УДК 519.62

НАХОЖДЕНИЕ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ ФУНКЦИОНАЛА ПОГРЕШНОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

[*] Азамов С.С., Бекмуродова Д.Б.

[*]azamovs@mail.ru

Ташкентский государственный транспортный университет,

1000167, Узбекистан, Ташкент, ул. Темирйулчилар 1.

Задача построения оптимальных квадратурных формул для приближенного вычисления определенных интегралов и приближения функций является одной из важных задач вычислительной математики. Этими задачами занимались многие математики, и существует несколько методов построения оптимальных квадратурных формул. Одним из таких методов является метод, предложенный С.Л. Соболевым, с понятием экстремальной функции функционала погрешности. Данная статья посвящена нахождению основных элементов, необходимых для процесса построения оптимальной квадратурной формулы для действительных периодических функций в гильбертовом пространстве. Рассматриваемая квадратурная формула выражается в виде нормы функционала погрешности и используется для определения верхней границы погрешности. В свою очередь, для нахождения вида нормы функционала погрешности нам понадобится экстремальная функция, соответствующая функционалу погрешности. Данная работа направлена на нахождение экстремальной функции функционала погрешности.

Ключевые слова: пространство, экстремальная функция, обобщенная функция, оптимальная квадратурная формула, функционал погрешности.

Цитирование: *Азамов С.С., Бекмуродова Д.Б.* Нахождение экстремальной функции функционала погрешности в пространстве периодических функций // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2026. – № 1(71). – С. 94-102.

DOI: https://doi.org/10.71310/pcam.1_71.2026.08

1 Введение и постановка задачи

Многие процессы, встречающиеся в технике, сводятся к вычислению определённых интегралов. В большинстве случаев вычислить такие интегралы аналитическими методами невозможно. В данной работе излагаются некоторые основные понятия, необходимые для приближённого вычисления определённых интегралов на некотором классе периодических функций. Понятие периодической функции является одним из важнейших понятий математики.

К понятию периодичности функций приводят периодические процессы со стабильным состоянием определённых переменных. Такие процессы человек наблюдает в природе и технике.

Приведём некоторые формулы и утверждения, которыми следует пользоваться при выяснении вопроса о периодичности функции и определении её периода.

Функцию $\varphi(x)$, определённую хотя бы в одной точке, называют периодической, если существует такое число $T \neq 0$, называемое периодом, что для любого x из области определения этой функции числа $x+T$ и $x-T$ также принадлежат её области определения и выполняется равенство

$$\varphi(x-T)=\varphi(x+T)=\varphi(x).$$

Наименьшее из положительных чисел T называют основным периодом. Часто основной период функции называют просто её периодом. Область определения периодической функции является неограниченной как в положительном, так и в отрицательном направлениях оси Ox. При этом значения функции повторяются через каждые T единиц.

Если функция $\varphi(x)$ периодична с периодом T, то при любом целом n справедливо равенство $\varphi(x+nT)=\varphi(x)$. Если $T_1>0$ — период функции $\varphi_1(x)$, $T_2>0$ — период функции $\varphi_2(x)$, причём T_1 и T_2 соизмеримы и существуют значения x, принадлежащие одновременно областям определения φ_1 и φ_2, то функция $\varphi(x)=\varphi_1(x)+\varphi_2(x)$ является периодической и имеет период T, равный общему кратному (в том числе наименьшему) периодов T_1 и T_2.

Существует множество методов приближённого вычисления определённого интеграла. Мы воспользуемся вариационным методом. Требуется найти разность между значением определённого интеграла и соответствующей квадратурной суммой в пространстве $\widetilde{S_2(P_m)}$, а также минимальное значение нормы функционала погрешности для оценки этой разности. Для этого необходимо найти экстремальную функцию, соответствующую функционалу погрешности.

$S_2(P_m)$ — гильбертово пространство действительнозначных функций, которое определяется следующим образом: $S_2(P_m)=\{\varphi:(0,1]\to\mathbb{R}\,|\,\varphi^{(\alpha)}$ абсолютно непрерывна $\alpha=\overline{0,m-1}$, и $\varphi^{(m)}\in L_2(0,1)\}$.

Норма функции в этом пространстве определяется в виде

$$\|\varphi\mid S_2(P_m)\|=\left(\int\limits_0^1\left(\varphi^{(m)}(x)+2\varphi^{(m-1)}(x)+\varphi^{(m-2)}(x)\right)^2dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Подпространство пространства $S_2(P_m)$, состоящее из действительнозначных периодических функций, обозначим как $\widetilde{S_2(P_m)}$.

В данной статье рассматриваются периодические действительнозначные функции из гильбертова пространства $\widetilde{S_2(P_m)}$ для любого m.

Для функций с периодом, равным единице, для каждого $x\in\mathbb{R}$ и $\beta\in\mathbb{Z}$ из пространства $\widetilde{S_2(P_m)}$ справедливо условие $\varphi(x+\beta)=\varphi(x)$.

Для определения нормы функционала погрешности необходимо найти функцию, при которой функционал достигает наибольшего значения, то есть экстремальную функцию. Другими словами, требуется решить следующую задачу.

Задача: найти функцию $\psi(x)$, удовлетворяющую равенству

$$|(\ell,\psi)|=\|\ell\|_{\widetilde{S_2(P_m)}^*}\|\psi\|_{\widetilde{S_2(P_m)}}. \tag{1}$$

В различных гильбертовых пространствах эти задачи исследованы в работах [1]-[4], [7]- [14].

Здесь мы будем использовать экстремальную функцию данного функционала.

2 Экстремальная функция функционала погрешности

Для решения задачи, то есть для нахождения представления нормы заданного функционала погрешности ℓ, воспользуемся понятием экстремальной функции, соответствующей этому функционалу.

Скалярное произведение двух функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ в пространстве $\widetilde{S_2(P_m)}$ определяется следующим образом:

$$(\varphi(x), \psi(x))_{\widetilde{S_2(P_m)}} =$$

$$= \int_0^1 \left(\varphi^{(m)}(x) + 2\varphi^{(m-1)}(x) + \varphi^{(m-2)}(x)\right)\left(\psi^{(m)}(x) + 2\psi^{(m-1)}(x) + \psi^{(m-2)}(x)\right) dx.$$

Рассмотрим следующую квадратурную формулу:

$$\int_0^1 \varphi(x)\,dx \cong \sum_{k=1}^{N} C_k\,\varphi(hk), \tag{2}$$

где C_k — коэффициенты квадратурной формулы, $h = \frac{1}{N}$, $N \in \mathbb{N}$ и $\varphi \in \widetilde{S_2(P_m)}$. Погрешность квадратурной формулы имеет вид

$$(\ell, \varphi) = \int_0^1 \varphi(x)\,dx - \sum_{k=1}^{N} C_k\,\varphi(hk). \tag{3}$$

Общий вид функционала погрешности $\ell(x)$ выглядит следующим образом:

$$\ell(x) = \left(\varepsilon_{(0,1]}(x) - \sum_{k=1}^{N} C_k \delta(x - hk)\right) * \varphi_0(x), \tag{4}$$

где $\varepsilon_{(0,1]}(x)$ — характеристическая функция интервала $(0,1]$, δ — дельта-функция Дирака, $\varphi_0(x) = \sum\limits_{\beta=-\infty}^{\infty} \delta(x-\beta)$.

По неравенству Коши—Шварца абсолютная погрешность (3) оценивается следующим образом:

$$|(\ell, \varphi)| \leqslant \|\varphi\|_{\widetilde{S_2(P_m)}}\, \|\ell\|_{\widetilde{S_2(P_m)}^*}. \tag{5}$$

Используя теорему Рисса об общем виде линейных непрерывных функционалов в гильбертовых пространствах, определим экстремальную функцию функционала (4).

На основании теоремы Рисса для любого линейного непрерывного функционала $\ell \in (\widetilde{S_2(P_m)})^*$ существует единственный элемент $\psi \in \widetilde{S_2(P_m)}$ такой, что для любого $\varphi \in \widetilde{S_2(P_m)}$ выполняется равенство

$$(\ell, \varphi) = \langle \varphi, \psi \rangle_{\widetilde{S_2(P_m)}}, \tag{6}$$

$$\|\ell\|_{(\widetilde{S_2(P_m)})^*} = \|\psi\|_{\widetilde{S_2(P_m)}}. \tag{7}$$

Элемент $\psi(x)$, удовлетворяющий этим равенствам, называется элементом Рисса, или экстремальной функцией.

Учитывая периодичность функций и интегрируя правую часть равенства (6) m раз, получим уравнение

$$\ell(x) = (-1)^m \left(\psi^{(2m)}(x) - 2\psi^{(2m-2)}(x) + \psi^{(2m-4)}(x)\right). \tag{8}$$

На основании (8) сформулируем теорему.

Теорема 1. Решение уравнения (8) является экстремальной функцией функционала погрешности и имеет вид

$$\psi(x) = d_0 - \sum_{k=1}^{N} C_k\, G_m(x - hk), \tag{9}$$

где

$$G_m(x) = \sum_{\beta=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i\beta x}}{(-1)^m(2\pi i\beta)^{2(m-1)}\left((2\pi i\beta)^2 - 1\right)^2}. \tag{10}$$

Доказательство. Прежде чем доказать теорему, рассмотрим случаи $m = 2$ и $m = 3$. Интегрируя скалярное произведение $\langle\psi, \varphi\rangle$ при $m = 2$, получим:

$$(\varphi(x), \psi(x)) = \int_0^1 \Big(\varphi^{''}(x) + 2\varphi^{'}(x) + \varphi(x)\Big)\Big(\psi^{''}(x) + 2\psi^{'}(x) + \psi(x)\Big)\,dx =$$

$$= \int_0^1 \varphi^{''}(x)\Big(\psi^{''}(x) + 2\psi^{'}(x) + \psi(x)\Big)\,dx + 2\int_0^1 \varphi^{'}(x)\Big(\psi^{''}(x) + 2\psi^{'}(x) + \psi(x)\Big)\,dx +$$

$$+ \int_0^1 \varphi(x)\Big(\psi^{''}(x) + 2\psi^{'}(x) + \psi(x)\Big)\,dx = \varphi^{'}(x)\Big(\psi^{''}(x) + 2\psi^{'}(x) + \psi(x)\Big)\,|_0^1 +$$

$$+\varphi(x)\Big(-\psi^{'''}(x) + 3\psi^{''}(x) + 2\psi(x)\Big)\,|_0^1 + \int_0^1 \varphi(x)\left(\psi^{(4)}(x) - 2\psi^{(2)}(x) + \psi(x)\right)dx,$$

если

$$\varphi^{'}(x)\Big(\psi^{''}(x) + 2\psi^{'}(x) + \psi(x)\Big)\,|_{x=0}^{x=1} +$$
$$+\varphi(x)\Big(-\psi^{'''}(x) + 3\psi^{''}(x) + 2\psi(x)\Big)\,|_{x=0}^{x=1} = 0. \tag{11}$$

Из равенств (11) и (6) следует, следующее

$$(\ell, \varphi) = (\varphi, \psi) = \int_0^1 \varphi(x)\left(\psi^{(4)}(x) - 2\psi^{(2)}(x) + \psi(x)\right)dx. \tag{12}$$

Из равенства (12) мы получим $\ell(x) = \psi^4(x) - 2\psi^2(x) + \psi(x)$.

Для $m = 3$

$$(\varphi, \psi) = \int_0^1 \Big(\varphi^{'''}(x) + 2\varphi^{''}(x) + \varphi^{'}(x)\Big)\Big(\psi^{'''}(x) + 2\psi^{''}(x) + \psi^{'}(x)\Big)\,dx.$$

Интегрируя скалярное произведение, как в предыдущем случае для $m = 2$ мы получим функционал погрешности для этого случая $\ell(x)$.

$$\ell(x) = (-1)^3\left(\psi^{(6)}(x) - 2\psi^{(4)}(x) + \psi^{(2)}(x)\right). \tag{13}$$

Теперь обобщим приведенные выше последовательности. Для общего m

$$(\varphi(x), \psi(x))_{\widetilde{S_2(P_m)}} =$$

$$= \int_0^1 \left(\varphi^{(m)}(x) + 2\varphi^{(m-1)}(x) + \varphi^{(m-2)}(x)\right)\left(\psi^{(m)}(x) + 2\psi^{(m-1)}(x) + \psi^{(m-2)}(x)\right)dx, \quad (14)$$

правую часть равенства (14) интегрируя по m, получаем следующее равенство

$$(\ell, \varphi) = (\varphi, \psi) = \int_0^1 \varphi(x)\left(\psi^{(2m)}(x) - 2\psi^{(2m-2)}(x) + \psi^{(2m-4)}(x)\right)dx, \quad (15)$$

на основе равенств (15) и (6) получаем равенсиво

$$\ell(x) = (-1)^m \left(\psi^{(2m)}(x) - 2\psi^{(2m-2)}(x) + \psi^{(2m-4)}(x)\right). \quad (16)$$

Затем для нахождения решения уравнения (16) будем использовать преобразование Фурье. При этом будем использовать следующие свойства преобразований Фурье [5]- [6].

$$F[\varphi] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\ e^{2\pi ipx}dx,$$

$$F^{-1}[\varphi] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(p)\ e^{-2\pi ipx}dx,$$

$$F\left[\varphi^{(\alpha)}\right] = (-2\pi ip)^{\alpha} F[\varphi], \quad \alpha \in \mathbb{N},$$

$$F[\varphi \cdot g] = F[\varphi] * F[g],$$
$$F[\varphi * g] = F[\varphi] \cdot F[g],$$

$$F[\varphi_0(x)] = \varphi_0(p),$$

$$F^{-1}[F[\varphi(x)]] = \varphi(x).$$

Выполним преобразование Фурье для правой и левой частей равенства (16)

$$F\left[(-1)^m \left(\psi^{(2m)}(x) - 2\psi^{(2m-2)}(x) + \psi^{(2m-4)}(x)\right)\right] = F[\ell(x)].$$

Используя свойства преобразования Фурье и равенство (4), получим

$$(-1)^m (2\pi ip)^{2m-4}\left((2\pi ip)^2 - 1\right)^2 F[\psi] =$$
$$= F\left[\left(\varepsilon_{(0,1]}(x) - \sum_{k=1}^{N} C_k\, \delta(x - hk)\right) * \varphi_0(x)\right]$$

и

$$(-1)^m (2\pi ip)^{2m-4}\left((2\pi ip)^2 - 1\right)^2 F[\psi] =$$

$$= F\left[\varepsilon_{(0,1]}(x) - \sum_{k=1}^{N} C_k\, \delta(x-hk)\right] * F[\varphi_0(x)], \tag{17}$$

где

$$F[\delta(x-hk)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-hk)\; e^{2\pi ipx} dx = e^{2\pi iphk}. \tag{18}$$

Используя (17), (18) и свойства преобразований Фурье мы находим выражение $F[\psi(x)]$

$$F[\psi(x)] = \frac{F\left[\varepsilon_{(0,1]}(x)\right] - \sum\limits_{k=1}^{N} C_k\, e^{2\pi iphk}}{(-1)^m (2\pi ip)^{2m-4}\left((2\pi ip)^2-1\right)^2} \cdot \varphi_0(p) + d_0 \;=$$

$$= \frac{F\left[\varepsilon_{(0,1]}(x)\right]\cdot\varphi_0(p)}{(-1)^m (2\pi ip)^{2(m-2)}\left((2\pi ip)^2-1\right)^2} - \sum_{k=1}^{N} C_k \frac{e^{2\pi iphk}\cdot\varphi_0(p)}{(-1)^m (2\pi ip)^{2m-4}\left((2\pi ip)^2-1\right)^2} + d_0 \;=$$

$$= \frac{F\left[\varepsilon_{(0,1]}(x)\right]\cdot \sum\limits_{\beta=-\infty}^{\infty}\delta(p-\beta)}{(-1)^m (2\pi ip)^{2m-4}\left((2\pi ip)^2-1\right)^2} - \sum_{k=1}^{N} C_k \frac{e^{2\pi iphk}\cdot \sum\limits_{\beta=-\infty}^{\infty}\delta(p-\beta)}{(-1)^m (2\pi ip)^{2m-4}\left((2\pi ip)^2-1\right)^2} + d_0\,.$$

Используя свойство дельта-функции $f(x)\,\delta(x-b) = f(b)\,\delta(x-b)$, мы можем записать следующее выражение

$$F[\psi(x)] = F\left[\varepsilon_{(0,1]}(x)\right]\cdot \sum_{\beta=-\infty}^{\infty} \frac{\sum\limits_{\beta=-\infty}^{\infty}\delta(p-\beta)}{(-1)^m (2\pi i\beta)^{2m-4}\left((2\pi i\beta)^2-1\right)^2} -$$

$$- \sum_{k=1}^{N} C_k \sum_{\beta=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi iphk}\cdot\delta(p-\beta)}{(-1)^m (2\pi i\beta)^{2m-4}\left((2\pi i\beta)^2-1\right)^2} + d_0.$$

Чтобы определить вид экстремальной функции, применим обратное преобразование Фурье к обеим частям приведенного выше уравнения

$$F^{-1}[F[\psi(x)]] = F^{-1}\left[F\left[\varepsilon_{(0,1]}(x)\right]\cdot \sum_{\beta=-\infty}^{\infty} \frac{\sum\limits_{\beta=-\infty}^{\infty}\delta(p-\beta)}{(-1)^m (2\pi i\beta)^{2m-4}\left((2\pi i\beta)^2-1\right)^2}\right] -$$

$$- \sum_{k=1}^{N} C_k \sum_{\beta=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi iphk}\cdot F^{-1}[\delta(p-\beta)]}{(-1)^m (2\pi i\beta)^{2m-4}\left((2\pi i\beta)^2-1\right)^2} + F^{-1}[d_0]\,,$$

где

$$F^{-1}[\delta(p-\beta)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(p-\beta)\cdot\, e^{-2\pi ipx} = e^{-2\pi i\beta x}.$$

В результате применения обратных преобразований Фурье получаем следующее равенство.

$$\psi\left(x\right)=\varepsilon_{(0,1]}\left(x\right)*\sum_{\beta=-\infty}^{\infty}\frac{e^{-2\pi i\beta x}}{(-1)^{m}(2\pi i\beta)^{2m-4}\left((2\pi i\beta)^{2}-1\right)^{2}}-$$

$$-\sum_{k=1}^{N}C_{k}\sum_{\beta=-\infty}^{\infty}\frac{e^{2\pi i\beta hk}\cdot e^{-2\pi i\beta x}}{(-1)^{m}(2\pi i\beta)^{2m-4}\left((2\pi i\beta)^{2}-1\right)^{2}}+d_{0}. \tag{19}$$

Внеся некоторые изменения в равенство (19), мы можем записать его в следующем виде:

$$\psi\left(x\right)=\varepsilon_{(0,1]}\left(x\right)*\sum_{\beta\neq 0}\frac{e^{-2\pi i\beta x}}{(2\pi\beta)^{2m-4}\left((2\pi\beta)^{2}+1\right)^{2}}-$$

$$-\sum_{k=1}^{N}C_{k}\sum_{\beta\neq 0}\frac{e^{2\pi i\beta hk}\cdot e^{-2\pi i\beta x}}{(2\pi\beta)^{2m-4}\left((2\pi\beta)^{2}+1\right)^{2}}+d_{0}. \tag{20}$$

Теперь упростим равенство (20)

$$\psi\left(x\right)=\varepsilon_{(0,1]}\left(x\right)*\sum_{\beta\neq 0}\frac{e^{-2\pi i\beta x}}{(2\pi\beta)^{2m-4}\left((2\pi\beta)^{2}+1\right)^{2}}-$$

$$-\sum_{k=1}^{N}C_{k}\sum_{\beta\neq 0}\frac{e^{2\pi i\beta hk}\cdot e^{-2\pi i\beta x}}{(2\pi\beta)^{2m-4}\left((2\pi\beta)^{2}+1\right)^{2}}+d_{0}=$$

$$=\varepsilon_{(0,1]}\left(x\right)*G_{m}\left(x\right)-\sum_{k=1}^{N}C_{k}\,G_{m}\left(x-hk\right)=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\varepsilon_{(0,1]}\left(y\right)*G_{m}\left(x-y\right)dy-\sum_{k=1}^{N}C_{k}\,G_{m}\left(x-hk\right)+d_{0}=$$

$$=\int_{0}^{1}G_{m}\left(x-y\right)dy-\sum_{k=1}^{N}C_{k}\,G_{m}\left(x-hk\right)+d_{0}\,.$$

Результаты расчетов привели к следующему

$$\int_{0}^{1}G_{m}\left(x-y\right)dy=0.$$

Используя приведенный выше результат, получим вид экстремальной функции

$$\psi\left(x\right)=d_{0}-\sum_{k=1}^{N}C_{k}\,G_{m}\left(x-hk\right). \tag{21}$$

Здесь вид $G_m\left(x\right)$ определяется выражением (10). Таким образом, из равенства (21) теорема доказана.

3 Заключение

Из теории квадратурных формул известно, что важно найти верхнюю границу погрешности квадратурной формулы. Для этого из неравенства Коши—Шварца следует: чтобы получить точную верхнюю границу абсолютного значения погрешности рассматриваемой квадратурной формулы, необходимо найти норму функционала погрешности. Для вычисления нормы функционала погрешности находят его экстремальную функцию. В работе получена экстремальная функция, что позволяет вычислить норму функционала погрешности.

Литература

[1] *Соболев С.Л.* Введение в теорию кубатурных формул. – М.: Наука, 1974. – 808 с.

[2] *Шадиметов Х.М.* Оптимальные квадратурные формулы в $L_2^{(m)}(\Omega)$ и $L_2^{(m)}(\mathbb{R}^1)$ // Докл. АН РУз. – 1983. – № 3. – С. 5-8.

[3] *Шадиметов Х.М.* Построение весовых оптимальных квадратурных формул в пространстве $L_2^{(m)}(0, N)$ // Сиб. журн. вычисл. математики. – 2002. – Т. 5, № 3. – С. 275-293.

[4] *Shadimetov Kh.M., Hayotov A.R.* Optimal quadrature formulas in the sense of Sard in $W_2^{(m,m-1)}$ space // Calcolo. – 2014. – Vol. 51. – P. 211-243. – doi: `http://dx.doi.org/10.1007/s10092-013-0093-7`.

[5] *Владимиров В.С.* Обобщенные функции в математической физике. – М.: Наука, 1979. – 318 с.

[6] *Соболев С.Л., Васкевич В.Л.* Кубатурные формулы. – Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 1996. – 484 с.

[7] *Azamov S.S.* An optimal quadrature formula in $K_2(P_3)$ space // AIP Conference Proceedings. – 2021. – Vol. 2365. – doi: `http://dx.doi.org/10.1063/5.0056830`.

[8] *Shadimetov Kh.M., Hayotov A.R., Azamov S.S.* Optimal quadrature formula in $K_2(P_2)$ space // Applied Numerical Mathematics. – 2012. – Vol. 62. – P. 1893-1909. – doi: `http://dx.doi.org/10.1016/j.apnum.2012.08.002`.

[9] *Azamov S.S.* On the extremal function of one optimal quadrature formula // Problems of Computational and Applied Mathematics. – 2022. – № 5/1(44). – P. 23-33.

[10] *Shadimetov Kh.M., Azamov S.S., Kobilov H.M.* Optimization of Approximate Integration Formulas for Periodic Function Classes // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2025. – С. 116-124.

[11] *Shadimetov Kh., Hayotov A., Khayriev U.* Optimal quadrature formulas for approximating strongly oscillating integrals in the Hilbert space $W_2^{(m,m-1)}$ of periodic functions // J. Comput. Appl. Math.. – 2025. – Vol. 453. – Art. no. 116133. – doi: `http://dx.doi.org/10.1016/j.cam.2024.116133`.

[12] *Shadimetov Kh.M., Azamov S.S.* Discrete analogues of high order differential operators // J. Math. Sci.. – 2024. – Vol. 284, № 2. – P. 253-265. – doi: `http://dx.doi.org/10.1007/s10958-024-07360-1`.

[13] *Shadimetov Kh.M., Azamov S.S.* On the construction of optimal quadrature formulas with equally spaced nodes // Filomat. – 2024. – Vol. 38, № 29. – P. 10279-10295.

[14] *Hayotov A.R., Khayriev U.N.* Optimal quadrature formulas in the space $W_2^{(1,0)}$ of periodic functions // Uzbek Mathematical Journal. – 2021. – Vol. 65, № 3. – P. 93-100.

UDC 519.62

FINDING THE EXTREMUM OF THE ERROR FUNCTIONAL IN THE SPACE OF PERIODIC FUNCTIONS

***Azamov S.S., Bekmurodova D.B.**
*azamovs@mail.ru
Tashkent State Transport University,
1, Temiryulchilar str., Tashkent, 100167 Uzbekistan.

The problem of constructing optimal quadrature formulas for approximate calculation of definite integrals and approximation of functions is one of the important problems of computational mathematics. These problems have been studied by many mathematicians and there are several methods for constructing optimal quadrature formulas. One of these methods is the method proposed by S.L. Sobolev with the concept of an extremal function of the error functional. This article is devoted to finding the main elements necessary for the process of constructing an optimal quadrature formula for real-valued periodic functions in a Hilbert space. The quadrature formula under consideration is a form of the norm of the error functional for obtaining the upper bound of the error. In turn, to find the form of the norm of the error functional, we need an extremal function corresponding to the error functional. This work is aimed at finding the extremal function of the error functional.

Keywords: space, extremal function, generalized function, operator, optimal quadrature formula, error functional.

Citation: Azamov S.S., Bekmurodova D.B. 2026. Finding the extremum of the error functional in the space of periodic functions. *Problems of Computational and Applied Mathematics.* 1(71): 94-102.

DOI: https://doi.org/10.71310/pcam.1_71.2026.08

№ 1(71) 2026

ISSN 2181-8460

HISOBLASH VA AMALIY MATEMATIKA MUAMMOLARI

ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

PROBLEMS OF COMPUTATIONAL AND APPLIED MATHEMATICS

RAQAMLI TEXNOLOGIYALAR VA
SUN'IY INTELLEKTNI RIVOJLANTIRISH
ILMIY-TADQIQOT INSTITUTI

ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

№ 1(71) 2026

Журнал основан в 2015 году.
Издается 6 раз в год.

Учредитель:
Научно-исследовательский институт развития цифровых технологий и искусственного интеллекта.

Журнал зарегистрирован в Агентстве информации и массовых коммуникаций при Администрации Президента Республики Узбекистан.
Свидетельство №0856 от 5 августа 2015 года.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

Адрес редакции:
100125, г. Ташкент, м-в. Буз-2, 17А.
Тел.: +(998) 71 263-41-98.
Э-почта: journals@airi.uz.
Веб-сайт: https://journals.airi.uz.

Дизайн и вёрстка:
Шарипов Х.Д.

Отпечатано в типографии НИИ РЦТИИ.
Подписано в печать 25.02.2026 г.
Формат 60x84 1/8. Заказ №1. Тираж 100 экз.

PROBLEMS OF COMPUTATIONAL AND APPLIED MATHEMATICS

No. 1(71) 2026

The journal was established in 2015.
6 issues are published per year.

Founder:
Digital Technologies and Artificial Intelligence Development Research Institute.

The journal is registered by Agency of Information and Mass Communications under the Administration of the President of the Republic of Uzbekistan.
Certificate of Registration No. 0856 of 5 August 2015.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

Address:
100125, Tashkent, Buz-2, 17A.
Tel.: +(998) 71 263-41-98.
E-mail: journals@airi.uz.
Web-site: https://journals.airi.uz.

Layout design:
Sharipov Kh.D.

DTAIRI printing office.
Signed for print 25.02.2026
Format 60x84 1/8. Order No. 1. Print run of 100 copies.

Содержание

Contents