

УДК 519.632

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ МЕТОДОМ ПЕРЕМЕЩАЕМОГО УЗЛА

^{1*} Далабаев У. ^{1,2} Хасанова Д.

*udalabaev@mail.ru

¹ Университет Мировой экономики и дипломатии,

100007, Узбекистан, г. Ташкент, проспект Мустакиллик, 54;

² Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека,

100174, Узбекистан, г. Ташкент, улица Университетская 4.

Метод перемещаемых узлов применяется при решении задачи Дирихле для уравнения Пуассона в прямоугольной области. Аппроксимируя оператор Лапласа с помощью перемещаемых узлов, мы получаем приближённо-аналитическое решение задачи Дирихле — то есть решение, выраженное в виде комбинации аналитических функций. Дальнейшее улучшение точности достигается за счёт применения метода прямых (method of lines). В рамках этого подхода пространственные переменные дискретизируются с использованием метода перемещаемых узлов, в результате чего исходная краевая задача для уравнения Пуассона в двумерной области трансформируется в обыкновенному дифференциальному уравнению (ОДУ) – двухточечную краевую задачу, где независимой переменной становится одна из координат (например, y), а по другой координате (x). Каждое из полученных ОДУ описывает поведение решения вдоль линии, параллельной одной из осей, и содержит граничные условия, заданные на противоположных сторонах прямоугольной области. Таким образом, комбинация метода перемещаемых узлов с методом прямых позволяет перейти от двумерной задачи к одномерной. Для верификации эффективности предложенного подхода рассмотрены тестовые задачи с аналитически заданными решениями. Результаты подтверждают, что предложенный подход обеспечивает повышение точности решения.

Ключевые слова: перемещаемый узел, уравнение Пуассона, задача Дирихле, метод прямых.

Цитирование: Далабаев У. Хасанова Д. Решение задачи Дирихле методом перемещаемого узла // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2026. – № 1(71). – С. 103-112.

DOI: https://doi.org/10.71310/psam.1_71.2026.09

1 Введение

В данной работе рассматривается решение задачи Дирихле с двумя переменными с помощью перемещаемых узлов. Задача Дирихле встречается во многих физических задачах – задачи механики, теплопроводности, электростатики, гидравлики и др.

Существуют различные аналитические методы решения задачи Дирихле [1–6]. Решение дифференциальных уравнений в частных производных представляет собой весьма трудоёмкий процесс. Многие задачи математической физики не имеют точных решений. Возникает необходимость применения приближённых решений. Основным достоинством метода перемещаемых узлов – это получение приближенного аналитического решения в виде явной функции.

В работе [7] используется конечно-разностный метод с перемещаемым узлом для анализа монотонности численной схемы двухточечных краевых задач обыкновенных

дифференциальных уравнений. Работа авторов [8] посвящена применению перемещаемого контрольного объёма, которое позволило получить более уточнённую схему для конвективно-диффузионной задачи. Применению метода перемещаемых узлов для начально-краевых задач параболического уравнения посвящена работа [9]. С помощью конечно-разностного метода в работе [10] получено приближенно-аналитическое решение задачи течения жидкости в трубе с различными сечениями, математическая модель которого сводится к решению двумерной задачи Дирихле. В настоящей работе исследуется применение метода перемещаемых узлов для улучшения приближённого решения задачи Дирихле.

Исследования, проведённые в работах [7–10] показали простоту применения метода перемещаемых узлов для получения приближённого решения. Однако, возникает необходимость улучшения решения. При использовании стандартного способа получения решения методом перемещаемого узла мы добиваемся того, что в дифференциальном уравнении в частных производных все частные производные аппроксимируются перемещаемыми разностными отношениями. Решение полученного алгебраического уравнения позволяет получить приближенное решение задачи.

Получение более уточнённого решения базируется на том факте, что в исходном дифференциальном уравнении производим аппроксимации только по одной зависимой переменной. В итоге имеем обыкновенное дифференциальное уравнение с граничными условиями Дирихле. Решение двухточечных краевых задач позволяет получить более точное решение.

Возможности предлагаемого подхода демонстрируются на конкретных тестовых задачах, имеющих точное решение. Сравниваются результаты точного и приближенно-аналитического решений.

2 Постановка задачи

Рассмотрим двумерное уравнение Пуассона в прямоугольнике $\Omega = \{(x, y) | x \in [a, b], y \in [c, d]\}$

$$\Delta(x, y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y) \quad (1)$$

с граничными условиями

$$u(a, y) = u_a(y), u(b, y) = u_b(y), u(x, c) = u_c(x), u(x, d) = u_d(x). \quad (2)$$

Считаем, что задача (1)–(2) имеет единственное решение и обладает достаточной гладкостью.

Для решения поставленной задачи существуют различные методы: аналитические и численные [1, 11–16].

3 Метод решения

Для получения приближенно-аналитического решения задачи используем метод перемещаемых узлов [10].

Способ получения приближенно-аналитического решения очень прост, однако, представляет более грубое представление решения задачи. Очень удобен для инженерных расчетов.

3.1 Приближенное решение при аппроксимации по обеим переменным (стандартная схема)

Возьмем произвольную точку в прямоугольнике (x, y) .

Аппроксимируем частные производные второго порядка следующими выражениями с перемещаемым узлом:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{2}{b-a} \left(\frac{u_b(y) - u(x, y)}{b-x} - \frac{u(x, y) - u_a}{x-a} \right), \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx \frac{2}{d-c} \left(\frac{u_d(x) - u(x, y)}{d-y} - \frac{u(x, y) - u_c}{y-a} \right). \quad (4)$$

Подставляя выражения (3) и (4) в уравнение (1), получим приближённое алгебраическое уравнение

$$\begin{aligned} & \frac{2}{b-a} \left(\frac{u_b(y) - u(x, y)}{b-x} - \frac{u(x, y) - u_a}{x-a} \right) + \\ & + \frac{2}{d-c} \left(\frac{u_d(x) - u(x, y)}{d-y} - \frac{u(x, y) - u_c}{y-a} \right) \approx f(x, y). \end{aligned} \quad (5)$$

Обозначим через $U(x, y)$ приближённое решение, получаемое из (5) при замене приближённого знака точным равенством, в итоге получим

$$\begin{aligned} U(x, y) &= \frac{1}{(b-x)(x-a) + (d-y)(y-c)} \times \\ & \times \left(\frac{(d-y)(y-c)}{b-a} ((x-a)U_b + (b-x)U_a) + \right. \\ & \left. + \frac{(b-x)(x-a)}{d-c} ((y-c)U_d + (d-y)U_c) \right) + \\ & + \frac{(b-x)(x-a)(d-y)(y-c)}{2((b-x)(x-a) + (d-y)(y-c))} f(x, y). \end{aligned} \quad (6)$$

В приближённом решении задачи (6) положено $U_b = u_b(y)$, $U_a = u_a(y)$, $U_d = u_d(x)$, $U_c = u_c(x)$.

(6) формула представляет собой приближенное аналитическое решение уравнения Пуассона в прямоугольнике. Уравнение (6) удовлетворяет граничным условиям. Из-за того, что уравнения (3) и (4) представляют собой приближенное соотношение аппроксимации вторых производных, то выражение (6) является приближенным решением. Тем не менее выражение (6) дает приемлемое решение во многих практических задачах.

3.2 Приближенное решение задачи при аппроксимации по переменной x

Для увеличения точности получаемого приближённого решения произведём частичную аппроксимацию в уравнении (1). Такой подход в численном анализе называется методом прямых [17]. Мы будем сочетать этот подход с методом перемещаемых узлов. В уравнении (1) аппроксимируем вторую производную по x выражением (3), получим следующее выражение (для краткости положено $f(x, y) = 0$).

$$\frac{2}{b-a} \left(\frac{u_b(y) - u(x, y)}{b-x} - \frac{u(x, y) - u_a}{x-a} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx f(x, y).$$

Отсюда получим обыкновенное дифференциальное уравнение при замены приближённого равенство точным

$$\frac{\partial^2 U_2}{\partial y^2} - \frac{2}{(b-x)(x-a)} U_2 = - \left(\frac{2u_b(y)}{(b-a)(b-x)} + \frac{-u_a(y)}{(b-a)(x-a)} \right). \quad (7)$$

Решая уравнение (7), получим более уточнённое решение. Здесь предполагаем, что y – переменная величина, и решаем дифференциальное уравнение второго порядка относительно данной переменной x – считаем константой.

Введём следующие обозначения в уравнении (7)

$$A = \frac{2}{(b-x)(x-a)}, \quad B = \frac{2u_b(y)}{(b-a)(b-x)} + \frac{2u_a(y)}{(b-a)(x-a)}.$$

Решаем это уравнение (7) как обыкновенное дифференциальное уравнение относительно переменной y . С учётом граничных условий общее решение будет иметь следующий вид

$$U_2 = C_1 \exp(\sqrt{A}y) + C_2 \exp(-\sqrt{A}y) + Q(x, y). \quad (8)$$

Частное решение $Q(x, y)$ зависит от задания правой части уравнения (7)

$$C_2 = \frac{u_d(x) - (u_c(x) - Q(x, c)) \exp(\sqrt{A}(d-c)) - Q(x, d)}{\exp(-\sqrt{A}d) - \exp(-\sqrt{A}(d-2c))},$$

$$C_1 = u_c(x) \exp(-\sqrt{A}c) - \exp(-2\sqrt{A}c) - Q(x, c) \exp(-\sqrt{A}c).$$

3.3 Приближенное решение задачи при аппроксимации по переменной y

Способ получения приближённого решения задачи аналогично как в предыдущем пункте. Аппроксимируем вторую производную по y выражением (4), получим следующее решение

$$U_3 = C_1 \exp(\sqrt{E}y) + C_2 \exp(-\sqrt{E}y) + L(x, y), \quad (9)$$

$$C_2 = \frac{u_b(y) - (u_a(y) - L(a, y)) \exp(\sqrt{E}(b-a)) - L(b, y)}{\exp(-\sqrt{E}b) - \exp(-\sqrt{E}(b-2a))},$$

$$C_1 = u_a(y) \exp(-\sqrt{E}c) - \exp(-2\sqrt{E}c) - Q(x, c) \exp(-\sqrt{E}c),$$

$$E = \frac{2}{(d-y)(y-c)}, \quad D = \frac{2u_d(x)}{(d-c)(d-y)} + \frac{2u_c(x)}{(d-c)(y-c)}.$$

4 Обсуждение

Рассмотрим теперь конкретные тестовые примеры.

Задача 1. Рассмотрим уравнение теплопроводности в области $[0, a] \times [0, b]$

$$\Delta T = 0,$$

с граничными условиями

$$T(0, y) = T_0 + (T_3 - T_0) \frac{y}{b}, \quad T(a, y) = T_1 + (T_2 - T_1) \frac{y}{b},$$

$$T(x, 0) = T_0 + (T_1 - T_0)\frac{x}{a}, \quad T(x, b) = T_3 + (T_2 - T_3)\frac{x}{a}.$$

Здесь $T(0, 0) = T_0$, $T(a, 0) = T_1$, $T(0, b) = T_2$, $T(a, b) = T_3$ температуры угловых точек.

Точное решение этой задачи:

$$T(x, y) = T_0 + \frac{T_1 - T_0}{a}x + \frac{T_3 - T_0}{b}y + \frac{T_0 + T_2 - T_1 - T_3}{ab}xy.$$

Аппроксимируем уравнение Лапласа перемещаемым разностной схемой:

$$\begin{aligned} & \frac{2}{a} \left(\frac{T(a, y) - T(x, y)}{a - x} - \frac{T(x, y) - T(0, y)}{x} \right) + \\ & + \frac{2}{b} \left(\frac{T(x, b) - T(x, y)}{b - y} - \frac{T(x, y) - T(x, 0)}{y} \right) = 0. \end{aligned}$$

Решение этого уравнения совпадает с точным решением. Дальнейшее улучшение не требуется.

Задача 2. Рассмотрим уравнение Пуассона

$$\Delta u = 6x - 6y,$$

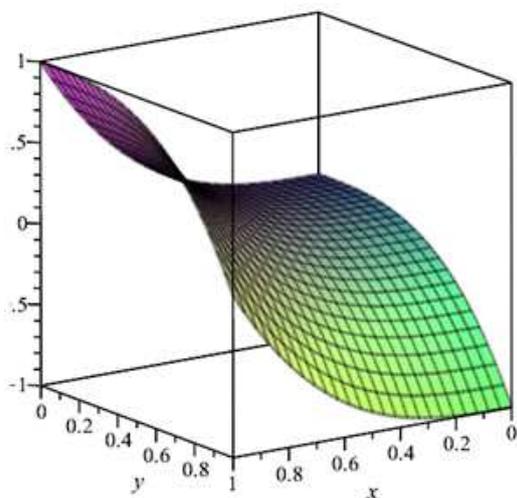
с граничными условиями в области $[0, 1] \times [0, 1]$:

$$u(0, y) = -y^3, \quad u(1, y) = 1 - y^3, \quad u(x, 0) = x^3, \quad u(x, 1) = x^3 - 1.$$

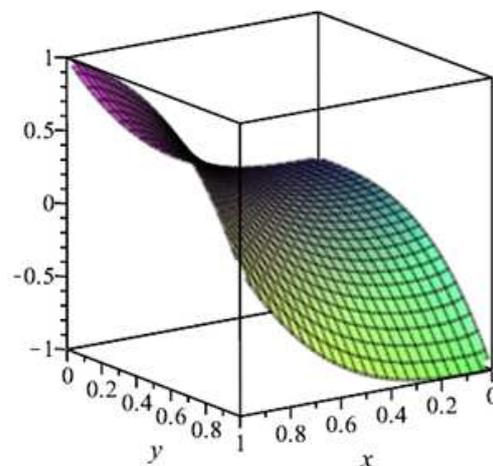
Точное решение $u(x, y) = x^3 - y^3$.

Используя стандартный перемещаемый узел по формуле (5), получим приближённое решение

$$U(x, y) = \frac{xy(y - x) + y^4(1 - y) + x^4(x - 1)}{y(y - 1) + x(x - 1)}. \quad (10)$$



а) точное решение



б) приближённое решение

Рис. 1 Графики точного и приближённого решения задачи 2

На рис.1 представлена точное и приближённое решение задачи 2. Из графика видно, что близость этих решений. Визуально трудно отличить разницу между точного и приближённого решения.

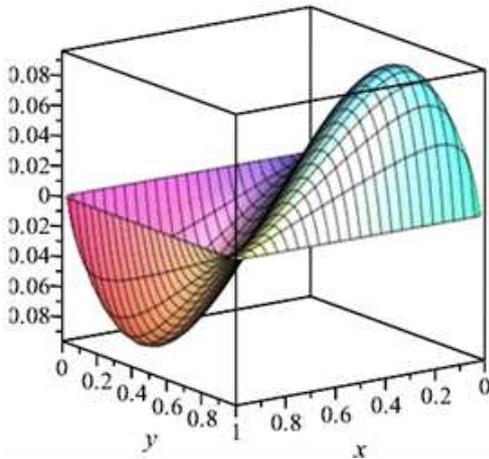
При использовании приближённого решения по формуле (8) получим

$$U_2 = C_1 \exp(\sqrt{A}x) + C_2 \exp(-\sqrt{A}x) + x^3 - y + 3y^2(1 - y). \quad (11)$$

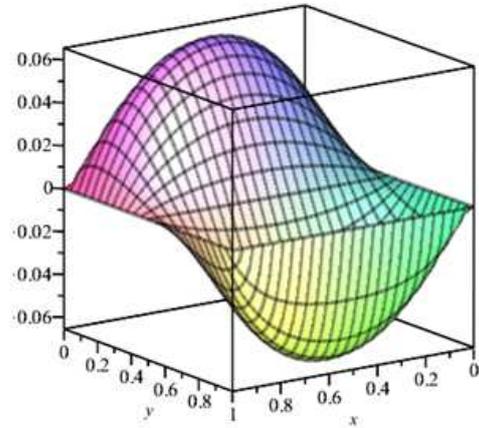
где

$$C_2 = \frac{(2y^3 - 3y^2 + y)(1 - \exp \sqrt{A})}{y(1 - y)},$$

$$C_1 = 2y^3 - 3y^2 + y - C_2, \quad A = \frac{2}{y(1 - y)}.$$



а) разность по формуле (10)



б) разность по формуле (11)

Рис. 2 Графики точного и приближённого решения задачи 2

На рис.2(а) приведен график разности точного и стандартного приближённого решения (10) ($u - U$). Представленной на рис.1(б) показывает улучшение приближённого решения по формуле (11) ($u - U_2$). Частичная аппроксимация позволяет получить улучшенное решение.

Задача 3. Решить уравнение Пуассона

$$\Delta u = 8 \cos^2(x + y) - 4, \quad (12)$$

в области $[0, 1] \times [0, 1]$ с граничными условиями:

$$\begin{aligned} u(0, y) &= \sin^2(y), \quad u(1, y) = \sin^2(1 + y), \\ u(x, 0) &= \sin^2(x), \quad u(x, 1) = \sin^2(1 + x). \end{aligned} \quad (13)$$

Точное решение задачи $u(x, y) = \sin^2(x + y)$.

Стандартное приближённое решение на основе (5) имеет вид:

$$\begin{aligned} U(x, y) &= \frac{y(1 - y)[x \sin^2(y + 1) + (1 - x) \sin^2(y)]}{M} + \\ &+ \frac{x(1 - x)[y \sin^2(x + 1) + (1 - y) \sin^2(x)]}{2M} + \\ &+ \frac{x(1 - x)y(1 - y)}{M} [8 \cos^2(x + y) - 4, \end{aligned} \quad (14)$$

где $M = x(1 - x) + y(1 - y)$.

Приближённое решение по формуле (5) даёт

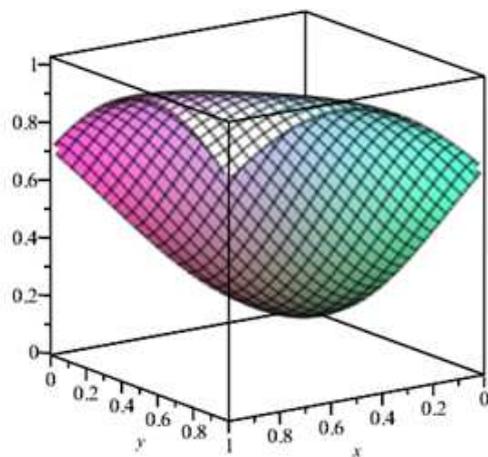
$$U_2(x, y) = C_1 \exp(\sqrt{Ax}) + C_2 \exp(-\sqrt{Ax}) + u_0. \quad (15)$$

В уравнении (15) значение $A = 2/[y(1 - y)]$, а u_0 - частное решение, которое определяется в виде:

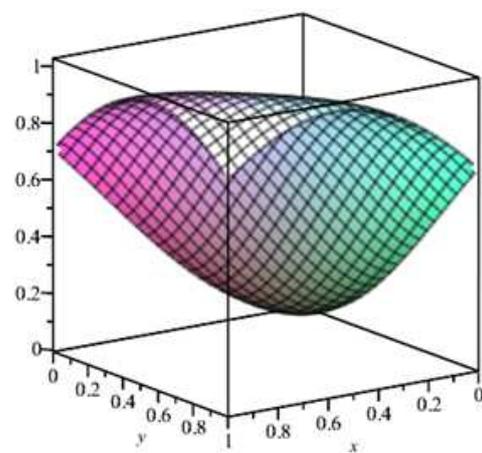
$$u_0 = a_1 \cos(2(1 + y)) + a_2 \cos(2x) + a_3 \cos(2(x + y)) + 1/2,$$

$$a_1 = \frac{-y}{y^2(1 - y)}, \quad a_2 = \frac{y - 1}{y^2(1 - y) + 2}, \quad a_3 = \frac{-4y(1 - y)}{y^2(1 - y) + 2}.$$

C_1, C_2 определяются исходя из граничных условий.



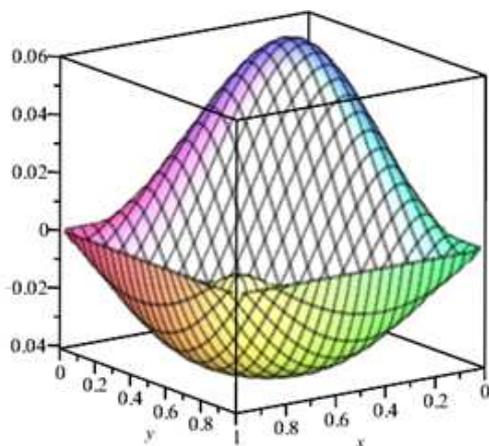
а) Точное решение



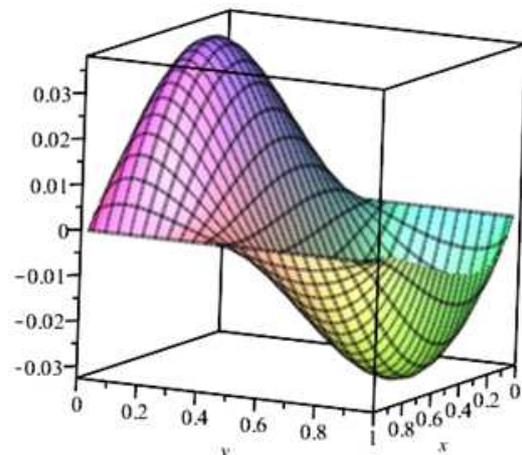
б) приближённое решение

Рис. 3 Графики точного и приближённого решения задачи 3

На рис.3 представлены графики решение задачи 3: рис.3(а) соответствует точному решению, а рис.3(б) приближённому, полученное на основе стандартной аппроксимации производных с перемещаемым разностным отношением. Из графика видно хорошее совпадение точного и приближённого решения.



а) разность по формуле (14)



б) разность по формуле (15)

Рис. 4 Разность точного и приближённого решения задачи 3

Близость этих решений (разность точного и приближённого решения (14)) отражена на рис.4(а), где показано хорошее совпадение результатов (максимальная ошибка по абсолютной величине не превосходит 0,06). Если используем улучшенное приближённое решение по формуле (15) наблюдается увеличение точности приближённого решения почти два раза (рис.4(б)).

Задача 4. Решить уравнение Лапласа

$$\Delta u = 0,$$

в области $[0, 1] \times [0, \pi/2]$ с граничными условиями

$$u(0, y) = \cos(y), u(1, y) = \cos(y)/e, u(x, 0) = \exp(-x), u(x, \pi/2) = 0. \quad (16)$$

Точное решение $\exp(-x) \cos(y)$.

Стандартная схема по перемещаемым узлам даёт следующий результат:

$$U(x, y) = \frac{y(\pi/2 - y)(x/e + 1 - x) \cos(y) + 2/\pi x(1 - x)(\pi/2 - y) \exp(-x)}{x(1 - x) + y(\pi/2 - y)}. \quad (17)$$

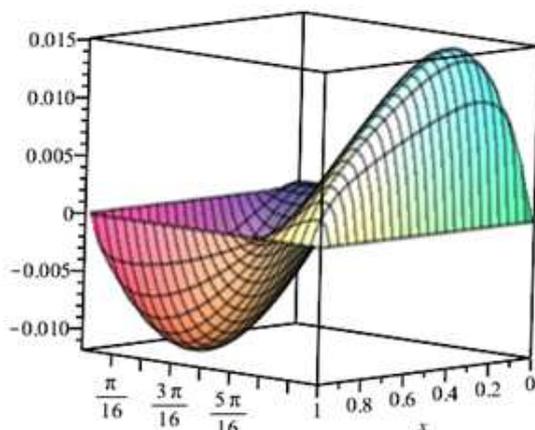
Результаты вычисления по формуле (17) следующие

$$U_2(x, y) = C_1 \exp(\sqrt{A}y) + C_2 \exp(-\sqrt{A}y) + B \cos(y). \quad (18)$$

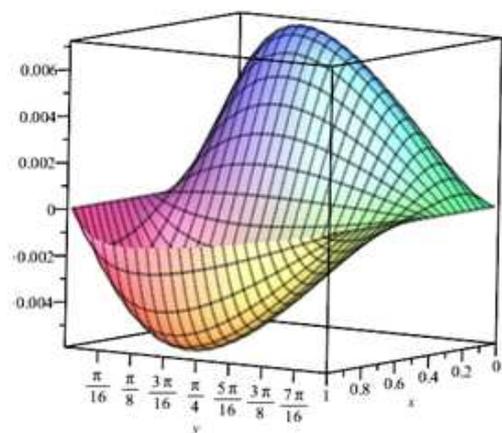
Здесь введены обозначения

$$A = \frac{2}{x(1-x)}, B = \frac{2(e^{-1}x + 1 - x)}{-x^2 + x + 2},$$

$$C_1 = \frac{\exp(-\sqrt{A}\pi/2)(B - \exp(-x))}{\exp(\sqrt{A}\pi/2) - \exp(-\sqrt{A}\pi/2)}, C_2 = \exp(-x) - C_1 - B.$$



а) график разности по формуле (10)



б) график разности по формуле (17)

Рис. 5 Графики разности точных и приближённых решений

На рис.5 приведены графики разности точного и приближённого решения полученных по формулам (17) и (18), которые показывают улучшения решения почти в два раза.

Среднеквадратичные ошибки по стандартной и улучшенной схемах составляют соответственно 0,00581 и 0,00382. Среднеквадратичные ошибки вычислены по формуле

$$Er = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M (u_{ij} - U_{ij})^2}{NM}}$$

при $N = 10$ и $M = 10$, причем $u_{ij} = u(x_i, y_j)$.

5 Заключение

Простота применения метода перемещаемых узлов позволяет легко получить приближённо-аналитическое решение для задач Дирихле. Частичная аппроксимация, полученная во втором и третьих методах, даёт лучшее приближение к точному решению. Однако, в этом случае, задача сводится к решению краевой задачи ОДУ. Основным достоинством первого метода (стандартного метода перемещаемых узлов) является простота его использования.

Литература

- [1] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 2004.
- [2] Араманович И.Г., Левин В.И. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1964. – 162 с.
- [3] Мартинсон Л.К., Малов Ю.И. Дифференциальные уравнения математической физики. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. – 368 с.
- [4] Князев С.В. Численное решение уравнений Пуассона и Гельмгольца с помощью метода точечных источников // Известия высших учебных заведений. Электромеханика. – 2007. – № 2. – С. 77-78.
- [5] Князев С.В., Щербакова Е.А. Решение граничных задач математической физики методом точечных источников поля // Известия высших учебных заведений. Электромеханика. – 2007. – № 3. – С. 11-15.
- [6] Михлин С.Г. Вариационные методы решения задач математической физики // Успехи математических наук. – 1950. – Т. 5, № 5. – С. 3-51.
- [7] Далабаев У.М. Применение метода перемещаемых узлов к исследованию монотонности разностной схемы и его улучшение для одномерной конвективно-диффузионной задачи // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2019. – Т. 6. – С. 44-52. – <https://elibrary.ru/item.asp?id=45847072>.
- [8] Rasulov A.M., Dalabaev U.M. Computational technology for improving the quality of difference schemes based on moving nodes // Journal of Physics: Conference Series. – 2021. – doi: <http://dx.doi.org/10.1088/1742-6596/1860/1/012026>.
- [9] Dalabaev U.M., Hasanova D.A. Construction of an approximate-analytical solution for boundary value problems of a parabolic equation // Mathematics and Computer Science. – 2023. – Vol. 2, Issue 8. – P. 39-45.
- [10] Dalabaev U.M., Hasanova D.A. Engineering method for calculating fluid flow in pipes with different cross sections in energy and technological processes // E3S Web of Conferences. – 2023. – doi: <http://dx.doi.org/10.1051/e3sconf/202337103021>.
- [11] Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1977.
- [12] Зияжулова Ш.Н. Об оптимальных итерационных и прямых методах решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2025. – № 6.

- [13] *Масаева О.В.* Задача Дирихле в четверти плоскости для обобщённого уравнения Лапласа // Прикладная математика и физика. – 2024. – Т. 56, №2. – С. 114-123. – doi: <http://dx.doi.org/10.52575/2687-0959-2024-56-2-114-123>.
- [14] *Галабурдин А.В.* Применение нейронных сетей для решения задачи Дирихле в области сложной формы // Computational Mathematics and Information Technologies. – 2024. – doi: <http://dx.doi.org/10.23947/2587-8999-2024-8-2-68-79>.
- [15] *Aslanov H., Hatamova R.* On well-defined solvability of the Dirichlet problem for a second-order elliptic partial operator-differential equation in Hilbert space // Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics. – 2022. – Vol. 48, № 1. – P. 63-76. – doi: <http://dx.doi.org/10.30546/2409-4994.48.1.2022.63>.
- [16] *Semisalov B.* On an approach to the numerical solution of Dirichlet problems of arbitrary dimensions // Numerical Analysis and Applications. – 2022. – Vol. 15. – P. 63-78.
- [17] *Hamdi S. et al.* Method of lines // Scholarpedia. – 2009. – Vol. 4, № 7.

UDC 519.632

SOLUTION OF THE DIRICHLET PROBLEM BY THE MOVING NODE METHOD

^{1*}*Dalabaev U.* ^{1,2}*Khasanova D.*

*udalabaev@mail.ru

¹University of World Economy and Diplomacy,

54 Mustakillik Ave., Tashkent, 100007 Uzbekistan;

²National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek,

4, University street, Tashkent, 100174 Uzbekistan.

The method of displaced nodes is applied when solving the Dirichlet problem for the Poisson equation in a rectangular domain. By approximating the Laplace operator using moving nodes, we obtain an approximate analytical solution to the Dirichlet problem, i.e., a solution expressed as a combination of analytic functions. Further improvement of accuracy is achieved by applying the method of lines. Within this approach, spatial variables are discretized using the moving nodes method, resulting in the original boundary value problem for the Poisson equation in a two-dimensional domain being transformed into an ordinary differential equation (ODE) - a two-point boundary value problem where the independent variable becomes one of the coordinates (e.g., y), and for another coordinate (x). Each of the obtained ODEs describes the behavior of the solution along a line parallel to one of the axes and contains boundary conditions given on the opposite sides of the rectangular domain. Thus, the combination of the method of displaced nodes with the method of lines allows us to move from a two-dimensional problem to a one-dimensional one. To verify the effectiveness of the proposed approach, test problems with analytically given solutions were considered. The results confirm that the proposed approach ensures increased solution accuracy.

Keywords: movable node, Poisson equation, Dirichlet problem, method of lines.

Citation: Dalabaev U. Khasanova D. 2026. Solution of the Dirichlet problem by the moving node method. *Problems of Computational and Applied Mathematics*. 1(71): 103-112.

DOI: https://doi.org/10.71310/pcam.1_71.2026.09

HISOBLASH VA AMALIY МАТЕМАТИКА MUAMMOLARI

ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ
И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
PROBLEMS OF COMPUTATIONAL
AND APPLIED MATHEMATICS



ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

№ 1(71) 2026

Журнал основан в 2015 году.

Издается 6 раз в год.

Учредитель:

Научно-исследовательский институт развития цифровых технологий и
искусственного интеллекта.

Главный редактор:

Равшанов Н.

Заместители главного редактора:

Арипов М.М., Шадиметов Х.М., Ахмедов Д.Д.

Ответственный секретарь:

Убайдуллаев М.Ш.

Редакционный совет:

Азамов А.А., Алоев Р.Д., Амиргалиев Е.Н. (Казахстан), Арушанов М.Л.,
Бурнашев В.Ф., Джумаёзов У.З., Загребина С.А. (Россия), Задорин А.И. (Россия),
Игнатъев Н.А., Ильин В.П. (Россия), Иманкулов Т.С. (Казахстан),
Исмагилов И.И. (Россия), Кабанихин С.И. (Россия), Карачик В.В. (Россия),
Курбонов Н.М., Маматов Н.С., Мирзаев Н.М., Мухамадиев А.Ш., Назирова Э.Ш.,
Нормуродов Ч.Б., Нуралиев Ф.М., Опанасенко В.Н. (Украина),
Расулмухамедов М.М., Садуллаева Ш.А., Старовойтов В.В. (Беларусь),
Хаётов А.Р., Халджигитов А., Хамдамов Р.Х., Хужаев И.К., Хужаеров Б.Х.,
Эшмаматова Д.Б., Дустмуродова Ш.Ж., Чье Ен Ун (Россия),
Шабозов М.Ш. (Таджикистан), Dimov I. (Болгария), Li Y. (США),
Mascagni M. (США), Min A. (Германия), Singh M. (Южная Корея).

Журнал зарегистрирован в Агентстве информации и массовых коммуникаций при
Администрации Президента Республики Узбекистан.

Свидетельство №0856 от 5 августа 2015 года.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

При перепечатке материалов ссылка на журнал обязательна.

За точность фактов и достоверность информации ответственность несут авторы.

Адрес редакции:

100125, г. Ташкент, м-в. Буз-2, 17А.

Тел.: +(998) 71 263-41-98.

Э-почта: journals@airi.uz.

Веб-сайт: <https://journals.airi.uz>.

Дизайн и вёрстка:

Шарипов Х.Д.

Отпечатано в типографии НИИ РЦТИИ.

Подписано в печать 25.02.2026 г.

Формат 60x84 1/8. Заказ №1. Тираж 100 экз.

PROBLEMS OF COMPUTATIONAL AND APPLIED MATHEMATICS

No. 1(71) 2026

The journal was established in 2015.
6 issues are published per year.

Founder:

Digital Technologies and Artificial Intelligence Development Research Institute.

Editor-in-Chief:

Ravshanov N.

Deputy Editors:

Aripov M.M., Shadimetov Kh.M., Akhmedov D.D.

Executive Secretary:

Ubaydullaev M.Sh.

Editorial Council:

Azamov A.A., Alov R.D., Amirgaliev E.N. (Kazakhstan), Arushanov M.L.,
Burnashev V.F., Djumayozov U.Z., Zagrebina S.A. (Russia), Zadorin A.I. (Russia),
Ignatiev N.A., Ilyin V.P. (Russia), Imankulov T.S. (Kazakhstan), Ismagilov I.I. (Russia),
Kabanikhin S.I. (Russia), Karachik V.V. (Russia), Kurbonov N.M., Mamatov N.S.,
Mirzaev N.M., Mukhamadiev A.Sh., Nazirova E.Sh., Normurodov Ch.B., Nuraliev F.M.,
Opanasenko V.N. (Ukraine), Sadullaeva Sh.A., Starovoitov V.V. (Belarus),
Khayotov A.R., Khaldjigitov A., Khamdamov R.Kh., Khujaev I.K., Khujayorov B.Kh.,
Eshmamatova D.B., Dustmurodova Sh.J., Chye En Un (Russia),
Shabozov M.Sh. (Tajikistan), Dimov I. (Bulgaria), Li Y. (USA), Mascagni M. (USA),
Min A. (Germany), Singh M. (South Korea).

The journal is registered by Agency of Information and Mass Communications under the
Administration of the President of the Republic of Uzbekistan.

Certificate of Registration No. 0856 of 5 August 2015.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

At a reprint of materials the reference to the journal is obligatory.
Authors are responsible for the accuracy of the facts and reliability of the information.

Address:

100125, Tashkent, Buz-2, 17A.

Tel.: +(998) 71 263-41-98.

E-mail: journals@airi.uz.

Web-site: <https://journals.airi.uz>.

Layout design:

Sharipov Kh.D.

DTAIRI printing office.

Signed for print 25.02.2026

Format 60x84 1/8. Order No. 1. Print run of 100 copies.

Содержание

<i>Равшанов Н., Насруллаев П., Боборахимов Б.</i> Математическое моделирование рассеивания вредных веществ, выбрасываемых в атмосферу в условиях сложной городской среды	5
<i>Яхшибаев Д.С.</i> Возникновение явления упругого возврата при нестационарном течении реологически сложной жидкости в плоском канале в рамках модели Oldroyd-B	16
<i>Равшанов Н., Боборахимов Б.И., Бердиёров Ш.Ш.</i> Численное моделирование процессов фильтрации и транспорта в цилиндрическом пористом фильтре с использованием метода конечных объемов	28
<i>Зарипова А.Р.</i> Свойства решений систем уравнений теплопроводности, связанных с нелинейными граничными условиями	43
<i>Курбонов Н., Боборахимов Б., Хажназарова Д., Муродуллаев Б.</i> Моделирование процесса геофильтрации и анализ движения воды на орошаемых земельных участках	57
<i>Джумаёзов У.З., Рахмонова Р.А., Абдирахмонова М.Н.</i> Численное моделирование плоских упругопластических задач в деформациях	71
<i>Мухсинов Е.М., Хакимов Р.И.</i> О разрешимости задачи преследования для дифференциальных игр с дробными производными Хильфера	82
<i>Азамов С.С., Бекмуродова Д.Б.</i> Нахождение экстремальной функции функционала погрешности в пространстве периодических функций	94
<i>Далабаев У. Хасанова Д.</i> Решение задачи Дирихле методом перемещаемого узла	103
<i>Муродов С.К.</i> Численное моделирование краевой задачи для двухпараметрического сингулярно возмущённого дифференциального уравнения с использованием спектрально-сеточного метода	113
<i>Адылова Ф.Т., Давронов Р.Р.</i> Генерации графов заданной структуры: от глубоких нейронных сетей к квантовым моделям (на примере создания новых лекарств)	123

Contents

<i>Ravshanov N., Nasrullaev P., Boborakhimov B.</i> Mathematical modeling of the dispersion of harmful substances released into the atmosphere in complex urban environments	5
<i>Yakhshibaev D.S.</i> The occurrence of the phenomenon of elastic return during unsteady flow of a rheologically complex fluid in a flat channel within the Oldroyd-B model	16
<i>Ravshanov N., Boborakhimov B.I., Berdiyev Sh.Sh.</i> Numerical modeling of filtration and transport processes in a cylindrical porous filter using the finite volume method	28
<i>Zaripova A.R.</i> Properties of solutions to systems of heat conduction equations with nonlinear boundary conditions	43
<i>Kurbonov N., Boborakhimov B., Khaknazarova D., Murodullaev B.</i> Numerical modeling of the geofiltration process on irrigated lands taking into account physical factors	57
<i>Djumayozov U.Z., Rakhmonova R.A., Abdirakhmonova M.N.</i> Numerical Modeling of Plane Elastoplastic Problems in Strains	71
<i>Mukhsinov E.M., Hakimov R.I.</i> On the solvability of the pursuit problem for differential games with fractional Hilfer derivatives	82
<i>Azamov S.S., Bekmurodova D.B.</i> Finding the extremum of the error functional in the space of periodic functions	94
<i>Dalabaev U. Khasanova D.</i> Solution of the Dirichlet problem by the moving node method	103
<i>Murodov S.K.</i> Numerical modeling of the boundary value problem for a two-parameter singularly perturbed differential equation using the spectral-grid method	113
<i>Adilova F.T., Davronov R.R.</i> Graph generation with a prescribed structure: from deep neural networks to quantum models (a case study of novel drug design)	123