3}}_{i,j,k}+a_{32,i,j-0,5,k}T^{n+\frac{1}{3}}_{i,j-1,k}}{\Delta y^2}+$$
$$+\frac{a_{32,i,j,k+0,5}T^{n+\frac{1}{3}}_{i,j,k+1}-\left(a_{32,i,j,k+0,5}+a_{32,i,j,k-0,5}\right)T^{n+\frac{1}{3}}_{i,j,k}+a_{32,i,j,k-0,5}T^{n+\frac{1}{3}}_{i,j,k-1}}{\Delta z^2}+$$
$$+\frac{a_{33,i+0,5,j,k}M^{n+\frac{1}{3}}_{i+1,j,k}-\left(a_{33,i+0,5,j,k}+a_{33,i-0,5,j,k}\right)M^{n+\frac{1}{3}}_{i,j,k}+a_{33,i-0,5,j,k}M^{n+\frac{1}{3}}_{i-1,j,k}}{\Delta x^2}+$$
$$+\frac{a_{33,i,j+0,5,k}M^{n+\frac{1}{3}}_{i,j+1,k}-\left(a_{33,i,j+0,5,k}+a_{33,i,j-0,5,k}\right)M^{n+\frac{1}{3}}_{i,j,k}+a_{33,i,j-0,5,k}M^{n+\frac{1}{3}}_{i,j-1,k}}{\Delta y^2}+$$
$$+\frac{a_{33,i,j,k+0,5}M^{n+\frac{1}{3}}_{i,j,k+1}-\left(a_{33,i,j,k+0,5}+a_{33,i,j,k-0,5}\right)M^{n+\frac{1}{3}}_{i,j,k}+a_{33,i,j,k-0,5}M^{n+\frac{1}{3}}_{i,j,k-1}}{\Delta z^2}.$$

Далее, граничную условию (21) аппроксимируем со вторым порядком точности по Oy и получим:

$$\lambda_3\frac{-3P^{n+\frac{2}{3}}_{i,0,k}+4P^{n+\frac{2}{3}}_{i,1,k}-P^{n+\frac{2}{3}}_{i,2,k}}{2\Delta y}=-\beta_3P_{oc}+\beta_3P^{n+\frac{2}{3}}_{i,0,k}. \tag{72}$$

Из системы уравнений (71), при $j=1$, получим:

$$\overline{a}_{P,1,j,k}\,P^{n+\frac{2}{3}}_{i,0,k}-\overline{b}_{P,i,1,k}\,P^{n+\frac{2}{3}}_{i,1,k}+\overline{c}_{P,i,1,k}\,P^{n+\frac{2}{3}}_{i,2,k}=-\overline{d}_{P,i,1,k}. \tag{73}$$

Поставив $P^{n+\frac{2}{3}}_{i,2,k}$ из (73) в (72), найдем значение $P^{n+\frac{2}{3}}_{i,0,k}$:

$$P^{n+\frac{2}{3}}_{i,0,k}=\overline{\alpha}_{P,i,0,k}\,P^{n+\frac{2}{3}}_{i,1,k}+\overline{\beta}_{P,i,0,k}. \tag{74}$$

Из соотношения (74) прогоночные коэффициенты определяются в виде:

$$\overline{\alpha}_{P,i,0,k} = \frac{\lambda_3 \overline{b}_{P,i,1,k} - 4\lambda_3 \overline{c}_{P,i,1,k}}{\overline{a}_{P,i,1,k}\lambda_3 - 3\overline{c}_{P,1,k}\lambda_3 - \ 2\Delta y \overline{c}_{P,i,1,k}\beta_3};$$
$$\overline{\beta}_{P,i,0,k} = \frac{-\overline{d}_{P,i,1,k}\lambda_3 - 2\Delta x \overline{c}_{P,i,1,k}\beta_3 P_{oc}}{\overline{a}_{P,i,1,k}\lambda_3 - 3\overline{c}_{P,i,1,k}\lambda_3 - \ 2\Delta y \overline{c}_{P,i,1,k}\beta_3}.$$

Аналогично аппроксимируя граничному условию (22) по Oy, получим:

$$\lambda_3 \frac{P_{i,M-2,k}^{n+\frac{2}{3}} - 4P_{i,M-1,k}^{n+\frac{2}{3}} + 3P_{i,M,k}^{n+\frac{2}{3}}}{2\Delta y} = \beta_3 P_{oc} - \beta_3 P_{i,M,k}^{n+\frac{2}{3}}. \tag{75}$$

Применяя метод прогонки для последовательности $M, M-1M-2$, найдем $P_{i,M-1,k}^{n+\frac{2}{3}}$ и $P_{i,M-2,k}^{n+\frac{2}{3}}$:

$$P_{i,M-1,k}^{n+\frac{2}{3}} = \overline{\alpha}_{P,i,M-1,k} P_{i,M,k}^{n+\frac{2}{3}} + \beta_{P,i,M-1,k}; \tag{76}$$

$$P_{i,M-2,k}^{n+\frac{2}{3}} = \overline{\alpha}_{P,i,M-2,k}\overline{\alpha}_{P,i,M-1,k}\, P_{i,M,k}^{n+\frac{1}{3}} + \overline{\alpha}_{P,i,M-2,k}\overline{\beta}_{P,i,M-1,k} + \overline{\beta}_{P,i,M-2,k}. \tag{77}$$

Поставив $P_{i,M-1,k}^{n+\frac{2}{3}}$ из (43) и $P_{i,M-2,k}^{n+\frac{2}{3}}$ из (44) в (42), найдем $P_{i,M,k}^{n+\frac{2}{3}}$:

$$P_{i,M,k}^{n+\frac{2}{3}} = \frac{-\lambda_3 \overline{\alpha}_{P,i,M-2,k}\overline{\beta}_{P,i,M-1,k} - \lambda_3 \overline{\beta}_{P,i,M-2,k} + 4\lambda_3 \overline{\beta}_{P,i,M-1,k} + 2\Delta y \overline{\beta}_3 P_{tttttt}}{3\lambda_3 - 2\Delta y \beta_3 + \lambda_3 \overline{\alpha}_{P,i,M-2,k}\overline{\alpha}_{P,i,M-1,k} - 4\lambda_3 \overline{\alpha}_{P,i,M-1,k}}.$$

Значения последовательности влаги $P_{i,M-1,k}^{n+\frac{2}{3}}$, $P_{i,M-2,k}^{n+\frac{2}{3}}$, ..., $P_{i,1,k}^{n+\frac{2}{3}}$ определяются методом обратной прогонки по уменьшению j:

$$P_{i,j,k}^{n+\frac{2}{3}} = \overline{\alpha}_{P,i,j,k}\, P_{i,j+1,k}^{n+\frac{2}{3}} + \overline{\beta}_{P,i,j,k}\,, \text{где}\, i = \overline{0, N},\ j = \overline{M-1,\, 1},\ k = \overline{0,\, L}. \tag{78}$$

$$\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)\,\Delta\tau^{\alpha}} \sum_{m=0}^{n} b_m \left(T_{i,j,k}^{n-m+1} - T_{i,j,k}^{n-m+\frac{2}{3}} \right) =$$
$$= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)\,\Delta\tau^{\alpha}} \left(T_{i,j,k}^{n+1} - T_{i,j,k}^{n+\frac{2}{3}} + \sum_{m=1}^{n} b_m \left(T_{i,j,k}^{n-m+1} - T_{i,j,k}^{n-m+\frac{2}{3}} \right) \right) =$$
$$= \frac{a_{11,i+0{,}5,j,k} T_{i+1,j,k}^{n+\frac{2}{3}} - \left(a_{11,i+0{,}5,j,k} + a_{11,i-0{,}5,j,k}\right) T_{i,j,k}^{n+\frac{2}{3}} + a_{11,i-0{,}5,j,k} T_{i-1,j,k}^{n+\frac{2}{3}}}{\Delta x^2} +$$
$$+ \frac{a_{11,i,j+0{,}5,k} T_{i,j+1,k}^{n+\frac{2}{3}} - \left(a_{11,i,j+0{,}5,k} + a_{11,i,j-0{,}5,k}\right) T_{i,j,k}^{n+\frac{2}{3}} + a_{11,i,j-0{,}5,k} T_{i,j-1,k}^{n+\frac{2}{3}}}{\Delta y^2} +$$
$$+ \frac{a_{11,i,j,k+0{,}5} T_{i,j,k+1}^{n+1} - \left(a_{11,i,j,k+0{,}5} + a_{11,i,j,k-0{,}5}\right) T_{i,j,k}^{n+1} + a_{11,i,j,k-0{,}5} T_{i,j,k-1}^{n+1}}{\Delta z^2} +$$

$$+\frac{a_{12,i+0,5,j,k}M_{i+1,j,k}^{n+\frac{2}{3}}-\left(a_{12,i+0,5,j,k}+a_{12,i-0,5,j,k}\right)M_{i,j,k}^{n+\frac{2}{3}}+a_{12,i-0,5,j,k}M_{i-1,j,k}^{n+\frac{2}{3}}}{\Delta x^2}+$$
$$+\frac{a_{12,i,j+0,5,k}M_{i,j+1,k}^{n+\frac{2}{3}}-\left(a_{12,i,j+0,5,k}+a_{12,i,j-0,5,k}\right)M_{i,j,k}^{n+\frac{2}{3}}+a_{12,i,j-0,5,k}M_{i,j-1,k}^{n+\frac{2}{3}}}{\Delta y^2}+$$
$$+\frac{a_{12,i,j,k+0,5}M_{i,j,k+1}^{n+\frac{2}{3}}-\left(a_{12,i,j,k+0,5}+a_{12,i,j,k-0,5}\right)M_{i,j,k}^{n+\frac{2}{3}}+a_{12,i,j,k-0,5}M_{i,j,k-1}^{n+\frac{2}{3}}}{\Delta z^2}+$$
$$+\frac{a_{13,i+0,5,j,k}P_{i+1,j,k}^{n+\frac{2}{3}}-\left(a_{13,i+0,5,j,k}+a_{13,i-0,5,j,k}\right)P_{i,j,k}^{n+\frac{2}{3}}+a_{13,i-0,5,j,k}P_{i-1,j,k}^{n+\frac{2}{3}}}{\Delta x^2}+$$
$$+\frac{a_{13,i,j+0,5,k}P_{i,j+1,k}^{n+\frac{2}{3}}-\left(a_{13,i,j+0,5,k}+a_{13,i,j-0,5,k}\right)P_{i,j,k}^{n+\frac{2}{3}}+a_{13,i,j-0,5,k}P_{i,j-1,k}^{n+\frac{2}{3}}}{\Delta y^2}+$$
$$+\frac{a_{13,i,j,k+0,5}P_{i,j,k+1}^{n+\frac{2}{3}}-\left(a_{13,i,j,k+0,5}+a_{13,i,j,k-0,5}\right)P_{i,j,k}^{n+\frac{2}{3}}+a_{13,i,j,k-0,5}P_{i,j,k-1}^{n+\frac{2}{3}}}{\Delta z^2}+\frac{1}{3}f_{i,j,k}^{n+1}.$$

Тогда $T_{i,j,k}^{n+1}$ в точке сетки kдля временного шага $n+1$ приводит к уравнению

$$\overline{\overline{a}}_{T,i,j,k}T_{i,j,k-1}^{n+1}-\overline{\overline{b}}_{T,i,j,k}T_{i,j,k}^{n+1}+\overline{\overline{c}}_{T,i,j,k}T_{i,j,k+1}^{n+1}=-\overline{\overline{d}}_{T,i,j,k}, \tag{79}$$

где коэффициенты и свободный член определяются с помощью следующих выражений:

$$\overline{\overline{a}}_{T,i,j,k}=\frac{a_{11,i,j,k-0,5}}{\Delta z^2},\quad \overline{\overline{b}}_{T,i,j,k}=\frac{1}{\Gamma\left(2-\alpha\right)\Delta\tau^{\alpha}}+\frac{a_{11,i,j,k+0,5}+a_{11,i,j,k-0,5}}{\Delta z^2},$$
$$\overline{\overline{c}}_{T,i,j,k}=\frac{a_{11,i,j,k+0,5}}{\Delta z^2},$$
$$\overline{\overline{d}}_{T,i,j,k}=\frac{1}{\Gamma\left(2-\alpha\right)\Delta\tau^{\alpha}}\left(T_{i,j,k}^{n+\frac{2}{3}}-\sum_{m=1}^{n}b_{i,j,k}\left(T_{i,j,k}^{n-m+1}-T_{i,j,k}^{n-m+\frac{2}{3}}\right)\right)+$$
$$+\frac{a_{11,i+0,5,j,k}T_{i+1,j,k}^{n+\frac{2}{3}}-\left(a_{11,i+0,5,j,k}+a_{11,i-0,5,j,k}\right)T_{i,j,k}^{n+\frac{2}{3}}+a_{11,i-0,5,j,k}T_{i-1,j,k}^{n+\frac{2}{3}}}{\Delta x^2}+$$
$$+\frac{a_{11,i,j+0,5,k}T_{i,j+1,k}^{n+\frac{2}{3}}-\left(a_{11,i,j+0,5,k}+a_{11,i,j-0,5,k}\right)T_{i,j,k}^{n+\frac{2}{3}}+a_{11,i,j-0,5,k}T_{i,j-1,k}^{n+\frac{2}{3}}}{\Delta y^2}+$$
$$+\frac{a_{12,i+0,5,j,k}M_{i+1,j,k}^{n+\frac{2}{3}}-\left(a_{12,i+0,5,j,k}+a_{12,i-0,5,j,k}\right)M_{i,j,k}^{n+\frac{2}{3}}+a_{12,i-0,5,j,k}M_{i-1,j,k}^{n+\frac{2}{3}}}{\Delta x^2}+$$
$$+\frac{a_{12,i,j+0,5,k}M_{i,j+1,k}^{n+\frac{2}{3}}-\left(a_{12,i,j+0,5,k}+a_{12,i,j-0,5,k}\right)M_{i,j,k}^{n+\frac{2}{3}}+a_{12,i,j-0,5,k}M_{i,j-1,k}^{n+\frac{2}{3}}}{\Delta y^2}+$$
$$+\frac{a_{12,i,j,k+0,5}M_{i,j,k+1}^{n+\frac{2}{3}}-\left(a_{12,i,j,k+0,5}+a_{12,i,j,k-0,5}\right)M_{i,j,k}^{n+\frac{2}{3}}+a_{12,i,j,k-0,5}M_{i,j,k-1}^{n+\frac{2}{3}}}{\Delta z^2}+$$
$$+\frac{a_{13,i+0,5,j,k}P_{i+1,j,k}^{n+\frac{2}{3}}-\left(a_{13,i+0,5,j,k}+a_{13,i-0,5,j,k}\right)P_{i,j,k}^{n+\frac{2}{3}}+a_{13,i-0,5,j,k}P_{i-1,j,k}^{n+\frac{2}{3}}}{\Delta x^2}+$$
$$+\frac{a_{13,i,j+0,5,k}P_{i,j+1,k}^{n+\frac{2}{3}}-\left(a_{13,i,j+0,5,k}+a_{13,i,j-0,5,k}\right)P_{i,j,k}^{n+\frac{2}{3}}+a_{13,i,j-0,5,k}P_{i,j-1,k}^{n+\frac{2}{3}}}{\Delta y^2}+$$
$$+\frac{a_{13,i,j,k+0,5}P_{i,j,k+1}^{n+\frac{2}{3}}-\left(a_{13,i,j,k+0,5}+a_{13,i,j,k-0,5}\right)P_{i,j,k}^{n+\frac{2}{3}}+a_{13,i,j,k-0,5}P_{i,j,k-1}^{n+\frac{2}{3}}}{\Delta z^2}+\frac{1}{3}f_{i,j,k}^{n+1}.$$

Далее, граничную условию (11) аппроксимируем по Oz и получим:

$$\frac{-3T_{i,j,0}^{n+1}+4T_{i,j,1}^{n+1}-T_{i,j,2}^{n+1}}{2\Delta z}=0. \tag{80}$$

Из системы уравнении (79), когда $k=1$, получим:

$$\overline{\overline{a}}_{T,i,j,1}T_{i,j,0}^{n+1}-\overline{\overline{b}}_{T,i,j,1}T_{i,j,1}^{n+1}+\overline{\overline{c}}_{T,i,j,1}T_{i,j,2}^{n+1}=-\overline{\overline{d}}_{T,i,j,1}. \tag{81}$$

Поставив $T_{i,j,2}^{n+1}$ из (81) в (80), найдем $T_{i,j,0}^{n+1}$:

$$T_{i,j,0}^{n+1}=\overline{\overline{\alpha}}_{T,i,j,0}T_{i,j,1}^{n+1}+\overline{\overline{\beta}}_{T,i,j,0}, \tag{82}$$

где прогоночные коэффициенты вычисляется с помощью формул:

$$\overline{\overline{\alpha}}_{T,i,j,0}=\frac{\overline{\overline{b}}_{T,i,j,1}-4\overline{\overline{c}}_{T,i,j,1}}{\overline{\overline{a}}_{T,i,j,1}-3\overline{\overline{c}}_{i,j,1}},\;\; \overline{\overline{\beta}}_{Ti,j,0}=-\frac{\overline{\overline{d}}_{T,i,j,1}}{\overline{\overline{a}}_{T,i,j,1}-3\overline{\overline{c}}_{i,j,1}}.$$

Аналогично аппроксимируя граничное условие (12) по Oz, получим:

$$\lambda_1\frac{T_{i,j,L-2}^{n+1}-4T_{i,j,L-1}^{n+1}+3T_{i,j,L}^{n+1}}{2\Delta z}=-\beta_1T_{oc}+\beta_1T_{i,j,L}^{n+1}-{\varphi_2}^{n+1}, \tag{83}$$

где $\varphi_2=\eta\gamma R_2\left(\tau\right)$.

Применяя метод прогонки для последовательности при $L, L-1$ и $L-2$, найдем $T_{i,j,L-1}^{n+1}$ и $T_{i,j,L-2}^{n+1}$:

$$T_{i,j,L-1}^{n+1}=\overline{\overline{\alpha}}_{T,i,,j,L-1}\,T_{i,j,L}^{n+1}+\overline{\overline{\beta}}_{T,i,j,L-1}, \tag{84}$$

$$T_{i,j,L-2}^{n+1}=\overline{\overline{\alpha}}_{T,i,j,L-2}\,\overline{\overline{\alpha}}_{T,i,j,L-1}\,T_{i,j,L}^{n+1}+\overline{\overline{\alpha}}_{i,j,L-2}\overline{\overline{\beta}}_{T,i,j,L-1}+\overline{\overline{\beta}}_{T,i,j,L-2}. \tag{85}$$

Поставив $T_{i,j,L-1}^{n+1}$ из (84) и $T_{i,j,L-2}^{n+1}$ из (85) в (83), найдем $T_{i,j,L}^{n+1}$:

$$T_{i,j,L}^{n+1}=\frac{-\lambda_1\overline{\overline{\alpha}}_{T,i,j,L-2}\overline{\overline{\beta}}_{T,i,j,L-1}-\lambda_1\overline{\overline{\beta}}_{T,i,j,L-2}+4\lambda_1\overline{\overline{\beta}}_{T,i,j,L-1}-2\Delta z\beta_1T_{oc}+2\Delta z{\varphi_2}^{n+1}}{3\lambda_1-2\Delta z\beta_1+\lambda_1\overline{\overline{\alpha}}_{T,i,j,L-2}\,\overline{\overline{\alpha}}_{T,i,j,L-1}-4\lambda_1\overline{\overline{\alpha}}_{T,i,j,L-1}}. \tag{86}$$

Значения последовательности температуры $T_{i,j,L-1}^{n+1}$, $T_{i,j,L-2}^{n+1}$, ..., $T_{i,j,1}^{n+1}$ определяются методом обратной прогонки по уменьшению k:

$$T_{i,j,k}^{n+1}=\overline{\overline{\alpha}}_{T,i,j,k}\,T_{i,j,k+1}^{n+1}+\overline{\overline{\beta}}_{T,i,j,k}\,,\; i=\overline{0,N},\;\; j=\overline{0,M},\;\; k=\overline{L-1,\,1}. \tag{87}$$

Аналогично уравнение (2) аппроксимируем по Oz конечно-разностными соотношениями

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)\Delta\tau^{\alpha}}\sum_{m=0}^{n} b_m\left(M_{i,j,k}^{n-m+1}-M_{i,j,k}^{n-m+\frac{2}{3}}\right)= \\
&=\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)\Delta\tau^{\alpha}}\left(M_{i,j,k}^{n+1}-M_{i,j,k}^{n+\frac{2}{3}}+\sum_{m=1}^{n} b_m\left(M_{i,j,k}^{n-m+1}-M_{i,j,k}^{n-m+\frac{2}{3}}\right)\right)= \\
&=\frac{a_{21,i+0,5,j,k}M_{i+1,j,k}^{n+\frac{2}{3}}-\left(a_{21,i+0,5,j,k}+a_{21,i-0,5,j,k}\right)M_{i,j,k}^{n+\frac{2}{3}}+a_{21,i-0,5,j,k}M_{i-1,j,k}^{n+\frac{2}{3}}}{\Delta x^2}+ \\
&+\frac{a_{21,i,j+0,5,k}M_{i,j+1,k}^{n+\frac{2}{3}}-\left(a_{21,i,j+0,5,k}+a_{21,i,j-0,5,k}\right)M_{i,j,k}^{n+\frac{2}{3}}+a_{21,i,j-0,5,k}M_{i,j-1,k}^{n+\frac{2}{3}}}{\Delta y^2}+ \\
&+\frac{a_{21,i,j,k+0,5}M_{i,j,k+1}^{n+1}-\left(a_{21,i,j,k+0,5}+a_{21,i,j,k-0,5}\right)M_{i,j,k}^{n+1}+a_{21,i,j,k-0,5}M_{i,j,k-1}^{n+1}}{\Delta z^2}+ \\
&+\frac{a_{22,i+0,5,j,k}T_{i+1,j,k}^{n+\frac{2}{3}}-\left(a_{22,i+0,5,j,k}+a_{22,i-0,5,j,k}\right)T_{i,j,k}^{n+\frac{2}{3}}+a_{22,i-0,5,j,k}T_{i-1,j,k}^{n+\frac{2}{3}}}{\Delta x^2}+ \\
&+\frac{a_{22,i,j+0,5,k}T_{i,j+1,k}^{n+\frac{2}{3}}-\left(a_{22,i,j+0,5,k}+a_{22,i,j-0,5,k}\right)T_{i,j,k}^{n+\frac{2}{3}}+a_{22,i,j-0,5,k}T_{i,j-1,k}^{n+\frac{2}{3}}}{\Delta y^2}+ \\
&+\frac{a_{22,i,j,k+0,5}T_{i,j,k+1}^{n+\frac{2}{3}}-\left(a_{22,i,j,k+0,5}+a_{22,i,j,k-0,5}\right)T_{i,j,k}^{n+\frac{2}{3}}+a_{22,i,j,k-0,5}T_{i,j,k-1}^{n+\frac{2}{3}}}{\Delta z^2}+ \\
&+\frac{a_{23,i+0,5,j,k}P_{i+1,j,k}^{n+\frac{2}{3}}-\left(a_{23,i+0,5,j,k}+a_{23,i-0,5,j,k}\right)P_{i,j,k}^{n+\frac{2}{3}}+a_{23,i-0,5,j,k}P_{i-1,j,k}^{n+\frac{2}{3}}}{\Delta x^2}+ \\
&+\frac{a_{23,i,j+0,5,k}P_{i,j+1,k}^{n+\frac{2}{3}}-\left(a_{23,i,j+0,5,k}+a_{23,i,j-0,5,k}\right)P_{i,j,k}^{n+\frac{2}{3}}+a_{23,i,j-0,5,k}P_{i,j-1,k}^{n+\frac{2}{3}}}{\Delta y^2}+ \\
&+\frac{a_{23,i,j,k+0,5}P_{i,j,k+1}^{n+\frac{2}{3}}-\left(a_{23,i,j,k+0,5}+a_{23,i,j,k-0,5}\right)P_{i,j,k}^{n+\frac{2}{3}}+a_{23,i,j,k-0,5}P_{i,j,k-1}^{n+\frac{2}{3}}}{\Delta z^2}+\frac{1}{3}q_{i,j,k}^{n+1}.
\end{aligned}
$$

Тогда $M_{i,j,k}^{n+1}$ в точке сетки k для временного шага $n+1$ приводит к систему уравнению

$$\bar{\bar{a}}_{M,i,j,k}M_{i,j,k-1}^{n+1}-\bar{\bar{b}}_{M,i,j,k}M_{i,j,k}^{n+1}+\bar{\bar{c}}_{M,i,j,k}M_{i,j,k+1}^{n+1}=-\bar{\bar{d}}_{M,i,j,k}, \tag{88}$$

где коэффициенты и свободный член определяются с помощью следующих выражений:

$$
\begin{aligned}
&\bar{\bar{a}}_{M,i,j,k}=\frac{a_{21,i,j,k-0,5}}{\Delta z^2},\quad \bar{\bar{b}}_{M,i,j,k}=\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)\Delta\tau^{\alpha}}+\frac{a_{21,i,j,k+0,5}+a_{21,i,j,k-0,5}}{\Delta z^2}, \\
&\bar{\bar{c}}_{M,i,j,k}=\frac{a_{21,i,j,k+0,5}}{\Delta z^2}, \\
&\bar{\bar{d}}_{M,i,j,k}=\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)\Delta\tau^{\alpha}}\left(M_{i,j,k}^{n+\frac{2}{3}}-\sum_{m=1}^{n} b_{i,j,k}\left(M_{i,j,k}^{n-m+1}-M_{i,j,k}^{n-m+\frac{2}{3}}\right)\right)+ \\
&+\frac{a_{21,i+0,5,j,k}M_{i+1,j,k}^{n+\frac{2}{3}}-\left(a_{21,i+0,5,j,k}+a_{21,i-0,5,j,k}\right)M_{i,j,k}^{n+\frac{2}{3}}+a_{21,i-0,5,j,k}M_{i-1,j,k}^{n+\frac{2}{3}}}{\Delta x^2}+
\end{aligned}
$$

$$+\frac{a_{21,i,j+0,5,k}M^{n+\frac{2}{3}}_{i,j+1,k}-\left(a_{21,i,j+0,5,k}+a_{21,i,j-0,5,k}\right)M^{n+\frac{2}{3}}_{i,j,k}+a_{21,i,j-0,5,k}M^{n+\frac{2}{3}}_{i,j-1,k}}{\Delta y^2}+$$

$$+\frac{a_{22,i+0,5,j,k}T^{n+\frac{2}{3}}_{i+1,j,k}-\left(a_{22,i+0,5,j,k}+a_{22,i-0,5,j,k}\right)T^{n+\frac{2}{3}}_{i,j,k}+a_{22,i-0,5,j,k}T^{n+\frac{2}{3}}_{i-1,j,k}}{\Delta x^2}+$$

$$+\frac{a_{22,i,j+0,5,k}T^{n+\frac{2}{3}}_{i,j+1,k}-\left(a_{22,i,j+0,5,k}+a_{22,i,j-0,5,k}\right)T^{n+\frac{2}{3}}_{i,j,k}+a_{22,i,j-0,5,k}T^{n+\frac{2}{3}}_{i,j-1,k}}{\Delta y^2}+$$

$$+\frac{a_{22,i,j,k+0,5}T^{n+\frac{2}{3}}_{i,j,k+1}-\left(a_{22,i,j,k+0,5}+a_{22,i,j,k-0,5}\right)T^{n+\frac{2}{3}}_{i,j,k}+a_{22,i,j,k-0,5}T^{n+\frac{2}{3}}_{i,j,k-1}}{\Delta z^2}+$$

$$+\frac{a_{23,i+0,5,j,k}P^{n+\frac{2}{3}}_{i+1,j,k}-\left(a_{23,i+0,5,j,k}+a_{23,i-0,5,j,k}\right)P^{n+\frac{2}{3}}_{i,j,k}+a_{23,i-0,5,j,k}P^{n+\frac{2}{3}}_{i-1,j,k}}{\Delta x^2}+$$

$$+\frac{a_{23,i,j+0,5,k}P^{n+\frac{2}{3}}_{i,j+1,k}-\left(a_{23,i,j+0,5,k}+a_{23,i,j-0,5,k}\right)P^{n+\frac{2}{3}}_{i,j,k}+a_{23,i,j-0,5,k}P^{n+\frac{2}{3}}_{i,j-1,k}}{\Delta y^2}+$$

$$+\frac{a_{23,i,j,k+0,5}P^{n+\frac{2}{3}}_{i,j,k+1}-\left(a_{23,i,j,k+0,5}+a_{23,i,j,k-0,5}\right)P^{n+\frac{2}{3}}_{i,j,k}+a_{23,i,j,k-0,5}P^{n+\frac{2}{3}}_{i,j,k-1}}{\Delta z^2}+\frac{1}{3}q^{n+1}_{i,j,k}.$$

Далее, граничную условию (17) аппроксимируем со вторым порядком точности по Oz и получим:

$$\frac{-3M^{n+1}_{i,j,0}+4M^{n+1}_{i,j,1}-M^{n+1}_{i,j,2}}{2\Delta z}=0. \tag{89}$$

Из системы уравнений (88), при $k=1$, получим:

$$\overline{\overline{a}}_{M,i,j,1}\,M^{n+1}_{i,j,0}-\overline{\overline{b}}_{M,i,j,1}\,M^{n+1}_{i,j,1}+\overline{\overline{c}}_{M,i,j,1}\,M^{n+1}_{i,j,2}=-\overline{\overline{d}}_{M,i,j,1}. \tag{90}$$

Поставив $M^{n+1}_{i,j,2}$ из (90) в (89), найдем значение $M^{n+1}_{i,j,0}$:

$$M^{n+1}_{i,j,0}=\overline{\overline{\alpha}}_{M,i,j,0}\,M^{n+1}_{i,j,1}+\overline{\overline{\beta}}_{M,i,j,0}. \tag{91}$$

Из соотношения (91) прогоночные коэффициенты определяются в виде:

$$\overline{\overline{\alpha}}_{M,i,j,0}=\frac{\overline{\overline{b}}_{M,i,j,1}-4\overline{\overline{c}}_{M,i,j,1}}{\overline{\overline{a}}_{M,i,j,1}-3\overline{\overline{c}}_{M,i,j,1}},$$

$$\overline{\overline{\beta}}_{M,i,j,0}=\frac{-\overline{\overline{d}}_{M,i,j,1}}{\overline{\overline{a}}_{M,i,j,1}-3\overline{\overline{c}}_{M,i,j,1}}.$$

Аналогично аппроксимируя граничному условию (18) по Oz, получим:

$$\lambda_2\frac{M^{n+1}_{i,j,L-2}-4M^{n+1}_{i,j,L-1}+3M^{n+1}_{i,j,L}}{2\Delta z}=\beta_2 M_{oc}-\beta_2 M^{n+1}_{i,j,L}. \tag{92}$$

Применяя метод прогонки для последовательности $L, L-1$ и $L-2$, найдем $M^{n+1}_{i,j,L-1}$ и $M^{n+1}_{i,j,L-2}$:

$$M^{n+1}_{i,j,L-1}=\overline{\overline{\alpha}}_{M,i,j,L-1}\,M^{n+1}_{i,j,L}+\overline{\overline{\beta}}_{M,i,j,L-1}, \tag{93}$$

$$M^{n+1}_{i,j,L-2}=\overline{\overline{\alpha}}_{M,i,j,L-2}\overline{\overline{\alpha}}_{M,i,j,L-1}\,M^{n+1}_{i,j,L}+\overline{\overline{\alpha}}_{M,i,j,L-2}\overline{\overline{\beta}}_{M,i,j,L-1}+\overline{\overline{\beta}}_{M,i,j,L-2}. \tag{94}$$

Поставив $M_{i,j,L-1}^{n+1}$ из (43) и $M_{i,j,L-2}^{n+1}$ из (44) в (42), найдем $M_{i,j,L}^{n+1}$:

$$M_{i,j,L}^{n+1}=\frac{-\lambda_2\overline{\overline{\alpha}}_{M,i,j,L-2}\overline{\overline{\beta}}_{M,i,j,L-1}-\lambda_2\overline{\overline{\beta}}_{M,i,j,L-2}+4\lambda_2\overline{\overline{\beta}}_{M,i,j,L-1}+2\Delta z\beta_2 M_{oc}}{3\lambda_2-2\Delta z\beta_2+\lambda_2\overline{\overline{\alpha}}_{M,i,j,L-2}\overline{\overline{\alpha}}_{M,i,j,L-1}-4\lambda_2\overline{\overline{\alpha}}_{M,i,j,L-1}}. \tag{95}$$

Значения влаги $M_{i,j,L-1}^{n+1}$, $M_{i,j,L-2}^{n+1}$, ..., $M_{i,j,1}^{n+1}$ в узлах определяется последовательно методом обратной прогонки по уменьшению индекса k:

$$M_{i,j,k}^{n+1}=\overline{\overline{\alpha}}_{M,i,j,k}\,M_{i,j,k+1}^{n+1}+\overline{\overline{\beta}}_{M,i,j,k},\ \text{где } i=\overline{0,N},\ j=\overline{0,\,M},\ k=\overline{L-1,\,1}.$$

Аналогично уравнение (3) аппроксимируем по Oz конечно-разностными соотношениями, изменение давление:

$$\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)\,\Delta\tau^{\alpha}}\sum_{m=0}^{n}b_m\left(P_{i,j,k}^{n-m+1}-P_{i,j,k}^{n-m+\frac{2}{3}}\right)=$$
$$=\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)\,\Delta\tau^{\alpha}}\left(P_{i,j,k}^{n+1}-P_{i,j,k}^{n+\frac{2}{3}}+\sum_{m=1}^{n}b_m\left(P_{i,j,k}^{n-m+1}-P_{i,j,k}^{n-m+\frac{2}{3}}\right)\right)=$$
$$=\frac{a_{31,i+0,5,j,k}P_{i+1,j,k}^{n+\frac{2}{3}}-(a_{31,i+0,5,j,k}+a_{31,i-0,5,j,k})\,P_{i,j,k}^{n+\frac{2}{3}}+a_{31,i-0,5,j,k}P_{i-1,j,k}^{n+\frac{2}{3}}}{\Delta x^2}+$$
$$+\frac{a_{31,i,j+0,5,k}P_{i,j+1,k}^{n+\frac{2}{3}}-(a_{31,i,j+0,5,k}+a_{31,i,j-0,5,k})\,P_{i,j,k}^{n+\frac{2}{3}}+a_{31,i,j-0,5,k}P_{i,j-1,k}^{n+\frac{2}{3}}}{\Delta y^2}+$$
$$+\frac{a_{31,i,j,k+0,5}P_{i,j,k+1}^{n+1}-(a_{31,i,j,k+0,5}+a_{31,i,j,k-0,5})\,P_{i,j,k}^{n+1}+a_{31,i,j,k-0,5}P_{i,j,k-1}^{n+1}}{\Delta z^2}+$$
$$+\frac{a_{32,i+0,5,j,k}T_{i+1,j,k}^{n+\frac{2}{3}}-(a_{32,i+0,5,j,k}+a_{32,i-0,5,j,k})\,T_{i,j,k}^{n+\frac{2}{3}}+a_{32,i-0,5,j,k}T_{i-1,j,k}^{n+\frac{2}{3}}}{\Delta x^2}+$$

$$+\frac{a_{32,i,j+0,5,k}T_{i,j+1,k}^{n+\frac{2}{3}}-(a_{32,i,j+0,5,k}+a_{32,i,j-0,5,k})\,T_{i,j,k}^{n+\frac{2}{3}}+a_{32,i,j-0,5,k}T_{i,j-1,k}^{n+\frac{2}{3}}}{\Delta y^2}+$$
$$+\frac{a_{32,i,j,k+0,5}T_{i,j,k+1}^{n+\frac{2}{3}}-(a_{32,i,j,k+0,5}+a_{32,i,j,k-0,5})\,T_{i,j,k}^{n+\frac{2}{3}}+a_{32,i,j,k-0,5}T_{i,j,k-1}^{n+\frac{2}{3}}}{\Delta z^2}+$$
$$+\frac{a_{33,i+0,5,j,k}M_{i+1,j,k}^{n+\frac{2}{3}}-(a_{33,i+0,5,j,k}+a_{33,i-0,5,j,k})\,M_{i,j,k}^{n+\frac{2}{3}}+a_{33,i-0,5,j,k}M_{i-1,j,k}^{n+\frac{2}{3}}}{\Delta x^2}+$$
$$+\frac{a_{33,i,j+0,5,k}M_{i,j+1,k}^{n+\frac{2}{3}}-(a_{33,i,j+0,5,k}+a_{33,i,j-0,5,k})\,M_{i,j,k}^{n+\frac{2}{3}}+a_{33,i,j-0,5,k}M_{i,j-1,k}^{n+\frac{2}{3}}}{\Delta y^2}+$$
$$+\frac{a_{33,i,j,k+0,5}M_{i,j,k+1}^{n+\frac{2}{3}}-(a_{33,i,j,k+0,5}+a_{33,i,j,k-0,5})\,M_{i,j,k}^{n+\frac{2}{3}}+a_{33,i,j,k-0,5}M_{i,j,k-1}^{n+\frac{2}{3}}}{\Delta z^2}.$$

Тогда $P_{i,j,k}^{n+1}$ в точке сетки для временного шага $n+1$ приводит к систему уравнению:

$$\overline{\overline{a}}_{P,i,j,k}\,P_{i,j,k-1}^{n+1}-\overline{\overline{b}}_{P,i,j,k}\,P_{i,j,k}^{n+1}+\overline{\overline{c}}_{P,i,j,k}\,P_{i,j,k+1}^{n+1}=-\overline{\overline{d}}_{P,i,j,k}, \tag{96}$$

где коэффициенты и свободный член определяются с помощью следующих выражений:

$$\overline{\overline{a}}_{P,i,j,k} = \frac{a_{31,i,j,k-0,5}}{\Delta z^2}, \quad \overline{\overline{b}}_{P,i,j,k} = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)\,\Delta\tau^{\alpha}} + \frac{a_{31,i,j,k+0,5} + a_{31,i,j,k-0,5}}{\Delta z^2},$$

$$\overline{\overline{c}}_{P,i,j,k} = \frac{a_{31,i,j,k+0,5}}{\Delta z^2},$$

$$\overline{\overline{d}}_{P,i,j,k} = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)\,\Delta\tau^{\alpha}}\left(P^{n+\frac{2}{3}}_{i,j,k} - \sum_{m=1}^{n} b_{i,j,k}\left(P^{n-m+1}_{i,j,k} - P^{n-m+\frac{2}{3}}_{i,j,k}\right)\right)$$
$$+\frac{a_{31,i+0,5,j,k}P^{n+\frac{2}{3}}_{i+1,j,k} - (a_{31,i+0,5,j,k} + a_{31,i-0,5,j,k})\,P^{n+\frac{2}{3}}_{i,j,k} + a_{31,i-0,5,j,k}P^{n+\frac{2}{3}}_{i-1,j,k}}{\Delta x^2}+$$
$$+\frac{a_{31,i,j+0,5,k}P^{n+\frac{2}{3}}_{i,j+1,k} - (a_{31,i,j+0,5,k} + a_{31,i,j-0,5,k})\,P^{n+\frac{2}{3}}_{i,j,k} + a_{31,i,j-0,5,k}P^{n+\frac{2}{3}}_{i,j-1,k}}{\Delta y^2}+$$
$$+\frac{a_{32,i+0,5,j,k}T^{n+\frac{2}{3}}_{i+1,j,k} - (a_{32,i+0,5,j,k} + a_{32,i-0,5,j,k})\,T^{n+\frac{2}{3}}_{i,j,k} + a_{32,i-0,5,j,k}T^{n+\frac{2}{3}}_{i-1,j,k}}{\Delta x^2}+$$
$$+\frac{a_{32,i,j+0,5,k}T^{n+\frac{2}{3}}_{i,j+1,k} - (a_{32,i,j+0,5,k} + a_{32,i,j-0,5,k})\,T^{n+\frac{2}{3}}_{i,j,k} + a_{32,i,j-0,5,k}T^{n+\frac{2}{3}}_{i,j-1,k}}{\Delta y^2}+$$
$$+\frac{a_{32,i,j,k+0,5}T^{n+\frac{2}{3}}_{i,j,k+1} - (a_{32,i,j,k+0,5} + a_{32,i,j,k-0,5})\,T^{n+\frac{2}{3}}_{i,j,k} + a_{32,i,j,k-0,5}T^{n+\frac{2}{3}}_{i,j,k-1}}{\Delta z^2}+$$
$$+\frac{a_{33,i+0,5,j,k}M^{n+\frac{2}{3}}_{i+1,j,k} - (a_{33,i+0,5,j,k} + a_{33,i-0,5,j,k})\,M^{n+\frac{2}{3}}_{i,j,k} + a_{33,i-0,5,j,k}M^{n+\frac{2}{3}}_{i-1,j,k}}{\Delta x^2}+$$
$$+\frac{a_{33,i,j+0,5,k}M^{n+\frac{2}{3}}_{i,j+1,k} - (a_{33,i,j+0,5,k} + a_{33,i,j-0,5,k})\,M^{n+\frac{2}{3}}_{i,j,k} + a_{33,i,j-0,5,k}M^{n+\frac{2}{3}}_{i,j-1,k}}{\Delta y^2}+$$
$$+\frac{a_{33,i,j,k+0,5}M^{n+\frac{2}{3}}_{i,j,k+1} - (a_{33,i,j,k+0,5} + a_{33,i,j,k-0,5})\,M^{n+\frac{2}{3}}_{i,j,k} + a_{33,i,j,k-0,5}M^{n+\frac{2}{3}}_{i,j,k-1}}{\Delta z^2}.$$

Далее, граничную условию (23) аппроксимируем со вторым порядком точности по Oz и получим:

$$\frac{-3P^{n+1}_{i,j,0} + 4P^{n+1}_{i,j,1} - P^{n+1}_{i,j,2}}{2\Delta z} = 0. \tag{97}$$

Из системы уравнений (96), при $k = 1$, получим:

$$\overline{\overline{a}}_{P,i,j,1}\,P^{n+1}_{i,j,0} - \overline{\overline{b}}_{P,i,j,1}\,P^{n+1}_{i,j,1} + \overline{\overline{c}}_{P,i,j,1}\,P^{n+1}_{i,j,2} = -\overline{\overline{d}}_{P,i,j,1}. \tag{98}$$

Поставив $P^{n+1}_{i,j,2}$ из (98) в (97), найдем значение $P^{n+1}_{i,j,0}$:

$$P^{n+1}_{i,j,0} = \overline{\overline{\alpha}}_{P,i,j,0}\,P^{n+1}_{i,j,1} + \overline{\overline{\beta}}_{P,i,j,0}. \tag{99}$$

Из соотношения (99) прогоночные коэффициенты определяются в виде:

$$\overline{\overline{\alpha}}_{P,i,j,0} = \frac{\overline{\overline{b}}_{P,i,j,1} - 4\overline{\overline{c}}_{P,i,j,1}}{\overline{\overline{a}}_{P,i,j,1} - 3\overline{\overline{c}}_{P,i,j,1}},$$

$$\overline{\overline{\beta}}_{P,i,j,0} = \frac{-\overline{\overline{d}}_{P,i,j,1}}{\overline{\overline{a}}_{P,i,j,1} - 3\overline{\overline{c}}_{P,i,j,1}}.$$

Аналогично аппроксимируя граничному условию (24) по Oz, получим:

$$\lambda_3 \frac{P^{n+1}_{i,j,L-2} - 4P^{n+1}_{i,j,L-1} + 3P^{n+1}_{i,j,L}}{2\Delta z} = \beta_3 P_{oc} - \beta_3 P^{n+1}_{i,j,L}. \tag{100}$$

Применяя метод прогонки для последовательности $L, L-1$ и $L-2$, найдем $P^{n+1}_{i,j,L-1}$ и $P^{n+1}_{i,j,L-2}$:

$$P^{n+1}_{i,j,L-1} = \overline{\overline{\alpha}}_{P,i,j,L-1}\, P^{n+1}_{i,j,L} + \overline{\overline{\beta}}_{P,i,j,L-1}, \tag{101}$$

$$P^{n+1}_{i,j,L-2} = \overline{\overline{\alpha}}_{P,i,j,L-2}\overline{\overline{\alpha}}_{P,i,j,L-1}\, P^{n+1}_{i,j,L} + \overline{\overline{\alpha}}_{P,i,j,L-2}\overline{\overline{\beta}}_{P,i,j,L-1} + \overline{\overline{\beta}}_{P,i,j,L-2}. \tag{102}$$

Поставив $P^{n+1}_{i,j,L-1}$ из (101) и $P^{n+1}_{i,j,L-2}$ из (102) в (100), найдем $P^{n+1}_{i,j,L}$:

Следственно, изменение давление:

$$P^{n+1}_{i,j,L} = \frac{-\lambda_3\overline{\overline{\alpha}}_{P,i,j,L-2}\overline{\overline{\beta}}_{P,i,j,L-1} - \lambda_3\overline{\overline{\beta}}_{P,i,j,L-2} + 4\lambda_3\overline{\overline{\beta}}_{P,i,j,L-1} + 2\Delta z\beta_3 P_{am}}{3\lambda_3 - 2\Delta z\beta_3 + \lambda_3\overline{\overline{\alpha}}_{P,i,j,L-2}\overline{\overline{\alpha}}_{P,i,j,L-1} - 4\lambda_3\overline{\overline{\alpha}}_{P,i,j,L-1}}.$$

Значения давление $P^{n+1}_{i,j,L-1}$, $P^{n+1}_{i,j,L-2}$, ..., $P^{n+1}_{i,j,1}$ в узлах определяется последовательно методом обратной прогонки по уменьшению индекса k:

$$P^{n+1}_{i,j,k} = \overline{\overline{\alpha}}_{P,i,j,k}\, P^{n+1}_{i,j,k+1} + \overline{\overline{\beta}}_{P,i,j,k}, \text{ где } i = \overline{0, N},\ j = \overline{0,\, M},\ k = \overline{L-1,\, 1}.$$

Итак, разработан эффективный устойчивый численный алгоритм на основе конечно-разностного метода высокого порядка точности, который служит для решения трехмерной задачи совместного тепло- и влагопереноса при хранении и сушки неоднородных пористых телах.

4 Заключение

В данной работе предложена новая математическая модель и соответствующий численный алгоритм для описания процессов совместного переноса тепла и влаги с газовым потоком в неоднородных пористых телах. Система состоит из трёхмерных дифференциальная уравнения частных производных и дробная производная Капуто по времени с пространственное изменяющимися коэффициентами, что позволяет явно учесть память системы и аномальное распространение. Ввод фракционности на базе производной Капуто обеспечивает дополнительную свободу для моделирования памяти и аномального переноса, связанного с пористой, неоднородной структурой сырьевого хлопка и условиями его хранения. Включены ключевые физические механизмы как внутреннее выделение тепла и влаги (фазовые переходы, биологическое самонагревание) и временные граничные условия, отражающие обмен с окружающей средой и приток солнечного излучения. Чтобы решить эту сложную сопряжённую систему, разработана стабильная вторая по порядку разностная схема, обеспечивающая устойчивость и эффективное время расчёта. Численный алгоритм демонстрирует способность моделировать сложную динамику переноса и формирует предиктивный инструмент для задач сушки и долгосрочного хранения сельскохозяйственной продукции.

Литература

[1] *Abbas S., Nazar M.* Fractional analysis of unsteady magnetohydrodynamics Jeffrey flow over an infinite vertical plate in the presence of Hall current // Math. Methods Appl. Sci. – 2025. – Vol. 48. – No. 1. – P. 253-272. – doi: http://dx.doi.org/10.1002/mma.10326

[2] *Ravshanov N., Shadmanov I.* Fractional Modeling of Coupled Heat and Moisture Transfer with Gas-Pressure-Driven Flow in Raw Cotton // Processes – 2026. – Vol. 14. – No. 3. – 481. – doi: `http://dx.doi.org/10.3390/pr14030481`

[3] *Philip J.R., De Vries D.A.* Moisture movement in porous materials under temperature gradients // Trans. Am. Geophys. Union – 1957. – Vol. 38. – No. 2. – P. 222-232.

[4] *Luikov A.V.* Heat and Mass Transfer in Capillary-Porous Bodies // Advances in Heat Transfer – 1964. – Vol. 1. – P. 123-184.

[5] *Pandey R.N., Srivastava S.K., Mikhailov M.D.* Solutions of Luikov equations of heat and mass transfer in capillary porous bodies through matrix calculus: a new approach // Int. J. Heat Mass Transf. – 1999. – Vol. 42. – No. 14. – P. 2649-2660. – doi: `http://dx.doi.org/10.1016/S0017-9310(98)00253-1`

[6] *Patankar S.V.* Numerical Heat Transfer and Fluid Flow. – New York: CRC Press, 2018. – 214 p. – doi: `http://dx.doi.org/10.1201/9781482234213`

[7] *Whitaker S.* Simultaneous Heat, Mass, and Momentum Transfer in Porous Media: A Theory of Drying // Advances in Heat Transfer – 1977. – Vol. 13. – P. 119-203.

[8] *Berkowitz B., Cortis A., Dentz M., Scher H.* Modeling non-Fickian transport in geological formations as a continuous time random walk // Rev. Geophys. – 2006. – Vol. 44. – No. 2. – RG2003. – doi: `http://dx.doi.org/10.1029/2005RG000178`

[9] *Nield D.A., Bejan A.* Heat Transfer Through a Porous Medium // Convection in Porous Media – Cham: Springer, 2017. – P. 37-55. – doi: `http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-49562-0\_2`

[10] *Khan M.I.H., Batuwatta-Gamage C.P., Karim M.A., Gu Y.* Fundamental Understanding of Heat and Mass Transfer Processes for Physics-Informed Machine Learning-Based Drying Modelling // Energies – 2022. – Vol. 15. – No. 24. – 9347.

[11] *Adizova Z., Shadmanov I.* Mathematical modeling of heat and moisture exchange processes for grain storage // AIP Conf. Proc. – 2024. – Vol. 3244. – 020042. – doi: `http://dx.doi.org/10.1063/5.0241493`

[12] *Sorokova N., Didur V., Variny M.* Mathematical Modeling of Heat and Mass Transfer during Moisture-Heat Treatment of Castor Beans to Improve the Quality of Vegetable Oil // Agriculture – 2022. – Vol. 12. – No. 9. – 1356. – doi: `http://dx.doi.org/10.3390/agriculture12091356`

[13] *Mozafarifard M., Toghraie D.* Numerical analysis of time-fractional non-Fourier heat conduction in porous media based on Caputo fractional derivative under short heating pulses // Heat Mass Transf. – 2020. – Vol. 56. – No. 11. – P. 3035-3045. – doi: `http://dx.doi.org/10.1007/s00231-020-02920-y`

[14] *Sokolovskyy Y., Drozd K., Samotii T., Boretska I.* Fractional-Order Modeling of Heat and Moisture Transfer in Anisotropic Materials Using a Physics-Informed Neural Network // Materials (Basel) – 2024. – Vol. 17. – No. 19. – 4753. – doi: `http://dx.doi.org/10.3390/ma17194753`

[15] *Jamil M., Ahmed I., Khan I., et al.* Analysis of Heat and Mass Transfer of Fractionalized MHD Second-Grade Fluid over Nonlinearly Moving Porous Plate // Math. Probl. Eng. – 2022. – Vol. 2022. – 5426637. – doi: `http://dx.doi.org/10.1155/2022/5426637`

[16] *Metzler R., Klafter J.* The random walk's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach // Phys. Rep. – 2000. – Vol. 339. – No. 1. – P. 1-77. – doi: `http://dx.doi.org/10.1016/S0370-1573(00)00070-3`

[17] *Atangana A., Baleanu D.* New fractional derivatives with nonlocal and non-singular kernel: Theory and application to heat transfer model // Therm. Sci. – 2016. – Vol. 20. – No. 2. – P. 763-769. – doi: `http://dx.doi.org/10.2298/TSCI160111018A`

[18] *Ndukwu M., et al.* Analysis of the Heat Transfer Coefficient, Thermal Effusivity and Mathematical Modelling of Drying Kinetics of a Partitioned Single Pass Low-Cost Solar Drying of Cocoyam Chips with Economic Assessments // Energies – 2022. – Vol. 15. – No. 12. – 4457. – doi: `http://dx.doi.org/10.3390/en15124457`

[19] *Lin Y., Xu C.* Finite difference/spectral approximations for the time-fractional diffusion equation // J. Comput. Phys. – 2007. – Vol. 225. – No. 2. – P. 1533-1552. – doi: `http://dx.doi.org/10.1016/j.jcp.2007.02.001`

[20] *Jumaev J., Bozorov Z., Shadmanov I., Atoev D.* Investigation of initial-boundary value problem for integro-differential fractional diffusion equation // AIP Conf. Proc. – 2024. – Vol. 3127. – 040004. – doi: `http://dx.doi.org/10.1063/5.0199967`

[21] *Shadmanov I., Shafiyev T.* Mathematical modeling of the processes of combined heat and moisture transfer during storage and drying of raw cotton // E3S Web Conf. – 2023. – Vol. 431. – 01060. – doi: `http://dx.doi.org/10.1051/e3sconf/202343101060`

UDC 519.6

FRACTIONAL MODEL AND ROBUST NUMERICAL ALGORITHM FOR COUPLED HEAT AND MOISTURE TRANSFER IN HETEROGENEOUS POROUS BODIES

[1*]***Shadmanov I.U.***, [1]***Izzatulloyev A.E.***, [2]***Suhendro Busono***

*`i.u.shadmanov@buxdu.uz`

[1]Bukhara State University,
Muhammad Ikbol 11, Bukhara, 705018 Uzbekistan;
[2]Muhammadiyah University of Sidoarjo,
Jl. Mojopahit 666B, Sidoarjo, 61215 Indonesia.

This research presents a multidimensional mathematical model and a robust second-order numerical algorithm for coupled heat and moisture transfer with pressure-driven gas flow. Utilizing fractional Caputo derivatives ($0 < \alpha \leqslant 1$), the model accounts for system memory and anomalous diffusion in heterogeneous porous media, integrating convection, phase transitions, and pressure dynamics. It incorporates environmental interactions, internal heat/moisture sources, solar radiation, and spatially varying transfer coefficients. A high-order stable difference scheme ensures computational efficiency and numerical stability. The algorithm effectively predicts the spatiotemporal evolution of temperature, moisture, and pressure fields. Results highlight how material heterogeneity and diurnal solar radiation create localized zones of high temperature and moisture accumulation, significantly impacting the overall dynamics of storage and drying processes.

Keywords: mathematical model, Caputo fractional derivative, heat transfer, moisture transfer, internal heat and moisture release, heterogeneous porous body.

Citation: Shadmanov I.U., Izzatulloyev A.E., Suhendro Busono 2026. Fractional model and robust numerical algorithm for coupled heat and moisture transfer in heterogeneous porous bodies. *Problems of Computational and Applied Mathematics.* 2(72): 61-88.

DOI: https://doi.org/10.71310/pcam.2_72.2026.05

№ 2(72) 2026

ISSN 2181-8460

HISOBLASH VA AMALIY MATEMATIKA MUAMMOLARI

ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

PROBLEMS OF COMPUTATIONAL AND APPLIED MATHEMATICS

AiRI
RAQAMLI TEXNOLOGIYALAR VA SUN'IY INTELLEKTNI
RIVOJLANTIRISH ILMIY-TADQIQOT INSTITUTI

ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

№ 2(72) 2026

Журнал основан в 2015 году.
Издается 6 раз в год.

Учредитель:
Научно-исследовательский институт развития цифровых технологий и искусственного интеллекта.

Журнал зарегистрирован в Агентстве информации и массовых коммуникаций при Администрации Президента Республики Узбекистан.
Свидетельство №0856 от 5 августа 2015 года.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

Адрес редакции:
100125, г. Ташкент, м-в. Буз-2, 17А.
Тел.: +(998) 71 263-41-98.
Э-почта: `journals@airi.uz`.
Веб-сайт: `https://journals.airi.uz`.

Дизайн и вёрстка:
Шарипов Х.Д.

Отпечатано в типографии НИИ РЦТИИ.
Подписано в печать 22.04.2026 г.
Формат 60x84 1/8. Заказ №2. Тираж 100 экз.

PROBLEMS OF COMPUTATIONAL AND APPLIED MATHEMATICS

No. 2(72) 2026

The journal was established in 2015.
6 issues are published per year.

Founder:
Digital Technologies and Artificial Intelligence Development Research Institute.

The journal is registered by Agency of Information and Mass Communications under the Administration of the President of the Republic of Uzbekistan.
Certificate of Registration No. 0856 of 5 August 2015.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

Address:
100125, Tashkent, Buz-2, 17A.
Tel.: +(998) 71 263-41-98.
E-mail: `journals@airi.uz`.
Web-site: `https://journals.airi.uz`.

Layout design:
Sharipov Kh.D.

DTAIRI printing office.
Signed for print 22.04.2026
Format 60x84 1/8. Order No. 2. Print run of 100 copies.

Содержание

Contents