

УДК 532.516

## ВОЗНИКНОВЕНИЕ ЯВЛЕНИЯ УПРУГОГО ВОЗВРАТА ПРИ НЕСТАЦИОНАРНОМ ТЕЧЕНИИ РЕОЛОГИЧЕСКИ СЛОЖНОЙ ЖИДКОСТИ В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ В РАМКАХ МОДЕЛИ OLDROYD-B

*Яхшибаев Д.С.*

d.yaxshibayev@tuit.uz

Ташкентский университет информационных технологий имени Мухаммада-ал-Хоразмий, 100202, Узбекистан, Ташкент, ул. Амира Темура, 108.

В данной статье рассматриваются нестационарные течения реологически сложных жидкостей в плоском канале в рамках модели Oldroyd-B после отключения рабочего механизма. Предполагается, что до момента отключения рабочей установки течение жидкости находится в установившемся режиме под действием постоянного градиента давления. Начиная с заданного момента времени градиент давления в системе принимается равным нулю. Поставленная задача решается аналитически с использованием преобразования Лапласа. На основе полученных решений определены соответствующие гидродинамические закономерности, имеющие важное значение для технических и технологических процессов.

**Ключевые слова:** градиент давления, преобразование Лапласа, нестационарное течение, гидродинамические эффекты, реологически сложная жидкость.

**Цитирование:** *Яхшибаев Д.С.* Возникновение явления упругого возврата при нестационарном течении реологически сложной жидкости в плоском канале в рамках модели Oldroyd-B // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2026. – № 1(71). – С. 16-27.

**DOI:** [https://doi.org/10.71310/pcam.1\\_71.2026.02](https://doi.org/10.71310/pcam.1_71.2026.02)

### 1 Введение

Процессы, происходящие после отключения рабочих механизмов (насосов, компрессоров и т.п.), перемещающих жидкости по трубам и каналам под действием градиента давления, широко распространены в технических и технологических процессах. При математическом моделировании таких процессов предполагается, что в начальный момент времени течение жидкости в трубе или канале осуществляется в стационарном режиме под действием постоянного градиента давления. В определённый момент времени рабочий механизм отключается, вследствие чего градиент давления становится равным нулю. При этом, несмотря на остановку рабочего механизма, жидкость в системе продолжает двигаться в нестационарном режиме.

Изучение особенностей данного процесса играет важную роль в повышении эффективности технических устройств и предотвращении возникновения неблагоприятных явлений.

Нестационарные течения, возникающие при сбросе градиента давления до нуля в стационарных течениях ньютоновских вязких жидкостей в каналах и трубах, рассматривались в работах [1–3]. В этом случае, хотя течение становится нестационарным, оно в конечном итоге монотонно затухает и переходит в состояние покоя. В работе [3] при исследовании движения реологически сложной жидкости в каналах и трубах при нулевом градиенте давления впервые было установлено, что в течении

неньютоновской жидкости возникает явление возвратного течения, отсутствующее в ньютоновских жидкостях. Подобные задачи получили дальнейшее развитие в работах [4–12].

В работе [4] выполнено численное моделирование градиента давления и объемной доли пустот при газожидкостном стратифицированном течении в горизонтальной трубе. Расчеты проведены с использованием нестационарного многофазного CFD-подхода на основе модели VOF. Показано, что точность результатов в наибольшей степени определяется плотностью расчетной сетки в поперечном сечении трубы. Для различных режимов течения применялись соответствующие модели турбулентности: модель Transition SST – в общем случае и модель Realizable  $k - \varepsilon$  – при необходимости повышенной точности. Несмотря на некоторое занижение расчетных значений градиента давления, CFD-модель показала более высокую точность по сравнению с одномерными моделями при малых скоростях газа. Модель дрейфового потока хорошо согласуется с экспериментальными данными при определении объемной доли пустот.

В статье [5] представлен обзор современного состояния и основных направлений исследований многофазных течений в ядерной технике. Работа состоит из трех разделов. В первом разделе выполнен анализ тематических публикаций, подтверждающий быстрый рост интереса к данной тематике. Во втором разделе рассматриваются современные методы измерений, моделирования и алгоритмические подходы к исследованию многофазных течений в микро- и наномасштабах. Третий раздел посвящен обзору результатов исследований твердожидкостных, газожидкостных и газочастичных потоков в ядерной технике, включая применение концепции критического теплового потока и методов искусственного интеллекта.

В обзорной статье [6] изложены основные положения метода сглаженной гидродинамики частиц с акцентом на физическое моделирование и численную реализацию. Рассматриваются ограничения данного метода и возможные пути их преодоления. Показана применимость метода к различным задачам межфазного течения, включая разрыв жидкостного столба, газожидкостные течения в каналах и переходы между режимами, а также явления смачивания. Примеры моделирования двухжидкостных систем приведены на задаче переноса осадка под действием поверхностных волн. В заключение обозначены актуальные проблемы и перспективы развития метода.

В работе [7] исследуется задача точного определения границы раздела фаз при моделировании стратифицированного многофазного потока. Отмечено, что динамика границы раздела, формируемой под действием поверхностного натяжения и молекулярных сил, существенно влияет на характеристики потока. В связи с этим подчеркивается необходимость применения многофазных CFD-моделей, обеспечивающих корректное описание границы раздела фаз. Эффективность моделей VOF, CLSVOF и MVOF, реализованных в ANSYS Fluent, оценивалась путем сравнения с экспериментальными данными по течению нефти и воды в горизонтальном трубопроводе.

В работе [8] предложены физически обоснованные теоретические модели для прогнозирования переходов между режимами течения в газожидкостном двухфазном потоке. Данные модели являются полностью предсказательными и не требуют задания эмпирических границ режимов. На их основе построена обобщенная карта режимов течения.

В работе [9] рассмотрены различные методы определения свободных границ в численных схемах конечных разностей. Предложен эффективный подход, основанный на методе объема жидкости, который позволяет более точно описывать сложные

формы свободной поверхности. Для иллюстрации метода представлен программный код SOLA-VOF, предназначенный для моделирования несжимаемых течений со свободной поверхностью.

В статье [10] приведен обзор современных достижений и перспективных направлений исследований дисперсных многофазных потоков, включая системы типа «газ–частица», «газ–распыление», «жидкость–частица» и пузырьковые течения. Отмечено, что подобные потоки широко применяются в энергетике, химической и металлургической промышленности, авиации, транспорте, гидравлике и ядерной технике.

В статье [11] описан метод решения уравнений гидродинамики, основанный на прямой временной дискретизации без итерационных процедур. Метод использует давление и скорость в качестве основных переменных и применим к задачам переноса как несжимаемых, так и сжимаемых жидкостей. Решение на каждом временном шаге близко к точному, а погрешность определяется порядком временного шага, что позволяет реализовать эффективную неявную вычислительную схему.

В статье [12] рассмотрены основные проблемы и достижения в моделировании турбулентных потоков с дисперсной фазой. Анализируются подходы, основанные на моделях турбулентности и прямом численном моделировании, а также статистические методы для описания переноса частиц. Рассматриваются несжимаемые изотермические потоки без фазовых переходов, и формулируются рекомендации по учету ключевых корреляционных эффектов.

Колебательные и нестационарные течения реологически сложных и вязкоупругих жидкостей в каналах и трубах в различных режимах рассматривались в исследованиях [19, 20]. Механические модели процессов заливки жидкостей в плоском канале с использованием ньютоновских и неньютоновских жидкостей в стационарных и нестационарных режимах были разработаны в работах [13].

Несмотря на это, нестационарные течения реологически сложных жидкостей в каналах и трубах, возникающие вследствие остановки рабочих механизмов, изучены недостаточно полно. В связи с этим в данной работе на основе модели Oldroyd-B исследуется нестационарное течение реологически сложной жидкости в плоском канале после остановки рабочих механизмов.

## 2 Постановка задачи

Для математического моделирования нестационарного течения реологически сложной жидкости в плоском канале, возникающего в результате остановки рабочих механизмов, рассмотрим плоский канал, длина которого  $L$  превышает его ширину  $2h$ , так что отношение ширины канала к его длине считается достаточно малым. Выполнение данного условия обеспечивает формирование однонаправленного стабилизированного течения.

Для данной задачи сформулируем, начальные условия, считая, что в момент времени, т.е.  $t - t^* \leq 0$ , поток в канале стационарен, за счет постоянного градиента давления  $(-\frac{\partial p_0}{\partial x})$ . Начиная с момента,  $t - t^* = 0$ , градиент давления в системе принимается равным нулю, т.е. в данном случае  $(-\frac{\partial p_1}{\partial x}) = 0$ . Это в свою очередь создаёт нестационарный режим течения в канале.

Таким образом, начальные и граничные условия можно сформулировать следующим образом [21–23]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{при } t - t^* < 0, \quad u_0 = \frac{1}{2\eta} \left( -\frac{\partial p_0}{\partial x} \right) h^2 \left( 1 - \frac{y^2}{h^2} \right), \\ \text{при } t - t^* \geq 0, \quad \left( -\frac{\partial p_1}{\partial x} \right) = 0, \\ \text{при } t - t^* \geq 0, \quad y = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad t - t^* \geq 0, \quad y = h, \quad u = 0. \end{array} \right. \quad (1)$$

В модели Oldroyd-B, при условии, что градиент давления равен нулю в длинном плоском канале, стабилизированное нестационарное течение реологически сложной жидкости в однонаправленном потоке описывается следующей системой уравнений [14–16].

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y}, \\ \lambda_1 \frac{\partial \tau}{\partial t} + \tau = \eta \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right). \end{array} \right. \quad (2)$$

Здесь  $\rho$  – плотность жидкости;  $u$  – скорость;  $p_0$  – давление;  $\tau$  – касательное напряжение;  $\eta$  – динамическая вязкость;  $\lambda_1, \lambda_2$  – соответственно, время релаксации и время ретардации;  $t$  – время;  $y$  – поперечная координата.

### 3 Метод решения

Для решения системы уравнений (2) с начальными и граничными условиями (1) применим преобразование Лапласа [17, 18] по времени. При этом по переменной  $t$  используем следующие замены [21–23]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{u} = s \int_0^{\infty} e^{-st} u dt, \quad \bar{\tau} = s \int_0^{\infty} e^{-st} \tau dt, \\ \frac{\partial u}{\partial t} \rightarrow s\bar{u} - su_0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \rightarrow \frac{d^2 \bar{u}}{dy^2}, \\ \frac{\partial \tau}{\partial t} \rightarrow s\bar{\tau}, \quad \frac{\partial p}{\partial x} \rightarrow \frac{d\bar{p}}{dx}, \end{array} \right. \quad (3)$$

где  $s$  – параметр преобразования.

Тогда система уравнений (2) приводится к такому виду:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho(-su_0 + s\bar{u}) = \frac{\partial}{\partial y} (\bar{\tau}), \\ \lambda_1 s\bar{\tau} + \bar{\tau} = \eta(1 + \lambda_2 s) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}. \end{array} \right. \quad (4)$$

Используя второе уравнение в системе уравнений (4), получаем:

$$\bar{\tau} = \bar{\eta}(s) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}, \quad (5)$$

где

$$\bar{\eta}(s) = \eta \eta^*(s) = \eta \left( \frac{1 + s\lambda_2}{1 + s\lambda_1} \right), \quad \eta^* = \left( \frac{1 + s\lambda_2}{1 + s\lambda_1} \right).$$

Если подставить полученное выражение (5) в систему уравнений (4), то получим уравнение:

$$\rho(-su_0 + s\bar{u}) = \eta\eta^*(s)\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial y^2}, \quad (6)$$

здесь  $u_0 = \frac{1}{2\eta} \left(-\frac{\partial p_0}{\partial x}\right) (h^2 - y^2)$ .

Приведем уравнение (6) к следующему виду:

$$\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial y^2} + \frac{i^2\rho s}{\eta\eta^*(s)}\bar{u} = -\frac{\rho s}{2\eta\eta\eta^*(s)} \left(-\frac{\partial p_0}{\partial x}\right) (h^2 - y^2). \quad (7)$$

Решение однородной части уравнения (7) находится следующим образом:

$$\bar{u} = c_1 \cos\left(i\sqrt{\frac{\rho s}{\bar{\eta}(s)}}y\right) + c_2 \sin\left(i\sqrt{\frac{\rho s}{\bar{\eta}(s)}}y\right). \quad (8)$$

Решение неоднородной части уравнения (7) имеет вид:

$$u^* = -\frac{\eta^*(s)}{\rho s} \left(-\frac{\partial p_0}{\partial x}\right) + \frac{1}{2\eta} \left(-\frac{\partial p_0}{\partial x}\right) (h^2 - y^2). \quad (9)$$

Учитывая полученное решение (8) и (9), находим общее решение уравнения (7):

$$\begin{aligned} \bar{u} = & c_1 \cos\left(i\sqrt{\frac{\rho s}{\bar{\eta}(s)}}y\right) + c_2 \sin\left(i\sqrt{\frac{\rho s}{\bar{\eta}(s)}}y\right) + \\ & + \frac{1}{2\eta} \left(-\frac{\partial p_0}{\partial x}\right) (h^2 - y^2) - \frac{\eta^*(s)}{\rho s} \left(-\frac{\partial p_0}{\partial x}\right). \end{aligned} \quad (10)$$

Используя граничные условия (1), находим произвольные постоянные и

$$c_1 = \frac{\eta^*(s)}{\rho s} \left(-\frac{\partial p_0}{\partial x}\right) / \cos\left(i\sqrt{\frac{\rho s}{\bar{\eta}(s)}}h\right), \quad c_2 = 0. \quad (11)$$

Подставляя найденные значения (11) в (10), получим решение уравнение (7):

$$\begin{aligned} \bar{u}(y, s) = & -\frac{\eta^*(s)}{\rho s} \left(-\frac{\partial p_0}{\partial x}\right) \left(1 - \frac{\cos\left(i\sqrt{\frac{\rho s}{\bar{\eta}(s)}}y\right)}{\cos\left(i\sqrt{\frac{\rho s}{\bar{\eta}(s)}}h\right)}\right) + \\ & + \frac{1}{2\eta} \left(-\frac{\partial p_0}{\partial x}\right) (h^2 - y^2). \end{aligned} \quad (12)$$

Для перехода от решения (12), к оригиналу используем формулу Лапласа:

$$\begin{aligned} u(y, t) = & \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{st} \left( \left( \left( -\frac{\eta^*(s)}{\rho s} \left(-\frac{\partial p_0}{\partial x}\right) \left(1 - \frac{\cos\left(i\sqrt{\frac{\rho s}{\bar{\eta}(s)}}y\right)}{\cos\left(i\sqrt{\frac{\rho s}{\bar{\eta}(s)}}h\right)}\right) \right) \right) \right) \frac{ds}{s} + \\ & + \frac{1}{2\eta} \left(-\frac{\partial p_0}{\partial x}\right) (h^2 - y^2). \end{aligned} \quad (13)$$

Найденное решение представляет собой интеграл Коши в комплексном поле, и для его вычисления необходимо найти особые точки функции, стоящей под интегралом.

Это точка  $s = 0$  и точки, удовлетворяющие решению трансцендентного уравнения  $\cos\left(i\sqrt{\frac{\rho s}{\bar{\eta}(s)}}h\right) = 0$ . В этих точках интеграл (13) будет иметь только полярные особые точки. Решения, которого определяются в зависимости от наличия реологических моделей сложной жидкости. В связи с этим в следующем параграфе, представляя уравнение реологических моделей, будут анализированы нестационарные процессы при остановке рабочих механизмов.

#### 4 Анализ ньютоновской жидкости

В частном случае из (13) при  $\bar{\eta}(s) = \eta$  получается для Ньютоновской жидкости коэффициент динамической вязкости и соответственно получается решение уравнения в виде [21–23]

$$u(y, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{st} \left( \left( -\frac{1}{\rho s} \left( -\frac{\partial p_0}{\partial x} \right) \left( 1 - \frac{\cos\left(i\sqrt{\frac{\rho s}{\eta(s)}}y\right)}{\cos\left(i\sqrt{\frac{\rho s}{\eta(s)}}h\right)} \right) \right) \right) \frac{ds}{s} + \frac{1}{2\eta} \left( -\frac{\partial p_0}{\partial x} \right) (h^2 - y^2). \quad (14)$$

Интеграл (14) представляет собой решение для ньютоновской жидкости при нестационарном течении в интегральной форме Коши. Чтобы найти его интегралы, необходимо найти особые точки выражения под интегралом. Такие особые точки есть, точки  $s = 0$ ,  $s = -v\frac{\bar{s}_n}{h^2}$ . Интеграл в этих точках определяются как вычисления вычетов:

$$\frac{F_1(s)}{F_2(s)} = \frac{C_0}{s} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{s - s_n}, \quad (15)$$

здесь коэффициент  $C_0$  определяется из (15) умножением  $s$  в обеих частях и вычислением предела:

$$C_0 = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sF_1(s)}{F_2(s)} = -\frac{1}{2\eta} \left( -\frac{\partial p_0}{\partial x} \right) h^2 \left( 1 - \frac{y^2}{h^2} \right) + \frac{1}{2\eta} \left( -\frac{\partial p_0}{\partial x} \right) h^2 \left( 1 - \frac{y^2}{h^2} \right) = 0. \quad (16)$$

Чтобы найти  $C_n$  сначала нужно определить корень трансцендентного уравнения  $\cos\left(i\sqrt{\frac{\rho s}{\eta(s)}}h\right) = 0$ . В этом случае это корень определяется из уравнения  $i\sqrt{\frac{\rho s}{\eta(s)}}h = \frac{2n+1}{2}\pi$ . Отсюда при  $s = -v\frac{\bar{s}_n}{h^2}$  находим решения  $\bar{s}_n = \frac{(2n+1)^2}{4}\pi^2$ . Учитывая это значение, определяем  $C_n$ , следующим образом:

$$\begin{aligned} C_n &= \lim_{s \rightarrow s_n} \frac{F_1(s)}{F'_2(s)} = \\ &= \lim_{s \rightarrow s_n} e^{st} \left( -\frac{1}{\rho s^2} \left( -\frac{\partial p_0}{\partial x} \right) \left( \frac{\cos\left(i\sqrt{\frac{\rho s}{\eta(s)}}h\right) - \cos\left(i\sqrt{\frac{\rho s}{\eta(s)}}y\right)}{\cos'_s\left(i\sqrt{\frac{\rho s}{\eta(s)}}h\right)} \right) \right) = \\ &= \frac{h^2}{2\eta} \left( -\frac{\partial p_0}{\partial x} \right) 32 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos\left(\left(\frac{2n+1}{2}\right)\pi\frac{y}{h}\right) e^{-\frac{v}{h^2}\bar{s}_n t}}{(2n+1)^3 \pi^3}. \end{aligned} \quad (17)$$

Подставив найденные значения коэффициентов  $C_0$ ,  $C_n$  в формулу (15), получим следующую формулу для распределения скорости:

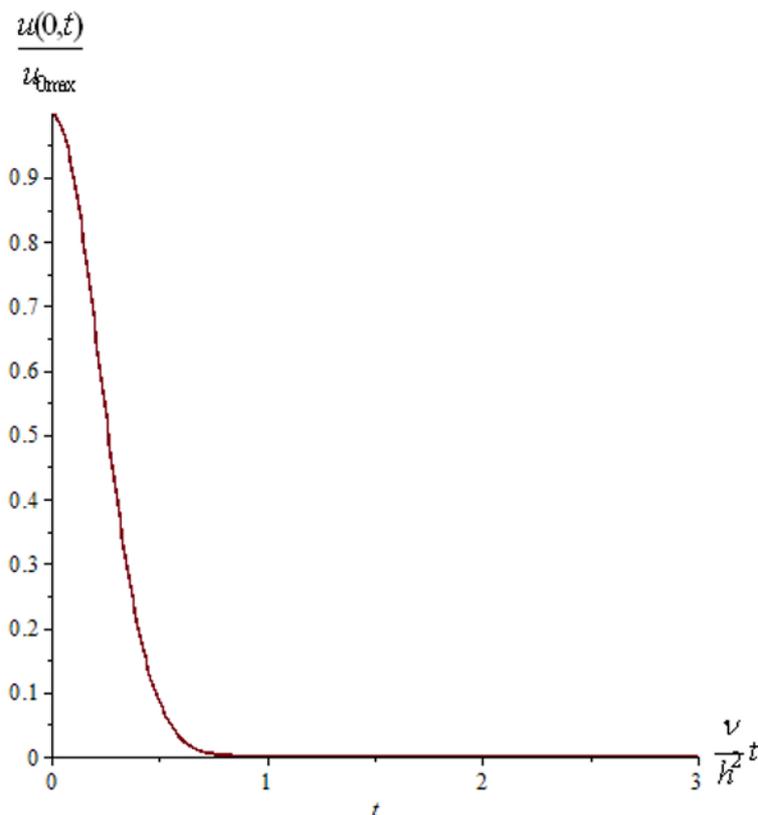
$$\frac{u(y, t)}{u_{0 \max}} = 32 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos\left(\left(\frac{2n+1}{2}\right) \pi \frac{y}{h}\right) e^{-\frac{\nu}{h^2} \bar{s}_n t}}{(2n+1)^3 \pi^3}. \quad (18)$$

Здесь  $u_{0 \max} = \frac{1}{2\eta} \left(-\frac{\partial p_0}{\partial x}\right) h^2$  – стационарная скорость течения ньютоновской жидкости в оси канала. Отношение нестационарной максимальной скорости к максимальной скорости стационарного профиля при нестационарном течении Ньютоновской жидкости определяется по формуле:

$$\frac{u(0, t)}{u_{0 \max}} = 32 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{-\frac{\nu}{h^2} \bar{s}_n t}}{(2n+1)^3 \pi^3}. \quad (19)$$

Здесь  $\bar{s}_n = \frac{(2n+1)^2}{4} \pi^2$ .

На основе найденной формулы (19) на рис. 1 проиллюстрировано изменение во времени отношение нестационарной максимальной скорости к максимальной скорости стационарного профиля при нестационарном течении Ньютоновской жидкости



**Рис. 1** Изменение во времени отношения максимальных скоростей при нестационарном течении ньютоновской жидкости

Из рис. 1 видно, что это отношение монотонно уменьшается в зависимости от времени и асимптотически стремится к нулю.

## 5 Анализ реологически сложной жидкости на Oldroyd-B

Для анализа реологически сложной жидкости на модели Oldroyd-B, необходимо найти корни уравнения:

$$i\sqrt{\frac{\rho s}{\eta\eta^*(s)}}h = \frac{2n+1}{2}\pi, \quad (20)$$

здесь

$$\eta^* = \left( \frac{1+s\lambda_2}{1+s\lambda_1} \right).$$

Отсюда легко, можно получить

$$s = -\frac{(2n+1)^2}{4}\pi^2 \frac{\nu}{h^2} \left( \frac{1+s\lambda_2}{1+s\lambda_1} \right). \quad (21)$$

Если предположить, что  $s = -\frac{\nu}{h^2}\bar{s}$ , то уравнение (21) принимает безразмерный вид:

$$\bar{s} = \frac{(2n+1)^2}{4}\pi^2 \left( \frac{1-\bar{s}De\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}{1-\bar{s}De_1} \right) = a_n^2 \left( \frac{1-\bar{s}De\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}{1-\bar{s}De_1} \right). \quad (22)$$

Выполнив некоторые простые арифметические операции над уравнение (22), то его можно преобразовать в квадратное уравнение вида

$$De\bar{s}^2 - \bar{s}(1 + \gamma Dea_n^2) + a_n^2 = 0, \quad (23)$$

здесь

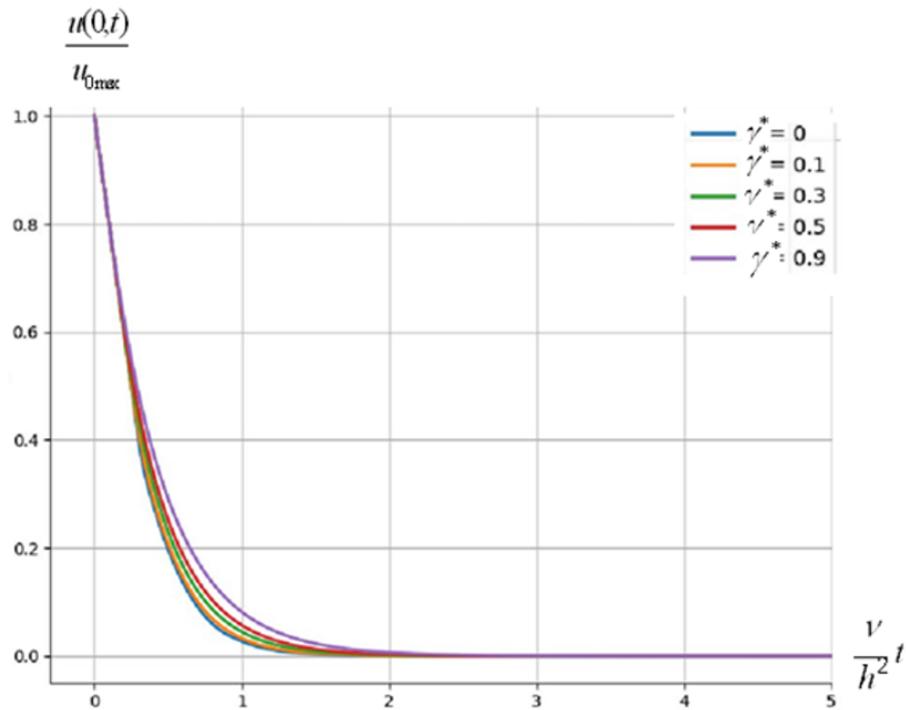
$$a_n = \frac{2n+1}{2}\pi, \quad De = \frac{\lambda\nu}{h^2}, \quad \gamma = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}.$$

Полученное уравнение (23) имеет два корня  $s_{1n,2n}$ , в котором соответствующие решения имеют вид

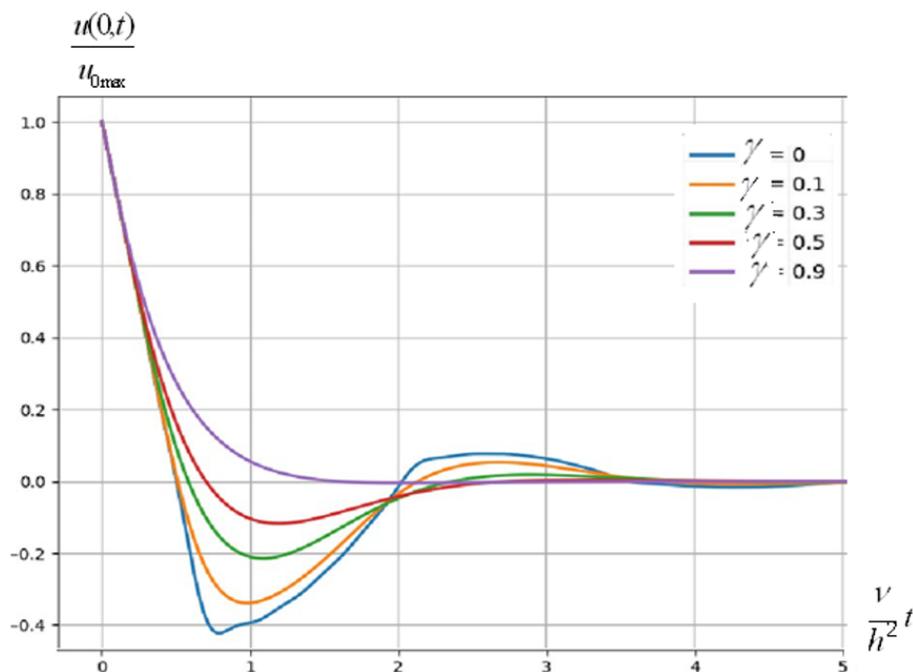
$$u(y, t) = 32 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=1}^2 \frac{(-1)^n \cos\left(\left(\frac{2n+1}{2}\right)\pi\frac{y}{h}\right) e^{-\frac{\nu}{h^2}\bar{s}_{in}t}}{(2n+1)^3 \pi^3 \frac{1-2De\bar{s}_{in}+De^2\bar{s}_{in}^2\gamma}{(1-s_{in}De)^2}}, \quad (24)$$

$$\frac{u(0, t)}{u_{0\max}} = 32 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=1}^2 \frac{(-1)^n e^{-\frac{\nu}{h^2}\bar{s}_{in}t}}{(2n+1)^3 \pi^3 \frac{1-2De\bar{s}_{in}+De^2\bar{s}_{in}^2\gamma}{(1-s_{in}De)^2}}. \quad (25)$$

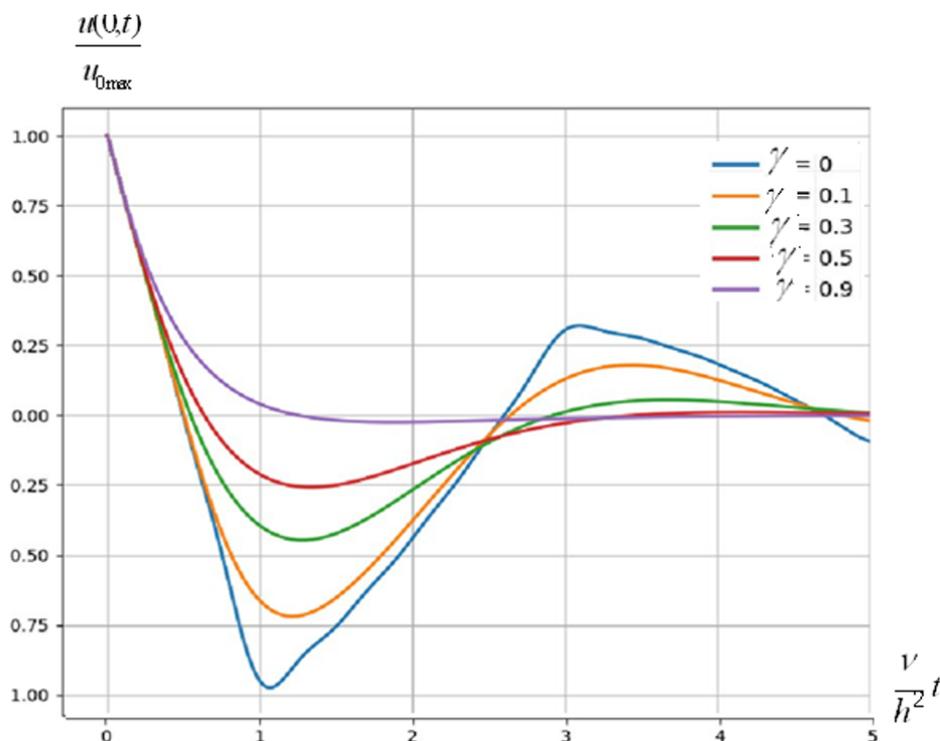
На основе модели Oldroyd-B, проводится анализ перехода реологически сложной жидкости из нестационарного состояния в стационарное с использованием формулы (25) как процесс остановки рабочих механизмов.



**Рис. 2** Изменение во времени отношения нестационарной и стационарной максимальных скоростей для вязкоупругой жидкости (когда число Дебора  $De = 0.1$  и при различных значениях  $\gamma^* = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ )



**Рис. 3** Изменение во времени отношения нестационарной и стационарной максимальных скоростей при течении вязкоупругой жидкости (когда число Дебора  $De = 0.1$  и при различных значениях  $\gamma^* = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ )



**Рис. 4** Изменение во времени отношения нестационарной и стационарной максимальной скорости при течении вязкоупругой жидкости (когда число Дебора  $De = 1$  и при различных значениях  $\gamma^* = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ )

На рис. 2 показано изменение во времени отношения нестационарной максимальной скорости к максимальной скорости стационарного профиля при нестационарном течении вязкоупругой жидкости (когда числа Дебора  $De = 0.1$  и при различных значениях  $\gamma = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ ) на основе модели Oldroyd-B.

Из рисунка видно, что в данном случае переход максимальной скорости из нестационарного состояния в стационарное практически не отличается от ньютоновской жидкости. На рис. 3 и 4 показано изменение во времени отношения нестационарной максимальной скорости к максимальной скорости стационарного профиля при нестационарном течении вязкоупругой жидкости (когда числа Дебора  $De = 0.5$ ; 1 и при различных значениях  $\gamma = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ ) на основе модели Oldroyd-B.

Из этих графиков видно, что при  $De = 0.5$  значениях коэффициента Деборы в модели Oldroyd-B, возникновение эффекта «упругого возврата» сравнительно ньютоновской жидкости (рис. 3,4). В результате возникновения этого эффекта установлено, что при течении реологически сложной жидкости возможно возникновение обратного течения, направленного в противоположную сторону от основного течения.

Возникновение данного явления может привести к преждевременному выходу из строя рабочих устройств или механизмов, используемых в технических и технологических процессах. Кроме того, в результате увеличения коэффициента Деборы установлено, что длительность процесса перехода из нестационарного состояния в стационарное увеличивается. Например, из приведенных выше рисунков видно, что при увеличении коэффициента Деборы в десять раз время перехода в стационарное состояние увеличивается в 5-6 раз.

## 6 Заключение

Возникающее нестационарное течение ньютоновской жидкости при остановке рабочих устройств или механизмов, переходит к стационарному состоянию постепенно и монотонно. В реологически сложной жидкости Oldroyd-B после снятия градиента давления возникает явление упругого возврата, которое отсутствует в ньютоновских течениях. При этом значения максимальной скорости, оказываются в 1,5–2 раза ниже, чем в стационарном состоянии ньютоновской жидкости, при этом наблюдается течение в противоположном направлении основного потока, что приводит к возникновению неблагоприятных явлений.

## Литература

- [1] *Шульман З.П., Хусид Б.М.* Нестационарные процессы конвективного переноса в наследственных средах. – Минск, 1983. – 256 с.
- [2] *Наврұзов К., Хакбердиев Ж.Б.* Динамика неньютоновских жидкостей. – Ташкент: Фан, 2000. – 246 с.
- [3] *Наврұзов К.* Биомеханика крупных кровеносных сосудов. – Ташкент: Fan va texnologiya, 2011. – 144 с.
- [4] *Passoni S., Carraretto I.M., Mereu R., Colombo L.P.M.* Two-phase stratified flow in horizontal pipes: A CFD study to improve prediction of pressure gradient and void fraction // *Chemical Engineering Research and Design*. – 2023. – Vol. 189. – P. 38-49.
- [5] *Wu M., et al.* Advances in the modeling of multiphase flows and their application in nuclear engineering: A review // *Experimental and Computational Multiphase Flow*. – 2024. – Vol. 6, № 4. – P. 287-352.
- [6] *Pozorski J., Olejnik M.* Smoothed particle hydrodynamics modelling of multiphase flows: An overview // *Acta Mechanica*. – 2024. – Vol. 235. – P. 1685-1714. – doi: <http://dx.doi.org/10.1007/s00707-023-03763-4>.
- [7] *Senapati A., Dewangan S.K.* Comparison of performance of different multiphase models in predicting stratified flow // *Computational Thermal Sciences*. – 2017. – Vol. 9, № 6. – P. 529-539.
- [8] *Taitel Y., Dukler A.E.* A model for predicting flow regime transitions in horizontal and near-horizontal gas-liquid flow // *AIChE Journal*. – 1976. – Vol. 22, № 1. – P. 47-55. – doi: <http://dx.doi.org/10.1002/aic.690220105>.
- [9] *Hirt C., Nichols B.* Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries // *Journal of Computational Physics*. – 1981. – Vol. 39. – P. 201-225. – doi: [http://dx.doi.org/10.1016/0021-9991\(81\)90145-5](http://dx.doi.org/10.1016/0021-9991(81)90145-5).
- [10] *Lakehal L.* Advances in turbulence modelling for multiphase flows // *International Journal of Multiphase Flow*. – 2012. – Vol. 38. – P. 1-16.
- [11] *Issa R.* Solution of the implicitly discretised fluid flow equations by operator splitting // *Journal of Computational Physics*. – 1986. – Vol. 62. – P. 40-65.
- [12] *Elghobashi S.* On predicting particle-laden turbulent flows // *Applied Scientific Research*. – 1994. – Vol. 52. – P. 309-329.
- [13] *Борзенко Е.И., Якутенок В.А.* Эволюция свободной поверхности при заполнении плоских каналов вязкой жидкостью // *Известия РАН. Механика жидкости и газа*. – 2008. – № 1. – С. 24-30.
- [14] *Астарита Дж., Марруччи Дж.* Основы гидромеханики неньютоновских жидкостей. – М.: Мир, 1978. – 309 с.
- [15] *Акилов Ж.А.* Нестационарные движения вязкоупругих жидкостей. – Ташкент: Фан, 1982. – 104 с.

- [16] *Попов Д.Н.* Нестационарные гидромеханические процессы. – М.: Машиностроение, 1982. – 424 с.
- [17] *Носова Л.И.* Таблицы функций Томсона и их первых производных. – М.: Изд-во АН СССР, 1960. – 423 с.
- [18] *Кузнецов Д.С.* Специальные функции. – М.: Высшая школа, 1965. – 423 с.
- [19] *Navruzov K., Turaev M., Shukurov Z.* Pulsating flows of viscous fluid in channel for given harmonic fluctuation of flow rate // E3S Web of Conferences. – 2023. – Vol. 401. – Art. no. 02010.
- [20] *Navruzov K., Rajabov S., Ashirov M.* Mathematical modeling of hydrodynamic resistance in an oscillatory flow of a viscoelastic fluid // E3S Web of Conferences. – 2023. – Vol. 401. – Art. no. 02026. – doi: <http://dx.doi.org/10.1051/e3sconf/202340102026>.
- [21] *Yakhshibayev D.S., Khudaykulov S.I., Usmanov A.Kh.* A mathematical model of the diffusion process of sewage and channel waters mixing // 2019 International Conference on Information Science and Communications Technologies (ICISCT). – 2019. – P. 1-5. – doi: <http://dx.doi.org/10.1109/ICISCT47635.2019.9011948>.
- [22] *Djumanov J.Kh., Karimov A.B., Yaxshibayev D.S.* Monitoring va gidrogeologik tizimlarni matematik modellashirish // TATU Xabarlar. – 2021. – №4(60). – В. 77-88.
- [23] *Яхшибаев Д.С.* Моделирование конвективной устойчивости стратификационных течений, применяемых в атомных станциях // Потомки Мухаммеда аль-Хорезми. – 2023. – №3(25). – С. 190-194.

UDC 532.516

## THE OCCURRENCE OF THE PHENOMENON OF ELASTIC RETURN DURING UNSTEADY FLOW OF A RHEOLOGICALLY COMPLEX FLUID IN A FLAT CHANNEL WITHIN THE OLDROYD-B MODEL

*Yakhshibaev D.S.*

d.yaxshibayev@tuit.uz

Tashkent University of Information Technologies,  
100200, 108, Amir Temur str., Tashkent, Uzbekistan.

This article examines unsteady flows of rheologically complex fluids in a flat channel using the Oldroyd-B model after the actuator is switched off. It is assumed that until the actuator is switched off, the fluid flow is steady under a constant pressure gradient. From a given point in time, the pressure gradient in the system is assumed to be zero. The problem is solved analytically using the Laplace transform. Based on the solutions obtained, the corresponding hydrodynamic regularities are determined, which are important for technical and technological processes.

**Keywords:** pressure gradient, Laplace transform, unsteady flow, hydrodynamic effects, rheologically complex fluid.

**Citation:** Yakhshibaev D.S. 2026. The occurrence of the phenomenon of elastic return during unsteady flow of a rheologically complex fluid in a flat channel within the Oldroyd-B model. *Problems of Computational and Applied Mathematics*. 1(71): 16-27.

**DOI:** [https://doi.org/10.71310/pcam.1\\_71.2026.02](https://doi.org/10.71310/pcam.1_71.2026.02)

# HISOBLASH VA AMALIY МАТЕМАТИКА MUAMMOLARI

ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ  
И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
PROBLEMS OF COMPUTATIONAL  
AND APPLIED MATHEMATICS



# ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

№ 1(71) 2026

Журнал основан в 2015 году.

Издается 6 раз в год.

**Учредитель:**

Научно-исследовательский институт развития цифровых технологий и  
искусственного интеллекта.

**Главный редактор:**

Равшанов Н.

**Заместители главного редактора:**

Арипов М.М., Шадиметов Х.М., Ахмедов Д.Д.

**Ответственный секретарь:**

Убайдуллаев М.Ш.

**Редакционный совет:**

Азамов А.А., Алоев Р.Д., Амиргалиев Е.Н. (Казахстан), Арушанов М.Л.,  
Бурнашев В.Ф., Джумаёзов У.З., Загребина С.А. (Россия), Задорин А.И. (Россия),  
Игнатъев Н.А., Ильин В.П. (Россия), Иманкулов Т.С. (Казахстан),  
Исмагилов И.И. (Россия), Кабанихин С.И. (Россия), Карачик В.В. (Россия),  
Курбонов Н.М., Маматов Н.С., Мирзаев Н.М., Мухамадиев А.Ш., Назирова Э.Ш.,  
Нормуродов Ч.Б., Нуралиев Ф.М., Опанасенко В.Н. (Украина),  
Расулмухамедов М.М., Садуллаева Ш.А., Старовойтов В.В. (Беларусь),  
Хаётов А.Р., Халджигитов А., Хамдамов Р.Х., Хужаев И.К., Хужаеров Б.Х.,  
Эшмаматова Д.Б., Дустмуродова Ш.Ж., Чье Ен Ун (Россия),  
Шабозов М.Ш. (Таджикистан), Dimov I. (Болгария), Li Y. (США),  
Mascagni M. (США), Min A. (Германия), Singh M. (Южная Корея).

Журнал зарегистрирован в Агентстве информации и массовых коммуникаций при  
Администрации Президента Республики Узбекистан.

Свидетельство №0856 от 5 августа 2015 года.

**ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X**

При перепечатке материалов ссылка на журнал обязательна.

За точность фактов и достоверность информации ответственность несут авторы.

**Адрес редакции:**

100125, г. Ташкент, м-в. Буз-2, 17А.

Тел.: +(998) 71 263-41-98.

Э-почта: journals@airi.uz.

Веб-сайт: <https://journals.airi.uz>.

**Дизайн и вёрстка:**

Шарипов Х.Д.

Отпечатано в типографии НИИ РЦТИИ.

Подписано в печать 25.02.2026 г.

Формат 60x84 1/8. Заказ №1. Тираж 100 экз.

# PROBLEMS OF COMPUTATIONAL AND APPLIED MATHEMATICS

**No. 1(71) 2026**

The journal was established in 2015.  
6 issues are published per year.

**Founder:**

Digital Technologies and Artificial Intelligence Development Research Institute.

**Editor-in-Chief:**

Ravshanov N.

**Deputy Editors:**

Aripov M.M., Shadimetov Kh.M., Akhmedov D.D.

**Executive Secretary:**

Ubaydullaev M.Sh.

**Editorial Council:**

Azamov A.A., Alov R.D., Amirgaliev E.N. (Kazakhstan), Arushanov M.L.,  
Burnashev V.F., Djumayozov U.Z., Zagrebina S.A. (Russia), Zadorin A.I. (Russia),  
Ignatiev N.A., Ilyin V.P. (Russia), Imankulov T.S. (Kazakhstan), Ismagilov I.I. (Russia),  
Kabanikhin S.I. (Russia), Karachik V.V. (Russia), Kurbonov N.M., Mamatov N.S.,  
Mirzaev N.M., Mukhamadiev A.Sh., Nazirova E.Sh., Normurodov Ch.B., Nuraliev F.M.,  
Opanasenko V.N. (Ukraine), Sadullaeva Sh.A., Starovoitov V.V. (Belarus),  
Khayotov A.R., Khaldjigitov A., Khamdamov R.Kh., Khujaev I.K., Khujayorov B.Kh.,  
Eshmamatova D.B., Dustmurodova Sh.J., Chye En Un (Russia),  
Shabozov M.Sh. (Tajikistan), Dimov I. (Bulgaria), Li Y. (USA), Mascagni M. (USA),  
Min A. (Germany), Singh M. (South Korea).

The journal is registered by Agency of Information and Mass Communications under the  
Administration of the President of the Republic of Uzbekistan.

Certificate of Registration No. 0856 of 5 August 2015.

**ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X**

At a reprint of materials the reference to the journal is obligatory.  
Authors are responsible for the accuracy of the facts and reliability of the information.

**Address:**

100125, Tashkent, Buz-2, 17A.

Tel.: +(998) 71 263-41-98.

E-mail: [journals@airi.uz](mailto:journals@airi.uz).

Web-site: <https://journals.airi.uz>.

**Layout design:**

Sharipov Kh.D.

DTAIRI printing office.

Signed for print 25.02.2026

Format 60x84 1/8. Order No. 1. Print run of 100 copies.

# Содержание

<i>Равшанов Н., Насруллаев П., Боборахимов Б.</i> Математическое моделирование рассеивания вредных веществ, выбрасываемых в атмосферу в условиях сложной городской среды . . . . .	5
<i>Яхшибаев Д.С.</i> Возникновение явления упругого возврата при нестационарном течении реологически сложной жидкости в плоском канале в рамках модели Oldroyd-B	16
<i>Равшанов Н., Боборахимов Б.И., Бердиёров Ш.Ш.</i> Численное моделирование процессов фильтрации и транспорта в цилиндрическом пористом фильтре с использованием метода конечных объемов . . . .	28
<i>Зарипова А.Р.</i> Свойства решений систем уравнений теплопроводности, связанных с нелинейными граничными условиями . . . . .	43
<i>Курбонов Н., Боборахимов Б., Хажназарова Д., Муродуллаев Б.</i> Моделирование процесса геофильтрации и анализ движения воды на орошаемых земельных участках . . . . .	57
<i>Джумаёзов У.З., Рахмонова Р.А., Абдирахмонова М.Н.</i> Численное моделирование плоских упругопластических задач в деформациях	71
<i>Мухсинов Е.М., Хакимов Р.И.</i> О разрешимости задачи преследования для дифференциальных игр с дробными производными Хильфера . . . . .	82
<i>Азамов С.С., Бекмуродова Д.Б.</i> Нахождение экстремальной функции функционала погрешности в пространстве периодических функций . . . . .	94
<i>Далабаев У. Хасанова Д.</i> Решение задачи Дирихле методом перемещаемого узла . . . . .	103
<i>Муродов С.К.</i> Численное моделирование краевой задачи для двухпараметрического сингулярно возмущённого дифференциального уравнения с использованием спектрально-сеточного метода . . . . .	113
<i>Адылова Ф.Т., Давронов Р.Р.</i> Генерации графов заданной структуры: от глубоких нейронных сетей к квантовым моделям (на примере создания новых лекарств) . . . . .	123

# Contents

<i>Ravshanov N., Nasrullaev P., Boborakhimov B.</i> Mathematical modeling of the dispersion of harmful substances released into the atmosphere in complex urban environments . . . . .	5
<i>Yakhshibaev D.S.</i> The occurrence of the phenomenon of elastic return during unsteady flow of a rheologically complex fluid in a flat channel within the Oldroyd-B model . . . . .	16
<i>Ravshanov N., Boborakhimov B.I., Berdiyev Sh.Sh.</i> Numerical modeling of filtration and transport processes in a cylindrical porous filter using the finite volume method . . . . .	28
<i>Zaripova A.R.</i> Properties of solutions to systems of heat conduction equations with nonlinear boundary conditions . . . . .	43
<i>Kurbonov N., Boborakhimov B., Khaknazarova D., Murodullaev B.</i> Numerical modeling of the geofiltration process on irrigated lands taking into account physical factors . . . . .	57
<i>Djumayozov U.Z., Rakhmonova R.A., Abdirakhmonova M.N.</i> Numerical Modeling of Plane Elastoplastic Problems in Strains . . . . .	71
<i>Mukhsinov E.M., Hakimov R.I.</i> On the solvability of the pursuit problem for differential games with fractional Hilfer derivatives . . . . .	82
<i>Azamov S.S., Bekmurodova D.B.</i> Finding the extremum of the error functional in the space of periodic functions . . . . .	94
<i>Dalabaev U. Khasanova D.</i> Solution of the Dirichlet problem by the moving node method . . . . .	103
<i>Murodov S.K.</i> Numerical modeling of the boundary value problem for a two-parameter singularly perturbed differential equation using the spectral-grid method . . . . .	113
<i>Adilova F.T., Davronov R.R.</i> Graph generation with a prescribed structure: from deep neural networks to quantum models (a case study of novel drug design) . . . . .	123