

УДК 519.63

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЛОСКИХ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ В ДЕФОРМАЦИЯХ

*Джумаёзов У.З., Рахмонова Р.А., Абдирахмонова М.Н.

*djumayozov@bk.ru

Самаркандский филиал Ташкентского университета информационных технологий,
140100, Узбекистан, Самарканд, ул. Шохрух Мирзо 47А.

В данной статье в рамках условий совместности Сен-Венана сформулированы плоские задачи теории пластичности в деформациях, направленные на исследование напряжённо-деформированного состояния прямоугольной пластины в условиях упругопластического деформирования. Численная реализация поставленной задачи осуществлена с использованием конечно-разностного метода, на основе которого построены сеточные уравнения для компонент перемещений и деформаций в узлах прямоугольной расчётной области. Дискретизация позволила осуществить переход от дифференциальной формы краевой задачи к системе алгебраических разностных уравнений, пригодной для последующего устойчивого и эффективного численного решения. При формировании разностной схемы учитывались граничные условия различного типа, адекватно отражающие реальные режимы нагружения и условия закрепления пластины. Система разностных уравнений относительно деформаций решалась методом переменных направлений, обеспечивающим повышение вычислительной эффективности и улучшение сходимости при решении задач с выраженной нелинейностью. Применение данного метода способствовало снижению погрешности аппроксимации при сохранении высокой точности получаемых результатов. Проведено детальное сопоставление численных решений, полученных в постановках относительно перемещений и деформаций, при идентичных граничных и силовых условиях. Анализ результатов показал их качественное и количественное соответствие, выражающееся в близости распределений деформаций и напряжений по всей области прямоугольной пластины.

Ключевые слова: условие совместности, пластичность, деформации, перемещения, конечно-разностные уравнения, напряжения, методы исключения и итерации.

Цитирование: Джумаёзов У.З., Рахмонова Р.А., Абдирахмонова М.Н. Численное моделирование плоских упругопластических задач в деформациях // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2026. – № 1(71). – С. 71-81.

DOI: https://doi.org/10.71310/pcam.1_71.2026.06

1 Введение

Математическое и численное моделирование процесса нелинейного деформирования конструкций и их элементов является важной задачей теории пластичности с точки зрения оценки запасов прочности твердых тел. Математическое и численное моделирование пластических деформаций на базе современных информационных технологий, обусловлены широким использованием новых конструкционных материалов в строительстве, машиностроении, авиастроении, медицине, текстильной промышленности, и в других областях. Численное моделирование и проблемы разработки эффективных алгоритмов для расчета пластических деформаций современных

конструкций актуальны в таких промышленно развитых странах, как США, Канада, Великобритания, страны ЕС, Российская Федерация, Япония, Индия, Китай, Южная Корея, Индонезия и Малайзия и др.

Построение математических моделей, описывающих процесс упругопластического деформирования изотропных и анизотропных тел, является фундаментальной проблемой математического моделирования и теории пластичности. Эти вопросы исследованы в классических работах известных ученых, как Сен-Венан, Генки, Друккер, Ильюшин, Нахди, Качанов и др.

Обычно пластические задачи формулируются относительно перемещений в рамках деформационных теории пластичности [1] и теории пластического течений [2]. Формулировка пластических краевых задач относительно напряжений [3–5] и деформаций [6–8] является малоизученной областью математического моделирования и механики деформируемого твердого тела.

Основными численными методами решения упругопластических задач являются метод упругих решений [9], который обычно рассматривается в сочетании с известными методами, как метод конечных элементов, вариационно-разностный метод и конечно-разностный метод, а также метод граничных элементов.

Настоящая работа посвящена формулировке краевых задач теории пластичности относительно деформаций. Данное исследование является довольно новым направлением в теории пластичности и основано на известном условии совместности Сен-Венана. Численно решена пластическая задача о растяжении прямоугольной пластины сформулированная относительно деформаций и перемещений. Дискретные уравнения составлены конечно-разностным методом. Сеточные уравнения относительно деформаций и перемещений решены методом прогонки по соответствующим направлениям и итерационным методом, соответственно. Сравнением численных результатов показана справедливость новой формулировки пластических задач относительно деформаций.

2 Постановка пластических задач относительно деформаций

Обычно, модельные уравнения, описывающие процесс линейного деформирования твердых тел, состоит из [1, 6, 9]: уравнения равновесия

$$\sum_{j=1}^3 \sigma_{ij,j} + X_i = 0, \quad x_i \in V, \quad i = 1, 2, 3, \quad (1)$$

закона Гука

$$\sigma_{ij} = \lambda \theta \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}, \quad (2)$$

соотношения Коши

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (3)$$

и граничных условий

$$u_i|_{\Sigma_1} = u_i^o, \quad \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} n_j|_{\Sigma_2} = S_i^o, \quad (4)$$

где σ_{ij} – тензор напряжений, ε_{ij} – тензор деформаций, u_i – компоненты перемещений, X_i – объёмные силы, λ, μ – упругие постоянные Ламе, δ_{ij} – символ Кронекера, n_j – внешняя нормаль к поверхности Σ_2 , S_i^o – поверхностная нагрузка.

В краевой задаче (1-4), можно рассматривать вместо соотношения (2) следующую нелинейную связь между тензором напряжений и деформаций, так называемую деформационную теорию пластичности Ильюшина [10, 11]:

$$\sigma_{ij} = \sigma \delta_{ij} + \frac{\sigma_u}{\varepsilon_u} e_{ij}, \quad (5)$$

где

$$\sigma = K\theta, \quad K = \lambda + \frac{2}{3}\mu, \quad (6)$$

$$\sigma_u = \sigma_u(\varepsilon_u), \quad (7)$$

где σ_u, ε_u – интенсивности тензора напряжений и деформации, соответственно, e_{ij} – девиатор тензора деформаций

$$e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{\theta}{3}, \quad \theta = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}, \quad (8)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (9)$$

При соотношениях (9), деформационную теорию пластичности (5-7), иногда называют теорией малых упругопластических деформаций Ильюшина [10].

Известно, что соотношение (7) может быть представлено в следующем виде [11, 15]

$$\sigma_u = \begin{cases} 2\mu\varepsilon_u & \text{при } \varepsilon_u < \varepsilon_u^*, \\ 2\mu\varepsilon_u^* + 2\mu'(\varepsilon_u - \varepsilon_u^*) & \text{при } \varepsilon_u \geq \varepsilon_u^*, \end{cases} \quad (10)$$

где ε_u^* – предел упругости [10, 11].

Соотношение (10) при $\varepsilon_u \geq \varepsilon_u^*$ может быть записано в следующем виде [3]:

$$\sigma_u = 2\mu\varepsilon_u + 2(\mu - \mu')(\varepsilon_u - \varepsilon_u^*) \text{ при } \varepsilon_u \geq \varepsilon_u^*. \quad (11)$$

Подставляя соотношения (11) в (5), можно найти определяющее соотношение деформационной теории в случае кусочно-линейной диаграммы деформирования т.е.

$$\sigma_{ij} = \begin{cases} \lambda\theta\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} & \text{при } \varepsilon_u < \varepsilon_u^*, \\ \lambda\theta\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} - 2(\mu - \mu')\left(1 - \frac{\varepsilon_u^*}{\varepsilon_u}\right)e_{ij} & \text{при } \varepsilon_u \geq \varepsilon_u^*. \end{cases} \quad (12)$$

Таким образом, в краевой задаче (1-4), вместо (6) рассматривая (12) получим нелинейное модельное уравнение, описывающее нелинейный процесс деформирования твердых тел [12]:

$$\sum_{j=1}^3 \sigma_{ij,j} + X_i = 0, \quad x_i \in V, \quad i = 1, 2, 3, \quad (13)$$

$$\sigma_{ij} = \begin{cases} \lambda\theta\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} & \text{при } \varepsilon_u < \varepsilon_u^*, \\ \lambda\theta\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} - 2(\mu - \mu')\left(1 - \frac{\varepsilon_u^*}{\varepsilon_u}\right)e_{ij} & \text{при } \varepsilon_u \geq \varepsilon_u^*, \end{cases} \quad (14)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (15)$$

$$u_i|_{\Sigma_1} = u_i^o, x_i \in \sum_1, \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} n_j|_{\Sigma_2} = S_i^o, x_i \in \sum_2. \quad (16)$$

Из соотношения Коши (15), можно найти следующие выражения:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij,kl} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^3 u_i}{\partial x_j \partial x_k \partial x_l} + \frac{\partial^3 u_j}{\partial x_i \partial x_k \partial x_l} \right), \quad \varepsilon_{kl,ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^3 u_k}{\partial x_l \partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial^3 u_l}{\partial x_k \partial x_i \partial x_j} \right), \\ \varepsilon_{ik,jl} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^3 u_i}{\partial x_k \partial x_j \partial x_l} + \frac{\partial^3 u_k}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l} \right), \quad \varepsilon_{jl,ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^3 u_j}{\partial x_l \partial x_i \partial x_k} + \frac{\partial^3 u_l}{\partial x_j \partial x_i \partial x_k} \right), \end{aligned} \quad (17)$$

нетрудно проверить, что соотношения (17) тождественно удовлетворяют следующим так называемым уравнениям совместности деформаций Сен-Венана [3, 8]

$$\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} - \varepsilon_{ik,jl} - \varepsilon_{jl,ik} = 0. \quad (18)$$

В уравнении (18) общее количество уравнений равно 81, из них только 6 являются независимыми [1, 4, 5]. Для получения этих уравнений производим свёртывание по индексам k, l , т.е., умножаем (18) на δ_{kl} , после несложных преобразований уравнение совместности деформаций можно привести к следующему виду [6, 8, 9]:

$$\nabla^2 \varepsilon_{ij} + \theta_{,ij} - \varepsilon_{ik,kj} - \varepsilon_{jk,ki} = 0, \quad \theta = \varepsilon_{kk}. \quad (19)$$

Подставляя (14) в (13) уравнение равновесия относительно деформаций имеет следующий вид

$$\lambda \theta_{,i} + 2\mu \varepsilon_{ij,j} - P e_{ij,j} + X_i = 0, \quad (20)$$

$$\text{где } P = \begin{cases} 0 & \text{при } \varepsilon_u < \varepsilon_u^*, \\ -2(\mu - \mu')(1 - \frac{\varepsilon_u}{\varepsilon_u^*}) & \text{при } \varepsilon_u \geq \varepsilon_u^*. \end{cases}$$

Теперь переходим к постановке краевой задачи упруго-пластичности в деформациях. Для этого напишем уравнение равновесия относительно деформаций [3, 6, 7] которое имеет следующий вид (20)

из уравнения (20) найдем $\varepsilon_{ij,j}$

$$-\varepsilon_{ij,j} = \frac{\lambda}{2\mu} \theta_{,i} - \frac{P e_{ij,j}}{2\mu} + \frac{1}{2\mu} X_i, \quad (21)$$

заменяя индекс j на k в уравнении (21)

$$-\varepsilon_{ik,k} = \frac{\lambda}{2\mu} \theta_{,i} - \frac{P e_{ik,k}}{2\mu} + \frac{1}{2\mu} X_i, \quad (22)$$

поменяв индексы i на j , найдём следующее выражение

$$-\varepsilon_{jk,k} = \frac{\lambda}{2\mu} \theta_{,j} - \frac{P e_{jk,k}}{2\mu} + \frac{1}{2\mu} X_j, \quad (23)$$

дифференцируя (22) относительно j и (23) относительно i получим следующие соотношения

$$\begin{aligned} -\varepsilon_{ik,kj} &= \frac{\lambda}{2\mu} \theta_{,ij} - \frac{P e_{ik,kj}}{2\mu} + \frac{1}{2\mu} X_{i,j}, \\ -\varepsilon_{jk,ki} &= \frac{\lambda}{2\mu} \theta_{,ji} - \frac{P e_{jk,ki}}{2\mu} + \frac{1}{2\mu} X_{j,i}, \end{aligned} \quad (24)$$

сложив эти два соотношения в (24), получим следующее уравнение

$$-\varepsilon_{ik,kj} - \varepsilon_{jk,ki} = \frac{\lambda}{\mu}\theta_{,ij} - \frac{P}{2\mu}(e_{ik,kj} + e_{jk,ki}) + \frac{1}{2\mu}(X_{i,j} + X_{j,i}), \quad (25)$$

подставляя (25) в (19), найдем дифференциальное уравнение относительно деформаций [3, 6, 7]

$$\mu\nabla^2\varepsilon_{ij} + (\lambda + \mu)\theta_{,ij} - \frac{P}{2}(e_{ik,kj} + e_{jk,ki}) + \frac{1}{2}(X_{i,j} + X_{j,i}) = 0. \quad (26)$$

Дифференциальное уравнение (26) можно назвать дифференциальным уравнением совместности, или дифференциальным уравнением Сен-Венана, в отличие от условия совместности деформаций Сен-Венана [2].

Напомним, что (26) является преобразованной формой условия совместности деформаций, с помощью закона Гука и уравнения равновесия. Таким образом вместо (15) можно рассматривать (26).

Присоединяя к дифференциальному уравнению Сен-Венана (26), уравнение равновесия (20) и граничные условия выраженные относительно деформаций [9], т.е.,

$$\lambda\theta_{,i} + 2\mu\varepsilon_{ij,j} - Pe_{ij,j} + X_i = 0, \quad (27)$$

$$(\lambda\theta\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij})n_j|_{\Sigma_2} = S_i + Pe_{ij}n_j|_{\Sigma_2}, \quad (28)$$

получим краевую задачу теории пластичности в деформациях [4].

Заметим, что краевая задача состоит из шести дифференциальных уравнений Сен-Венана, и трех уравнений равновесия с тремя граничными условиями. Таким образом, для определения шести неизвестных компонентов тензора деформаций, мы имеем девять уравнений с тремя граничными условиями. Ясно, что количество дифференциальных уравнений переопределено, а граничных условий не хватает. Для того, чтобы получить корректную краевую задачу, к обычным трем поверхностным граничным условиям, согласно работам [1, 9, 10] необходимо присоединить еще три “дополнительных” граничных условий на основе уравнения равновесия т.е.

$$\lambda\theta_{,i} + 2\mu\varepsilon_{ij,j} - Pe_{ij,j} + X_i|_{\Sigma} = 0. \quad (29)$$

Теперь переходим к обсуждению плоских краевых ($\varepsilon_{33} = \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0$) задач теории упругости, исходя из краевой задачи (26-29) (при отсутствии массовых сил). Они состоят из уравнений равновесия относительно деформаций [6]

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu)\frac{\partial\varepsilon_{11}}{\partial x} + \lambda\frac{\partial\varepsilon_{22}}{\partial x} + 2\mu\frac{\partial\varepsilon_{12}}{\partial y} - f_1 &= 0, \\ (\lambda + 2\mu)\frac{\partial\varepsilon_{22}}{\partial y} + \lambda\frac{\partial\varepsilon_{11}}{\partial y} + 2\mu\frac{\partial\varepsilon_{12}}{\partial x} - f_2 &= 0, \end{aligned} \quad (30)$$

из уравнения совместности деформаций [5]

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2\varepsilon_{11}}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2\varepsilon_{11}}{\partial y^2} + (\lambda + \mu)\frac{\partial^2\varepsilon_{22}}{\partial x^2} - f_3 &= 0, \\ (\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2\varepsilon_{22}}{\partial y^2} + \mu\frac{\partial^2\varepsilon_{22}}{\partial x^2} + (\lambda + \mu)\frac{\partial^2\varepsilon_{11}}{\partial y^2} - f_4 &= 0, \\ \mu\left(\frac{\partial^2\varepsilon_{12}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varepsilon_{12}}{\partial y^2}\right) + (\lambda + \mu)\left(\frac{\partial^2\varepsilon_{11}}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2\varepsilon_{22}}{\partial x\partial y}\right) - f_5 &= 0, \end{aligned} \quad (31)$$

где $f_1 = \begin{cases} 2(\mu - \mu') \left(1 - \frac{\varepsilon_u^*}{\varepsilon_u}\right) \left(\frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial z}\right) & \text{при } \varepsilon_u \geq \varepsilon_u^*, \\ 0 & \text{при } \varepsilon_u < \varepsilon_u^*, \end{cases}$ аналогично найдём для остальных нелинейных частей.

В работе [8, 10, 12] показано, что с помощью уравнения равновесия (30) можно показать, что первая группа уравнений совместности деформаций (нормальные компоненты тензора деформаций) (31) эквивалентны первым трем уравнениям совместности деформаций [11]. Отсюда, можно заключить, что уравнение (31) также может быть использовано в качестве условия совместности деформаций [12].

Уравнение равновесия (30) совместно с дифференциальным уравнением совместности деформаций (31) составляет краевую задачу в деформациях (*задача А*)

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial x} + 2\mu \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial y} - f_1 &= 0, \\ (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial y} + 2\mu \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x} - f_2 &= 0, \\ \mu \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial y^2} \right) + (\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x \partial y} \right) - f_3 &= 0. \end{aligned} \quad (32)$$

При выводе дифференциальных уравнений (32), уравнения равновесия были использованы в продифференцированном виде. Поэтому, при формулировке краевых задач, использование продифференцированных уравнений равновесия не вызывают сомнения. Таким образом, получим ещё одну краевую задачу теории пластичности в деформациях (*Задача В*)

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x^2} + \lambda \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x^2} + 2\mu \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial}{\partial x} f_1 &= 0, \\ (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial y^2} + \lambda \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial y^2} + 2\mu \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial}{\partial y} f_2 &= 0, \\ \mu \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial y^2} \right) + (\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x \partial y} \right) - f_3 &= 0, \end{aligned} \quad (33)$$

соответствующими граничными и дополнительными условиями на основе уравнений равновесия.

3 Численные модели и методы их решения

Теперь переходим построению численных моделей, рассмотренных задач. Построены конечно-разностные уравнения для двумерных нелинейных модельных уравнений сформулированных относительно деформаций. Построены разностные схемы для двумерных краевых задач теории пластичности. Наши исследования показывают, что для численного решения линейных и нелинейных краевых задач теории упругости и пластичности, удобным и достаточным является метод простой итерации, метод Зейделя и метод переменных направлений. Для итерационных процессов, организованных на основе конечно-разностных уравнений теории упругости и пластичности разрешенных относительно диагональных элементов, удовлетворяются условия преобладания диагональных элементов.

Для построения конечно-разностной схемы длины сторон прямоугольной области разделяя на N_k можно найти, что $h_k = l_k / N_k$, где $k = 1, 2$. Тогда узловые точки имеют вид

$$x_i = h_1 \cdot i, \quad i = \overline{0, N_1}, \quad y_j = h_2 \cdot j, \quad j = \overline{0, N_2}.$$

Далее, заменяя производные в уравнениях (33) соответствующими разностными отношениями, получим следующие конечно-разностные уравнения при $\varepsilon_u \geq \varepsilon_u^*$ [6, 9, 10, 14] для задачи Б.

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\varepsilon_{i+1,j}^{11} - 2\varepsilon_{i,j}^{11} + \varepsilon_{i-1,j}^{11}}{h_1^2} + \lambda \frac{\varepsilon_{i+1,j}^{22} - 2\varepsilon_{i,j}^{22} + \varepsilon_{i-1,j}^{22}}{h_1^2} + 2\mu \frac{\varepsilon_{i,j+1}^{12} - 2\varepsilon_{i,j}^{12} + \varepsilon_{i,j-1}^{12}}{h_2^2} - 2(\mu - \mu') \left(1 - \frac{\varepsilon_u^*}{\varepsilon_u}\right) \left(\frac{2(\varepsilon_{i+1,j}^{11} - 2\varepsilon_{i,j}^{11} + \varepsilon_{i-1,j}^{11})}{3h_1^2} - \frac{\varepsilon_{i+1,j}^{22} - 2\varepsilon_{i,j}^{22} + \varepsilon_{i-1,j}^{22}}{3h_1^2}\right) = 0. \quad (34)$$

Аналогичным образом найдём конечно-разностные уравнения для остальных уравнений.

Для решения разностных уравнений (34) удобно применять метод прогонки последовательно по соответствующим осям [11]. Для чего уравнение (34) записываем в следующем виде, т.е.,

$$\begin{cases} \alpha_{01}\varepsilon_{0,j}^{11} + \beta_{01}\varepsilon_{1,j}^{11} = \gamma_{01}, \\ a_i\varepsilon_{i+1,j}^{11} + b_i\varepsilon_{i,j}^{11} + c_i\varepsilon_{i-1,j}^{11} = f_{i,j}^x, \\ \alpha_{02}\varepsilon_{n-1,j}^{11} + \beta_{02}\varepsilon_{n,j}^{11} = \gamma_{02}, \end{cases} \quad (35)$$

где

$$a_i = \frac{\lambda + 2\mu}{h_1^2}, \quad b_i = \frac{-2(\lambda + 2\mu)}{h_1^2}, \quad c_i = \frac{\lambda + 2\mu}{h_1^2}, \\ f_{i,j}^x = -\lambda \frac{\varepsilon_{i+1,j}^{22} - 2\varepsilon_{i,j}^{22} + \varepsilon_{i-1,j}^{22}}{h_1^2} - 2\mu \frac{\varepsilon_{i,j+1}^{12} - 2\varepsilon_{i,j}^{12} + \varepsilon_{i,j-1}^{12}}{h_2^2} + 2(\mu - \mu') \left(1 - \frac{\varepsilon_u^*}{\varepsilon_u}\right) \left(\frac{2(\varepsilon_{i+1,j}^{11} - 2\varepsilon_{i,j}^{11} + \varepsilon_{i-1,j}^{11})}{3h_1^2} - \frac{\varepsilon_{i+1,j}^{22} - 2\varepsilon_{i,j}^{22} + \varepsilon_{i-1,j}^{22}}{3h_1^2}\right).$$

Аналогичным образом остальные уравнения (33) могут быть риведены к трём диагональному виду, с различными коэффициентами.

4 Экспериментальные задачи

В качестве экспериментальной задачи была взята следующая задача: пусть прямоугольная пластина размером (2а,2b) находится под действием одноосной нагрузки параболической формы, приложенной на противоположных сторонах перпендикулярных к оси [8, 12]. Остальные грани свободны от нагрузок т.е.

$$\text{при } x = \pm a : \sigma_{11} = S_0 \left(1 - \frac{y^2}{a^2}\right), \quad \sigma_{12} = 0, \quad (36)$$

$$\text{при } y = \pm b : \sigma_{22} = 0, \quad \sigma_{21} = 0. \quad (37)$$

Для рассматриваемой задачи, в работе Тимошенко-Гудьера [12], на основе условия минимизации энергии деформации с использованием функции напряжений Эри, были найдены следующие выражения для компонентов тензора напряжений

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= S \left(1 - \frac{y^2}{a^2}\right) - 0.1702S \left(1 - \frac{3y^2}{a^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^2, \\ \sigma_{22} &= -0.1702S \left(1 - \frac{3x^2}{a^2}\right) \left(1 - \frac{y^2}{a^2}\right)^2, \\ \sigma_{12} &= -0.6805S \frac{xy}{a^2} \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \left(1 - \frac{y^2}{a^2}\right). \end{aligned} \quad (38)$$

Исходные данные имеют следующие безразмерные значения:

$$\lambda = 0.8, \mu = 0.5, l_1 = 2a, l_2 = 2b, \\ a = b = 1, N_1 = N_2 = 10, \mu' = 0.3, \varepsilon_u^* = 0.32, S = 1.$$

В таблице 1 сравнены значения напряжений σ_{11} , в середине пластины, полученные по решению пластических задач сформулированных относительно перемещений и деформаций, а также с результатами Тимошенко-Гудьера [12] при $\varepsilon_u < \varepsilon_u^*$

Таблица 1 Сравнение тензора напряжений σ_{11} при $y = 0$

Задачи	$x = -1$	$x = -0.8$	$x = -0.6$	$x = -0.4$	$x = -0.2$	$x = 0$
<i>Тимошенко-Гудьер</i>	1.0000	0.9779	0.9303	0.8788	0.8431	0.8298
<i>В перемещениях</i>	0.9925	0.8791	0.8538	0.8214	0.7963	0.8214
<i>В деформациях</i>	1.0000	0.9818	0.9818	0.9818	0.9818	0.9818

Сравнения напряжений σ_{11} показывают, что численные результаты, полученные по итерационному методу относительно перемещений и методу прогонки относительно деформаций очень близки, чем обеспечивается справедливость сформулированной пластической задачи в деформациях, а также достоверность полученных численных результатов. По рис. 1 можно сравнить графики распределения напряжений σ_{11} в середине $x = 0$ плоской пластины по результатам Тимошенко-Гудьера (II) и задачи в перемещениях (III) и а также задачи в деформациях (I). На рис. 1 желтой кривой показана часть нагрузки параболической формы, приложенной по противоположным граням пластины по оси OX .

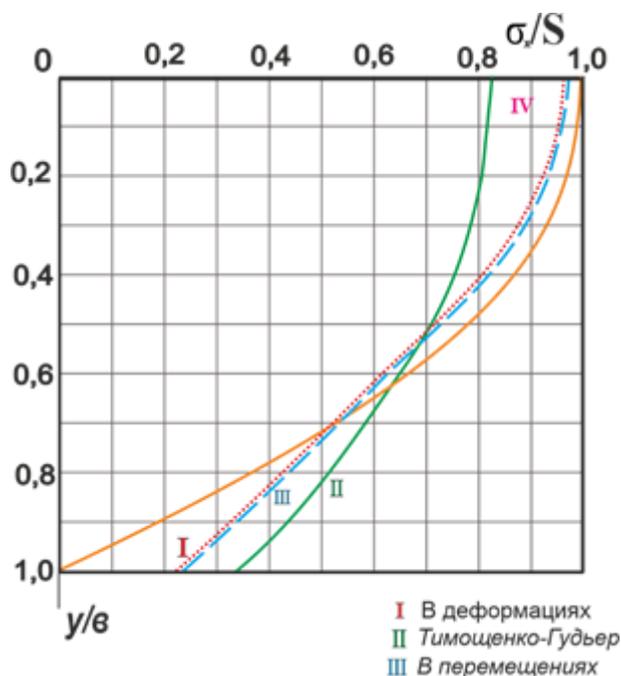


Рис. 1 Распределение напряжений σ_{11} по результатам задачи о растяжении пластины по параболической нагрузке: в деформациях(I) и перемещениях (III), а также Тимошенко-Гудьера (II).

Таблица 2 Сравнение тензора напряжений σ_{11} при $y = 0$

Пластические задачи	$x = -1$	$x = -0.8$	$x = -0.6$	$x = -0.4$	$x = -0.2$	$x = 0$
<i>В перемещениях</i>	0.9919	0.8339	0.7827	0.7417	0.7145	0.7051
<i>В деформациях</i>	1.0000	0.9457	0.9275	0.9229	0.9220	0.9221

В таблице 2 приведены значения напряжений, полученные по результатам численного решения пластических задач о растяжении прямоугольной пластины, сформулированных относительно деформаций и перемещений при условии $\varepsilon_u \geq \varepsilon_u^*$. Заметим, что значения напряжений вычисленные по результатам краевой задачи в перемещениях заниженные, что, по-видимому, происходит в результате погрешности аппроксимации граничных условий. В случае краевых задач в деформациях, граничные условия удовлетворяются точно.

5 Заключение

Сформулирована плоская задача теории пластичности относительно деформаций в рамках условий совместности Сен-Венана. Для сравнения численных результатов также рассмотрена пластическая задача о растяжении прямоугольной пластины в перемещениях. Сеточные уравнения относительно деформаций и перемещений для прямоугольной пластины составлены конечно-разностным методом. Разностные уравнения относительно перемещений и деформаций решены, соответственно, итерационным методом и методом переменных направлений. Сравнением численных результатов показана справедливость сформулированной пластической задачи относительно деформаций. Разработаны численные алгоритмы и соответствующее программное обеспечение для решения упругопластических краевых задач относительно перемещений и деформаций.

Литература

- [1] *Ilyushin A.A.* Plasticity. Elastoplastic deformations. – Moscow, 1948. (in Russian).
- [2] *Kachanov L.M.* Fundamentals of the theory of plasticity. – M.: Nauka, 1969. – 420 p.
- [3] *Novatski V.* Theory of elasticity. – M.: Mir, 1975. – 872 p.
- [4] *Novatsky V.* Dynamic problems of thermoelasticity. – M.: Mir, 1970. – 256 p.
- [5] *Li S., Gupta A., Markenscoff X.* Conservation laws of linear elasticity in stress formulations // Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. – 2005. – Vol. 461. – P. 99-116. – doi: <http://dx.doi.org/10.1098/rspa.2004.1347>.
- [6] *Khaldjigitov A.A., Djumayozov U.Z.* Numerical Solution of the Two-Dimensional Elasticity Problem in Strains // Mathematics and Statistics. – 2022. – Vol. 10, № 5. – P. 1081-1088. – doi: <http://dx.doi.org/10.13189/ms.2022.100518>.
- [7] *Borodachev N.M.* Three-dimensional problem of the theory of elasticity in strains // Strength of Materials. – 1995. – Vol. 27. – P. 296-299. – doi: <http://dx.doi.org/10.1007/bf02208501>.
- [8] *Turimov D., Khaldjigitov A., Djumayozov U., Kim W.* Formulation and Numerical Solution of Plane Problems of the Theory of Elasticity in Strains // Mathematics. – 2024. – Vol. 12, № 1. – Art. no. 71. – doi: <http://dx.doi.org/10.3390/math12010071>.
- [9] *Pobedrya B.E.* Numerical methods in the theory of elasticity and plasticity. – M.: Publishing House of Moscow State University, 1996. – 343 p.

- [10] *Pobedrya B.E.* Deformation theory of plasticity of anisotropic media // PMM. – 1984. – Vol. 48, № 1. – P. 29-37.
- [11] *Samarski A.A., Nikolaev E.S.* Methods for solving grid equations. – M.: Science, 1978. – 592 p.
- [12] *Timoshenko S.P., Goodier J.N.* Theory of Elasticity. – McGraw-Hill, 1970. – 752 p.
- [13] *Khaldjigitov A., Djumayozov U.* Model Equations of the Theory of Elasticity in Strains: Classical and New Formulations // E3S Web of Conferences. – 2024. – Vol. 497. – doi: <http://dx.doi.org/10.1051/e3sconf/202449702015>.
- [14] *Khaldjigitov A.A., Djumayozov U.Z., Sagdullayeva D.A.* Numerical Solution of Coupled Thermo-Elastic-Plastic Dynamic Problems // Mathematical Modelling of Engineering Problems. – 2021. – Vol. 8, № 4. – P. 510-518. – doi: <http://dx.doi.org/10.18280/mmep.080403>.
- [15] *Khaldjigitov A.A., Kalandarov A.A., Djumayozov U.Z.* Numerical modeling of coupled problems of thermo-plasticity on non-uniform meshes // AIP Conference Proceedings. – 2022. – doi: <http://dx.doi.org/10.1063/5.0114013>.
- [16] *Abirov R.A., Khusanov B.E., Sagdullaeva D.A.* Numerical modeling of the problem of indentation of elastic and elastic-plastic massive bodies // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering. – 2020. – Vol. 971. – P. 1-9. – doi: <http://dx.doi.org/10.1088/1757-899X/971/3/032017>.
- [17] *Abdikarimov R., Amabili M., Vatin N.I., Khodzhaev D.* Dynamic stability of orthotropic viscoelastic rectangular plate of an arbitrarily varying thickness // Applied Sciences. – 2021. – Vol. 11, № 13. – doi: <http://dx.doi.org/10.3390/app11136029>.
- [18] *Borodachev N.M.* Stress solutions to the three-dimensional problem of elasticity // International Applied Mechanics. – 2006. – Vol. 42. – P. 849-878. – doi: <http://dx.doi.org/10.1007/s10778-006-0154-4>.
- [19] *Ike C.C.* On Maxwell's Stress Functions for Solving Three Dimensional Elasticity Problems in the Theory of Elasticity // JCAMECH. – 2018. – Vol. 49, № 2. – P. 342-350. – doi: <http://dx.doi.org/10.22059/JCAMECH.2018.266787.330>.
- [20] *Георгиевский Д.В.* Общие решения неэквивалентных классической систем теории упругости в напряжениях // Вестник Московского государственного университета. – 2012. – № 6. – С. 26-32.
- [21] *Andrianov I., Topol H.* Chapter 6 – Compatibility conditions: number of independent equations and boundary conditions // Mechanics and Physics of Structured Media. – 2022. – P. 123-140. – doi: <http://dx.doi.org/10.1016/b978-0-32-390543-5.00011-6>.
- [22] *Akhmedov A., Kholmanov N.* Problems of the theory of elasticity in stresses // AIP Conference Proceedings. – 2022. – Vol. 2637(1). – P. 1-10. – doi: <http://dx.doi.org/10.1063/5.0119144>.
- [23] *Akhmedov A.B., Kholmatov T.* Solution of some problems on the equilibrium of a parallelepiped in stresses // Doklady Akademii nauk UzSSR. – 1982. – Vol. 6. – P. 7-9.
- [24] *Gao Y., Zhao B.S.* The Refined Theory of Thermoelastic Rectangular Plates // Journal of Thermal Stresses. – 2007. – Vol. 32(5). – P. 505-520. – doi: <http://dx.doi.org/10.1080/01495730701212773>.
- [25] *Kartashev E.* Model representations of heat shock in terms of thermal elasticity // Russian Technological Journal. – 2020. – Vol. 8(2). – P. 85-108.

UDC 519.63

NUMERICAL MODELING OF PLANE ELASTOPLASTIC PROBLEMS IN STRAINS

**Djumayozov U.Z., Rakhmonova R.A., Abdirakhmonova M.N.*

**djumayozov@bk.ru*

Samarkand branch of Tashkent University of Information Technologies,
140100, st. Shokhrukh Mirzo 47A, Samarkand, Uzbekistan.

In this article, within the framework of the Saint-Venant compatibility conditions, plane problems of plasticity theory formulated in terms of strains are presented, aimed at investigating the stress-strain state of a rectangular plate under elastoplastic deformation. The numerical implementation of the formulated problem is carried out using the finite difference method, on the basis of which grid equations for the displacement and strain components at the nodes of the rectangular computational domain are constructed. Spatial discretization enables the transition from the differential form of the boundary-value problem to a system of algebraic finite-difference equations suitable for stable and efficient numerical solution. In the development of the finite-difference scheme, boundary conditions of various types are taken into account, adequately reflecting real loading regimes and fixation conditions of the plate. The system of finite-difference equations with respect to strains is solved using the alternating direction method, which ensures an increase in computational efficiency and improved convergence when solving problems with pronounced nonlinearity. The application of this method contributes to reducing approximation errors while maintaining high accuracy of the obtained results. A detailed comparison of numerical solutions obtained in formulations based on displacements and strains under identical boundary and loading conditions is performed. The analysis demonstrates their qualitative and quantitative agreement, manifested in the close correspondence of strain and stress distributions throughout the entire domain of the rectangular plate.

Keywords: compatibility condition, plasticity, strains, displacement, finite-difference equations, stress, elimination and iteration methods.

Citation: Djumayozov U.Z., Rakhmonova R.A., Abdirakhmonova M.N. 2026. Numerical Modeling of Plane Elastoplastic Problems in Strains. *Problems of Computational and Applied Mathematics*. 1(71): 71-81.

DOI: https://doi.org/10.71310/pcam.1_71.2026.06

HISOBLASH VA AMALIY MATEMATIKA MUAMMOLARI

ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ
И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
PROBLEMS OF COMPUTATIONAL
AND APPLIED MATHEMATICS



ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

№ 1(71) 2026

Журнал основан в 2015 году.

Издается 6 раз в год.

Учредитель:

Научно-исследовательский институт развития цифровых технологий и
искусственного интеллекта.

Главный редактор:

Равшанов Н.

Заместители главного редактора:

Арипов М.М., Шадиметов Х.М., Ахмедов Д.Д.

Ответственный секретарь:

Убайдуллаев М.Ш.

Редакционный совет:

Азамов А.А., Алоев Р.Д., Амиргалиев Е.Н. (Казахстан), Арушанов М.Л.,
Бурнашев В.Ф., Джумаёзов У.З., Загребина С.А. (Россия), Задорин А.И. (Россия),
Игнатъев Н.А., Ильин В.П. (Россия), Иманкулов Т.С. (Казахстан),
Исмагилов И.И. (Россия), Кабанихин С.И. (Россия), Карачик В.В. (Россия),
Курбонов Н.М., Маматов Н.С., Мирзаев Н.М., Мухамадиев А.Ш., Назирова Э.Ш.,
Нормуродов Ч.Б., Нуралиев Ф.М., Опанасенко В.Н. (Украина),
Расулмухамедов М.М., Садуллаева Ш.А., Старовойтов В.В. (Беларусь),
Хаётов А.Р., Халджигитов А., Хамдамов Р.Х., Хужаев И.К., Хужаеров Б.Х.,
Эшмаматова Д.Б., Дустмуродова Ш.Ж., Чье Ен Ун (Россия),
Шабозов М.Ш. (Таджикистан), Dimov I. (Болгария), Li Y. (США),
Mascagni M. (США), Min A. (Германия), Singh M. (Южная Корея).

Журнал зарегистрирован в Агентстве информации и массовых коммуникаций при
Администрации Президента Республики Узбекистан.

Свидетельство №0856 от 5 августа 2015 года.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

При перепечатке материалов ссылка на журнал обязательна.

За точность фактов и достоверность информации ответственность несут авторы.

Адрес редакции:

100125, г. Ташкент, м-в. Буз-2, 17А.

Тел.: +(998) 71 263-41-98.

Э-почта: journals@airi.uz.

Веб-сайт: <https://journals.airi.uz>.

Дизайн и вёрстка:

Шарипов Х.Д.

Отпечатано в типографии НИИ РЦТИИ.

Подписано в печать 25.02.2026 г.

Формат 60x84 1/8. Заказ №1. Тираж 100 экз.

PROBLEMS OF COMPUTATIONAL AND APPLIED MATHEMATICS

No. 1(71) 2026

The journal was established in 2015.
6 issues are published per year.

Founder:

Digital Technologies and Artificial Intelligence Development Research Institute.

Editor-in-Chief:

Ravshanov N.

Deputy Editors:

Aripov M.M., Shadimetov Kh.M., Akhmedov D.D.

Executive Secretary:

Ubaydullaev M.Sh.

Editorial Council:

Azamov A.A., Alov R.D., Amirgaliev E.N. (Kazakhstan), Arushanov M.L.,
Burnashev V.F., Djumayozov U.Z., Zagrebina S.A. (Russia), Zadorin A.I. (Russia),
Ignatiev N.A., Ilyin V.P. (Russia), Imankulov T.S. (Kazakhstan), Ismagilov I.I. (Russia),
Kabanikhin S.I. (Russia), Karachik V.V. (Russia), Kurbonov N.M., Mamatov N.S.,
Mirzaev N.M., Mukhamadiev A.Sh., Nazirova E.Sh., Normurodov Ch.B., Nuraliev F.M.,
Opanasenko V.N. (Ukraine), Sadullaeva Sh.A., Starovoitov V.V. (Belarus),
Khayotov A.R., Khaldjigitov A., Khamdamov R.Kh., Khujaev I.K., Khujayorov B.Kh.,
Eshmamatova D.B., Dustmurodova Sh.J., Chye En Un (Russia),
Shabozov M.Sh. (Tajikistan), Dimov I. (Bulgaria), Li Y. (USA), Mascagni M. (USA),
Min A. (Germany), Singh M. (South Korea).

The journal is registered by Agency of Information and Mass Communications under the
Administration of the President of the Republic of Uzbekistan.

Certificate of Registration No. 0856 of 5 August 2015.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

At a reprint of materials the reference to the journal is obligatory.
Authors are responsible for the accuracy of the facts and reliability of the information.

Address:

100125, Tashkent, Buz-2, 17A.

Tel.: +(998) 71 263-41-98.

E-mail: journals@airi.uz.

Web-site: <https://journals.airi.uz>.

Layout design:

Sharipov Kh.D.

DTAIRI printing office.

Signed for print 25.02.2026

Format 60x84 1/8. Order No. 1. Print run of 100 copies.

Содержание

<i>Равшанов Н., Насруллаев П., Боборахимов Б.</i> Математическое моделирование рассеивания вредных веществ, выбрасываемых в атмосферу в условиях сложной городской среды	5
<i>Яхшибаев Д.С.</i> Возникновение явления упругого возврата при нестационарном течении реологически сложной жидкости в плоском канале в рамках модели Oldroyd-B	16
<i>Равшанов Н., Боборахимов Б.И., Бердиёров Ш.Ш.</i> Численное моделирование процессов фильтрации и транспорта в цилиндрическом пористом фильтре с использованием метода конечных объемов	28
<i>Зарипова А.Р.</i> Свойства решений систем уравнений теплопроводности, связанных с нелинейными граничными условиями	43
<i>Курбоннов Н., Боборахимов Б., Хажназарова Д., Муродуллаев Б.</i> Моделирование процесса геофильтрации и анализ движения воды на орошаемых земельных участках	57
<i>Джумаёзов У.З., Рахмонова Р.А., Абдирахмонова М.Н.</i> Численное моделирование плоских упругопластических задач в деформациях	71
<i>Мухсинов Е.М., Хакимов Р.И.</i> О разрешимости задачи преследования для дифференциальных игр с дробными производными Хильфера	82
<i>Азамов С.С., Бекмуродова Д.Б.</i> Нахождение экстремальной функции функционала погрешности в пространстве периодических функций	94
<i>Далабаев У. Хасанова Д.</i> Решение задачи Дирихле методом перемещаемого узла	103
<i>Муродов С.К.</i> Численное моделирование краевой задачи для двухпараметрического сингулярно возмущённого дифференциального уравнения с использованием спектрально-сеточного метода	113
<i>Адылова Ф.Т., Давронов Р.Р.</i> Генерации графов заданной структуры: от глубоких нейронных сетей к квантовым моделям (на примере создания новых лекарств)	123

Contents

<i>Ravshanov N., Nasrullaev P., Boborakhimov B.</i> Mathematical modeling of the dispersion of harmful substances released into the atmosphere in complex urban environments	5
<i>Yakhshibaev D.S.</i> The occurrence of the phenomenon of elastic return during unsteady flow of a rheologically complex fluid in a flat channel within the Oldroyd-B model	16
<i>Ravshanov N., Boborakhimov B.I., Berdiyev Sh.Sh.</i> Numerical modeling of filtration and transport processes in a cylindrical porous filter using the finite volume method	28
<i>Zaripova A.R.</i> Properties of solutions to systems of heat conduction equations with nonlinear boundary conditions	43
<i>Kurbonov N., Boborakhimov B., Khaknazarova D., Murodullaev B.</i> Numerical modeling of the geofiltration process on irrigated lands taking into account physical factors	57
<i>Djumayozov U.Z., Rakhmonova R.A., Abdirakhmonova M.N.</i> Numerical Modeling of Plane Elastoplastic Problems in Strains	71
<i>Mukhsinov E.M., Hakimov R.I.</i> On the solvability of the pursuit problem for differential games with fractional Hilfer derivatives	82
<i>Azamov S.S., Bekmurodova D.B.</i> Finding the extremum of the error functional in the space of periodic functions	94
<i>Dalabaev U. Khasanova D.</i> Solution of the Dirichlet problem by the moving node method	103
<i>Murodov S.K.</i> Numerical modeling of the boundary value problem for a two-parameter singularly perturbed differential equation using the spectral-grid method	113
<i>Adilova F.T., Davronov R.R.</i> Graph generation with a prescribed structure: from deep neural networks to quantum models (a case study of novel drug design)	123