УДК 519.8

О РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГР С ДРОБНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ХИЛЬФЕРА

[1*]***Мухсинов Е.М.***, [2]***Хакимов Р.И.***

[*]yodgor.mukhsinov@gmail.com

[1]Таджикский государственный университет права, бизнеса и политики, 735700, Таджикистан, г. Худжанд, ул. Панфилова, 1;

[2]Худжандский государственный университет имени академика Б. Гафурова, 735700, Таджикистан, г. Худжанд, пр-д Мавлонбекова, 1.

В начале 60-х годов прошлого века в теории дифференциальных игр, когда игра описывается обыкновенным дифференциальным уравнением в конечномерном пространстве, основополагающие результаты были получены академиками Л.С. Понтрягиным и Н.Н. Красовским. В XXI веке активно исследуются дифференциальные игры, описываемые дифференциальными уравнениями дробного порядка. В последние годы дробное исчисление заняло прочные позиции в математическом моделировании физических, экономических и прикладных задач. Существует множество примеров успешного применения обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных с дробными производными. В частности, в работах А.А. Чикрия, М.Ш. Маматова и Е.М. Мухсинова рассматривается задача преследования, когда игра описывается дифференциальными уравнениями дробного порядка. В настоящей работе в банаховом пространстве исследуется разрешимость задачи преследования для дифференциальной игры с дробными производными Хильфера порядка α, $0 < \alpha < 1$, и типа μ, $0 \leqslant \mu \leqslant 1$. С использованием первого метода Понтрягина и теоремы о строгой отделимости доказаны две теоремы о достаточных условиях разрешимости задачи преследования и оптимальности времени преследования. Решена одна игровая задача, описывающая процесс релаксации при стеклообразовании переохлаждённых жидкостей.

Ключевые слова: дифференциальная игра с дробными производными Хильфера, банахово пространство, задача преследования, оптимальность времени преследования.

Цитирование: *Мухсинов Е.М., Хакимов Р.И.* О разрешимости задачи преследования для дифференциальных игр с дробными производными Хильфера // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2026. – № 1(71). – С. 82-93.

DOI: https://doi.org/10.71310/pcam.1_71.2026.07

1 Введение. Постановка задачи преследования

В области теории дифференциальных игр основополагающие результаты получили академики Л.С. Понтрягин [1] и Н.Н. Красовский [2].

Если академик Н.Н. Красовский исследовал позиционные дифференциальные игры, то академик Л.С. Понтрягин рассматривая дифференциальную игру отдельно с точки зрения преследующего и с точки зрения убегающего разбивает игровую задачу на две различные задачи: задачу преследования и задачу убегания. Этот подход позволил применить первый метод Л.С. Понтрягина к более широким классам игр. Например, разрешимость задачи преследования с помощью первого метода исследованы в работах:

- [3,4,5,6], когда на управление игроков наложены геометрические и интегральные ограничения;
- [7,8,9], когда дифференциальная игра описывается уравнением запаздывающего или нейтрального типа;
- [10,11,12], когда динамика игры описывается дифференциальным уравнением в бесконечномерном банаховом пространстве;
- [13,14,15,16,17,18], когда динамика игры описывается дифференциальным уравнением дробного порядка.

В банаховом пространстве X рассматривается дифференциальная игра, описываемая дифференциальным уравнением дробного порядка

$$\begin{cases} D_{0+}^{\alpha,\mu}x(t) = Ax(t) + F(t, u(t),\, v(t)); \\ I_{0+}^{(1-\alpha)(1-\mu)}x(0) = x_0 \end{cases} \tag{1}$$

и замкнутым терминальным множеством $M \subset X$, где заканчивается игра. В игре (1) $t \in (0, T], T > 0,\ x(t) \in X,\ Y, Z$ – банаховые пространства, $U((0, T], Y)$ – множество измеримых отображений, действующих из $(0, T]$ в Y, $u(\cdot) \in U((0, T], Y)$ – управления преследования, $v(\cdot) \in U((0, T], Z)$ – управления убегания, $D_{0+}^{\alpha,\mu}$ – дробная производная Хильфера порядка $\alpha, 0 < \alpha < 1$ и типа $\mu, 0 \leqslant \mu \leqslant 1$, A – линейный замкнутый оператор, имеющий плотную в X область определения, который порождает сильно непрерывную полугруппу $S(t), t \geqslant 0$, а $I_{0+}^{(1-\alpha)(1-\mu)}$ – дробный интеграл порядка $\rho = (1-\alpha)(1-\mu)$. Полагаем, что для любых допустимых $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$ отображение $t \to F(t, u(t), v(t))$ локально интегрируемо и задача Коши (1) имеет решение [19, c.348]:

$$x(t) = S_{\alpha,\mu}(t)x_0 + \int_0^t K_\alpha(t-s)F(s, u(s), v(s))ds, \quad t \in (0, T], \tag{2}$$

где интеграл понимается в смысле Бохнера [17],

$$K_\alpha(t) = t^{\alpha-1}P_\alpha(t),$$

$$P_\alpha(t) = \int_0^\infty \alpha s M_\alpha(s)S(t^\alpha s)ds,$$

$$S_{\alpha,\mu}(t) = I_{0+}^{\mu(1-\alpha)}K_\alpha(t),$$

а функция Райт

$$M_\alpha(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-z)^{n-1}}{(n-1)!\Gamma(1-\alpha n)}, \quad 0 < \alpha < 1, \quad z \in \mathbb{C},$$

удовлетворяет уравнению

$$\int_0^\infty s^\sigma M_\alpha(s)ds = \frac{\Gamma(1+\sigma)}{\Gamma(1+\alpha\sigma)} \quad \text{для любого } s \geqslant 0,$$

где $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt$ – гамма-функция.

Замечание 1. В силу [19, с.345] дробный интеграл порядка p с нижным пределом a от функции $f:[a,\infty)\to X$ определяется по формуле

$$I_{a+}^{p}f(t)=\frac{1}{\Gamma(p)}\int\limits_{a}^{t}\frac{f(s)}{(t-s)^{1-p}}ds,\quad t>a,\quad p>0.$$

Производная Римана-Лиувилля порядка p от функции $f:[a,\infty)\to X$ определяется по формуле

$$D_{a+}^{p}f(t)=\frac{1}{\Gamma(n-p)}\frac{d^n}{dt^n}\int\limits_{a}^{t}\frac{f(s)}{(t-s)^{p+1-n}}ds,\quad t>a,\quad n-1<p<n.$$

Производная Капуто порядка p от функции $f:[a,\infty)\to X$ определяется по формуле

$${}^{C}D_{a+}^{p}f(t)=D_{a+}^{p}\left[f(t)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{t^k}{k!}f^{(k)}(0)\right],\quad t>a,\quad n-1<p<n.$$

Если $f\in\mathbb{C}^n\left([a,\infty),X\right)$, то

$${}^{C}D_{a+}^{p}f(t)=\frac{1}{\Gamma(n-p)}\int\limits_{a}^{t}\frac{f^{(n)}(s)}{(t-s)^{p+1-n}}ds,\quad t>a,\quad n-1<p<n.$$

Замечание 2. В силу ([19], с.346) производная Хильфера порядка $\alpha, 0<\alpha<1$ и типа $\mu, 0\leqslant\mu\leqslant 1$ с нижным пределом a от функции $f:[a,\infty)\to X$ определяется по формуле

$$D_{a+}^{\alpha,\mu}f(t)=I_{a+}^{\mu(1-\alpha)}\frac{d}{dt}I_{a+}^{(1-\alpha)(1-\mu)}f(t).$$

Замечание 3. 1) Когда $\mu=0$, $0\leqslant\alpha\leqslant 1$ и $a=0$ мы получаем производную Римана-Лиувилля:

$$D_{0+}^{\alpha,0}f(t)=\frac{d}{dt}I_{0+}^{1-\alpha}f(t)=D_{0+}^{\alpha}f(t).$$

2) Когда $\mu=1$, $0\leqslant\alpha\leqslant 1$ и $a=0$ мы получаем производную Капуто:

$$D_{0+}^{\alpha,1}f(t)=I^{1-\alpha}\frac{d}{dt}f(t)={}^{C}D_{0+}^{\alpha}f(t).$$

Для дифференциальной игры (1) дадим следующие определения и постановку задачи преследования в смысле Л.С. Понтрягина.

Определение 1. В игре (1.1) из начальной точки $x_0\in X\setminus M$ возможно завершение преследования, если существует число $T=T(x_0)>0$ такое, что для любого управления убегания $v(\cdot)\in U([0,\infty),Z)$, зная уравнение (1.1), величины x_0 и $v(t)$, можно выбрать $u(t)$ таким образом, что управление преследования $u(\cdot\cdot)\in U([0,\infty),Y)$ и для решения $x(\cdot)$ задачи (1.1), соответствующего управлениям $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$, выполняется включение $x(T_1)\in M$, при некотором $T_1\in(0,T]$. В этом случае, число T называется гарантированным временем преследования.

Следуя работе П.Б. Гусятникова, М.С. Никольского ([3], с. 518) дадим определение 2 об оптимальности времени преследования.

Определение 2. Число $T_0 = T_0(x_0)$ называется оптимальным временем преследования, если, во-первых, из начальной точки x_0 возможно завершение преследования за время T_0 и во-вторых, при всех $t \in [0, T_0)$ и для любого управления преследования $u(\cdot) \in U([0, T_0), Y)$ существует такое управление убегания $v(\cdot) \in U([0, T_0), Z)$, что для решения $x(\cdot)$ задачи (1.1) выполняется условие $x(t) \notin M$. При этом выбор $v(t)$ осуществляется по формуле $v(t) = w(u(t-\varepsilon))$, где $\varepsilon \in (0, T_0)$, отображение $w : Y \to Z$ такое, что для каждого измеримого отображения $u(\cdot)$ суперпозиция $w(u(\cdot))$ измерима.

Задача преследования. Найти множество начальных точек, из которых в игре (1) возможно завершение преследования в смысле определения 1.

2 Основные результаты

Справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) X, Y – сепарабельные банаховы пространства;

2) начальная точка $x_0 \in X \setminus M$ такая, что при некотором $T > 0$ имеет место включение

$$S_{\alpha,\mu}(T)x_0 \in M - \int_0^T \bigcap_{v \in Z} K_\alpha(T-s)F(s,Y,v)ds; \tag{3}$$

3) отображение $F : [0,\infty) \times Y \times Z \to X$ удовлетворяет условиям Каратеодори, т.е. оно измеримо по $t \in [0,\infty)$ и непрерывно по $(u,v) \in Y \times Z$ и существует такая локально суммируемая функция $\eta : [0,\infty) \to [0,\infty)$, что при всех $t \in [0,\infty), u \in Y, v \in Z$ имеет место неравенство $||F(t,u,v)|| \leqslant \eta(t)$.

Тогда из начальной точки x_0 в игре (1) возможно завершение преследования за время T.

Доказательство. На основании (3) существуют некоторая точка $m \in M$ и интегрируемый селектор $w(\cdot)$ отображения

$$s \to \bigcap_{v \in Z} K_\alpha(T-s)F(s,Y,v), \tag{4}$$

что имеет место равенство

$$S_{\alpha,\mu}(T)x_0 = m - \int_0^T w(s)ds. \tag{5}$$

В силу того, что X, Y – сепарабельные, отображения (4) и $s \to w(s)$ измеримые, а отображение $(s,u,v) \to F(s,u,v)$ непрерывно по (u,v) и измеримо по s, то в силу леммы 1 ([11], с.67) об измеримом селекторе для любого измеримого управления убегания $v(\cdot) \in U([0,T], Z)$ существует такое измеримое управление преследования $u(\cdot) \in U([0,T], Y)$, что имеет место равенство

$$w(s) = K_\alpha(T-s)F(s,u(s),v(s)), \tag{6}$$

для почти всех $s \in [0,T]$.

Следовательно, в силу (5), (6), для решения $x(\cdot)$ задачи (1) соответствующего управлениям $u(\cdot), v(\cdot)$ имеем:

$$x(T) = S_{\alpha,\mu}(T)x_0 + \int\limits_0^T K_\alpha(T-s)F(s,u(s),v(s))ds =$$
$$= m - \int\limits_0^T w(s)ds + \int\limits_0^T K_\alpha(T-s)F(s,u(s),v(s))ds =$$
$$= m - \int\limits_0^T K_\alpha(T-s)F(s,u(s),v(s))ds + \int\limits_0^T K_\alpha(T-s)F(s,u(s),v(s))ds = m \in M,$$

т.е. $x(T) \in M$.

Поэтому из начальной точки x_0 в игре (1) возможно завершение преследования за время T.

Следующая теорема обеспечивает оптимальность времени преследования.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия 1) - 3) теоремы 1 и следующие условия:*

4) терминальное множество M выпукло и компактно относительно слабой топологии $\sigma(X,X^*)$ ([18], c.110);

5) многозначное отображение $t \to \int\limits_0^t \bigcap\limits_{v\in Z} K_\alpha(t-s)F(s,Y,v)ds$, $t \in [0,T]$ выпуклозначно и замкнуто относительно слабой топологии $\sigma(X,X^*)$;

6) существует отображение $w : Y \to Z$ такое, что при всех $u \in Y$, $t \in [0,T]$, $0 \leqslant s \leqslant t$ выполнятеся включение

$$K_\alpha(t-s)F(s,u,w(u)) \in \bigcap_{v\in Z} K_\alpha(t-s)F(s,Y,v)$$

и для каждого измеримого $u(\cdot)$ суперпозиция $w(u(\cdot))$ измерима.

Тогда из начальной точки x_0 в игре (1) возможно завершение преследования за оптимальное время

$$T_0 = \min\left\{T > 0 : \textit{для которых выполняется включение } (3)\right\}.$$

Доказательство. В силу условия 4) терминальное множество M компактно, а в силу условия 5) отображение $t \to \int\limits_0^t \bigcap\limits_{v\in Z} K_\alpha(t-s)F(s,Y,v)ds$ замкнуто относительно слабой топологии $\sigma(X,X^*)$. Тогда отображение $t \to M - \int\limits_0^t \bigcap\limits_{v\in Z} K_\alpha(t-s)F(s,Y,v)ds$ секвенциально замкнуто относительно слабой топологии $\sigma(X,X^*)$ ([10], c.143).

Тогда, в силу непрерывности отображения $t \to S_{\alpha,\mu}(t)x_0$, в силу (3) и леммы 2 ([10], c.143) множество $\{T > 0 : \text{для которых выполняется включение } (3)\}$ замкнуто. А это означает, что имеет место включение

$$S_{\alpha,\mu}(T_0)x_0 \in M - \int\limits_0^{T_0} \bigcap_{v\in Z} K_\alpha(T_0-s)F(s,Y,v)ds. \tag{7}$$

Следовательно, в силу теоремы 1 из начальной точки x_0 в игре (1) возможно завершение преследования за время T_0. Далее докажем, что время T_0 является оптимальным временем преследования. Действительно, в силу определения числа T_0

заключаем, что при всех $t \in (0, T_0)$ имеет место следующее соотношение

$$\left(S_{\alpha,\mu}(t)x_0 + \int_0^t \bigcap_{v \in Z} K_\alpha(t-s)F(s,Y,v)ds \right) \bigcap M = \varnothing. \tag{8}$$

Если $\varepsilon \in (0, T_0)$, то значения $v(t)$ управления убегания $v(\cdot)$ на $(0, \varepsilon)$ выбираем произвольно, а при $t \in (\varepsilon, T_0)$ – специальным образом: $v(t) = w(u(t-\varepsilon))$. Тогда для решения $x(t)$ задачи (1), соответствующего выбранным управлениям $u(\cdot)$, $v(\cdot)$ на $(0, T_0)$, имеем:

$$\begin{gathered} x(t) = S_{\alpha,\mu}(t)x_0 + \int_0^t K_\alpha(t-s)F(s,u(s),v(s))ds = \\ = S_{\alpha,\mu}(t)x_0 + \int_0^\varepsilon K_\alpha(t-s)F(s,u(s),v(s))ds + \\ + \int_\varepsilon^t K_\alpha(t-s)F(s,u(s),w(u(s-\varepsilon)))ds. \end{gathered} \tag{9}$$

В силу (8), условий 4), 5) и согласно теореме о строгой отделимости ([21], с.109) в локально выпуклом топологическом пространстве X со слабой топологией $\sigma(X, X^*)$ компактное множество M и замкнутое множество

$$S_{\alpha,\mu}(t)x_0 + \int_0^t \bigcap_{v \in Z} K_\alpha(t-s)F(s,Y,v)ds,$$

при всех $t \in (0, T_0)$ строго отделимы, т.е. при всех $t \in (0, T_0)$ можно найти такой непрерывный линейный функционал $\varphi \in X^*$ и такие числа c и $\delta > 0$, что

$$\varphi(x) \leqslant c - \delta < c \leqslant \varphi(m), \tag{10}$$

при всех

$$x \in S_{\alpha,\mu}(t)x_0 + \int_0^t \bigcap_{v \in Z} K_\alpha(t-s)F(s,Y,v)ds \text{ и } m \in M.$$

Если $\overline{w}(\cdot)$ – произвольный интегрируемый селектор отображения

$$s \to \bigcap_{v \in Z} K_\alpha(t-s)F(s,Y,v), \quad s \in (0, \varepsilon],$$

то на основании 6), (9) и (10) имеем:

$$\varphi(x(t))=\varphi\left(S_{\alpha,\mu}(t)x_0+\int\limits_0^{\varepsilon}K_\alpha(t-s)F(s,u(s),v(s))ds+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{\varepsilon}^{t}K_\alpha(t-s)F(s,u(s),w(u(s-\varepsilon)))ds\right)=$$

$$=\varphi\left(S_{\alpha,\mu}(t)x_0+\int\limits_0^{\varepsilon}\overline{w}(s)ds-\int\limits_0^{\varepsilon}\overline{w}(s)ds+\int\limits_0^{\varepsilon}K_\alpha(t-s)F(s,u(s),v(s))ds+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{\varepsilon}^{t}K_\alpha(t-s)F(s,u(s),w(u(s-\varepsilon)))ds\right)=$$

$$=\varphi\left(S_{\alpha,\mu}(t)x_0+\int\limits_0^{\varepsilon}\overline{w}(s)ds+\int\limits_{\varepsilon}^{t}K_\alpha(t-s)F(s,u(s),w(u(s-\varepsilon)))ds\right)+$$

$$+\varphi\left(\int\limits_0^{\varepsilon}K_\alpha(t-s)F(s,u(s),v(s))ds-\int\limits_0^{\varepsilon}\overline{w}(s)ds\right)\leqslant$$

$$\leqslant c-\delta+\int\limits_0^{\varepsilon}\varphi\left(K_\alpha(t-s)F(s,u(s),v(s))-\overline{w}(s)\right)ds.$$

В силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега ([22], с.282) существует число $\varepsilon=\theta>0$ такое, что

$$\left|\int\limits_0^{\theta}\varphi\left(K_\alpha(t-s)F(s,u(s),v(s))-\overline{w}(s)\right)ds\right|<\frac{\sigma}{2}.$$

Следовательно,

$$\varphi(x(t))\leqslant c-\sigma+\frac{\sigma}{2}=c-\frac{\sigma}{2}<c\leqslant\varphi(m).$$

Поэтому число $\varepsilon=\theta>0$ и соответствующее ему управление $v(\cdot)$ можно выбрать таким образом, что $x(t)\notin M$ при всех $t\in(0,T_0)$, что и доказывает оптимальность времени преследования T_0.

Теорема доказана.

3. Пример

В сепарабельном рефлексивном банаховом пространстве X рассмотрим дифференциальную игру с производной Капуто

$$y'(t)+bD^{0,5}y(t)=-\overline{u}+\overline{v}, \tag{11}$$

с начальной точкой $y(0)=y_0\in X$, $||y_0||>0$ и терминальным множеством $M_1=0$. Предполагается, что $t\geqslant 0$, $b\neq 0$ – действительное число, измеримые управления преследования $\overline{u}=\overline{u}(t)$ и убегания $\overline{v}=\overline{v}(t)$ удовлетворяют соотношениям $\overline{u}(t)\in Y=$ $=\{y:||y||\leqslant\rho\}=S_\rho$ – шар с радиусом ρ и центром 0, $\overline{v}(t)\in Z=\{z:||z||\leqslant\sigma\}=S_\sigma$, $\rho>\sigma>0$.

Положив $x_1 = y$, $x_2 = D^{0,5}x_1$, $D^{0,5}x_2 = D^{0,5}D^{0,5}x_1 = x_1' = y'$ игру (11) перепишем в виде

$$\begin{cases} D^{0,5}x_1 = x_2; \\ D^{0,5}x_2 = -bx_2 - \overline{u}(t) + \overline{v}(t), \end{cases}$$

или в виде

$$D^{0,5}x = Ax - u + v, \tag{12}$$

с начальным условием $x(0) = \begin{pmatrix} y_0 \\ 0 \end{pmatrix}$ и терминальным множеством

$$M = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} : x_1 = 0 \right\},$$

где

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -b \end{pmatrix}, \ u = \begin{pmatrix} 0 \\ \overline{u} \end{pmatrix}, \ v = \begin{pmatrix} 0 \\ \overline{v} \end{pmatrix}.$$

В нашем примере $\mu = 1$, $\alpha = 0,5$, $I_{0+}^{(1-\alpha)(1-\mu} = I$ – единичный оператор, A – линейный органиченный оператор, который порождает сильно непрерывную группу $S(t) = e^{At}$. В силу ([16], с.347; [12], с.257) и используя преобразование Лапласа получим:

$$\begin{aligned} S_{0,5;1}(t) = I_{0+}^{0,5}K_{0,5}(t) = \frac{1}{\Gamma(0,5)} \int_0^t \frac{K_{0,5}(s)}{(t-s)^{0,5}} ds = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{s^{-0,5}P_{0,5}(s)}{(t-s)^{0,5}} ds = \\ = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t [s(t-s)]^{-0,5} \left(\int_0^\infty 0,5 \cdot \theta \cdot M_{0,5}(\theta) S(s^{0,5}\theta) d\theta \right) ds = \\ = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t [s(t-s)]^{-0,5} \left(\int_0^\infty \theta \cdot \sum_{n=1}^\infty \frac{(-\theta)^{n-1}}{(n-1)!\Gamma(1-0,5n)} e^{s^{0,5}\theta A} d\theta \right) ds = \\ = \sum_{n=0}^\infty \frac{(At^{0,5})^n}{\Gamma(0,5n+1)} = E_2(At^{0,5}; 1) \end{aligned} \tag{13}$$

– обобщенная функция Миттаг-Леффлера;

$$\begin{aligned} K_{0,5}(t-s) = (t-s)^{-0,5}P_{0,5}(t-s) = \\ = (t-s)^{-0,5} \int_0^\infty 0,5 \cdot \theta \cdot M_{0,5}(\theta) S((t-s)^{0,5}\theta) d\theta = \\ = \frac{1}{2}(t-s)^{0,5} \int_0^\infty \theta \cdot \sum_{n=1}^\infty \frac{(-\theta)^{n-1}}{(n-1)!\Gamma(1-0,5n)} e^{(t-s)^{0,5}\theta A} d\theta = \\ = (t-s)^{0,5} \sum_{n=0}^\infty \frac{(A(t-s)^{0,5})^n}{\Gamma(0,5n+0,5)} = (t-s)^{0,5} \cdot E_2(A(t-s)^{0,5}; 0,5). \end{aligned} \tag{14}$$

Обозначим через $\mathrm{pr}_1 : X \times X \to X$ проекцию на первый элемент:

$$\mathrm{pr}_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1.$$

Тогда $\mathrm{pr}_1 M = 0$.

Для нашего примера в силу (13), (14) и $\mathrm{pr}_1 M = 0$ включение (3) примет вид

$$\mathrm{pr}_1 E_2(AT^{0,5};1)x_0 \in \int_0^T \bigcap_{v\in\tilde{Z}} (T-s)^{0,5} \cdot \mathrm{pr}_1 E_2(A(T-s)^{0,5};0,5)\cdot(\tilde{Y}-v)ds, \qquad (15)$$

где $\tilde{Z} = \begin{pmatrix} 0 \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ S_\sigma \end{pmatrix} = \tilde{S}_\sigma$, $\tilde{Y} = \begin{pmatrix} 0 \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ S_\rho \end{pmatrix} = \tilde{S}_\rho$.

В силу того, что

$$E_2(z;1) = e^{z^2}\mathrm{erfc}(-z)$$

и

$$E_2(z;0,5) = zE_2(z;1) + \frac{1}{\Gamma(0,5)} = ze^{z^2}\mathrm{erfc}(-z) + \frac{1}{\sqrt{\pi}},$$

где $\mathrm{erfc}(z) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_z^\infty e^{-t^2}dt$ – дополнительная функция ошибок ([13], с.265), имеем:

$$E_2(AT^{0,5};1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(AT^{0,5})^n}{\Gamma(n\cdot 0,5+1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} I + \ldots + \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{T^{0,5n}\cdot b^{n-1}}{\Gamma(n\cdot 0,5+1)} \\ 0 & \dfrac{T^{0,5n}\cdot b^{n}}{\Gamma(n\cdot 0,5+1)} \end{pmatrix} I + \ldots =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & b^{-1}E_2(bT^{0,5};1) - b^{-1} \\ 0 & E_2(bT^{0,5};1) \end{pmatrix} I = \begin{pmatrix} 1 & b^{-1}[e^{b^2T}\mathrm{erfc}(-bT^{0,5})] - b^{-1} \\ 0 & e^{b^2T}\mathrm{erfc}(-bT^{0,5}) \end{pmatrix} I,$$

$$E_2(A(T-s)^{0,5};0,5) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(A(T-s)^{0,5})^n}{\Gamma(n\cdot 0,5+0,5)} = \frac{1}{\Gamma(0,5)}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \ldots +$$

$$+\frac{(T-s)^{0,5n}}{\Gamma(n\cdot 0,5+0,5)}\begin{pmatrix} 0 & b^{n-1} \\ 0 & b^n \end{pmatrix} + \ldots = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\pi}} & b^{-1}E_2(b(T-s)^{0,5};0,5) - \frac{1}{b\sqrt{\pi}} \\ 0 & E_2(b(T-s)^{0,5};0,5) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\pi}} & (T-s)^{0,5}e^{(T-s)b^2}\mathrm{erfc}(-b(T-s)^{0,5}) \\ 0 & b(T-s)^{0,5}e^{(T-s)b^2}\mathrm{erfc}(-b(T-s)^{0,5}) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \end{pmatrix}.$$

$$\mathrm{pr}_1 E_2(AT^{0,5};1)x_0 = \mathrm{pr}_1 E_2(AT^{0,5};1)\begin{pmatrix} y_0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathrm{pr}_1 \begin{pmatrix} y_0 \\ 0 \end{pmatrix} = y_0.$$

Если $A \overset{*}{-} B = C = \{c : c + B \subset A\}$ – геометрическая разность, то имеем:

$$S_\rho \overset{*}{-} S_\sigma = S_{\rho-\sigma},$$

$$\bigcap_{v\in\tilde{Z}} \mathrm{pr}_1(T-s)^{-0,5}E_2(A(T-s)^{0,5};0,5)(\tilde{Y}-v) =$$

$$= (T-s)^{-0,5}\mathrm{pr}_1 E_2(A(T-s)^{0,5};0,5)\tilde{S}_\rho \overset{*}{-} (T-s)^{-0,5}\mathrm{pr}_1 E_2(A(T-s)^{0,5};0,5)\tilde{S}_\sigma =$$

$$= (T-s)^{-0,5}\mathrm{pr}_1 \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\pi}} & (T-s)^{0,5}e^{(T-s)b^2}\mathrm{erfc}(-b(T-s)^{0,5}) \\ 0 & b(T-s)^{0,5}e^{(T-s)b^2}\mathrm{erfc}(-b(T-s)^{0,5}) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ S_\rho \end{pmatrix} \overset{*}{-}$$

$$\overset{*}{-}(T-s)^{-0,5}\mathrm{pr}_1 \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\pi}} & (T-s)^{0,5}e^{(T-s)b^2}\mathrm{erfc}(-b(T-s)^{0,5}) \\ 0 & b(T-s)^{0,5}e^{(T-s)b^2}\mathrm{erfc}(-b(T-s)^{0,5}) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ S_\sigma \end{pmatrix} =$$

$$= e^{(T-s)b^2}\mathrm{erfc}(-b(T-s)^{0,5})S_\rho \overset{*}{-} e^{(T-s)b^2}\mathrm{erfc}(-b(T-s)^{0,5})S_\sigma =$$

$$= e^{(T-s)b^2}\mathrm{erfc}(-b(T-s)^{0,5})S_{\rho-\sigma} = S_{(\rho-\sigma)e^{(T-s)b^2}\mathrm{erfc}(-b(T-s)^{0,5})}.$$

Поэтому, в силу того, что $\int_0^T S_{r(s)}\,ds = S_{\int_0^T r(s)\,ds}$ и

$$\int\limits_0^T e^{(T-s)b^2}\mathrm{erfc}(-b(T-s)^{0,5})\,ds = \int\limits_0^T \mathrm{erfc}(-b\tau^{0,5})e^{\tau b^2}\,d\tau = \frac{1}{b^2}\int\limits_0^T \mathrm{erfc}(-b\tau^{0,5})\,de^{\tau b^2} =$$

$$= \mathrm{erfc}(-b\tau^{0,5})\cdot\frac{e^{\tau b^2}}{b^2}\Bigg|_0^T - \int\limits_0^T \frac{e^{\tau b^2}}{b^2}d\mathrm{erfc}(-b\tau^{0,5}) = \mathrm{erfc}(-bT^{0,5})\cdot\frac{e^{Tb^2}}{b^2} - \mathrm{erfc}(0)\cdot\frac{1}{b^2} -$$

$$-\int\limits_0^T \frac{e^{\tau b^2}}{b^2}\frac{be^{-b^2\tau}}{\sqrt{\pi\tau}}\,d\tau = \mathrm{erfc}(-bT^{0,5})\cdot\frac{e^{Tb^2}}{b^2} - \frac{1}{b^2} - \frac{2\sqrt{T}}{b\sqrt{\pi}},$$

включение (15) запишем в виде

$$y_0 \in \int\limits_0^T S_{(\rho-\sigma)e^{(T-s)b^2}\mathrm{erfc}(-b(T-s)^{0.5})}ds = S_{(\rho-\sigma)\int\limits_0^T e^{(T-s)b^2}\mathrm{erfc}(-b(T-s)^{0.5})ds} =$$

$$= S_{(\rho-\sigma)\left[\frac{e^{b^2T}}{b^2}\mathrm{erfc}(-b\sqrt{T}) - \frac{1}{b^2} - \frac{2\sqrt{T}}{b\sqrt{\pi}}\right]} = S_{r(T)}.$$

где $r(t) = (\rho-\sigma)\left[\dfrac{e^{b^2t}}{b^2}\mathrm{erfc}(-b\sqrt{t}) - \dfrac{1}{b^2} - \dfrac{2\sqrt{t}}{b\sqrt{\pi}}\right]$ – положительная и возрастающая функция, так как $r(0) = 0$ и $r'(t) > 0$ при всех $t > 0$. Следовательно, для любой начальной точки y_0 существует такое $T > 0$, что имеет место включение

$$y_0 \in S_{r(T)}. \tag{16}$$

В силу того, что шар $S_{r(T)}$ есть замкнутое множество, то включение (16) имеет место и при $T = T_0 = \min\{T > 0 : \text{выполняется включение}(16)\}$.

Этим мы доказали, что имеет место условие 2) теоремы 1. Условия 1) и 3) очевидны. Условия 4) и 5) выполняются, потому что в рефлексивном пространстве шары слабо компактны. Условие 6) следует из того, что в качестве отображения w можно брать отображение задаваемое формулой $w = v(u) = \dfrac{e}{||e||}\alpha_0\sigma$, когда $u = \dfrac{e}{||e||}\alpha_0\rho$, где $0 \leqslant \alpha_0 \leqslant 1$.

Следовательно, в игре (11) из любой начальной точки y_0 возможно завершение преследования за оптимальное время

$$T_0 = \min\{T > 0 : ||y_0|| = r(T_0)\}.$$

При этом управление преследования $\overline{u}(\cdot)$ выбирают по формуле

$$\overline{u}(s) = \frac{y_0}{\left[\frac{e^{b^2T_0}}{b^2}\mathrm{erfc}(-b\sqrt{T_0}) - \frac{1}{b^2} - \frac{2\sqrt{T_0}}{b\sqrt{\pi}}\right]} + \overline{v}(s), \quad 0 < s \leqslant T_0.$$

3 Заключение

В настоящей работе найдены множество начальных точек, из которых возможно завершение преследования, когда динамика игры описывается дифференциальным уравнением дробного порядка с производными Хильфера. Решена одна игровая задача, описывающая процесс релаксации при стеклообразовании переохлажденных жидкостей. Полученные результаты обобщают конечномерный результат работы ([17], с.30) и бесконечномерный результат работы ([18], с.124).

Эти результаты могут быть использованы в математической теории управляемых процессов, протекающих в условиях конфликта или неопределенности и при решении игровых задач, динамика которых описывается дифференциальными уравнениями в подходящих банаховых пространствах.

Литература

[1] *Понтрягин Л.С.* Линейные дифференциальные игры преследования // Математический сборник. – 1980. – Т. 112(154). – № 3. – С. 307-331.

[2] *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. – М.: Наука, 1974. – 456 с.

[3] *Гусятников П.Б., Никольский М.С.* Об оптимальности времени преследования // Доклады АН СССР. – 1969. – Т. 184. – № 3. – С. 518-521.

[4] *Сатимов Н.Ю.* К методам решения задачи преследования в дифференциальных играх // Доклады АН УзССР. – 1990. – № 3. – С. 8-11.

[5] *Азимов А.Я.* Об одном способе преследования в линейных дифференциальных играх с интегральными ограничениями // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. – 1974. – № 2. – С. 31-35.

[6] *Барановская Л.В.* Метод разрешающих функций для одного класса задач преследования // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. – 2015. – № 2/4(74). – С. 4-8.

[7] *Мамадалиев Н.А.* Об одной задаче преследования при наличии запаздывания // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2010. – Т. 13. – № 3(43). – С. 86-100.

[8] *Мамадалиев Н.А., Ибайдуллоев Т.Т.* Модификация третьего метода преследования для дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа // Известия вузов. Математика. – 2021. – № 11. – С. 21-33.

[9] *Мухсинов Е.М.* Разрешимость задачи преследования для одной дифференциальной игры в банаховом пространстве // Дифференциальные уравнения. – 2023. – Т. 59. – № 1. – С. 142-146.

[10] *Мухсинов Е.М.* О задаче преследования для квазилинейной дифференциальной игры нейтрального типа // Дифференциальные уравнения и процессы управления. – 2022. – № 2. – С. 66-82.

[11] *Мухсинов Е.М.* Об одной дифференциальной игре нейтрального типа с интегральными ограничениями в гильбертовом пространстве // Уфимский математический журнал. – 2022. – Т. 14. – № 3. – С. 90-100.

[12] *Чикрий А.А., Матичин И.И.* О линейных конфликтно-управляемых процессах с дробными производными // Труды Института математики и механики УрО РАН. – 2011. – Т. 17. – № 2. – С. 256-270.

[13] *Алимов Х.Н., Маматов М.Ш.* О задаче преследования, описываемой дробными дифференциальными уравнениями // Научный вестник СамГУ. – 2016. – № 1. – С. 5-9.

[14] *Маматов М.Ш.* Задача преследования, описываемая дифференциальными уравнениями дробного порядка // Актуальные проблемы гуманитарных и естественных наук. – 2016. – № 1. – С. 28-32.

[15] *Мухсинов Е.М., Хакимов Р.И.* Задача преследования для одной дифференциальной игры // Уфимская осенняя математическая школа: материалы международной научной конференции. – Уфа, 2024. – С. 123-124.

[16] *Gu H.B., Trujillo J.J.* Existence of mild solution for evolution equation with Hilfer fractional derivative // Applied Mathematics and Computation. – 2015. – Vol. 257. – P. 344-354. – doi: `http://dx.doi.org/10.1016/j.amc.2014.10.083`.

[17] *Хилле Э., Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы. – М.: ИИЛ, – 1962. – 832 с.

[18] *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1977. – 744 с.

[19] *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1972. – 496 с.

UDC 519.8

ON THE SOLVABILITY OF THE PURSUIT PROBLEM FOR DIFFERENTIAL GAMES WITH FRACTIONAL HILFER DERIVATIVES

[1*]***Mukhsinov E.M.***, [2]***Hakimov R.I.***

*yodgor.mukhsinov@gmail.com

[1]Tajik State University of Law, Business and Politics,
1, Panfilov str., Khujand, 735700 Tajikistan;

[2]Khujand State University named after academician B. Gafurov,
1, Mavlonbekov passage, Khujand, 735700 Tajikistan.

In the early 1960s, seminal results in differential game theory, where the game is described by an ordinary differential equation in a finite-dimensional space, were obtained by academicians L.S. Pontryagin and N.N. Krasovsky. In the 21st century, differential games described by fractional differential equations have been actively studied. In recent years, fractional calculus has gained a strong position in the mathematical modeling of physical, economic, and applied problems. Numerous examples demonstrate the successful application of ordinary differential equations and partial differential equations with fractional derivatives. In particular, the works of A.A. Chikrii, M.Sh. Mamatov, and E.M. Mukhsinov consider the pursuit problem when the game is described by fractional differential equations. In this paper, we investigate the solvability of the pursuit problem for a differential game with Hilfer fractional derivatives in a Banach space of order α, $0 < \alpha < 1$, and type μ, $0 \leqslant \mu \leqslant 1$. Using Pontryagin's first method and the strict separation theorem, we prove two theorems providing sufficient conditions for the solvability of the pursuit problem and for the optimality of the pursuit time. A game problem describing the relaxation process during glass formation in supercooled liquids is solved.

Keywords: differential games with Hilfer fractional derivatives, Banach space, pursuit problem, pursuit time optimality.

Citation: Mukhsinov E.M., Hakimov R.I. 2026. On the solvability of the pursuit problem for differential games with fractional Hilfer derivatives. *Problems of Computational and Applied Mathematics.* 1(71): 82-93.

DOI: https://doi.org/10.71310/pcam.1_71.2026.07

№ 1(71) 2026 ISSN 2181-8460

HISOBLASH VA AMALIY MATEMATIKA MUAMMOLARI

ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

PROBLEMS OF COMPUTATIONAL AND APPLIED MATHEMATICS

RAQAMLI TEXNOLOGIYALAR VA
SUN'IY INTELLEKTNI RIVOJLANTIRISH
ILMIY-TADQIQOT INSTITUTI

ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

№ 1(71) 2026

Журнал основан в 2015 году.
Издается 6 раз в год.

Учредитель:
Научно-исследовательский институт развития цифровых технологий и искусственного интеллекта.

Главный редактор:
Равшанов Н.

Заместители главного редактора:
Арипов М.М., Шадиметов Х.М., Ахмедов Д.Д.

Ответственный секретарь:
Убайдуллаев М.Ш.

Журнал зарегистрирован в Агентстве информации и массовых коммуникаций при Администрации Президента Республики Узбекистан.
Свидетельство №0856 от 5 августа 2015 года.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

Адрес редакции:
100125, г. Ташкент, м-в. Буз-2, 17А.
Тел.: +(998) 71 263-41-98.
Э-почта: journals@airi.uz.
Веб-сайт: https://journals.airi.uz.

Дизайн и вёрстка:
Шарипов Х.Д.

Отпечатано в типографии НИИ РЦТИИ.
Подписано в печать 25.02.2026 г.
Формат 60x84 1/8. Заказ №1. Тираж 100 экз.

PROBLEMS OF COMPUTATIONAL AND APPLIED MATHEMATICS

No. 1(71) 2026

The journal was established in 2015.
6 issues are published per year.

Founder:
Digital Technologies and Artificial Intelligence Development Research Institute.

The journal is registered by Agency of Information and Mass Communications under the Administration of the President of the Republic of Uzbekistan.
Certificate of Registration No. 0856 of 5 August 2015.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

Address:
100125, Tashkent, Buz-2, 17A.
Tel.: +(998) 71 263-41-98.
E-mail: journals@airi.uz.
Web-site: https://journals.airi.uz.

Layout design:
Sharipov Kh.D.

DTAIRI printing office.
Signed for print 25.02.2026
Format 60x84 1/8. Order No. 1. Print run of 100 copies.

Содержание

Равшанов Н., Насруллаев П., Боборахимов Б.
Математическое моделирование рассеивания вредных веществ, выбрасываемых в атмосферу в условиях сложной городской среды 5
Яхшибаев Д.С.
Возникновение явления упругого возврата при нестационарном течении реологически сложной жидкости в плоском канале в рамках модели Oldroyd-B 16
Равшанов Н., Боборахимов Б.И., Бердиёров Ш.Ш.
Численное моделирование процессов фильтрации и транспорта в цилиндрическом пористом фильтре с использованием метода конечных объемов 28
Зарипова А.Р.
Свойства решений систем уравнений теплопроводности, связанных с нелинейными граничными условиями 43
Курбонов Н., Боборахимов Б., Хакназарова Д., Муродуллаев Б.
Моделирование процесса геофильтрации и анализ движения воды на орошаемых земельных участках 57
Джумаёзов У.З., Рахмонова Р.А., Абдирахмонова М.Н.
Численное моделирование плоских упругопластических задач в деформациях 71
Мухсинов Е.М., Хакимов Р.И.
О разрешимости задачи преследования для дифференциальных игр с дробными производными Хильфера 82
Азамов С.С., Бекмуродова Д.Б.
Нахождение экстремальной функции функционала погрешности в пространстве периодических функций 94
Далабаев У. Хасанова Д.
Решение задачи Дирихле методом перемещаемого узла 103
Муродов С.К.
Численное моделирование краевой задачи для двухпараметрического сингулярно возмущённого дифференциального уравнения с использованием спектрально-сеточного метода 113
Адылова Ф.Т., Давронов Р.Р.
Генерации графов заданной структуры: от глубоких нейронных сетей к квантовым моделям (на примере создания новых лекарств) 123

Contents

Ravshanov N., Nasrullaev P., Boborakhimov B.
Mathematical modeling of the dispersion of harmful substances released into the atmosphere in complex urban environments 5

Yakhshibaev D.S.
The occurrence of the phenomenon of elastic return during unsteady flow of a rheologically complex fluid in a flat channel within the Oldroyd-B model 16

Ravshanov N., Boborahimov B.I., Berdiyorov Sh.Sh.
Numerical modeling of filtration and transport processes in a cylindrical porous filter using the finite volume method 28

Zaripova A.R.
Properties of solutions to systems of heat conduction equations with nonlinear boundary conditions 43

Kurbonov N., Boborakhimov B., Khaknazarova D., Murodullaev B.
Numerical modeling of the geofiltration process on irrigated lands taking into account physical factors 57

Djumayozov U.Z., Rakhmonova R.A., Abdirakhmonova M.N.
Numerical Modeling of Plane Elastoplastic Problems in Strains 71

Mukhsinov E.M., Hakimov R.I.
On the solvability of the pursuit problem for differential games with fractional Hilfer derivatives 82

Azamov S.S., Bekmurodova D.B.
Finding the extremum of the error functional in the space of periodic functions . 94

Dalabaev U. Khasanova D.
Solution of the Dirichlet problem by the moving node method 103

Murodov S.K.
Numerical modeling of the boundary value problem for a two-parameter singularly perturbed differential equation using the spectral-grid method 113

Adilova F.T., Davronov R.R.
Graph generation with a prescribed structure: from deep neural networks to quantum models (a case study of novel drug design) 123