

УДК 519.622.2

FRACDYNZE – КОМПЬЮТЕРНАЯ ПРОГРАММА ИССЛЕДОВАНИЯ ДИНАМИКИ РАБОТЫ СЕРДЦА В РАМКАХ ДРОБНОГО ОСЦИЛЛЯТОРА ЗИМАНА*

^{1,2*} *Паровик Р.И.*, ^{3,4} *Исрайилжанова Г.С.*

*parovik@ikir.ru

¹Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН,
684034, Россия, Камчатский край, с. Паратунка, ул. Мирная, д. 7;

²Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека,
100174, Узбекистан, г. Ташкент, ул. Университетская, 4;

³Ферганский государственный университет,
150105, Узбекистан, г. Фергана, ул. Мураббийлар, 19;

⁴Ташкентский государственный университет транспорта,
100167, Узбекистан, Ташкент, ул. Темирйулчилар, 1.

В статье дается описание компьютерной программы FracDynZe для численного моделирования и визуализации поведения дробной динамической системы, описывающей работу сердца, которая заключается во взаимодействии мышечных волокон и сопряжённого электрохимического потенциала (модель Зимана). Численный алгоритм был реализован в виде нелокальной явной конечно-разностной схемы первого порядка точности. Компьютерная программа разработана на языке Python с использованием библиотек tkinter и matplotlib. Проведены вычислительные эксперименты с различными параметрами дробных производных демонстрирующие широкий спектр динамических режимов. Численные эксперименты показали влияние параметров дробного порядка и коэффициентов взаимодействия на характер переходных процессов – от устойчивых колебаний до хаотических режимов.

Ключевые слова: дробные производные, моделирование, фазовая траектория, устойчивость, память, python, численные методы.

Цитирование: *Паровик Р.И., Исрайилжанова Г.С.* FracDynZe – компьютерная программа исследования динамики работы сердца в рамках дробного осциллятора Зимана // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2026. – № 2(72). – С. 5-15.

DOI: https://doi.org/10.71310/psam.2_72.2026.01

1 Введение

Современная наука уделяет особое внимание математическому моделированию физиологических процессов, особенно тех, что лежат в основе функционирования сердечно-сосудистой и мышечной систем. Это связано с высокой социальной значимостью заболеваний, таких как ишемическая болезнь сердца, аритмии, гипертония и нарушения сократительной активности мышц. По данным Всемирной организации здравоохранения, сердечно-сосудистые заболевания остаются ведущей причиной смертности в мире, что требует разработки более точных инструментов диагностики, прогнозирования и анализа физиологических данных.

*Работа выполнена в рамках рамочного соглашения о сотрудничестве между ИКИР ДВО РАН и Национальным университетом Узбекистана имени Мирзо Улугбека (г. Ташкент, Узбекистан) №1118 от 28.04.2022 (0468/01/22 НТМИ) (2022-2027 гг.) по физико-математическим наукам.

В последние годы активно развиваются научные исследования на стыке биофизики, медицины и прикладной математики, направленные на построение моделей, способных учитывать такие важные свойства живых тканей, как наследственность, инерционность и эффекты памяти. Особую актуальность приобрело моделирование процессов, происходящих в сердечно-сосудистой системе и мышечных структурах, поскольку нарушения их функционирования оказывают существенное влияние на здоровье населения. Это обуславливает необходимость создания математических моделей, которые позволяют не только описывать поведение физиологических систем, но и выявлять устойчивость, переходные режимы, квазипериодические и хаотические колебания.

Ранние модели сердечно-сосудистой системы основывались преимущественно на дифференциальных уравнениях целого порядка. Так, в работе [1] были предложены квазиодномерные модели гемодинамики, позволяющие рассчитывать параметры кровотока и диагностировать патологии артериального давления. В дальнейшем появились модульные подходы, такие как система BioUML [2] и международная платформа Virtual Physiological Human [3], ориентированные на интеграцию различных биологических моделей. Также получили свое развитие механические модели работы сердца. Например, известны работы [4, 5], в которых дается фундаментальный обзор моделей миокардиального сокращения. Одной из таких моделей является модель Зимана [6], которая описывает динамику мышечных волокон и сопряженного электрохимического потенциала. Однако большинство подобных моделей базируются на дифференциальных уравнениях целого порядка, что ограничивает их применимость при описании процессов с наследственными эффектами и внутренним трением в тканях.

Значительный вклад в развитие математического аппарата дробного исчисления с учетом эффектов памяти внесли А.Н. Герасимов [7] и М. Капуто [8], предложившие использовать дробные производные в задачах наследственной механики. Эти идеи были развиты А. М. Нахушевым [9] и другими исследователями [10] в контексте различных прикладных задач. Дробные производные в смысле Герасимова–Капуто позволяют описывать процессы, динамика которых зависит от всей предшествующей истории развития, что делает их особенно актуальными в задачах, связанных с колебательной активностью мышечных волокон и сердечной деятельности [11–14].

Применение дробных моделей в биофизике доказало свою эффективность в описании релаксационных колебаний, длительных переходных процессов и квазипериодических режимов. Например, дробная модификация модели Зимана [13, 14] позволила учитывать влияние долговременной регуляции мышечной активности.

В связи с этим в данной работе представлена программа FracDynZe – визуальная среда моделирования работы сердца в рамках дробной математической модели Зимана, реализованная на языке программирования Python. Она предназначена для численного анализа динамики мышечных волокон с учетом наследственных свойств. Используя дробные производные в смысле Герасимова–Капуто и их конечно-разностную аппроксимацию, программа позволяет исследовать влияние параметров на устойчивость, фазовые траектории и поведение системы в переходных режимах.

2 Постановка задачи

В работе исследуется обобщение модели Зимана на случай учета наследственности [13, 14]. В этом случае мы имеем дело с интегро-дифференциальными уравнениями, которые изучаются в рамках теории дробного исчисления [9,10]. Рассмотрим

следующую задачу Коши:

$$\begin{cases} \varepsilon_1 \partial_{0t}^\alpha x(t) = x(t) - x^3(t) - y(t), \\ \varepsilon_2 \partial_{0t}^\beta y(t) = x(t), \\ x(t_0) = x_0, y(t_0) = y_0. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь $x(t), y(t) \in C^1[0, T]$ – функции решения, определяющие изменение длины мышечного волокна и электрохимического потенциала, $T > 0$ – время моделирования, $t \in [0, T]$ – текущее время, $\varepsilon_1 = \varepsilon \theta^{\alpha-1}$, $\varepsilon_2 = \theta^{\beta-1}$, θ – параметр, характерный временной масштаб, $0 < \varepsilon \ll 1$ – малый параметр, x_0, y_0 – начальные условия в момент времени t_0 .

Дробные производные порядков $0 < \alpha, \beta < 1$ в (1) понимаются в смысле Герасимова-Капуто [7,8]:

$$\partial_{0t}^\alpha x(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{\dot{x}(\tau) d\tau}{(t-\tau)^\alpha}, \quad \partial_{0t}^\beta y(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^t \frac{\dot{y}(\tau) d\tau}{(t-\tau)^\beta}, \quad (2)$$

где $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция Эйлера.

Определение 1. Задачу Коши (1) мы будем называть дробным осциллятором Зимана.

Замечание 1. В случае, когда $\alpha = \beta = 1$ дробный осциллятор Зимана переходит в классический осциллятор Зимана, который был предложен в работе [6].

Замечание 2. В дробном осцилляторе Зимана (1) присутствуют два важных параметра θ и ε . Первый параметр отвечает за характерный временной масштаб и позволяет в модельных уравнениях (1) согласовать размерности величин, которые в них входят. Второй параметр является малым параметром и указывает на то, что сокращение мышечного волокна сердца происходит быстрее, чем воздействие электрохимического потенциала.

3 Методика решения

В силу нелинейности дробного осциллятора Зимана, мы применяем численные методы для его исследования. Численные методы основаны на построении нелокальных конечно-разностных схем [15, 16]. Введем равномерную расчетную сетку для этого разобьем временной интервал $t \in [0, T]$ на N равных частей с шагом дискретизации $\tau = T/N$. Тогда функции решения в задаче Коши (1) перейдут в сеточные функции: $x(t_k) = x_k, y(t_k) = y_k, t_k = k\tau, k = 0, \dots, N-1$. Операторы дробных производных (2) будут иметь аппроксимации:

$$\partial_{0t}^\alpha x(t) \approx A \sum_{j=0}^{k-1} w_j^\alpha (x_{k-j+1} - x_{k-j}), \quad \partial_{0t}^\beta y(t) \approx B \sum_{j=0}^{k-1} w_j^\beta (y_{k-j+1} - y_{k-j}). \quad (3)$$

где весовые коэффициенты: $w_j^\alpha = (j+1)^{1-\alpha} - j^{1-\alpha}$, $w_j^\beta = (j+1)^{1-\beta} - j^{1-\beta}$, $A = \frac{\tau^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}$, $B = \frac{\tau^{-\beta}}{\Gamma(2-\beta)}$. Подставляя соотношения (3) в модельное уравнение (1) с учетом сеточных функций, получаем следующую дискретную задачу:

$$\begin{cases} x_{k+1} = \frac{1}{A\varepsilon_1} \left((1 + A\varepsilon_1) x_k - x_k^3 - y_k - A\varepsilon_1 \sum_{j=1}^{k-1} w_j^\alpha (x_{k-j+1} - x_{k-j}) \right), \\ y_{k+1} = \frac{1}{B\varepsilon_2} \left(x_k + B\varepsilon_2 y_k - B\varepsilon_2 \sum_{j=1}^{k-1} w_j^\beta (y_{k-j+1} - y_{k-j}) \right), \\ x_0 = a, y_0 = b. \end{cases} \quad (4)$$

Дискретная задача Коши (4) представляет собой нелокальную явную конечно-разностную схему. Покажем с помощью правила Рунге, что эта схема имеет первый порядок точности. Для этого введем вычислительную точность схемы (4) по формуле:

$$p_x = \log_2 (\xi_x^j / \xi_x^{j+1}), \quad (5)$$

где $\xi_x = \max_i |x_i - x_{2i}|$, $\xi_y = \max_i |y_i - y_{2i}|$ – погрешность решения, x_i, y_i – численное решение на шаге τ , x_{2i}, y_{2i} – численное решение на шаге $\tau/2$, $i = 1, \dots, N-1$ j – число итераций.

Возьмем следующие значения параметров численной схемы (4):

Пример 1. $\alpha = 0.9, \beta = 0.9, \theta = 1, T = 1, x_0 = 0.2, y_0 = 0.1, \varepsilon = 0.001, j = 5$.

Пример 2. $\alpha = 0.9, \beta = 0.7, \theta = 0.1, T = 1, x_0 = 0.001, y_0 = 0.002, \varepsilon = 0.1, j = 4$.

Результаты работы схемы (4) и расчет вычислительной точности по формуле (5) приведены в Таблицах 1 и 2.

Таблица 1 Расчет вычислительной точности для Примера 1

№	τ	ξ_x	p_x	ξ_y	p_y
1	0.0001	2.999853e-01	-	6.335624e-04	-
2	0.00005	1.599157e-01	0.9076	3.279693e-04	0.9499
3	0.000025	8.291074e-02	0.9477	1.683539e-04	0.9621
4	0.0000125	4.234945e-02	0.9692	8.583606e-05	0.9718
5	0.00000625	2.145692e-02	0.9809	4.352561e-05	0.9797

Таблица 2 Расчет вычислительной точности для Примера 2

№	τ	ξ_x	p_x	ξ_y	p_y
1	0.0001	5.183351e-02	-	1.186624e-02	-
2	0.00005	2.657744e-02	0.9637	6.054245e-03	0.9708
3	0.000025	1.348566e-02	0.9788	3.065536e-03	0.9818
4	0.0000125	6.783736e-03	0.9913	1.541637e-03	0.9917

Из табл. 1 и 2 мы можем заметить, что вычислительный порядок численной схемы (4) стремится к единице при уменьшении шага дискретизации τ . Это косвенно указывает на то, что схема (4) имеет первый порядок точности. Для строгого обоснования порядка точности необходимо обосновать устойчивость и сходимость численной схемы с помощью соответствующих теорем.

Замечание 3. Отметим, что нелокальная явная конечно-разностная схема (6) имеет ограничение шаг расчетной сетки. Это ограничение можно установить, изучая вопросы устойчивости и сходимости с помощью соответствующих теорем.

Мы в настоящей работе не будем давать строго обоснования устойчивости и сходимости численной схемы (4), оставив это для дальнейшего исследования, а шаг расчетной сетки будем выбирать достаточно малым, чтобы схема была устойчивой. Это всегда можно сделать и контролировать с помощью правила Рунге, как это показано в тестовых примерах выше.

Мы остановимся более подробно на возможностях компьютерной программы FracDynZe для расчета осциллограмм и фазовых траекторий дробного осциллятора Зимана (1).

4 Компьютерная программа FracDynZe

Компьютерная программа FracDynZe (дробная динамическая система Зимана) была разработана на языке программирования Python [17] в среде PyCharm [18]. В программе была реализована нелокальная явная конечно-разностная схема (4) для численного решения дробного осциллятора Зимана (1). Программа позволяет проводить визуализацию результатов моделирования в интерактивном графическом интерфейсе (рис. 1), а также сохранять в форматах: png, jpg и pdf, полученные графики изменения длины $x(t)$ мышечного волокна человеческого сердца, изменения электрохимического потенциала $y(t)$, а также фазовой траектории, построенной в координатах $(x(t), y(t))$ для дальнейшего качественного или количественного анализа колебательных режимов.

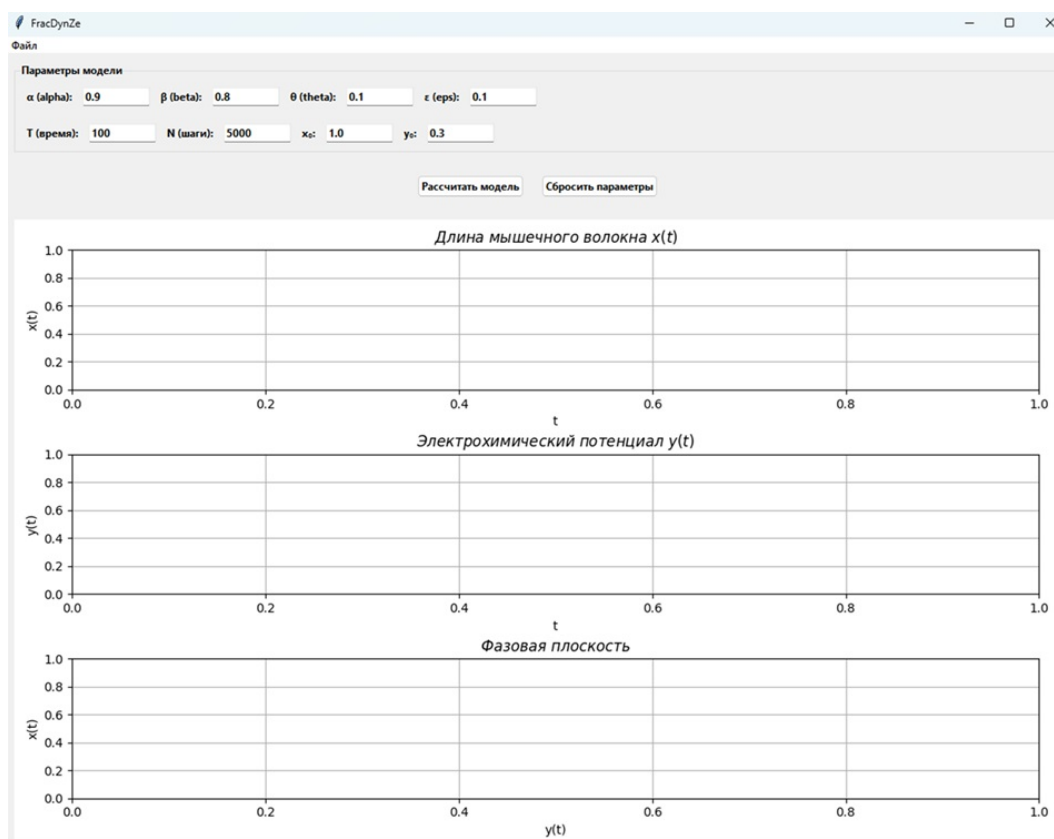


Рис. 1 Скриншот интерфейса компьютерной программы FracDynZe

Исходя из главного окна интерфейса (рис. 1) дадим описание основных блоков компьютерной программы FracDynZe:

Инициализация GUI.

Создание главного окна с размерами 1200x900; настройка шрифтов для matplotlib; создание элементов интерфейса: меню "Файл" с опциями сохранения и выхода, панель параметров модели ($\alpha, \beta, \theta, \varepsilon, T, N, x_0, y_0$), кнопки управления (расчет, сброс), область для трех графиков.

Расчет модели (calculate_and_plot).

Получение и валидация параметров; расчет временного шага τ и коэффициентов; вычисление весовых коэффициентов для дробных производных; численное решение системы дифференциальных уравнений; построение графиков в реальном времени.

Вспомогательные функции.

reset_parameters() – сброс к значениям по умолчанию; save_plot() – сохранение графиков в файл; update_progress() – обновление индикатора выполнения.

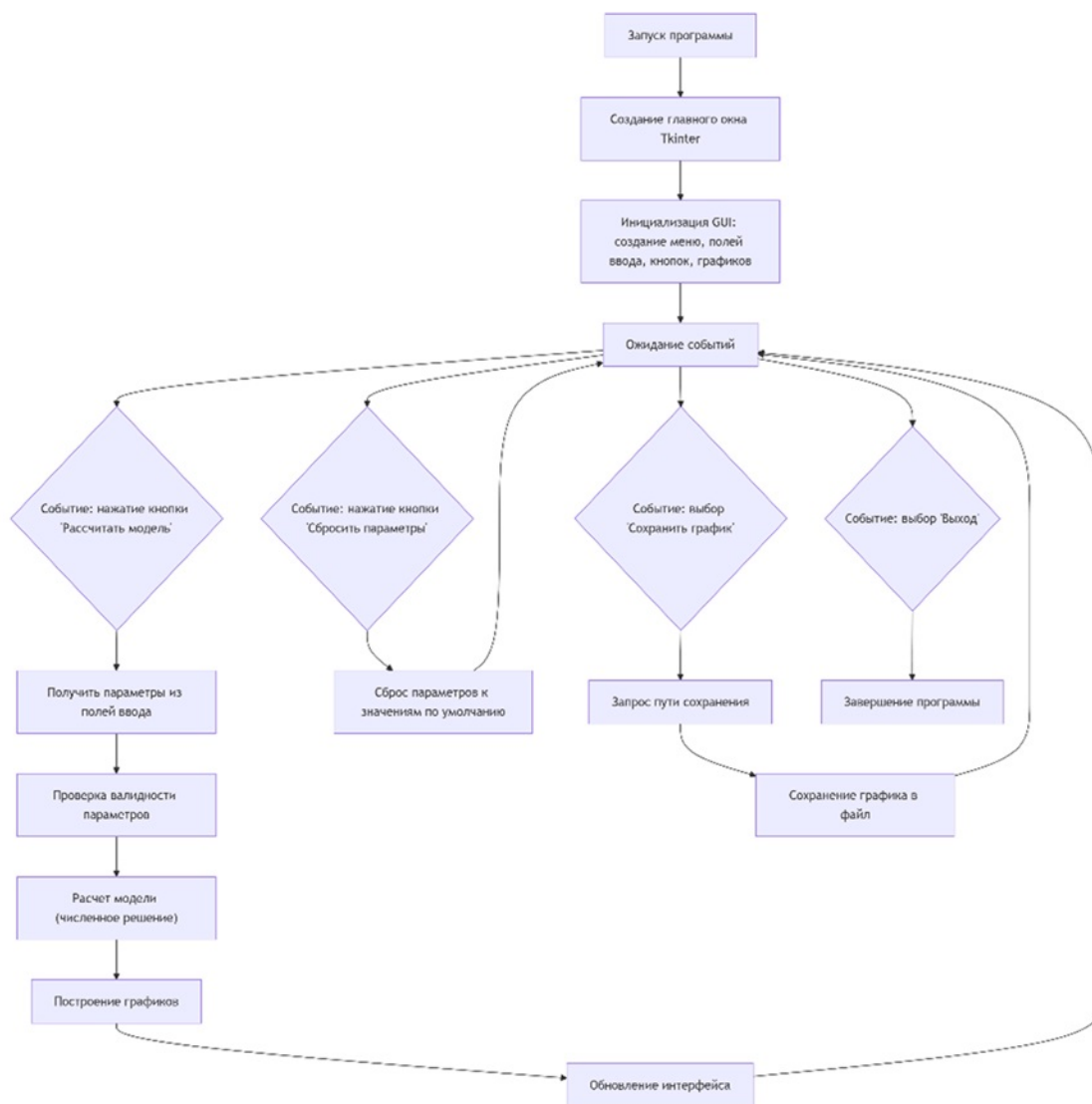


Рис. 2 Блок-схема компьютерной программы FracDynZe

5 Результаты численного моделирования

Приведем некоторые примеры работы компьютерной программы FracDynZe.

Пример 3. Значения параметров дробного осциллятора Зимана (1): $\alpha = 0.9$, $\beta = 0.8$, $\varepsilon = 0.1$, $\theta = 0.1$, $T = 100$, $N = 20000$, $x_0 = 1$, $y_0 = 0.3$.

Результаты моделирования приведены на рис. 3.

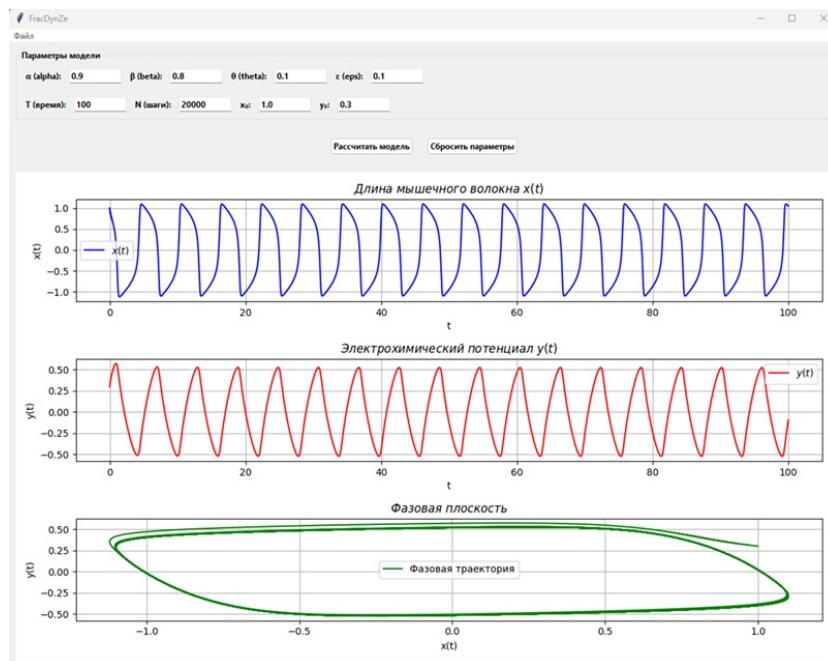


Рис. 3 Осциллограммы и фазовая траектория

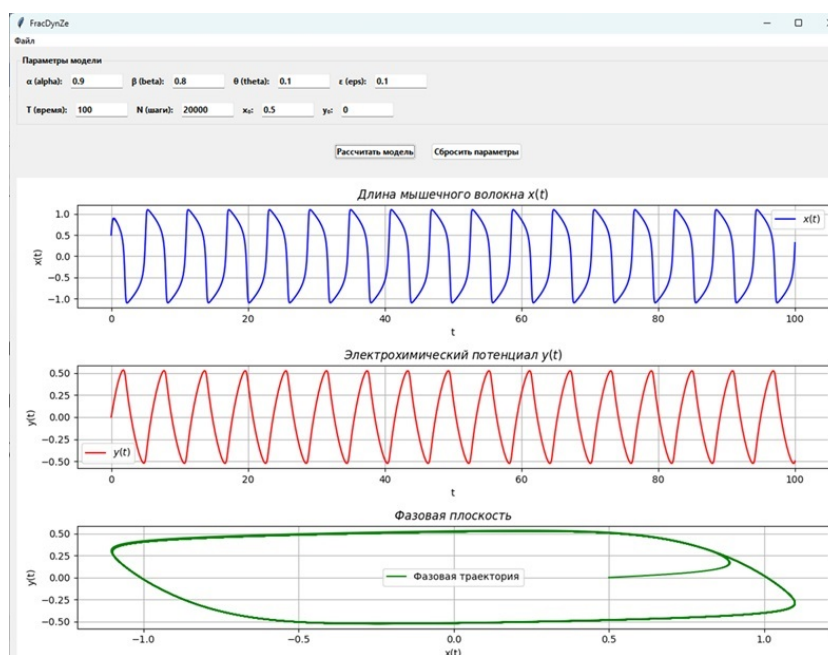


Рис. 4 Осциллограммы и фазовая траектория при $x_0 = 0.5$, $y_0 = 0$

На рис. 3 мы видим, что мышечные сокращения $x(t)$ происходят с постоянной амплитудой, также с постоянной амплитудой происходят и колебания электрохимического потенциала $y(t)$. Фазовая траектория со временем становится замкнутой, что говорит о наличии предельного цикла.

В работе [13], было показано, что предельный цикл может быть устойчивым. Например, возьмем начальные условия внутри предельного цикла на рис. 3: $x_0 = 0.5, y_0 = 0$. В этом случае работа программы FracDynZe приведена на рис. 4.

Мы видим на рис. 4, что поведение осциллограмм не поменялось, и, как следствие предельный цикл также остается без изменения. Однако необходимо отметить, что этот факт нуждается в строгом обосновании. Известно, что классический осциллятор Зимана относится к классу осцилляторов лъенаровского типа [19], для которых справедлива теорема Пуанкаре-Бендиксона о существовании единственного устойчивого предельного цикла.

Для дробных осцилляторов вопрос строго обоснования существования устойчивого предельного цикла является открытым и заслуживает отдельного исследования.

Дробная динамическая система Зимана может обладать и хаотическими режимами. Рассмотрим для примера результаты, полученные на рис. 3. Уменьшим количество точек расчетной сетки $N = 5000$. Для этого случая результаты работы компьютерной программы FracDynZe приведены на рис. 5.

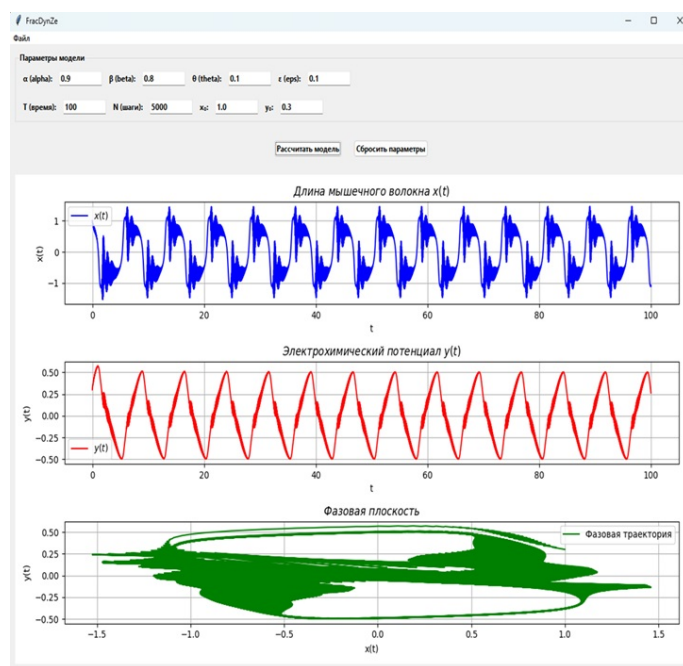


Рис. 5 Осциллограммы и фазовая траектория при $N = 5000$

Мы видим на рис. 5, что осциллограммы имеют сложную форму, но сохраняют периодичность колебаний. В то же время фазовая траектория имеет замкнутую траекторию, форма которой похожа на хаотическую. Для более достоверного результата необходимо провести качественное исследование регулярных и хаотических режимов, например по аналогии с работой [20], которые заключаются в построении бифуркационных диаграмм и карт динамических режимов [21].

Из приведенных выше результатов моделирования можно предположить, что эффекты наследственности могут играть ключевую роль в разработке новой методики патологий человеческого сердца. Например, рис. 5 может указывать на аритмию сердца, а другие режимы колебаний отличные от нормальных, могут указывать на тахикардию. Поэтому важно с практической точки зрения исследовать экспериментальные данные различных патологий сердца и сопоставлять их с данными, полученными в рамках моделей.

6 Заключение

В настоящей работе мы продемонстрировали возможности компьютерной программы FracDynZe для численного исследования дробного осциллятора Зимана (1) и возможности визуализации результатов моделирования: осциллограмм и фазовых траекторий. В работе мы подтвердили полученные ранее результаты в статьях авторов [13, 14], а также показали, что вычислительная точность нелокальной явной конечно-разностной схемы (6) имеет вычислительный порядок точности близкий к первому.

Дальнейшее развитие исследований в рамках дробного осциллятора Зимана будет заключаться в его качественном исследовании, который связан с изучением точек покоя, асимптотической устойчивости, а также исследование регулярных и хаотических режимов с помощью построения бифуркационных диаграмм и карт динамических режимов. Эти исследования должны расширить функционал компьютерной программы FracDynZe, что должно привести к созданию на ее базе комплекса программ.

Важным направлением исследований также является привлечение экспериментальных данных по патологиям работы сердца и их сопоставление с результатами, полученными в рамках предложенной математической модели.

Литература

- [1] Кошелев В.Н., Воробьев В.А., Шляхтенко А.А. Математическое моделирование кровообращения. – М.: Наука, 2001. – 256 с.
- [2] Киселев К.А. Модульное моделирование физиологических процессов. – М.: Физматлит, 2012. – 312 с.
- [3] Fenner J.W., Brook B., Clapworthy G., et al. The EuroPhysiome: towards a European virtual physiological human // Philosophical Transactions of the Royal Society A. – 2008. – Vol. 366. – P. 2979-2999.
- [4] Niederer S.A., Hunter P.J., Smith N.P. A quantitative analysis of cardiac myocyte relaxation: a simulation study // Biophysical journal. – 2006. – Vol. 90. – No. 5. – P. 1697-1722.
- [5] Georgieva-Tsaneva G., Gospodinova E. Mathematical Technologies for Modeling Cardiological Data: Heart Rate Variability // International Journal Bioautomation. – 2021. – Vol. 25. – No. 2. – P. 133-142.
- [6] Zeeman E.C. Differential equations for the heartbeat and nerve impulse // Salvador symposium on Dynamical Systems. – Academic Press, 1973. – P. 683-741.
- [7] Novozhenova O.G. Life And Science of Alexey Gerasimov, One of the Pioneers of Fractional Calculus in Soviet Union // FCAA. – 2017. – Vol. 20. – P. 790-809. – doi: <http://dx.doi.org/10.1515/fca-2017-0040>.
- [8] Caputo M., Fabrizio M. On the notion of fractional derivative and applications to the hysteresis phenomena // Meccanica. – 2017. – Vol. 52. – P. 3043-3052. – doi: <http://dx.doi.org/10.1007/s11012-017-0652-y>.

- [9] *Нахушев А.М.* Дробное исчисление и его применение. – М.: Физматлит, 2003. – 272 с.
- [10] *Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J.* Theory and Applications of Fractional Differential Equations. – Amsterdam: Elsevier, 2006. – 523 p.
- [11] *Traver J.E., Nuevo-Gallardo C., Tejado I., Fernández-Portales J., Ortega-Morán J.F., Pagador J.B., Vinagre B.M.* Cardiovascular Circulatory System and Left Carotid Model: A Fractional Approach to Disease Modeling // *Fractal and Fractional*. – 2022. – Vol. 6. – No. 2. – 64. – doi: <http://dx.doi.org/10.3390/fractalfract6020064>.
- [12] *Alimov Kh.T., Parovik R.I.* Simulation of artificial ECGs of a healthy person using the fractional McSherry model // *AIP conference proceedings*. – 2024. – Vol. 3244. – No. 1. – 020005. – doi: <http://dx.doi.org/10.1063/5.0241420>.
- [13] *Исрайилжанова Г.С., Каримов Ш.Т., Паровик Р.И.* Математическая дробная модель Зимана для описания сердечных сокращений // *Вестн. КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*. – 2024. – Т. 48. – № 3. – С. 83-84.
- [14] *Israyiljanova G., Karimov Sh., Parovik R.I.* Zeeman's mathematical fractional model for describing cardiac contractions // *AIP Conference Proceedings*. – 2025. – Vol. 3356. – No. 1. – 020010. – doi: <http://dx.doi.org/10.1063/5.0296360>.
- [15] *Parovik R.I.* On a Finite-Difference Scheme for an Hereditary Oscillatory Equation // *Journal of Mathematical Sciences*. – 2021. – Vol. 253. – No. 4. – P. 547-557.
- [16] *Diethelm K.* The Analysis of Fractional Differential Equations. – Berlin: Springer, 2010. – 260 p.
- [17] *Shaw Z.A.* Learn Python the hard way. – Addison-Wesley Professional, 2024. – 352 p.
- [18] *Van Horn B.M., Nguyen Q.* Hands-On Application Development with PyCharm: Build Applications like a Pro with the Ultimate Python Development Tool. – Birmingham, UK: Packt Publishing Ltd., 2023. – 652 p.
- [19] *Liénard A.* Etude des oscillations entretenues // *Revue générale de l'électricité*. – 1928. – No. 23. – P. 901-912.
- [20] *Паровик Р.И.* Исследование бифуркационных диаграмм дробной динамической системы Селькова для описания автоколебательных режимов микросейсм // *Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки*. – 2024. – Т. 49. – № 4. – С. 24-35. – doi: <http://dx.doi.org/10.26117/2079-6641-2024-49-4-24-35>.
- [21] *Parovik R.I., Yakovleva T.P.* Construction of maps for dynamic modes and bifurcation diagrams in nonlinear dynamics using the Maple computer mathematics software package // *Journal of Physics: Conference Series*. – 2022. – Vol. 2373. – 052022. – doi: <http://dx.doi.org/10.1088/1742-6596/2373/5/052022>.

UDC 519.622.2

FRACDYNZE IS A COMPUTER PROGRAM FOR STUDYING THE DYNAMICS OF CARDIAC FUNCTION USING THE FRACTIONAL ZEEMAN OSCILLATOR*

^{1,2*}*Parovik R.I.*, ^{3,4}*Israyiljanova G.S.*

*parovik@ikir.ru

¹Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation FEB RAS,

*This work was carried out within the framework of the cooperation agreement between the Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation of the Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences and the Mirzo Ulugbek National University of Uzbekistan (Tashkent, Uzbekistan) No. 1118 of April 28, 2022 (0468/01/22 NTMI) (2022-2027) in physical and mathematical sciences.

7, Mirnaya Str., Paratunka, Kamchatka, 684034 Russia;
²National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek,
4 University Str., Tashkent, 100174 Uzbekistan;
³Fergana State University,
19 Murabbiylar Street, Fergana, 150105 Uzbekistan;
⁴Tashkent State Transport University,
1, Temiryolchilar street, Tashkent, 100167 Uzbekistan.

This paper examines the dynamic modes of the fractional Zeeman oscillator. The fractional Zeeman oscillator is a system of two ordinary differential equations with fractional derivatives, understood in the Gerasimov-Caputo sense, for which local initial conditions are valid. The fractional Zeeman oscillator describes the dynamics of heart contractions using an electrochemical potential. Due to the nonlinearity of the fractional Zeeman oscillator, a numerical algorithm based on a nonlocal explicit finite-difference scheme was used to obtain a solution. The numerical algorithm was implemented in the FracDynZe computer program, written in Python in the PyCharm environment. The software package allows for visualization and saving of simulation results. This article describes the FracDynZe computer program, which implements a numerical algorithm for a nonlocal explicit finite-difference scheme. Using FracDynZe, test examples demonstrate that the numerical scheme has first-order accuracy. Examples and their visualizations are provided for various values of the Zeeman fractional oscillator parameters. The FracDynZe computer program can be supplemented with a module for the qualitative analysis of the Zeeman fractional oscillator. For example, this module can implement the ability to construct bifurcation diagrams for studying regular and chaotic regimes.

Keywords: fractional derivatives, modeling, phase trajectory, stability, memory, python, numerical methods.

Citation: Parovik R.I., Israyiljanova G.S. 2026. FracDynZe is a computer program for studying the dynamics of cardiac function using the fractional Zeeman oscillator. *Problems of Computational and Applied Mathematics*. 2(72):5-15.

DOI: https://doi.org/10.71310/pcam.2_72.2026.01

HISOBLASH VA AMALIY МАТЕМАТИКА MUAMMOLARI

ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ
И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
PROBLEMS OF COMPUTATIONAL
AND APPLIED MATHEMATICS

ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

№ 2(72) 2026

Журнал основан в 2015 году.

Издается 6 раз в год.

Учредитель:

Научно-исследовательский институт развития цифровых технологий и
искусственного интеллекта.

Главный редактор:

Равшанов Н.

Заместители главного редактора:

Арипов М.М., Шадиметов Х.М., Ахмедов Д.Д.

Ответственный секретарь:

Убайдуллаев М.Ш.

Редакционный совет:

Азамов А.А., Алоев Р.Д., Амиргалиев Е.Н. (Казахстан), Арушанов М.Л.,
Бурнашев В.Ф., Джумаёзов У.З., Загребина С.А. (Россия), Задорин А.И. (Россия),
Игнатъев Н.А., Ильин В.П. (Россия), Иманкулов Т.С. (Казахстан),
Исмагилов И.И. (Россия), Кабанихин С.И. (Россия), Курбонов Н.М., Маматов Н.С.,
Мирзаев Н.М., Мурадов Ф.А., Назирова Э.Ш., Нормуродов Ч.Б., Нуралиев Ф.М.,
Опанасенко В.Н. (Украина), Расулмухамедов М.М., Садуллаева Ш.А.,
Старовойтов В.В. (Беларусь), Хаётов А.Р., Халджигитов А., Хамдамов Р.Х.,
Хужаев И.К., Хужаеров Б.Х., Эшмаматова Д.Б., Дустмуродова Ш.Ж.,
Чье Ен Ун (Россия), Шабозов М.Ш. (Таджикистан), Dimov I. (Болгария),
Li Y. (США), Mascagni M. (США), Min A. (Германия), Singh M. (Южная Корея).

Журнал зарегистрирован в Агентстве информации и массовых коммуникаций при
Администрации Президента Республики Узбекистан.

Свидетельство №0856 от 5 августа 2015 года.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

При перепечатке материалов ссылка на журнал обязательна.

За точность фактов и достоверность информации ответственность несут авторы.

Адрес редакции:

100125, г. Ташкент, м-в. Буз-2, 17А.

Тел.: +(998) 71 263-41-98.

Э-почта: journals@airi.uz.

Веб-сайт: <https://journals.airi.uz>.

Дизайн и вёрстка:

Шарипов Х.Д.

Отпечатано в типографии НИИ РЦТИИ.

Подписано в печать 22.04.2026 г.

Формат 60x84 1/8. Заказ №2. Тираж 100 экз.

PROBLEMS OF COMPUTATIONAL AND APPLIED MATHEMATICS

No. 2(72) 2026

The journal was established in 2015.
6 issues are published per year.

Founder:

Digital Technologies and Artificial Intelligence Development Research Institute.

Editor-in-Chief:

Ravshanov N.

Deputy Editors:

Aripov M.M., Shadimetov Kh.M., Akhmedov D.D.

Executive Secretary:

Ubaydullaev M.Sh.

Editorial Council:

Azamov A.A., Alov R.D., Amirgaliev E.N. (Kazakhstan), Arushanov M.L.,
Burnashev V.F., Djumayozov U.Z., Zagrebina S.A. (Russia), Zadorin A.I. (Russia),
Ignatiev N.A., Ilyin V.P. (Russia), Imankulov T.S. (Kazakhstan), Ismagilov I.I. (Russia),
Kabanikhin S.I. (Russia), Kurbonov N.M., Mamatov N.S., Mirzaev N.M., Muradov F.A.,
Nazirova E.Sh., Normurodov Ch.B., Nuraliev F.M., Opanasenko V.N. (Ukraine),
Sadullaeva Sh.A., Starovoitov V.V. (Belarus), Khayotov A.R., Khaldjigitov A.,
Khamdamov R.Kh., Khujaev I.K., Khujayorov B.Kh., Eshmamatova D.B.,
Dustmurodova Sh.J., Chye En Un (Russia), Shabozov M.Sh. (Tajikistan),
Dimov I. (Bulgaria), Li Y. (USA), Mascagni M. (USA), Min A. (Germany),
Singh M. (South Korea).

The journal is registered by Agency of Information and Mass Communications under the
Administration of the President of the Republic of Uzbekistan.

Certificate of Registration No. 0856 of 5 August 2015.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

At a reprint of materials the reference to the journal is obligatory.

Authors are responsible for the accuracy of the facts and reliability of the information.

Address:

100125, Tashkent, Buz-2, 17A.

Tel.: +(998) 71 263-41-98.

E-mail: journals@airi.uz.

Web-site: <https://journals.airi.uz>.

Layout design:

Sharipov Kh.D.

DTAIRI printing office.

Signed for print 22.04.2026

Format 60x84 1/8. Order No. 2. Print run of 100 copies.

Содержание

Паровик Р.И., Исраиловжанова Г.С.

FracDynZe – компьютерная программа исследования динамики работы сердца в рамках дробного осциллятора Зимана 5

Очилова Н.К.

Уравнения смешанно-составного типа в качестве модели аномальной диффузии в опухолевых тканях 16

Кодиров Р., Боборахимов Б.

Математическая модель процессов изменения напора подземных вод в неоднородных пористых средах 27

Равшанов Н., Ахмад Тирта Дхару Вахью Памбуди, Мухаммад Сафари, Камолiddинова Ф.

Прогнозирование индекса экологического состояния регионов Узбекистана с использованием методов машинного обучения и искусственного интеллекта 42

Шадманов И.У., Иззатуллоев А.Э., Сухендро Бусоно

Дробная модель и устойчивый численный алгоритм для взаимосвязанного переноса тепла и влаги в неоднородных пористых телах 61

Усмонов Л.С.

Математическое моделирование гидродинамического процесса подземного выщелачивания с учетом изменения гидродинамических параметров пористой среды 89

Шакаева Э.Э.

Численное моделирование задачи Коши для сингулярно возмущенного уравнения третьего порядка 109

Алов Р.Д., Овлаева М.Х., Ильяни Абдуллах, Исаева Н.Т.

Явно-неявная разностная схема для двухмерной линейной гиперболической системы с динамическими граничными условиями 122

Болтаев А.К.

Об одной дискретной системе для нахождения коэффициентов весовых оптимальных квадратурных формул 136

Олимов Н.Н.

Применение оптимальной интерполяционной формулы с производной для приближенного интегрирования 147

Твёрдый Д.А.

Асимптотические оценки сложности гибридных алгоритмов численного решения модельного уравнения объемной активности радона с дробной производной переменного порядка 155

Contents

<i>Parovik R.I., Israyiljanova G.S.</i>	
FracDynZe is a computer program for studying the dynamics of cardiac function using the fractional Zeeman oscillator	5
<i>Ochilova N.K.</i>	
Mixed-composite-type equations as a model of anomalous diffusion in tumor tissues	16
<i>Qodirov R., Boborakhimov B.</i>	
Mathematical model of groundwater head variation processes in heterogeneous porous media	27
<i>Ravshanov N., Achmad Tirta Dharu Wahyu Pambudi, Muhammad Safari, Kamolid-dinova F.</i>	
Forecasting the environmental health index of Uzbekistan regions using machine learning and artificial intelligence methods	42
<i>Shadmanov I.U., Izzatulloev A.E., Suhendro Busono</i>	
Fractional model and robust numerical algorithm for coupled heat and moisture transfer in heterogeneous porous bodies	61
<i>Usmonov L.S.</i>	
Mathematical modeling of the hydrodynamic process of in-situ leaching taking into account the changes in hydrodynamic parameters of a porous medium	89
<i>Shakaeva E.E.</i>	
Numerical modeling of the Cauchy problem for a third-order singularly perturbed equation	109
<i>Aloev R.D., Ovlaeva M.Kh., Ilyani Abdullah, Issayeva N.T.</i>	
An explicit-implicit difference scheme for a two-dimensional linear hyperbolic system with dynamic boundary conditions	122
<i>Boltaev A.K.</i>	
On a discrete system for finding the coefficients of weighted optimal quadrature formulas	136
<i>Olimov N.N.</i>	
An application of optimal interpolation formula with derivative to approximate integration	147
<i>Tverdyyi D.A.</i>	
Asymptotic complexity estimates of hybrid algorithms for the numerical solution of a model equation of radon volume activity with a variable-order fractional derivative	155