УДК 517.957

СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ, СВЯЗАННЫХ С НЕЛИНЕЙНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Зарипова А.Р.
azizazaripova1990@mail.ru
Каршинский государственный университет,
180119, Узбекистан, г. Карши, улица Кучабаг, дом 17.

Данная статья посвящена исследованию свойств решений системы уравнений теплопроводности, связанной с нелинейными граничными условиями, построению автомодельных решений и нахождению их асимптотик, а также построению численных решений. На основе автомодельного анализа найдены условия глобальности решений во времени и формирования неограниченных решений. В частности, найдены значения критической экспоненты типа Фуджиты и критической экспоненты глобальности решения. Для решений системы уравнений теплопроводности, связанной с нелинейными граничными условиями, получены нижние и верхние оценки. Также предложен выбор начального приближения для итерационного процесса при численном решении системы уравнений теплопроводности, связанной с нелинейными граничными условиями.

Ключевые слова: система нелинейных уравнений теплопроводности, глобальное решение, неограниченное решение, асимптотика.

Цитирование: *Зарипова А.Р.* Свойства решений систем уравнений теплопроводности, связанных с нелинейными граничными условиями // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2026. – № 1(71). – С. 43-56.

DOI: https://doi.org/10.71310/pcam.1_71.2026.04

1 Введение

В данной статье рассматривается следующая задача теплопроводности в многокомпонентных средах, выявленных в области $Q_+ = \left\{(x,t) : x \in R_+^N, 0 < t < +\infty\right\}$, связанная с нелинейными граничными условиями:

$$\begin{cases} u_{it} = \nabla\left(|\nabla u_i|^{m_i-1}\nabla u_i\right), & x \in R_+^N, t > 0, \\ -|\nabla u_i|^{m_i-1}\dfrac{\partial u_i}{\partial x_1} = u_{i+1}^{q_i}, & u_{k+1} = u_1, x_1 = 0, \quad t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in R_+^N. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $m_i > 1, q_i > 0,$ $u_0(x)$ – непрерывная, неотрицательная, ограниченная функция. Она удовлетворяет следующим условиям: $-|\nabla u_{i0}|^{m_i-1}\frac{\partial u_{i0}}{\partial x_1} = u_{(i+1)0}^{q_i}, \quad x_1 = 0$, и для некоторой точки $x_0 \in R_+^N$ выполняется $\sup pu_0 \subset B_R(x_0) \cap R_+^N, u_0 \neq 0$. При этом, даже если начальное значение вне некоторой подобласти $u_0(x)$равно нулю, решения могут за конечное время прийти в режим blow-up. Особенность уравнения (1) состоит в том, что в нём коэффициент диффузии зависит от градиента. Уравнения такого типа описывают процессы теплопроводности, зависящие от градиента.

Поскольку система уравнений (1) является вырождающейся, при $u_i(x,t) = 0$ или $|\nabla u_i| = 0$ она может не иметь классического решения. В связи с этим задачу (1) рассматривают в классе обобщённых решений, где $|\nabla u_i|^{m_i-1}\nabla u_i \in C\left(R_+^N \times (0, +\infty)\right)$,

$0 < u_i \in C\left(Q\right), (i = 1, 2, ..., k)$, причем это решение удовлетворяет системе уравнений (1) в смысле интегральных тождеств или в смысле распределений.

Рассматриваемая нами нелинейная математическая модель описывает многие физические и биологические процессы в многокомпонентных нелинейных средах. Например, она при различных значениях параметров описывает процессы взаимной диффузии, взаимную теплопроводность различных тел, горение, политропную фильтрацию жидкости и газа, популяционные процессы биологических видов, распространение инфекционных заболеваний, взаимодействие тектонических плит и другие явления [10]. Задача (1) в частных случаях изучалась многими учёными.

В работах [1, 8] исследованы квазилинейные и нелинейные уравнения и их системы с нелинейными граничными условиями. В частности, в работе [9] Huang, Yin и Wang расширили задачу из [4] на многомерный случай:

$$\begin{cases} u_t = \Delta u^m, & x \in R_+^N, \ \ 0 < t < T, \\ -\dfrac{\partial u^m}{\partial x_1} u^p(x,t), & x_1 = 0, \ \ 0 < t < T, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in R_+^N. \end{cases} \tag{2}$$

Для указанной выше задачи они нашли критические показатели $p_0 = \frac{1}{2}(m+1)$ и $p_c = m + \frac{1}{N}$. Однако критические показатели задачи из работы [4] в многомерном случае до настоящего времени оставались неизвестными.

В работе [10] Wanjian Du и Zhongping Li исследовали уравнение теплопроводности

$$u_t = \nabla\left(|\nabla u|^{m-1}\nabla u\right), \ \ (m > 1), \ x \in R^N, \ t > 0,$$

в многомерном случае при нелинейном граничном условии $-\left|\nabla u\right|^{m-1} \frac{\partial u}{\partial x_1} = u^p, \ x_1 = 0, \ t > 0$. Путём построения автомодельных верхних и нижних решений они нашли критический показатель глобального (по времени) существования, а также критический показатель типа Фуджиты.

В работе [11] для следующих уравнений быстрой диффузии, не относящихся к ньютоновскому типу, были определены критические показатели, а также найдены условия существования глобального решения и возникновения неограниченного (blow-up) решения.

$$u_{it} = \left(|u_{ix}|^{m_i-1} u_{ix}\right)_x, \ \ (i = 1, 2, ..., k), \ (x,t) \in R_+ \times (0, +\infty). \tag{3}$$

Уравнения взаимосвязаны между собой посредством нелинейного граничного условия:

$$|u_{ix}|^{m_i-1} u_{ix}\left(0,t\right) = u_{i+1}^{p_i}(0,t), \ \ (i = 1, 2, ..., k), \ u_{k+1} := u_1, \ t \in (0, +\infty), \tag{4}$$

$$u_i(x,0) = u_{i0}(x), \ (i = 1, 2, ..., k), \ x \in R_+. \tag{5}$$

Начальные условия не тождественны нулю, неотрицательны, ограничены и достаточно гладки. Здесь $0 < m_i < 1$, $p_i > 0$. Поскольку уравнения (3) относятся к типу быстрой диффузии, решение системы (3)–(5) при любом $t > 0$ принимает положительные значения во всём фазовом пространстве. Для системы ньютоновского типа, обладающей свойством быстрой диффузии, они построили критический показатель нелинейной граничной задачи. С помощью построения верхних и нижних автомодельных решений были найдены критические показатели глобального существования решения и типа Фуджиты.

В [13] были определены критические экспоненты типа Фуджиты между глобальным существованием решения и неограниченным состоянием решения за конечное время.

М. Арипов и др. [14] рассмотрели следующую проблему:

$$\begin{cases} \partial_t u = \partial_x \left(\left|\partial_x u_i^k\right|^{m-1} \partial_x u_i^k \right) + u_i^{p_i},\ x \in R_+,\ t > 0, \\ -\left|\partial_x u_i^k\right|^{m-1} \partial_x u_i^k = u_{3-i}^{q_i},\ \ x = 0,\ t > 0, \\ u_i\left(x, 0\right) = u_{i0}\left(x\right), \ \ x \in R_+, \end{cases} \tag{6}$$

где $m > 1,\ k \geqslant 1,\ q_i,\ p_i > 0$, и $i = 1,\ 2$, числовые параметры. Они изучили глобальную разрешимость и неразрешимость (6) и обнаружили следующие критические кривые, которые гарантировали существование глобального решения:

$$\left(\prod\nolimits_{i=1}^{2} q_i\right)_c \leqslant \prod\nolimits_{i=1}^{2} \frac{m\left(k+1-p_i\right)}{m+1},$$

$$\min\left\{ q_i\left(m+1\right) - \frac{m\left(p_{3-i}-1\right)\left(p_i+k\right)}{p_i-1} \right\} = 0.$$

Кроме того, они также показали существование неограниченного решения для некоторых достаточно больших начальных данных.

Авторы работы [15] получили аналогичные результаты для следующей системы:

$$\begin{cases} \partial_t u_i = \nabla\left(\left|\nabla u_i^{m_i}\right|^{p_i-2} \nabla u_i^{m_i} \right),\ x \in R_+^N,\ t > 0, \\ -\left|\nabla u_i^{m}\right|^{p_i-2} \nabla u_i^{m_i} = u_1^{\beta_i} u_2^{q_i},\ x = 0,\ t > 0, \\ u_i\left(x,\ 0\right) = u_{i0}\left(x\right),\ x \in R_+^N, \end{cases}$$

где $m_i > 1,\ p_i > 1 + 1/m_i,\ \beta_i,\ q_i > 0,\ i = 1,\ 2$.

Они показали следующие критические кривые:

$$0 < q_1\beta_2 \leqslant \prod\nolimits_{i=1}^{k} \left[\left(m_i+1\right)\left(1-1/p_i\right) - \beta_i\left(2-i\right) - q_{3-i}\left(i-1\right)\right],$$

$$\min\left\{N\lambda_i - \alpha_i\right\} = 0,\ i = 1,\ 2.$$

Классические модели часто опираются на линейную диффузию, однако многие сложные процессы в экономике [16], а также в обработке изображений [17, 18], управляются более сложными, вырожденными и нелокальными механизмами переноса [18].

В [19, 20] были изучены свойства одной и двух нелинейных задач диффузии, заданных нелинейными граничными условиями. Также были получены критический показатель типа Фуджиты и критический показатель глобального существования.

В [21] изучается условие глобального существования и не существования решения нелинейной системы кросс-диффузии с нелинейными граничными условиями. Установлены критические экспоненты типа Фуджита и критические экспоненты для глобального существования решения.

Определение. [12] Функция $u_i(x,t)$ называется верхним (нижним) решением задачи (1) в области Q, если $u_i(x,t) = 0$ в $Q\backslash D_t$, где $D_t = \{x < l(t)\} \times (0;+\infty)$, $u_{i1}(x,t) \in C^{1,2}_{t,x}(D_t) \cap C(Q)$, $|\nabla u_i|^{m_i-1}\frac{\partial u_i}{\partial x_1} \in C(Q)$, и выполняются следующие условия:

$$u_{it} \geqslant (\leqslant) \nabla \left(|\nabla u_i|^{m_i-1}\nabla u_i\right),$$

$$-|\nabla u_i|^{m_i-1}\frac{\partial u_i}{\partial x_1} \geqslant (\leqslant) u_{i+1}^{q_i},$$

$$u(x,0) \geqslant (\leqslant) u_0(x),\ x \in R.$$

2 Методология исследования

Используя уравнение (1) $r = \sum\limits_{i=1}^{N}\sqrt{x_i^2}$, $\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{2x_i}{2\sum\limits_{i=1}^{N}\sqrt{x_i^2}} = \frac{x_i}{r}$ выполним следующие преобразования:

$$\nabla u_i = \sum_{i=1}^{N}\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{N}\frac{\partial u_i}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{\partial u_i}{\partial r}\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{\partial u_i}{\partial r}\sum_{i=1}^{N}\frac{x_i}{r},$$

$$|\nabla u_i| = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left|\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\frac{x_i^2}{r^2}\left|\frac{\partial u_i}{\partial r}\right|^2} = \sqrt{\frac{1}{r^2}\left|\frac{\partial u_i}{\partial r}\right|^2\sum_{i=1}^{N}x_i^2} = \left|\frac{\partial u_i}{\partial r}\right|,$$

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u_i}{\partial r}\right|^{m_i-1}\frac{\partial u_i}{\partial r}\sum_{i=1}^{N}\frac{x_i}{r}\right) = \sum_{i=1}^{N}\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u_i}{\partial r}\right|^{m_i-1}\frac{\partial u_i}{\partial r}\right)\sum_{i=1}^{N}\frac{x_i}{r}+$$

$$+\left|\frac{\partial u_i}{\partial r}\right|^{m_i-1}\frac{\partial u_i}{\partial r}\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial}{\partial r}\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{x_i}{r}\right) = \frac{\partial}{\partial r}\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial r}{\partial x_i}\sum_{i=1}^{N}\frac{x_i}{r}\left(\left|\frac{\partial u_i}{\partial r}\right|^{m_i-1}\frac{\partial u_i}{\partial r}\right)+$$

$$+\left|\frac{\partial u_i}{\partial r}\right|^{m_i-1}\frac{\partial u_i}{\partial r}\frac{N-1}{r} = \left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\left|\frac{\partial u_i}{\partial r}\right|^{m_i-1}\frac{\partial u_i}{\partial r}\right) + \left|\frac{\partial u_i}{\partial r}\right|^{m_i-1}\frac{\partial u_i}{\partial r}\frac{N-1}{r}\right]r^{N-1}\frac{1}{r^{N-1}} =$$

$$= r^{1-N}\left[r^{N-1}\frac{\partial}{\partial r}\left(\left|\frac{\partial u_i}{\partial r}\right|^{m_i-1}\frac{\partial u_i}{\partial r}\right) + \left|\frac{\partial u_i}{\partial r}\right|^{m_i-1}\frac{\partial u_i}{\partial r}\left(N-1\right)r^{N-2}\right].$$

Уравнение (1) приводим к радиально-симметричному виду:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_i}{\partial t} = r^{1-N}\dfrac{\partial}{\partial r}\left[r^{N-1}\left|\dfrac{\partial u_i}{\partial r}\right|^{m_i-1}\dfrac{\partial u_i}{\partial r}\right], \\ -\left|\dfrac{\partial u_i}{\partial r}\right|^{m_i-1}\dfrac{\partial u_i}{\partial r_1} = u_{i+1}^{q_i}. \end{cases} \tag{7}$$

Для построения системы автомодельных уравнений решение системы уравнений (7) будем искать в следующем виде:

$$\bar{u}_i(x,t) = (\tau+t)^{-\alpha_i}g_i(\eta_i), \quad \eta_i = x(\tau+t)^{-\beta_i}, \tag{8}$$

здесь $\alpha_i + 1 = \beta_i + (\alpha_i + \beta_i)\, m_i$, $\quad m_i(\alpha_i + \beta_i) = \alpha_{i+1}\mathrm{q}_i$, $\quad (i = 1, 2, ..., k)$. В результате вычислений уравнение (7) приводится к следующему виду:

$$\begin{cases} \eta^{1-N}\Big(\eta^{N-1}\big|(g_i)'\big|^{m_i-1}(g_i)'\Big)'(\eta_i) + \alpha_i g_i(\eta_i) + \eta_i\beta_i {g'}_i(\eta_i) = 0, \\ -\big|(g_i)'\big|^{m_i-1}\dfrac{\partial g_i}{\partial \eta_1} = g_{i+1}^{q_i}(\eta_{i+1}), \qquad i = 1, 2, ..., k. \end{cases} \tag{9}$$

Автомодельное решение задачи (8) будем искать в следующем виде:

$$\bar{g}_i(\eta_i) = \Big(a_i - b_i \eta_i^{\frac{1+m_i}{m_i}}\Big)^{\frac{m_i}{m_i-1}}, \tag{10}$$

здесь $a_i > 0$, $b_i = \frac{1-m_i}{m_i+1}(-\beta_i)^{\frac{1}{m_i}}$, $\;y_+ = \max(0, y)$.

Теорема 1. Если выполнено условие $\min\{N\beta_i - \alpha_i\} > 0$, то решение задачи (1) является глобальным.

Доказательство. Доказательство теоремы (1) основано на методе сравнения решений. Для этого в области $Q_+ = \big\{(x,t) : x \in R_+^N, 0 < t < +\infty\big\}$ построим сравниваемое решение следующего вида:

$$\bar{u}_{i+}(x,t) = (\tau + t)^{-\alpha_i} g_i(\eta_i), \tag{11}$$

здесь $\eta_i = x(\tau + t)^{-\beta_i}$, $\alpha_i = \frac{-\alpha_1 q_i(1+m_i) - m_i}{2m_i}$, $\beta_i = \frac{m_i - \alpha_1(1-m_i)q_i}{2m_i}$.

Чтобы $\bar{u}_+(x,t)$ было верхним решением задачи (1), функция $g_i(\eta_i)$ должна удовлетворять следующему неравенству:

$$\frac{dg_i}{d\eta_i} = -b_i\frac{1+m_i}{m_i-1}\Big(a_i - b_i\eta_i^{\frac{1+m_i}{m_i}}\Big)^{\frac{1}{m_i-1}}\eta_i^{\frac{1}{m_i}}, \tag{12}$$

$$\begin{gathered} \frac{d}{d\eta_i}\left(\eta_i^N\Big(a_i - b_i\eta_i^{\frac{1+m_i}{m_i}}\Big)^{\frac{m_i}{m_i-1}}\right) = \\ = \eta_i^{N-1}\left(N\Big(a_i - b_i\eta_i^{\frac{1+m_i}{m_i}}\Big)^{\frac{m_i}{m_i-1}} - b_i\frac{1+m_i}{m_i-1}\eta_i^{\frac{1}{m_i}}\Big(a_i - b_i\eta_i^{\frac{1+m_i}{m_i}}\Big)^{\frac{1}{m_i-1}}\eta_i\right), \end{gathered} \tag{13}$$

из равенства (10) получаем (12) и (13) и, подставляя их в (9), приходим к следующему:

$$\eta_i^{1-N}\frac{d}{d\eta_i}\left(\eta_i^{N-1}\Big(-b_i\frac{1+m_i}{m_i-1}\Big)^{m_i}\eta_i\Big(a_i - b_i\eta_i^{\frac{1+m_i}{m_i}}\Big)^{\frac{m_i}{m_i-1}}\right) + \alpha_i g_i(\eta_i) +$$

$$+\eta_i\beta_i\left(-b_i\frac{1+m_i}{m_i-1}\right)\Big(a_i - b_i\eta_i^{\frac{1+m_i}{m_i}}\Big)^{\frac{1}{m_i-1}}\eta_i^{\frac{1}{m_i}} \leqslant 0,$$

$$\eta_i^{1-N}\Big(-b_i\frac{1+m_i}{m_i-1}\Big)^{m_i}\eta_i^{N-1}\left(N\Big(a_i - b_i\eta_i^{\frac{1+m_i}{m_i}}\Big)^{\frac{m_i}{m_i-1}} - b_i\frac{1+m_i}{m_i-1}\eta_i^{\frac{1}{m_i}}\times\right.$$

$$\left.\times\Big(a_i - b_i\eta_i^{\frac{1+m_i}{m_i}}\Big)^{\frac{1}{m_i-1}}\eta_i\right) + \alpha_i g_i(\eta_i) +$$

$$+\eta_i\beta_i\left(-b_i\frac{1+m_i}{m_i-1}\right)\Big(a_i - b_i\eta_i^{\frac{1+m_i}{m_i}}\Big)^{\frac{1}{m_i-1}}\eta_i^{\frac{1}{m_i}} \leqslant 0,$$

$$-\beta_i N\left(a_i - b_i\eta_i^{\frac{1+m_i}{m_i}}\right)^{\frac{m_i}{m_i-1}} + \eta_i\beta_i b_i\frac{1+m_i}{m_i-1}\left(a_i - b_i\eta_i^{\frac{1+m_i}{m_i}}\right)^{\frac{1}{m_i-1}}\eta_i^{\frac{1}{m_i}} + \alpha_i g_i(\eta_i) +$$

$$-\eta_i\beta_i b_i\frac{1+m_i}{m_i-1}\left(a_i - b_i\eta_i^{\frac{1+m_i}{m_i}}\right)^{\frac{1}{m_i-1}}\eta_i^{\frac{1}{m_i}} \leqslant 0,$$

$$+\beta_i N g_i(\eta_i) + \alpha_i g_i(\eta_i) \leqslant 0,$$

$$g_i(\eta_i)(\alpha_i - \beta_i N) \leqslant 0. \tag{14}$$

Таким образом, для того чтобы $g_i(\eta_i) \geqslant 0$ необходимо выполнение условия $\min\{N\beta_i - \alpha_i\} > 0$.

Замечания 1. Теорема 1 показывает, что критической экспонентой типа Фуджита является условие $\min\{N\beta_i - \alpha_i\} = 0$.

Введем обозначения

$$q_{i0} = \frac{2m_i}{m_i+1},\ \ q_{ic} = \frac{(N+1)m_i}{\alpha_1\left[(m_i+1) + (m_i-1)N\right]},$$

где q_0 является критической экспонентой глобального существования решения, а q_{ic} является критической экспонентой типа Фуджита.

Теорема 2. Если выполнено условие $q_{i0} < q_i < q_{ic}$, то любое нетривиальное решение задачи (1) за конечное время становится неограниченным (blow-up).

Доказательство. Рассмотрим следующую функцию:

$$u_{Bi}(x,t) = (\tau+t)^{-\frac{N}{m_i(N+1)+1-N}}g_i(\eta_i),\ \ \eta_i = x(\tau+t)^{-\frac{1}{m_i(N+1)+1-N}}, \tag{15}$$

$$\bar{g}_i(\eta_i) = \left(a_i - b_i\eta_i^{\frac{1+m_i}{m_i}}\right)^{\frac{m_i}{m_i-1}},\ \ b_i = \frac{1-m_i}{m_i+1}\left(\frac{1}{m_i(N+1)+1-N}\right)^{\frac{1}{m_i-1}}, \tag{16}$$

здесь $a_i > 0$.

Проверим, что для $\eta_i \in \{\eta > 0\,|g_i(\eta_i) \geqslant 0\}$ выполняются следующие условия: $-$ $-\left|(g_i)'\right|^{m_i-1}\frac{\partial g}{\partial\eta_1}\Big|_{\eta_1=0} = 0$ и

$$\eta^{1-N}\frac{d}{d\eta_i}\left(\eta^{N-1}\left|\frac{dg_i}{d\eta_i}\right|^{m_i-1}\frac{dg_i}{d\eta_i}\right) + \frac{N}{m_i(N+1)+1-N}g_i(\eta_i) +$$

$$+\frac{1}{m_i(N+1)+1-N}\eta_i\frac{dg_i}{d\eta_i} = 0. \tag{17}$$

Пользуясь известными свойствами обобщённого решения задачи (1), видим, что при $t_0 > 0$ выполняется $u_i(0,t_0) > 0$. Следовательно, существуют $\tau > 0$ и $a_i > 0$ такие, что $u_i(x,t_0) \geqslant u_{Bi}(x,t_0),\ \ x \in R_+^N$.

Прямые вычисления показывают, что $u_{Bi}(x,t)$ является нижним решением задачи (1) в области $R_0^N \times (t_0,+\infty)$. По принципу сравнения решений получаем: $u_i(x,t) \geqslant u_{Bi}(x,t)$, $(x,t) \ \in R_+^N \times (t_0,+\infty)$. Теперь пусть $t_* \geqslant t_0$ и T достаточно велико, тогда

$$u_{Bi}(x,t_*) \geqslant \bar{u}_i(x,0),\quad x \in R_+^N, \tag{18}$$

здесь $\bar{u}_i(x,t)$ задано в (11).

После простых вычислений из (18) получаем:

$$(\tau+t)^{-\frac{N}{m_i(N+1)+1-N}} \geqslant (\tau+t)^{-\frac{\alpha_1 q_i(m_i+1)+m_i}{2m_i}}, \tag{19}$$

$$(\tau+t)^{-\frac{1}{m_i(N+1)+1-N}} \leqslant (\tau+t)^{-\frac{\alpha_1 q_i(1-m_i)+m_i}{2m_i}}. \tag{20}$$

Таким образом, если $q_i \leqslant \frac{(N+1)m_i}{\alpha_1[(m_i+1)+(m_i-1)N]}$, то

$$\frac{\alpha_1 q_i(1+m_i)+m_i}{2m_i(m_i(N+1)+1-N)} \leqslant \frac{N\left(\alpha_1 q_i(1-m_i)+m_i\right)}{2m_i(m_i(N+1)+1-N)}.$$

Поэтому при достаточно больших и неравенства (19) и (20) выполняются. Следовательно $u_i(x,t_*) \geqslant u_{Bi}\left(x,t_*\right), \quad x\in R_+^N$. По принципу сравнения решений отсюда вытекает, что функция $u_i(x,t)$ за конечное время становится неограниченной (blow-up).

Теорема 3. Для компактно поддержанных решений задачи (9) при $\eta_i \to \left(\frac{a_i}{b_i}\right)^{\frac{m_i}{m_i+1}}$ имеет место следующая асимптотика:

$$g_i(\eta_i) = \bar{g}_i\left(1+o\left(1\right)\right). \tag{21}$$

Доказательство. Представим решение задачи (1) в виде

$$g_i(\eta_i) = \bar{g}_i(\eta_i)w_i(\tau_i), \tag{22}$$

здесь $\tau_i = -\ln\left(a_i - b_i{\eta_i}^{\frac{1+m_i}{m_i}}\right)$, а функции $w_i\left(\tau_i\right)-$ неотрицательны и ограничены. Подставляя (22) в задачу (9), получаем следующее выражение:

$$\frac{dg_i}{d\eta_i} = \frac{d\bar{g}_i}{d\tau_i}\frac{d\tau_i}{d\eta_i}w_i(\tau_i) + \bar{g}_i(\eta_i)\frac{dw_i}{d\tau_i}\frac{d\tau_i}{d\eta_i} = \frac{d\tau_i}{d\eta_i}\left[\frac{d\bar{g}_i}{d\tau_i}w_i(\tau_i) + \bar{g}_i(\eta_i)\frac{dw_i}{d\tau_i}\right] =$$

$$= \left|\begin{array}{l} \bar{g}_i = e^{-\tau_i\cdot\frac{m_i}{m_i-1}} \\ \dfrac{d\bar{g}_i}{d\tau_i} = -\dfrac{m_i}{m_i-1}e^{-\tau_i\cdot\frac{m_i}{m_i-1}} \end{array}\right| = \left|\begin{array}{l} \tau_i = -\ln(a_i - b_i{\eta_i}^{\frac{1+m_i}{m_i}}) \\ \dfrac{d\tau_i}{d\eta_i} = -\dfrac{1}{a_i - b_i{\eta_i}^{\frac{1+m_i}{m_i}}}\left(-b_i\dfrac{1+m_i}{m_i}{\eta_i}^{\frac{1+m_i}{m_i}-1}\right) = \\ = \dfrac{b_i{\eta_i}^{\frac{1}{m_i}}}{a_i - b_i{\eta_i}^{\frac{1+m_i}{m_i}}}\dfrac{1+m_i}{m_i} = \dfrac{b_i}{e^{-\tau_i}}\dfrac{1+m_i}{m_i}{\eta_i}^{\frac{1}{m_i}}. \end{array}\right| =$$

$$= \frac{b_i(m_i+1)e^{\tau_i}}{m_i}{\eta_i}^{\frac{1}{m_i}}\left[-\frac{m_i}{m_i-1}e^{-\tau_i\frac{m_i}{m_i-1}}w_i\left(\tau_i\right) + e^{-\tau_i\frac{m_i}{m_i-1}}\left(w_i\left(\tau_i\right)\right)'\right] =$$

$$= b_i(m_i+1){\eta_i}^{\frac{1}{m_i}}e^{-\tau_i\frac{1}{m_i-1}}\left[\frac{\left(w_i\left(\tau_i\right)\right)'}{m_i} - \frac{w_i\left(\tau_i\right)}{m_i-1}\right],$$

$$\frac{d}{d\eta_i} = \frac{d}{d\tau_i}\frac{d\tau_i}{d\eta_i} = -\frac{b_i(m_i+1)e^{\tau_i}}{m_i}{\eta_i}^{\frac{1}{m_i}}\frac{d}{d\tau_i}.$$

С помощью найденных равенств

$${b_i}^{m_i+1-\frac{Nm_i}{m_i-1}}(m_i+1)^{m_i+1}\frac{1}{m_i e^{-\tau_i}}{\eta_i}^{\frac{1}{m_i}+1-N}\frac{d}{d\eta_i}\left[\left(a_i - e^{-\tau_i}\right)^{\frac{Nm_i}{m_i+1}}e^{-\tau_i\frac{m_i}{m_i-1}}\times\right.$$

$$\times\left[\frac{(w_i(\tau_i))'}{m_i}-\frac{w_i(\tau_i)}{m_i-1}\right]^{m_i}\Bigg]+\alpha_i e^{-\tau_i\frac{m_i}{m_i-1}}w_i(\tau_i)+$$
$$+\beta_i b_i(m_i+1){\eta_i}^{1+\frac{1}{m_i}}e^{-\tau_i\frac{m_i}{m_i-1}}\left[\frac{(w_i(\tau_i))'}{m_i}-\frac{w_i(\tau_i)}{m_i-1}\right]=0, \tag{23}$$

получаем выражение (23). Введём следующие обозначения:

$$L(w_i)=\frac{(w_i(\tau_i))'}{m_i}-\frac{w_i(\tau_i)}{m_i-1}.$$

В результате

$${b_i}^{m_i+1-\frac{Nm_i}{m_i-1}}(m_i+1)^{m_i+1}\frac{1}{m_i e^{-\tau_i}}{\eta_i}^{\frac{1}{m_i}-1-N}\frac{d}{d\tau_i}\left[\left(a_i-e^{-\tau_i}\right)^{\frac{Nm_i}{m_i+1}}e^{-\tau_i\frac{m_i}{m_i-1}}L^{m_i}(w_i)\right]+$$
$$+\alpha_i e^{-\tau_i\frac{m_i}{m_i-1}}w_i(\tau_i)+\beta_i b_i(m_i+1){\eta_i}^{1+\frac{1}{m_i}}e^{-\tau_i\frac{1}{m_i-1}}L(w_i)=0. \tag{24}$$

Из (24) вычисляем $\frac{d}{d\tau_i}$:

$$\frac{d}{d\tau_i}\left[\left(a_i-e^{-\tau_i}\right)^{\frac{Nm_i}{m_i+1}}e^{-\tau_i\frac{m_i}{m_i-1}}\right]=-e^{-\tau_i}\frac{Nm_i}{m_i+1}\left(a_i-e^{-\tau_i}\right)^{\frac{Nm_i}{m_i+1}-1}e^{-\frac{m_i}{m_i-1}\tau_i}-$$
$$-\frac{m_i}{m_i-1}\left(a_i-e^{-\tau_i}\right)^{\frac{Nm_i}{m_i+1}}e^{-\frac{m_i}{m_i-1}\tau_i}=e^{-\frac{m_i}{m_i-1}\tau_i}\left(a_i-e^{-\tau_i}\right)^{\frac{Nm_i}{m_i+1}}\times$$
$$\times\left[\frac{Nm_i}{m_i+1}e^{-\tau_i}\left(a_i-e^{-\tau_i}\right)^{-1}-\frac{m_i}{m_i-1}\right],$$

$$\frac{d}{d\tau_i}\left[\left(a_i-e^{-\tau_i}\right)^{\frac{Nm_i}{m_i+1}}e^{-\tau_i\frac{m_i}{m_i-1}}L^{m_i}(w_i)\right]=e^{-\frac{m_i}{m_i-1}\tau_i}\left(a_i-e^{-\tau_i}\right)^{\frac{Nm_i}{m_i+1}}\times$$
$$\times\left[\frac{Nm_i}{m_i+1}e^{-\tau_i}\left(a_i-e^{-\tau_i}\right)^{-1}-\frac{m_i}{m_i-1}\right]L^{m_i}(w_i)+$$
$$+e^{-\frac{m_i}{m_i-1}\tau_i}\left(a_i-e^{-\tau_i}\right)^{\frac{Nm_i}{m_i+1}}\frac{d}{d\tau_i}(L(\tau_i))^{m_i}=e^{-\frac{m_i}{m_i-1}\tau_i}\left(a_i-e^{-\tau_i}\right)^{\frac{Nm_i}{m_i+1}}\times$$
$$\times\left[\left[\frac{Nm_i}{m_i+1}e^{-\tau_i}\left(a_i-e^{-\tau_i}\right)^{-1}-\frac{m_i}{m_i-1}\right]L^{m_i}(w_i)+\frac{d}{d\tau_i}(L(\tau_i))^{m_i}\right]=0, \tag{25}$$

подставляя (25) в (24)

$${b_i}^{m_i+1-\frac{Nm_i}{m_i-1}}(m_i+1)^{m_i+1}\frac{1}{m_i}e^{\tau_i}{\eta_i}^{\frac{1}{m_i}+1-N}e^{-\frac{m_i}{m_i-1}\tau_i}\left(a_i-e^{-\tau_i}\right)^{\frac{Nm_i}{m_i+1}}\times$$
$$\times\left[\left[\frac{Nm_i}{m_i+1}e^{-\tau_i}\left(a_i-e^{-\tau_i}\right)^{-1}-\frac{m_i}{m_i-1}\right]L^{m_i}(w_i)+\frac{d}{d\tau_i}(L(\tau_i))^{m_i}\right]+$$
$$+\alpha_i e^{-\tau_i\frac{m_i}{m_i-1}}w_i(\tau_i)+\beta_i b_i(m_i+1){\eta_i}^{1+\frac{1}{m_i}}e^{-\tau_i\frac{1}{m_i-1}}L(w_i)=0,$$
$$\left[\left[\frac{Nm_i}{m_i+1}e^{-\tau_i}\left(a_i-e^{-\tau_i}\right)^{-1}-\frac{m_i}{m_i-1}\right]L^{m_i}(w_i)+\frac{d}{d\tau_i}(L(\tau_i))^{m_i}\right]+$$
$$+\frac{\alpha_i e^{-\tau_i}{b_i}^{\frac{m_iN-m_i-1}{m_i+1}}}{t_i\left(a_i-e^{-\tau_i}\right)}w_i(\tau_i)+\frac{\beta_i {b_i}^{1-\frac{m_iN}{m_i+1}}}{t_i}L(w_i)=0. \tag{26}$$

В (26) вводим следующие обозначения. При этом

$$t_i = {b_i}^{m_i+1-\frac{Nm_i}{m_i-1}}(m_i+1)^{m_i+1}\frac{1}{m_i},\ \ o_1 = \frac{Nm_i}{m_i+1},\ \ \varphi_1(\tau_i) = \frac{e^{-\tau_i}}{a_i - e^{-\tau_i}},$$

$$o_2 = \frac{\alpha_i {b_i}^{\frac{m_iN-m_i-1}{m_i+1}}}{t_i},\ \ o_3 = \frac{\beta_i {b_i}^{1-\frac{m_iN}{m_i+1}}}{t_i}.$$

Уравнение (26) принимает вид:

$$\left[o_1\varphi_1(\tau_i) - \frac{m_i}{m_i-1}\right][L(w_i)]^{m_i} + \frac{d}{d\tau_i}(L(w_i))^{m_i} + o_2\varphi_1(\tau_i)w_i(\tau_i) + o_3L(w_i) = 0. \qquad (27)$$

Исследование решений последнего уравнения эквивалентно исследованию решений уравнения (9), и каждое из них на интервале $[\tau_0, +\infty)$ удовлетворяет следующим неравенствам:

$$w_i(\tau_i) > 0, \quad \frac{(w_i(\tau_i))'}{m_i} - \frac{w_i(\tau_i)}{m_i-1} \neq 0.$$

Проверим, что решение $w_i(\tau_i)$ уравнения (9) либо имеет конечный предел w_0 либо является неограниченным при $\eta \to +\infty$. Предположим, что

$$\nu_i(\tau_i) = (L(w_i))^{m_i}.$$

Тогда для производной функции $v_i(\tau_i)$ получаем:

$$\nu'_i = \left[o_1\varphi_1(\tau_i) - \frac{m_i}{m_i-1}\right]v_i + o_2\varphi_1(\tau_i)w_i(\tau_i) + o_3L(w_i).$$

Для анализа решений последнего уравнения введём вспомогательную функцию:

$$\theta_i(\tau_i, \mu_i) = \left[o_1\varphi_1(\tau_i) - \frac{m_i}{m_i-1}\right]\mu_i + o_2\varphi_1(\tau_i)w_i(\tau_i) + o_3L(w_i), \qquad (28)$$

здесь μ_i – действительное число. Отсюда видно, что каждая функция $\theta_i(\tau_i, \mu_i)$ определена на интервале $[\tau_1, +\infty)$ и на этом интервале выполняется одно из следующих неравенств:

$$\nu'_i(\tau_i) > 0, \quad \nu'_i(\tau_i) < 0.$$

Следовательно, анализируем уравнение (27) с учётом теоремы Боля; отсюда заключаем, что для функции $v_i(\tau_i)$ при $\tau_i \in [\tau_1, +\infty)$ существует предел.

Теперь рассмотрим предельный случай. Видно, что далее:

$$\eta_i \to \left(\frac{a_i}{b_i}\right)^{\frac{m_i}{m_i+1}}, \quad \lim_{\tau_i \to +\infty}\varphi_1(\tau_i) \to 0.$$

Таким образом, из приведённого выше предела и из того, что $(w_i)' = 0$ следует

$$\left[o_1\varphi_1(\tau_i) - \frac{m_i}{m_i-1}\right]\left[\frac{(w_i(\tau_i))'}{m_i} - \frac{w_i(\tau_i)}{m_i-1}\right]^{m_i} + \frac{d}{d\tau_i}(L(w_i))^{m_i} +$$

$$+ o_2\varphi_1(\tau_i)w_i(\tau_i) + o_3\left[\frac{(w_i(\tau_i))'}{m_i} - \frac{w_i(\tau_i)}{m_i-1}\right] = 0,$$

$$-\frac{m_i}{m_i-1}\left[\frac{(w_i(\tau_i))'}{m_i}-\frac{w_i(\tau_i)}{m_i-1}\right]^{m_i}+o_3\left[\frac{(w_i(\tau_i))'}{m_i}-\frac{w_i(\tau_i)}{m_i-1}\right]=0,$$

ниже по отношению к w_i получается следующая система алгебраических уравнений:

$$-\frac{m_i}{m_i-1}\left[-\frac{w_i(\tau_i)}{m_i-1}\right]^{m_i}=o_3\frac{w_i(\tau_i)}{m_i-1},$$

из этой системы уравнений следует, что $w_i=1$. Из приведённых выше выражений видно, что $g_i(\eta_i)=\bar{g}_i\,(1+o\,(1))$. Теорема доказана.

3 Результаты и обсуждение

Для численного решения поставленной задачи (1) выполнена аппроксимация с помощью неявной разностной схемы и построен итерационный процесс. Полученная в результате трёхдиагональная система алгебраических уравнений решалась методом прогонки. При этом в качестве начального приближения для итерационного процесса использовались асимптотические формулы (8), (21). Ниже приведены полученные численные результаты.

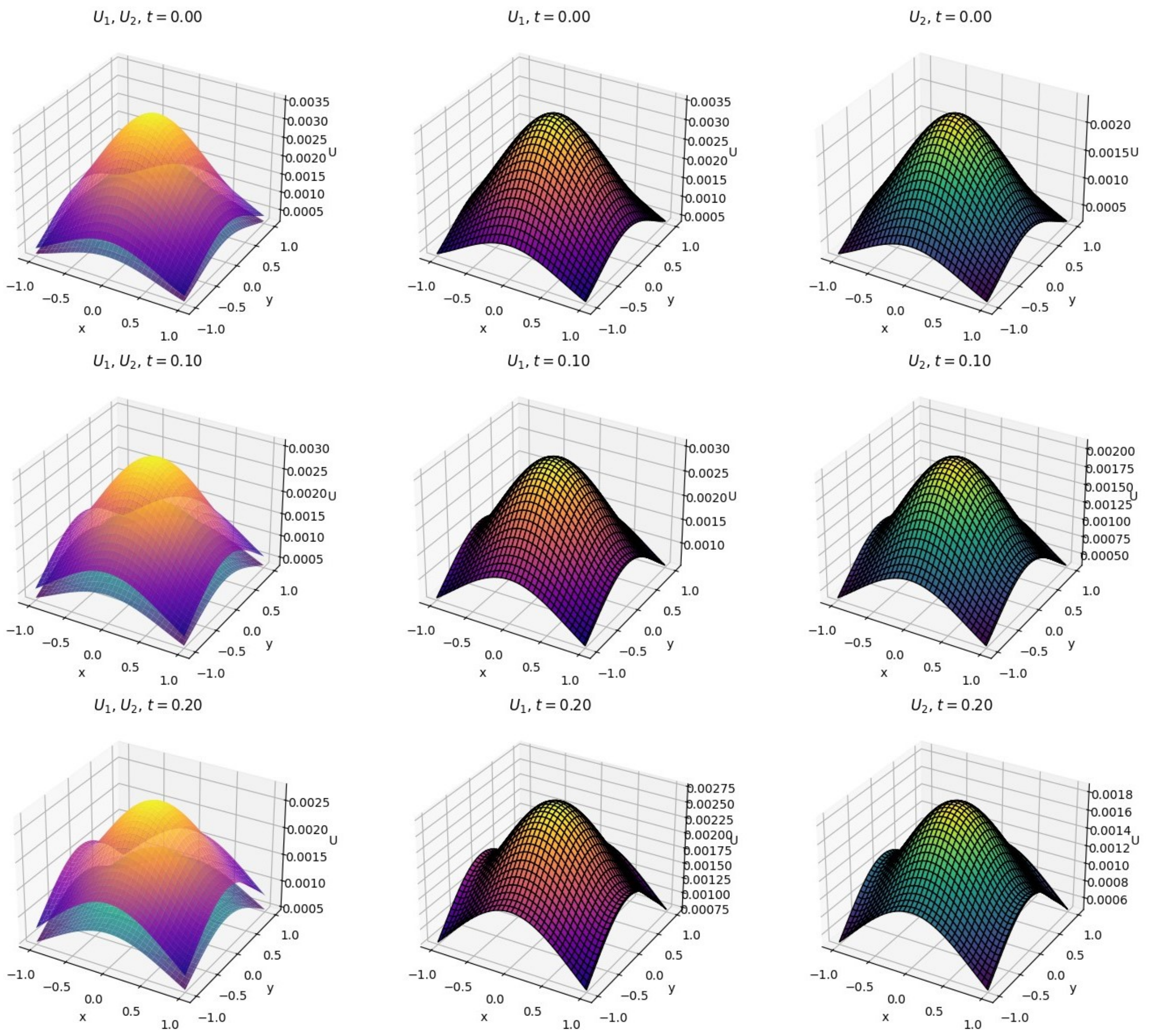

Рис. 1 Численное решение задачи (1): $q_1 = 1.02,\ \ q_2 = 1.9,\ m_1 = 1.14,\ m_2 = 1.13$

На рис. 1 представлены графики численных решений задачи (1) при $\min\{N\beta_i - \alpha_i\} > 0, m_i - 1 > 0$, в случае, когда число компонентов равно двум, для различных моментов времени, соответствующей случаю медленной диффузии. При численном решении задачи (1) в качестве начального приближения для итерационного процесса брались (11), (21). Известно, что уравнения (1) при $m_i - 1 > 0$ являются уравнениями медленных диффузий и решение системы (1) с компактным носителем понимается в обобщенном смысле.

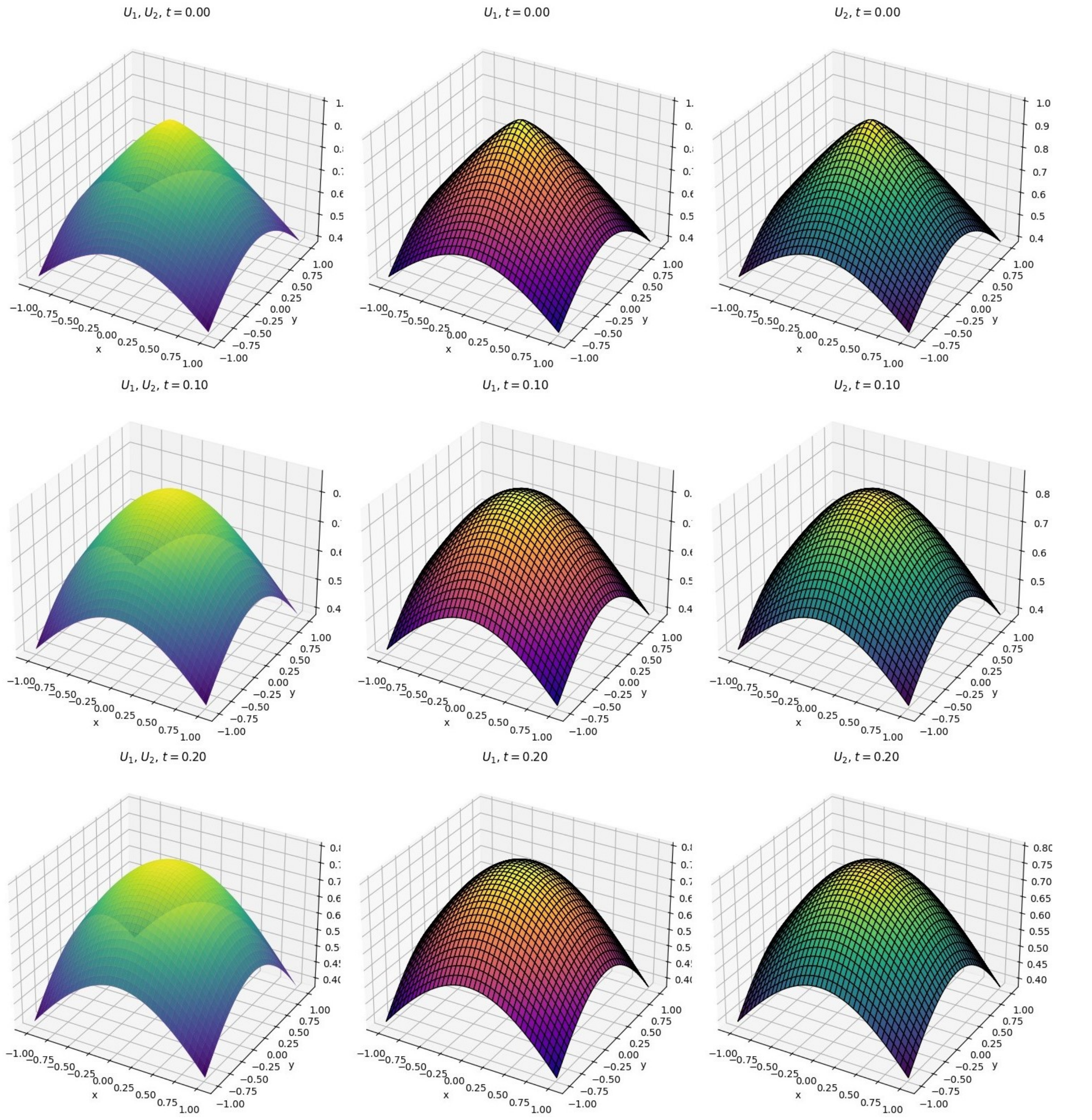

Рис. 2 Численное решение задачи (1): $q_1 = 3.02,\ \ q_2 = 3.09,\ \ m_1 = 3.14,\ \ m_2 = 3.13$

На рис. 2 изображены результаты численного решения задачи (1), в которых распространение тепла происходит с конечной скоростью. Каждый момент времени имеет точку, за эту точку тепло еще не проникло и $u_i(x,t) = 0$ в $x \in [x_\varphi, +\infty)$, $x = \{x_1, x_2, \ldots x_N\}$. Глубина проникновения тепловой волны зависит от времени и фронта (точка, в которой $u_i(x,t)$ обращаются в нуль) волны для каждой среды находящейся в конечной точке: $x_{\varphi_{u_i}} = \left(\frac{a_i}{b_i}\right)^{\frac{m_i}{m_i+1}}(\tau+t)^{\beta_i} < \infty$. Кроме того, во втором графике численные значения параметров выбраны таким образом, что свойства обеих сред близки друг к другу, в результате чего отражается практически совпадающая скорость распространения.

Известно, что нелинейные граничные условия описания притока подводимой энергии на границе x=0. Например, в процессе распространения тепла граничные условия (1) представляют собой поток тепла, следовательно, они описывают нелинейный закон излучения на границе. На втором рисунке, по сравнению с первым, представлен случай более интенсивного теплообмена на границе, соответственно, можно наблюдать относительно более высокий уровень температуры.

4 Заключение

В статье на основе автомодельного подхода исследованы свойства решений системы уравнений теплопроводности, связанной с нелинейными граничными условиями. При этом, поскольку в случае $m_i > 1$ задача (1) может не иметь решения в классическом смысле, рассматривались обобщённые решения. На основе автомодельного подхода и принципа сравнения решений найдены условия глобального по времени существования решений и условия возникновения неограниченных решений. Кроме того, для численного решения задачи (1) построены неявная разностная схема и итерационный процесс, при этом в качестве начального приближения использовались асимптотические формулы. В вычислительном эксперименте показано, что использование асимптотических формул в качестве начального приближения даёт эффективные результаты. На графиках приведённых выше численных результатов показано, что распространение тепла происходит с конечной скоростью.

Литература

[1] *Deng K., Levine H.A.* Boundedness and blow up for a semi-liner rection-diffusion system // J. Math. Anal. Appl. M.. – 2000. – Vol 243. – P. 85-126 doi: `http://dx.doi.org/10.1006/jmaa.1999.6663`.

[2] *Escobedo M., Herrero M.A.* Boundedness and blow up for a semi-liner rection-diffusion system. J. Differential equations. Амстердам: – 2008. – Том 1. – №89(1991). – Vol 89. – P. 176-202 doi: `http://dx.doi.org/10.1016/0022-0396(91)90118-S`.

[3] *Fujita H.* On the blowing up of solutions of the Cauchy problem for $u_t = \Delta u + u_1 + \alpha$, // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.. – 1966. – Vol 13. – P. 105-113.

[4] *Galaktionov V.A., Levine H.A.* On critical Fujita exponents for heat equations with nonlinear flux boundary condition. // Israel J. Math. – 1996. – Vol. 94. – №1(55). – P. 125-146. doi: `http://dx.doi.org/10.1007/BF02762700`.

[5] *Galaktionov V.A., Kurdyunov S.P., Mikhailov A.P., Samarskii A.A.* On blowing-up solutions to the Cauchy problem for the parabolic equation $u_t = \Delta(u\alpha\Delta u+) + u\beta$ // Dokl. Akad. nauk SSSR Ser.Math. Phys.. – 1980. – Vol. 252. – №25(1980). – P. 458-459.

[6] *Levine H.A.* The role of critical exponents in blow-up theorems // SIAM Rev. – 1990. – Vol. 32. – №32(1990). – P. 252-288.

[7] *Hu B., Yin H.M.* On critical Fujita exponents for heat equations with a nonlinear flux boundary condition. // Ann, Inst. H. Poincarŕe. – 1996. – Vol. 6. – №13(1996). – P. 707-732.

[8] *Hu B., Yin H.M.* On critical Fujita exponents for heat equations with a mixed nonlinear Dirichlet-Neumann boundary condition. // J.Math. Anal. Appl. – 1997. – Vol. 11. – №209(2). – P. 683-711. doi: `http://dx.doi.org/10.1006/jmaa.1997.5361`.

[9] *Huang W., Yin J., and Wang Y.* On critical Fujita exponents for the porous equation with nonlinear boundary condition. // J. Math. Anal. Appl. – 2003. – Vol. 10. – № 286(2003). – P. 369-377. doi: `http://dx.doi.org/10.1016/S0022-247X(03)00052-0`.

[10] *Wanjuan Du, Zhongping Li* Critical Exponents for the Heat Conduction Equation with a Nonlinear Boundary Condition. // Int. Journal of Math. Analysis. – 2013. – Vol. 7. – № 9(12). – P. 517–524. doi: `http://dx.doi.org/10.12988/ijma.2013.13048`.

[11] *Zhongping Li, Chunlai Mu.* Critical curves for fast diffusive non-Newtonian equations coupled via nonlinear boundary flux. // Int. Journal of Math. Analysis. – 2008. – Vol. 340. – № 340(2008). – P. 876–883. doi: `http://dx.doi.org/10.1016/j.jmaa.2007.09.009`.

[12] *Wu Z.Q., Zhao J.N., Yin J.X., Li H.L.* Nonlinear Diffusion Equations. // World Sci-entific. – 2001. – Vol. 34. – № 34(2001). – 640. p.

[13] *Mukhamadiyev A., Urunbaev J., Bobokandov M., Rakhmonov Z., Khujakulov T.* A Self-Similar Analysis of the Solutions to the Cross-Diffusion System. // Mathematics. – 2026. – Vol. 83. – № 14(1). – P. 1-18. doi: `http://dx.doi.org/10.3390/math14010083`.

[14] *Aripov M.M., Rakhmonov Z.R., Alimov A.A.* On the behaviors of solutions of a nonlinear diffusion system with a source and nonlinear boundary conditions. // Bull. Karaganda Univ. Math. Ser. – 2024. – Vol. 113. – № 10(2). – P. 28-45. doi: `http://dx.doi.org/10.31489/2024m1/28-45`.

[15] *Rakhmonov Z., Alimov A., Urunbaev J.* On the behavior of solutions for a system of multidimensional diffusion equations with nonlinear boundary conditions. // AIP Conf. Proc. – 2024. – Vol. 10. – № 1063(5). – 020032. p. doi: `http://dx.doi.org/10.1063/5.0202583`.

[16] *Yu Y., Chen Y., Zhou Y.* Cross-Diffusion-Induced Turing Instability in a Two-Prey One-Predator System. // Mathematics. – 2023. – Vol. 11. – № 11(11). – P. 8-20. doi: `http://dx.doi.org/10.3390/math11112411`.

[17] *Li Q., Liao M.A.* New Blow-Up Criterion to a Singular Non-Newton Polytropic Filtration Equation // Mathematics. – 2023. – Vol. 1352. – № 11(16). – P. 356-380. doi: `http://dx.doi.org/10.3390/math11112411`.

[18] *Ma W., Yan B.* Global Existence and uniform blow-up to a nonlocal parabolic system with nonlinear boundary conditions arising in a thermal explosion theory // Mathematics. – 2023. – Vol. 1993. – № 11(9). – P. 420-438. doi: `http://dx.doi.org/10.3390/math11091993`.

[19] *Rakhmonov Z.R., Yarmetova D.I., Mamatkulova M.Sh.* Analytical analysis of one nonlinear diffusion problem with a source specified by nonlinear boundary conditions in multidimensional space // Mathematics.. – 2023. – Vol. 38. – № 1(2025). – P. 510-535. doi: `http://dx.doi.org/10.12732/ijam.v38i1s.56`.

[20] *Rakhmonov Z., Urunbaev E., Urunbaev J., Joniev A.* On a problem of multidimensional cross-diffusion with nonlinear boundary conditions // ijamjournal. – 2025. – Vol. 38. – № 1(2025). – P. 987-996. doi: `http://dx.doi.org/10.12732/ijam.v38i1s.57`.

[21] *Rakhmonov Z., Urunbaev J.* On a problem of cross-diffusion with nonlocal boundary conditions // Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ. – 2019. – Vol. 38. – № 1(2019). – P. 614-620. doi: `http://dx.doi.org/10.12732/ijam.v38i1s.57`.

UDC 517.957

PROPERTIES OF SOLUTIONS TO SYSTEMS OF HEAT CONDUCTION EQUATIONS WITH NONLINEAR BOUNDARY CONDITIONS

Zaripova A.R.
azizazaripova1990@mail.ru
Karshi State University,
17, Kuchabag str., Karshi, 180119 Uzbekistan.

This article is devoted to the study of the properties of solutions of systems of heat conduction equations associated with nonlinear boundary conditions, to the construction of self-similar solutions and finding their asymptotics, as well as the construction of numerical solutions. Based on self-similar analysis, the conditions for the global nature of solutions over time and the formation of unbounded solutions were found. In particular, the values of the critical exponent of the Fujita type and the critical exponent of the globality of the solution were found. For the solutions of the system of heat conduction equations, associated with nonlinear boundary conditions, lower and upper estimates were obtained. It is also proposed to choose the initial approximation for the iterative process when solving a system of heat conduction equations associated with nonlinear boundary conditions.

Keywords: system of nonlinear heat conduction equations, global solution, unbounded solution, asymptotics.

Citation: Zaripova A.R. 2026. Properties of solutions to systems of heat conduction equations with nonlinear boundary conditions. *Problems of Computational and Applied Mathematics.* 1(71): 43-56.

DOI: https://doi.org/10.71310/pcam.1_71.2026.04

№ 1(71) 2026 ISSN 2181-8460

HISOBLASH VA AMALIY MATEMATIKA MUAMMOLARI

ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

PROBLEMS OF COMPUTATIONAL AND APPLIED MATHEMATICS

RAQAMLI TEXNOLOGIYALAR VA
SUN'IY INTELLEKTNI RIVOJLANTIRISH
ILMIY-TADQIQOT INSTITUTI

ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

№ 1(71) 2026

Журнал основан в 2015 году.
Издается 6 раз в год.

Учредитель:
Научно-исследовательский институт развития цифровых технологий и искусственного интеллекта.

Журнал зарегистрирован в Агентстве информации и массовых коммуникаций при Администрации Президента Республики Узбекистан.
Свидетельство №0856 от 5 августа 2015 года.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

Адрес редакции:
100125, г. Ташкент, м-в. Буз-2, 17А.
Тел.: +(998) 71 263-41-98.
Э-почта: `journals@airi.uz`.
Веб-сайт: `https://journals.airi.uz`.

Дизайн и вёрстка:
Шарипов Х.Д.

Отпечатано в типографии НИИ РЦТИИ.
Подписано в печать 25.02.2026 г.
Формат 60x84 1/8. Заказ №1. Тираж 100 экз.

PROBLEMS OF COMPUTATIONAL AND APPLIED MATHEMATICS

No. 1(71) 2026

The journal was established in 2015.
6 issues are published per year.

Founder:
Digital Technologies and Artificial Intelligence Development Research Institute.

The journal is registered by Agency of Information and Mass Communications under the Administration of the President of the Republic of Uzbekistan.
Certificate of Registration No. 0856 of 5 August 2015.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

Address:
100125, Tashkent, Buz-2, 17A.
Tel.: +(998) 71 263-41-98.
E-mail: journals@airi.uz.
Web-site: https://journals.airi.uz.

Layout design:
Sharipov Kh.D.

DTAIRI printing office.
Signed for print 25.02.2026
Format 60x84 1/8. Order No. 1. Print run of 100 copies.

Содержание

Contents