

УДК 519.632.4

ОБ ОПТИМАЛЬНЫХ ИТЕРАЦИОННЫХ И ПРЯМЫХ МЕТОДАХ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА

Зиякулова Ш.А.

shziyaqulova@gmail.com

Термезский государственный университет,
190111 Узбекистан, Термиз, ул. Баркамол авлод, дом 43.

Для численного решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона разработаны как прямые, так и итерационные методы. Однако требуемое число арифметических операций для прямых методов, а также число итераций в итерационных методах зачастую оказываются очень большим. По этой причине вопрос о высокой точности и эффективности тех или иных методов остаются актуальными. В данной работе для численного решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона предлагается новый высокоточный и эффективный метод – дискретный вариант метода предварительного интегрирования значительно превосходящий по числу арифметических операций существующих прямых и итерационных методов. Эффективность предлагаемого метода иллюстрируются в табличных и графических результатах.

Ключевые слова: оптимальные параметры, итерационный и прямой метод, число итераций, число арифметических операций, дискретный вариант метода предварительного интегрирования.

Цитирование: Зиякулова Ш.А. Об оптимальных итерационных и прямых методах решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2025. – № 6(70). – С. 143-156.

DOI: https://doi.org/10.71310/pcam.6_70.2025.12

1 Введение

В результате разностной аппроксимации краевых задач для эллиптических уравнений получается система линейных алгебраических уравнений. Матрица A этой системы имеет большой порядок, равный числу узлов сетки. Например, для разностной сетки с шагом h по каждому из переменных число узлов сетки равен $F = O\left(\frac{1}{h^p}\right)$, где p – число измерений. В случае двух и трех измерений число уравнений может быть большим, $F \approx 10^4 - 10^6$ (например, при $h = 1/100$) [1]. Кроме того, матрица системы является разреженной (т.е. имеет много нулевых элементов), принимает специфическую (ленточную) структуру и, наконец, является плохо обусловленной матрицей, т.е. отношение наибольшего собственного значения матрицы A к ее наименьшему собственному значению очень велико ($\sim 10^3 - 10^4$).

Все задачи для эллиптических уравнений имеют общее свойство: предполагается, что внешние воздействия не зависят от времени, а начальные условия были заданы достаточно давно, так что физическая система успела выйти на стационарное решение.

Эти особенности эллиптических сеточных уравнений требуют разработки специальных итерационных и прямых экономичных алгоритмов для их численного решения.

Имеющиеся прямые экономичные методы применяются, как правило, для решения узкого, хотя и очень важного, класса сеточных уравнений. Кроме того, прямые

методы используются в итерационных методах для обращения оператора на верхнем слое.

В настоящее время существуют два экономичных прямых метода для решения разностных краевых задач в случае уравнения Пуассона в различных системах координат. Один из них - метод декомпозиции или метод нечетно-четного исключения с факторизацией является модификацией метода исключения Гаусса. Другой метод - метод разделения переменных основан на использовании алгоритма быстрого преобразования Фурье. Для обоих методов справедлива следующая оценка числа арифметических операций Q , требуемых для нахождения решения в случае двумерной задачи – $Q = K_1 (N^2 \log_2 N)$, где N число узлов по одному направлению.

Например, при двумерном случае когда $h = 1/100$, число N будет равным 100, а число арифметических операций приблизительно равен $Q = K_2 (7 \cdot 10^2)$. Кроме вышеуказанных методов, имеется еще один прямой метод- метод матричной прогонки. Однако матричная прогонка требует $Q = K_3 (N^4)$ арифметических операций и большую память для хранения промежуточных величин. Здесь K_1, K_2, K_3 константы определяемые из свойств применяемого метода. Требования предъявляемые к повышению порядка точности прямых методов приводят к значительному увеличению значения этих констант.

Наряду с прямыми методами для численного решения краевых задач в случае уравнения Пуассона можно применять итерационные методы. Однако число итераций в которых зачастую оказывается очень большим. С увеличением требования к точности число итераций значительно увеличивается. Приведем таблицу 1 для сравнения числа итераций для различных итерационных методов в зависимости от требуемой точности ε .

Матрица A используемые в итерационных методах обладает следующими свойствами:

$$A = A^* > 0,$$

$$\delta E \leq A \leq \Delta E, \quad \delta > 0,$$

$$\delta = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\pi h}{2},$$

$$\Delta = \frac{4}{h^2} \cos^2 \frac{\pi h}{2},$$

где

$$\delta = \min_{1 \leq k \leq N-1} \lambda_k(A),$$

$$\Delta = \|A\| = \max_{1 \leq k \leq N-1} \lambda_k(A),$$

$\lambda_k(A)$ – k -е собственное значение матрицы A .

В табл.1 сравнены число итераций для получения выбранной точности ε для разных итерационных методов: метод простой итерации (МПИ), Чебышевский набор параметров (ЧНП), попеременно-треугольный метод (ПТМ), метод верхней релаксации (МВР) и итерационный метод переменных направлений (ИМПН) с оптимальными итерационными параметрами.

Таблица 1 Сравнение итерационных методов по числу итераций

Итерационные методы	МПИ	ЧНП	ПТМ	МВР	ИМПН с оптимальными итерационными параметрами
Формулы для чисел итераций	$\ln(1/\varepsilon)/2\xi$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\Delta_1}{\delta_1}}\ln\frac{2}{\varepsilon}$	$2.9/\sqrt{h}$	$\frac{1}{h}\ln\frac{1}{\varepsilon}$	$\frac{1}{\pi^2}\ln\frac{4}{\varepsilon}\ln\frac{4}{\eta}$
Требуемая точность и шаг сетки	$\varepsilon=10^{-4}, h=1/N, N=10$				
Число итераций $n(\varepsilon)$	200	32	9	92	5
Требуемая точность и шаг сетки	$\varepsilon=10^{-4}, h=1/N, N=50$				
Число итераций $n(\varepsilon)$	5000	160	21	460	8
Требуемая точность и шаг сетки	$\varepsilon=10^{-4}, h=1/N, N=100$				
Число итераций $n(\varepsilon)$	20000	320	29	921	10
Требуемая точность и шаг сетки	$\varepsilon=10^{-7}, h=1/N, N=10$				
Число итераций $n(\varepsilon)$	321	53	9	161	9
Требуемая точность и шаг сетки	$\varepsilon=10^{-7}, h=1/N, N=50$				
Число итераций $n(\varepsilon)$	8160	267	21	806	15
Требуемая точность и шаг сетки	$\varepsilon=10^{-7}, h=1/N, N=100$				
Число итераций $n(\varepsilon)$	32656	535	29	1611	17

Опираясь на вышеприведенные рассуждения можно заключить, что ИМПН с оптимальными итерационными параметрами является экономичным методом численного решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона. Однако оптимальных высокоточных и эффективных прямых методов для решения эллиптических уравнений пока не имеются. Основной целью данной статьи является построение оптимального, высокоточного и эффективного прямого метода решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона. Предлагаемый дискретный вариант МПИ является численным методом отвечающим всем этим требованиям, в котором в качестве базисных функций используются полиномы Чебышева первого рода.

С этой целью приведем обзор по применению полиномов Чебышева при разработке новых методов, при усовершенствовании существующих методов и для численного решения различных прикладных задач.

В статье [2] авторы предлагают исследовать численные решения нескольких моделей дробного порядка для многомерного связанного уравнения Кортевега-Де Фриза, включающего множество различных ядер. Показано, что применяемый спектральный метод обеспечивает превосходную точность и экспоненциальную сходимость. В статье [3] введены некоторые новые определения и более общие пространства результатов в порядке, соответствующем функциям и особенностям конечных точек. Обсуждаются распространение полученных основных результатов на оптимальные оценки соответствующей интерполяции Чебышева, полученные численные результаты демонстрируют отличное совпадение с ошибочными оценками.

Для обеспечения эффективности метода вычисления двойных конечных рядов по полиномам Чебышёва в работе [4, 5] было использовано быстрое дискретное косинусное преобразование Фурье. Этот метод существенно увеличивает скорость вычислений и делает методы, основанные на полиномах Чебышёва, более практичными.

В работе [6] алгебраические преобразования и свойства многочленов Чебышёва используются для получения важного тождества, включающего сумму степеней интеграла многочленов Чебышёва первого рода.

Статья [7] посвящена разработке численно-аналитического метода построения экстремумов нормированных полиномов Чебышёва, заданных в квадрате комплексной плоскости. Исследуемые полиномы являются обобщёнными формами классических полиномов Чебышёва первого рода. В статье подчёркивается возможность вычисления экстремумов полиномов в квадрате комплексной плоскости.

Применение полиномов Чебышёва первого типа к численному решению краевой задачи восьмого порядка представлено в статье [8]. В данной статье на основе предложенного подхода рассматриваемая задача сводится к системе линейных алгебраических уравнений, которая затем решается для нахождения неизвестных констант. Для демонстрации эффективности используемого метода аналитические решения, подобранные для трёх примеров, сравниваются в таблицах и графиках. Полученные с помощью данного метода результаты демонстрируют простоту метода и его преимущества перед рядом других методов.

В [9] собственные комплексно-матричные методы теории графов были использованы для построения ортогональных многочленов, в том числе многочленов Чебышёва, без использования рекурсии. Предлагаемые в данной работе методы предполагают прямое вычисление комплексно-смешанных матриц графов и их характеристических многочленов.

Анализ полиномов Чебышёва первого типа и их характеристик представлен в статье [10]. В данной статье показан процесс получения явного решения дифференциального уравнения второго порядка с использованием полиномов Чебышёва. С помощью полученных явных решений доказана симметрия и ортогональность полиномов Чебышёва.

В статье [11] представлены сведения о введении и изучении до недавних пор множества иррациональных функций, в котором широко использовались дробные степени многочленов Чебышёва. В статье упоминается, что функции, полученные таким образом, называются псевдочебышёвскими функциями.

В статье [12] показано, как несколько важных свойств, связанных со степенными суммами производных многочленов Чебышёва I типа, могут быть получены с помощью комбинаторики и алгебраических перестановок.

Описание обобщённых многочленов Чебышёва первого рода приведено в [13]. В статье подчёркивается, что весьма полезные свойства многочленов Чебышёва могут

быть эффективно использованы при решении математических задач, и поэтому в последние годы в области теории приближений было проведено много исследований с использованием этих многочленов.

В статье [14] приведены сведения о коэффициентах повторения для полиномов Чебышёва первого типа, точная формула в терминах ортогональности к весовой функции полинома и явное выражение этих полиномов через некоторые функции.

Применение полиномов Чебышёва для сегментации и построения границ человеческого мозга при магнитно-резонансной томографии (МРТ) представлено в [15]. В данной работе предлагается новый детектор, позволяющий определять границы мозга на основе коэффициентов перестановки, полученных из функции точек рассеяния, построенных на основе ортогональных полиномов Чебышёва.

В [16] описан метод конечных элементов на основе полиномов Чебышёва для анализа жидкостей, оболочек и пластин. В данной работе подчёркивается, что предложенный метод может обеспечивать надёжные и эффективные результаты. Ортогональные многочлены Чебышёва широко используются для приближения функций, и анализ зависимости точности приближения от характера приближаемой функции, её области определения, степени многочлена Чебышёва и числа узлов коллокации представлен в статье [17]. В данной статье показан оптимальный выбор степени разложения ряда Чебышёва для достижения заданной точности.

В работе [18] для численного решения уравнения Орра-Зомерфельда был использован спектрально-сеточный метод на основе полиномов Чебышева первого рода. В работе [19] показано использование полиномов Чебышёва при численном моделировании задачи на собственные значения для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения с малым параметром перед старшей производной и системы уравнений этого класса. В статье [20] спектральные и спектрально-сеточные методы были использованы при математическом моделировании задачи гидродинамической устойчивости однофазных и двухфазных течений.

В работе [21] описано решение краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной спектральным методом на основе многочленов Чебышёва второго рода. Представленные в работе численные и графические результаты демонстрируют эффективность данного метода при различных значениях многочлена. В работе [22] изложены теоретические основы спектрально-сеточного метода решения начально-краевой задачи для уравнения Бюргерса. Сходимость непрерывного варианта метода предварительного интегрирования при решении нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка с малым параметром при старшей производной изложена в [23].

Численное решение краевой задачи для бигармонического уравнения дискретным вариантом метода предварительного интегрирования изложена в статье [24]. В которой в качестве базисных функций использованы полиномы Чебышева первого рода. В статье [25] дискретный вариант МПИ применён к численному решению эллиптических уравнений. Показано, высокая точность и эффективность предлагаемого метода.

Применение дискретного варианта МПИ для численного моделирования изгиба тонкой пластины изложено в [26]. В статье [27] изложено высокая точность и эффективность дискретного варианта МПИ при численном моделировании изгиба железобетонной плиты описываемый краевой задачей для бигармонического уравнения.

2 Постановка задачи

Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения Пуассона в прямоугольной области $\overline{D} = \{-1 \leq x, y \leq 1\}$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -f(x, y), \quad (1)$$

$$u(-1, y) = 0, u(1, y) = 0, u(x, -1) = 0, u(x, 1) = 0. \quad (2)$$

Для численного моделирования дифференциальной задачи (1)-(2) применяем дискретный вариант МПИ. Для проверки сходимости и порядка точности рассматриваемого метода воспользуемся методом пробных функций. Суть данного метода заключается в следующем. Выбирается некоторая произвольная функция $u_e(x, y)$ удовлетворяющая краевым условиям (2). Подставляя ее в уравнение (1), определяется правая часть

$$f(x, y) = -\left(\frac{\partial^2 u_e}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_e}{\partial y^2}\right). \quad (3)$$

Полученная задача решается дискретным вариантом МПИ и приближенное решение сравнивается с известной пробной функцией $u_e(x, y)$ на различных коллокационных узлах полиномов Чебышева первого рода. В качестве пробной функции (точного решения) дифференциальной задачи (1)-(2) рассмотрим функцию:

$$u_e = (1 - x^2)(1 - y^2)\sin^2(x + y), \quad (4)$$

для выбранной функции (4) правая часть (3), имеет вид:

$$\begin{aligned} f(x, y) = & -2 \left((y^2 - 1) (4x \sin(x + y) \cos(x + y) - (x^2 - 1) (\sin^2(x + y) - \right. \\ & \left. - \cos^2(x + y)) + \sin^2(x + y)) + (x^2 - 1) (4y \sin(x + y) \cos(x + y) - \right. \\ & \left. - (y^2 - 1) (\sin^2(x + y) - \cos^2(x + y)) + \sin^2(x + y)) \right). \end{aligned}$$

Точное решение (4) необходимо для сравнения с приближенным решением полученным дискретным вариантом МПИ.

3 Метод решения

Для численного моделирования дифференциальной задачи (1)-(2) приведем алгоритмы численного решения ИМПН с оптимальными итерационными параметрами и дискретного варианта МПИ.

а) алгоритм итерационного метода переменных направлений с оптимальными итерационными параметрами. Данная схема имеет вид [1]

$$\begin{aligned} \frac{y_{i_1 i_2}^{j+1/2} - y_{i_1 i_2}^j}{\tau_{j+1}^{(1)}} &= \Lambda_1 y_{i_1 i_2}^{j+1/2} + \Lambda_2 y_{i_1 i_2}^j + f(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in \omega_h, \quad y^{j+1/2}|_{\gamma_h} = \mu(x), \\ \frac{y_{i_1 i_2}^{j+1} - y_{i_1 i_2}^{j+1/2}}{\tau_{j+1}^{(2)}} &= \Lambda_1 y_{i_1 i_2}^{j+1/2} + \Lambda_2 y_{i_1 i_2}^{j+1} + f(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in \omega_h, \quad y^{j+1}|_{\gamma_h} = \mu(x) \end{aligned} \quad (5)$$

$$0 < i_1 < N_1 - 1, \quad 0 < i_2 < N_2 - 1$$

для $j = 0, 1, 2, \dots$ при произвольных начальных данных $y^0 = y(x_1, x_2, 0)$.

Здесь j – номер итерации, $y^{j+1/2}$ – промежуточная итерация (подытерация), $\tau_{j+1}^{(1)} > 0$ и $\tau_{j+1}^{(2)} > 0$ итерационные параметры, подлежащие выбору из условия

минимума итераций, $\Lambda_\alpha y = y_{\overline{x_\alpha} x_\alpha}$, $\alpha = 1, 2$ разностный оператор второго порядка, $\overline{\omega_h} = \omega_h + \gamma_h = \{x_i = (i_1 h_1, i_2 h_2) \in \overline{G}\}$ разностная сетка в области $\overline{G} = \{-1 \leq x_\alpha \leq 1, \alpha = 1, 2\}$.

Переход от j -й итерации к $(j+1)$ -й итерации достигается последовательным применением метода прогонки вдоль строк и вдоль столбцов для следующих трехточечных уравнений

$$y^{j+1/2} - \tau_{j+1}^{(1)} \Lambda_1 y^{j+1/2} = F^j, \quad F^j = y^j + \tau_{j+1}^{(1)} \Lambda_1 y^j + \tau_{j+1}^{(1)} f \quad (\text{вдоль строк}),$$

и

$$y^{j+1} - \tau_{j+1}^{(2)} \Lambda_2 y^{j+1} = F^{j+1/2}, \quad F^{j+1/2} = y^{j+1/2} + \tau_{j+1}^{(2)} \Lambda_2 y^{j+1/2} + \tau_{j+1}^{(2)} f \quad (\text{вдоль столбцов}).$$

Таким образом, для вычисления одной итерации требуется $64N_1N_2$ арифметических действий, в случае $N_1 = N_2 = N$ требуется $64N^2$ арифметических операций. В ИМПИ с оптимальными итерационными параметрами для получения заданной точности $\varepsilon > 0$ требуется выполнения $n(\varepsilon)$ итераций, где формула для числа итераций приведено в табл.1 и имеет вид $n(\varepsilon) = \frac{1}{\pi^2} \ln \frac{4}{\varepsilon} \ln \frac{4}{\eta}$.

Вводя обозначения

$$\theta = \frac{1}{16} \eta^2 \left(1 + \frac{1}{2} \eta^2 \right), \quad \sigma = \frac{2j-1}{2n(\varepsilon)}, \quad j = 1, 2, \dots, n(\varepsilon),$$

$$\omega_j = \frac{(1+2\theta)(1+\theta^\sigma)}{2\theta^{\sigma/2}(1+\theta^{1-\sigma}+\theta^{1+\sigma})}, \quad j = 1, 2, \dots, n(\varepsilon)$$

определяются искоемые оптимальные итерационные параметры

$$\tau_j^{(1)} = \frac{q\omega_j + r}{1 + \omega_j p}, \quad \tau_j^{(2)} = \frac{q\omega_j - r}{1 - \omega_j p},$$

где $\chi = \frac{(\Delta-\delta)\Delta}{(\Delta+\delta)\Delta}$, $p = \frac{\chi-t}{\chi+t}$, $r = \frac{2p\Delta}{2\Delta^2}$, $q = r + \frac{1-p}{\Delta}$.

После этого решается задача (5).

Тогда требуемая общая число арифметических операций для реализации ИМПИ с оптимальными итерационными параметрами определяется по следующей формуле

$$Q = 64N^2 n(\varepsilon). \quad (6)$$

Для численного моделирования дифференциальной задачи (1)-(2) применяем дискретный вариант МПИ. Суть данного подхода заключается в следующем: частные производные и правая часть уравнения (1) представляются в виде двойного конечного ряда по полиномам Чебышева первого рода. С помощью имеющихся стандартных формул для полиномов получающиеся дискретное уравнение дважды “интегрируется” по переменной x и по переменной y . Краевые условия (2) также записываются в виде рядов. В результате получается система линейных алгебраических уравнений для определения неизвестных коэффициентов приближенного решения задачи (1)-(2). Затем в коллокационных узлах полиномов Чебышева сравниваются пробная функция (точное решение) и приближенные решения полученное дискретным вариантом МПИ.

Таким образом, частные производные и правую часть представим в виде следующих рядов:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sum_{i=0}^N ' \sum_{j=0}^M ' a_{ij}^{(2x)} T_i(x) T_j(y), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \sum_{i=0}^N ' \sum_{j=0}^M ' a_{ij}^{(2y)} T_i(x) T_j(y),$$

$$f(x, y) = \sum_{i=0}^N ' \sum_{j=0}^M ' g_{ij} T_i(x) T_j(y), \quad (7)$$

где $T_i(x)$, $T_j(y)$ – полиномы Чебышева первого рода, штрих над суммой означает, что коэффициенты рядов a_{ij} , g_{ij} берется со множителем $\frac{1}{4}$ когда $i = j = 0$, эти коэффициенты берется со множителем $\frac{1}{2}$ когда $i = 0$ или $j = 0$.

После двухкратного интегрирования рядов (5) для частных производных получается конечный двойной ряд по полиномам Чебышева для определения приближенного (аппроксимационного) решения дифференциальной задачи следующего вида

$$u_a(x, y) = \sum_{i=0}^N ' \sum_{j=0}^M ' a_{ij} T_i(x) T_j(y), \quad (8)$$

с неопределенными коэффициентами a_{ij} ($i = 0, 1, \dots, N; j = 0, 1, \dots, M$), общее число которых равны $(N+1)(M+1)$.

Теперь приведем алгоритм решения предлагаемого дискретного варианта МПИ [2, 27]:

$$\left\{ \begin{array}{l} 4i(i^2 - 1)((j+1)a_{i,j-2} - 2ja_{i,j} + (j-1)a_{i,j+2}) + \\ + 4j(j^2 - 1)((i+1)a_{i-2,j} - 2ia_{i,j} + (i-1)a_{i+2,j}) = \\ = -((i+1)((j+1)g_{i-2,j-2} - 2jg_{i-2,j} + (j-1)g_{i-2,j+2}) - \\ - 2i((j+1)g_{i,j-2} - 2jg_{i,j} + (j-1)g_{i,j+2}) + \\ + (i-1)((j+1)g_{i+2,j-2} - 2jg_{i+2,j} + (j-1)g_{i+2,j+2})), (i = \overline{2, N}, j = \overline{2, M}), \\ a_{1j} + a_{3j} + \dots + a_{2M-1,j} = 0, (j = \overline{2, M}), \\ \frac{1}{2}a_{0j} + a_{2j} + a_{4j} + \dots + a_{2M,j} = 0, (j = \overline{2, M}), \\ a_{i1} + a_{i3} + a_{i5} + \dots + a_{i,2M-1} = 0, (i = \overline{0, N}), \\ \frac{1}{2}a_{i0} + a_{i2} + a_{i4} + \dots + a_{i,2M} = 0, (i = \overline{0, N}). \end{array} \right. \quad (9)$$

Систему (9) удобно записать в матричном виде

$$Ax = b, \quad (10)$$

где A – квадратная матрица порядка $K \times K$, здесь $K = (N+1) \cdot (M+1)$ состоящая из коэффициентов системе (9), $x^T = (a_{00}, a_{10}, \dots, a_{N0}, a_{01}, a_{11}, \dots, a_{N1}, \dots, a_{0M}, a_{1M}, \dots, a_{NM})$ искомый вектор для неизвестных, b – правая часть системе (9). Решая систему (10) определяются коэффициенты a_{ij} ($i = 0, 1, \dots, N; j = 0, 1, \dots, M$), затем по формулам (4) вычисляются значения точного решения, а по формуле (8) значения приближенного решения в коллокационных узлах полиномов Чебышева.

Общее число арифметических операций для численного решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона дискретным вариантом МПИ равен

$$Q = Q_1 + Q_2 = 31(N-1)^2 + \frac{2}{3}N^3, \quad (11)$$

здесь для вычисления констант перед коэффициентами a_{ij} и g_{ij} требуется $Q_1 = 31(N-1)^2$ – арифметических операций, а для решения системе (9) методом Гаусса

требуется $Q_2 = \frac{2}{3}N^3$ арифметических операций, где для простоты верхний пределы двойных сумм полиномов Чебышева выбраны равным, т.е. $N = M$. Теперь сравним общее число затрачиваемых арифметических операций при решении задачи Дирихле для уравнения Пуассона с использованием ИМПН с оптимальными итерационными параметрами и дискретным вариантом МПИ. Результаты сравнения приведены в табл.2

Таблица 2 Сравнение оптимального итерационного и оптимального метода по числу арифметических операций

Методы	ε	N	ИМПН с оптимальными итерационными параметрами	Дискретный вариант МПИ	Эффективность дискретного варианта МПИ
Число итераций			$n(\varepsilon) \approx \frac{1}{\pi^2} \ln \frac{4}{\varepsilon} \ln \frac{4}{\eta}$	Не требуют итераций	
Число арифметических операций Q			$Q_1 = 64N^2 \cdot n(\varepsilon)$	$Q_2 = 31(N-1)^2 + \frac{2}{3}N^3$	Q_1 / Q_2
Требуемая точность ε	10^{-4}	10	34850	3177	11
		50	1426944	157764	9
		100	6660702	970497	7
Требуемая точность ε	10^{-7}	10	57568	3177	18
		50	2357144	157764	15
		100	11002695	970498	11

Из таблицы видно, что в дискретном варианте МПИ по сравнению с ИМПН с оптимальными итерационными параметрами в случае $\varepsilon = 10^{-4}$ требуется в среднем 9 раза, а в случае $\varepsilon = 10^{-7}$ требуется в среднем 15 раз меньше арифметических операций.

4 Обсуждение результатов

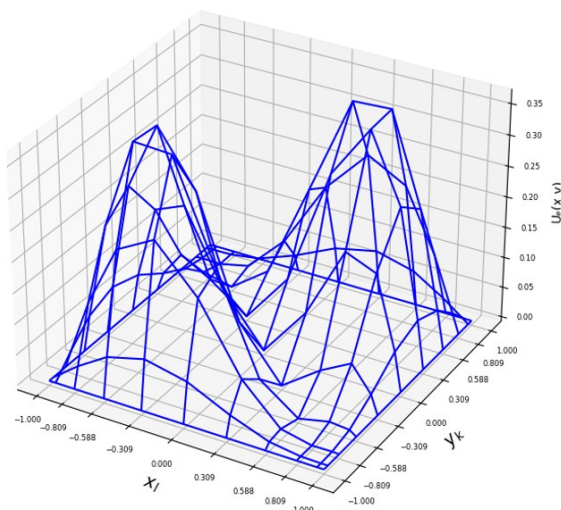
Приведем результаты численных расчётов по решению дифференциальной задачи (1)-(2) вышеизложенным дискретным вариантом МПИ относительно выбранных пробных функций (точных решений) (4).

В табл.3 приведены результаты сравнения точного и приближенного решения для функций $u_\varepsilon(x, y)$ в случае когда число аппроксимирующих полиномов как по переменной “ x ”, так и по переменной “ y ” равны 10, 20, 30, 40, 50, 100, т.е. $N = M = 10, 20, 30, 40, 50, 100$. Видно, что при выбранных значениях характерных параметров точное решение найдено с очень высокой точностью, при этом максимальные абсолютные погрешности являются малыми величинами.

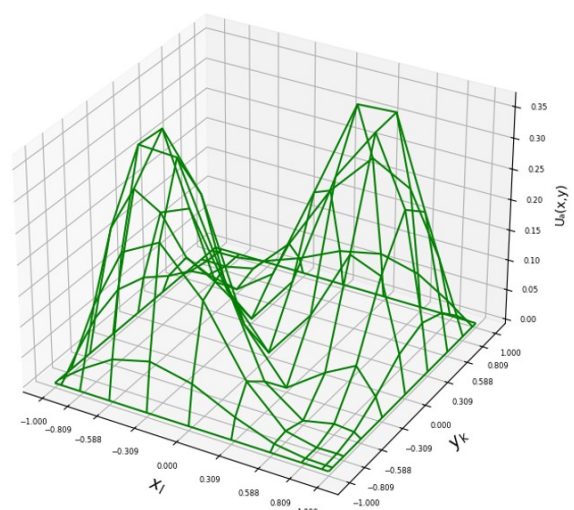
Таблица 3. Сравнение точного и приближенного решения

Результаты расчётов для точного решения $u_e(x, y)$						
N	M	x_l $l = \overline{0, N}$	y_k $k = \overline{0, M}$	Значения точного решения	Значения приближенного решения	Максимальная абсолютная погрешность
10	10	9	7	0.062436203356665	0.0624354789571653	$7.24 \cdot 10^{-7}$
20	20	0	17	0.0	$-7.17 \cdot 10^{-16}$	$7.17 \cdot 10^{-16}$
30	30	11	11	0.36779365076737	0.3677936507673723	$6.11 \cdot 10^{-16}$
40	40	23	22	0.133243695813898	0.1332436958138994 2	$8.88 \cdot 10^{-16}$
50	50	24	25	0.0039219465054632	0.0039219465054603	$2.89 \cdot 10^{-15}$
100	100	58	33	0.046058019645456	0.0460580196454579	$1.21 \cdot 10^{-15}$

Результаты табл.3 наиболее наглядно иллюстрируются на рис.1-4. На рис.1 приведены графики точного и приближенного решения для выбранной пробной функции $u_e(x, y)$, число полиномов равным $N = M = 10, 20, 30, 40$.



а) точное решение $u_e^{(1)}$



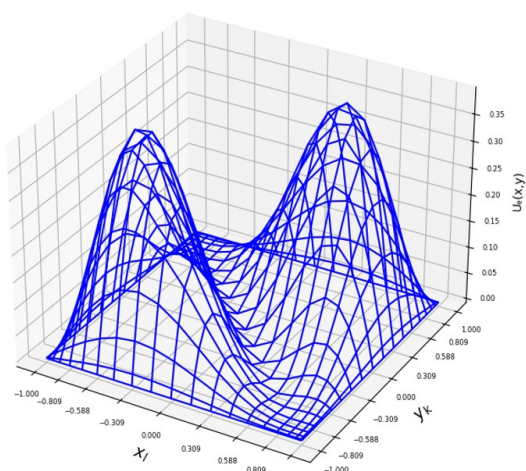
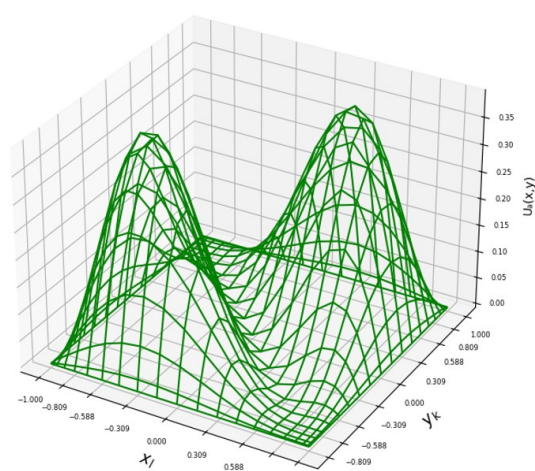
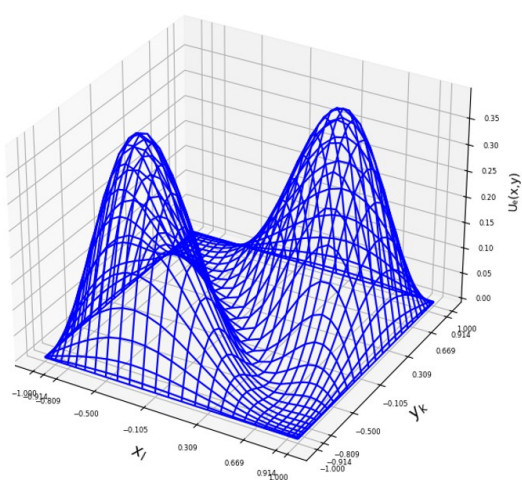
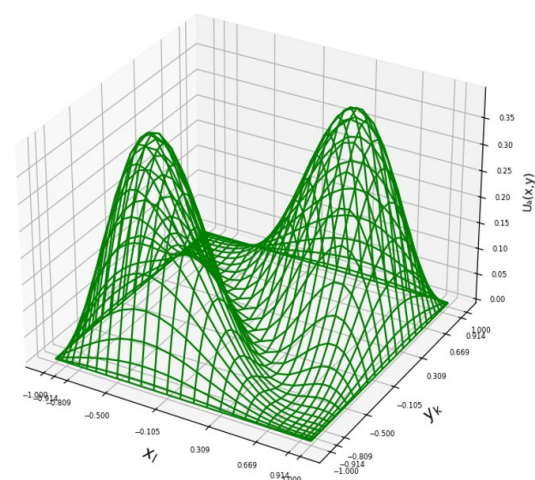
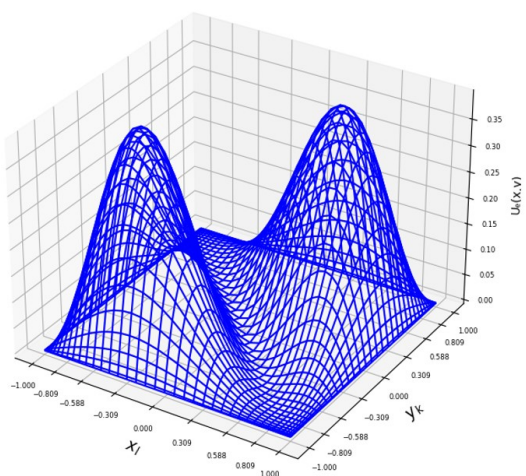
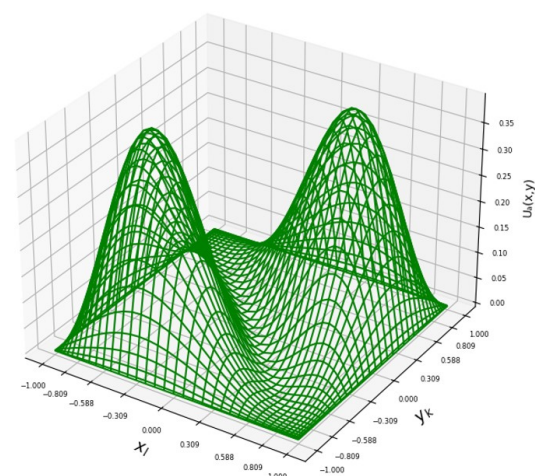
б) приближенное решение $u_a^{(1)}$

Рис. 1 Графики точного и приближенного решения для функции $u_e(x, y)$ при $N = M = 10$

Графики точного и приближенного решения для функции $u_e(x, y)$ при $N = M = 20$ изображены на рис.2.

На рис.3 приведены графики точного и приближенного решения для функции $u_e(x, y)$ при следующих значениях характерных параметров: $N = M = 30$.

Динамика точного к приближенного решения для функции $u_e(x, y)$ при $N = M = 40$. изображены на рис.4.

а) точное решение $u_e^{(1)}$ б) приближенное решение $u_a^{(1)}$ Рис. 2 Графики точного и приближенного решения для функции $u_e(x, y)$ при $N = M = 20$ а) точное решение $u_e^{(2)}$ б) приближенное решение $u_a^{(2)}$ Рис. 3 Графики точного и приближенного решения для функции $u_e(x, y)$ при $N = M = 30$ а) точное решение $u_e^{(2)}$ б) приближенное решение $u_a^{(2)}$ Рис. 4 Графики точного и приближенного решения для функции $u_e(x, y)$ при $N = M = 40$

5 Заключение

1. Проведен сравнительный анализ существующих прямых и итерационных методов решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона по числу арифметических операций.

2. Установлен, что высокоточных и эффективных прямых методов решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона не имеются.

3. Среди итерационных методов метод переменных направлений с оптимальными итерационными параметрами требует значительно меньшую числа итераций по сравнению с другими итерационными методами.

4. Предложен новый высокоточный и эффективный прямой метод – дискретный вариант метода предварительного интегрирования.

5. Показано эффективность дискретного варианта метода предварительного интегрирования по сравнению с итерационным методом переменных направлений с оптимальными итерационными параметрами по числу арифметических операций.

6. Результаты иллюстрирующие высокую точность и эффективность дискретного варианта метода предварительного интегрирования представлены в виде таблицы и графиков.

Литература

- [1] Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1977. – 656 с.
- [2] Saad K.M., Srivastava H.M. Numerical solutions of the multi-space fractional-order coupled Korteweg–De Vries equation with several different kernels // *Fractal and Fractional*. – 2023. – Vol. 7. – Art. 716.
- [3] Xie R., Wu B., Liu W. Optimal error estimates for Chebyshev approximations of functions with endpoint singularities in fractional spaces // *Journal of Scientific Computing*. – 2023. – Vol. 96, Issue 3.
- [4] Edwards R. Fourier series in modern presentation. – Vol. 1. – М.: Мир, 1985. – 264 p.
- [5] Li C. Discrete Fourier Transform and Fast Fourier Transform // Cambridge University Press. – 2022. – P. 242-266. doi: <http://dx.doi.org/10.1017/9781108697101.015>.
- [6] Wang X., Hu J. An identity involving the integral of the first-kind Chebyshev polynomials // *Mathematical Problems in Engineering*. – 2018. – Art. 7186940. – 5 p. doi: <http://dx.doi.org/10.1155/2018/7186940>.
- [7] Трубников Ю.В., Чернявский М.М. О численно-аналитическом методе построения экстремальных полиномов комплексного аргумента // *Известия Национальной академии наук Беларуси. Серия «Физика и математика»*. – 2023. – Vol. 59, Issue 1. – С. 18-36. doi: <http://dx.doi.org/10.29235/1561-2430-2023-59-1-18-36>.
- [8] Raji M.T., Ishola C.Y., Babalola O.O., Ayoola T.A., Momoh N.M., Peter O.J. Numerical solution of eighth-order boundary value problems using Chebyshev polynomials // *Mathematics and Computational Sciences*. – 2023. – Vol. 4, Issue 1. – P. 18-28. doi: <http://dx.doi.org/10.30511/mcs.2023.1988829.1108>.
- [9] Balasubramanian K. Orthogonal polynomials through complex matrix graph theory // *Journal of Mathematical Chemistry*. – 2023. – Vol. 61. doi: <http://dx.doi.org/10.1007/s10910-022-01415-x>.
- [10] Maulidi I., Wibowo B.A., Apriliani V., Umam R. The characteristics of the first kind of Chebyshev polynomials and its relationship to the ordinary polynomials // *JTAM (Jurnal Teori dan Aplikasi Matematika)*. – 2021. – Vol. 5, Issue 2. – P. 323-331. doi: <http://dx.doi.org/10.31764/jtam.v5i2.4647>.

- [11] Ricci P.E. Chebyshev polynomials, Rhodonea curves and pseudo-Chebyshev functions: a survey // International Journal of Computational Intelligence Systems. <https://www.atlantis-press.com/journals/ijnd>.
- [12] Wang T., Zhang H. Some identities involving the derivative of the first kind Chebyshev polynomials // Mathematical Problems in Engineering. – 2015. – Art. 146313. – 7 p. doi: <http://dx.doi.org/10.1155/2015/146313>.
- [13] AlQudah M.A. Characterization of the generalized Chebyshev-type polynomials of first kind // International Journal of Applied Mathematical Research. – 2015. – Vol. 4, Issue 4. – P. 519-524. doi: <http://dx.doi.org/10.14419/ijamr.v4i4.4788>.
- [14] Castillo K., De Jesus M.N., Petronilho J. A note on orthogonal polynomials described by Chebyshev polynomials // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2021. – Vol. 497, Issue 2. – Art. 124906. doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.jmaa.2020.124906>.
- [15] Somasundaram K., Kalaividya P.A., Kalaiselvi T. Edge detection using Chebyshev's orthogonal polynomial and application to brain segmentation from magnetic resonance images (MRI) of human head scans // Computational Methods, Communication Techniques and Informatics. – Gandhigram, India, 2017. – ISBN 978-81-933316-1-3. <https://www.researchgate.net/publication/313726262>.
- [16] Huang J.-H., Liu Y.-C. Developing a finite element method based on Chebyshev polynomials for the analysis of plate, shell and fluid problems. – 2017. <https://doi.org/10.13140/RG.2.2.15837.56803>.
- [17] Atallah A.M., Woollands R.M., Bani Younes A., Jenkins J.L. Tuning orthogonal polynomial degree and segment interval length to achieve prescribed precision approximation of irregular functions // Proc. Space Flight Mechanics Meeting. – 2018. doi: <http://dx.doi.org/10.2514/6.2018-2225>. <https://www.researchgate.net/publication/322310429>.
- [18] Нормуродов Ч.Б. Об одном эффективном методе решения уравнения Орра–Зоммерфельда // Математическое моделирование. – 2005. – Vol. 17, Issue 9. – С. 35-42.
- [19] Normurodov Ch.B. Mathematical modeling of hydrodynamic problems for two-phase plane-parallel flows // Mathematical Modeling. – 2007. – Vol. 19, Issue 6. – P. 53-60.
- [20] Абуталиев Ф.Б., Нормуродов Ч.Б. Математическое моделирование проблем гидродинамической устойчивости. – Ташкент: Фан ва технология, 2011. – 188 с.
- [21] Normurodov Ch.B., Tursunova B.A. Numerical modeling of the boundary value problem of an ordinary differential equation with a small parameter at the highest derivative by Chebyshev polynomials of the second kind // Results in Applied Mathematics. – 2023. – Art. 100388. doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.rinam.2023.100388>.
- [22] Normurodov C., Toyirov A., Ziyakulova S., Viswanathan K.K. Convergence of spectral-grid method for Burgers equation with initial-boundary conditions // Mathematics and Statistics. – 2024. – Vol. 12, Issue 2. – P. 115-125. doi: <http://dx.doi.org/10.13189/ms.2024.120201>.
- [23] Normurodov Ch.B., Abduraximov B.F., Djurayeva N.T. On estimating the rate of convergence of the initial integration method // Proc. International Scientific Conference on Modern Problems of Applied Science and Engineering (MPASE2024). – Samarkand, Uzbekistan, 2-3 May 2024. – AIP Conference Proceedings. – 2024. – Vol. 3244. – Art. 020061. – P. 1-11. doi: <http://dx.doi.org/10.1063/5.0242041>.
- [24] Normurodov Ch.B., Ziyakulova Sh.A., Murodov S.K. On one highly accurate and efficient method for solving the biharmonic equation // International Journal of Applied Mathematics. – 2025. – Vol. 38, Issue 4. – P. 437-453. doi: <http://dx.doi.org/10.12732/ijam.v38i4.1>.

- [25] Нормуродов Ч.Б., Зиякулова Ш.А. Численное моделирование уравнений эллиптического типа дискретным вариантом метода предварительного интегрирования // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2024. – № 5(61). – С. 59-68.
- [26] Normurodov Ch.B., Ziyakulova Sh.A. Численное моделирование изгиба тонкой пластины с применением дискретного варианта метода предварительного интегрирования // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2025. – № 4(68). – С. 26-37.
- [27] Нормуродов Ч.Б., Зиякулова Ш.А. Высокоточный и эффективный метод для численного моделирования изгиба железобетонной плиты // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2025. – № 5(69). – С. 5-16.

UDC 519.632.4

ON OPTIMAL ITERATIVE AND DIRECT METHODS FOR SOLVING THE DIRICHLET PROBLEM FOR THE POISSON EQUATION

Ziyakulova Sh.A.

shziyaqulova@gmail.com

Termez State University,

190111, 43 Barkamol Avlod Str., Termez, Uzbekistan.

For the numerical solution of the Dirichlet problem for the Poisson equation, both direct and iterative methods have been developed. However, the required number of arithmetic operations for direct methods, as well as the number of iterations in iterative methods, often turns out to be very large. For this reason, the issues of high accuracy and efficiency of various methods remain relevant. In this work, a new high-accuracy and efficient method is proposed for the numerical solution of the Dirichlet problem for the Poisson equation — a discrete version of the preliminary integration method, which significantly surpasses existing direct and iterative methods in terms of the number of arithmetic operations. The efficiency of the proposed method is illustrated by tabular and graphical results.

Keywords: optimal parameters, iterative and direct method, number of iterations, number of arithmetic operations, a discrete version of the pre-integration method.

Citation: Ziyakulova Sh.A. 2025. On optimal iterative and direct methods for solving the Dirichlet problem for the Poisson equation. *Problems of Computational and Applied Mathematics*. 6(70):143-156.

DOI: https://doi.org/10.71310/pcam.6_70.2025.12

ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

№ 6(70) 2025

Журнал основан в 2015 году.

Издается 6 раз в год.

Учредитель:

Научно-исследовательский институт развития цифровых технологий и
искусственного интеллекта.

Главный редактор:

Равшанов Н.

Заместители главного редактора:

Арипов М.М., Шадиметов Х.М., Ахмедов Д.Д.

Ответственный секретарь:

Убайдуллаев М.Ш.

Редакционный совет:

Азамов А.А., Алоев Р.Д., Амиргалиев Е.Н. (Казахстан), Арушанов М.Л.,
Бурнашев В.Ф., Джумаёзов У.З., Загребина С.А. (Россия), Задорин А.И. (Россия),
Игнатъев Н.А., Ильин В.П. (Россия), Иманкулов Т.С. (Казахстан),
Исмагилов И.И. (Россия), Кабанихин С.И. (Россия), Карачик В.В. (Россия),
Курбонов Н.М., Маматов Н.С., Мирзаев Н.М., Мухамадиев А.Ш., Назирова Э.Ш.,
Нормуродов Ч.Б., Нуралиев Ф.М., Опанасенко В.Н. (Украина),
Расулмухамедов М.М., Расулов А.С., Садуллаева Ш.А.,
Старовойтов В.В. (Беларусь), Хаётов А.Р., Халджигитов А., Хамдамов Р.Х.,
Хужаев И.К., Хужаеров Б.Х., Чье Ен Ун (Россия), Шабозов М.Ш. (Таджикистан),
Dimov I. (Болгария), Li Y. (США), Mascagni M. (США), Min A. (Германия),
Singh D. (Южная Корея), Singh M. (Южная Корея).

Журнал зарегистрирован в Агентстве информации и массовых коммуникаций при
Администрации Президента Республики Узбекистан.

Регистрационное свидетельство №0856 от 5 августа 2015 года.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

При перепечатке материалов ссылка на журнал обязательна.

За точность фактов и достоверность информации ответственность несут авторы.

Адрес редакции:

100125, г. Ташкент, м-в. Буз-2, 17А.

Тел.: +(998) 712-319-253, 712-319-249.

Э-почта: journals@airi.uz.

Веб-сайт: <https://journals.airi.uz>.

Дизайн и вёрстка:

Шарипов Х.Д.

Отпечатано в типографии НИИ РЦТИИ.

Подписано в печать 25.12.2025 г.

Формат 60x84 1/8. Заказ №8. Тираж 100 экз.

PROBLEMS OF COMPUTATIONAL AND APPLIED MATHEMATICS

No. 6(70) 2025

The journal was established in 2015.
6 issues are published per year.

Founder:

Digital Technologies and Artificial Intelligence Development Research Institute.

Editor-in-Chief:

Ravshanov N.

Deputy Editors:

Aripov M.M., Shadimetov Kh.M., Akhmedov D.D.

Executive Secretary:

Ubaydullaev M.Sh.

Editorial Council:

Azamov A.A., Aloev R.D., Amirgaliev E.N. (Kazakhstan), Arushanov M.L.,
Burnashev V.F., Djumayozov U.Z., Zagrebina S.A. (Russia), Zadorin A.I. (Russia),
Ignatiev N.A., Ilyin V.P. (Russia), Imankulov T.S. (Kazakhstan), Ismagilov I.I. (Russia),
Kabanikhin S.I. (Russia), Karachik V.V. (Russia), Kurbonov N.M., Mamatov N.S.,
Mirzaev N.M., Mukhamadiev A.Sh., Nazirova E.Sh., Normurodov Ch.B., Nuraliev F.M.,
Opanasenko V.N. (Ukraine), Rasulov A.S., Sadullaeva Sh.A., Starovoitov V.V. (Belarus),
Khayotov A.R., Khaldjigitov A., Khamdamov R.Kh., Khujaev I.K., Khujayorov B.Kh.,
Chye En Un (Russia), Shabozov M.Sh. (Tajikistan), Dimov I. (Bulgaria), Li Y. (USA),
Mascagni M. (USA), Min A. (Germany), Singh D. (South Korea), Singh M. (South
Korea).

The journal is registered by Agency of Information and Mass Communications under the
Administration of the President of the Republic of Uzbekistan.

The registration certificate No. 0856 of 5 August 2015.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

At a reprint of materials the reference to the journal is obligatory.

Authors are responsible for the accuracy of the facts and reliability of the information.

Address:

100125, Tashkent, Buz-2, 17A.

Tel.: +(998) 712-319-253, 712-319-249.

E-mail: journals@airi.uz.

Web-site: <https://journals.airi.uz>.

Layout design:

Sharipov Kh.D.

DTAIDRI printing office.

Signed for print 25.12.2025

Format 60x84 1/8. Order No. 8. Print run of 100 copies.

Содержание

Алимова Н.Б., Паровик Р.И.

Программный комплекс FrOsFHN для количественного и качественного анализа дробного осциллятора ФитцХью-Нагумо с переменной памятью 5

Эшкуллов М.У., Хамдамов Р.Х.

Проектирование и анализ системы солнечного водоснабжения для многоэтажных жилых зданий на основе булева программирования 18

Равшанов Н., Усмонов Л.С.

Трёхмерная математическая модель и алгоритм численного решения для мониторинга и прогнозирования процессов подземного выщелачивания в пористой среде 26

Каландаров А.А.

Численное моделирование связанной динамической задачи термоупругости в напряжениях 48

Равшанов Н., Рахманов Х.Э. Фаттаева Д.А.

Моделирование пространственно-временной динамики площади водоёма (на примере Каттакурганского водохранилища) на основе индексов NDWI, NDVI, EVI и ансамблевых методов обучения 61

Хажиев И.О., Шобдаров Э.Б.

Регуляризация начально-краевой задачи для неоднородного параболического уравнения с меняющимся направлением времени 74

Равшанов Н., Боборахимов Б.И., Бердиев М.И.

Модель и алгоритмы классификации аномальных явлений на основе сходимости акустико-визуальных сигналов 88

Рустамов Н., Мухамеджанов Н.Б.

Конструкция и принцип работы когенеративного фрактального солнечного коллектора 103

Холияров Э.Ч., Тураев Д.Ш.

Численное решение плоскорадиальной граничной обратной задачи для уравнения нестационарной релаксационной фильтрации жидкости в пористой среде 112

Ахмедов Д.М., Маматова Н.Х.

Оптимальный метод приближённого решения гиперсингулярных интегральных уравнений 124

Шадиметов Х.М., Эльмуратов Г.Ч.

Оптимизация приближенного вычисления интегралов от быстроосциллирующих функций в пространстве Соболева комплекснозначных функций 132

Зиякулова Ш.А.

Об оптимальных итерационных и прямых методах решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона 143

Contents

Alimova N.B., Parovik R.I.

FrOsFHN software package for quantitative and qualitative analysis of the
FitzHugh-Nagumo fractional oscillator with variable memory 5

Eshkulov M.U., Khamdamov R.Kh.

Design and analysis of solar water supply system for multi-story residential build-
ings based on Boolean programming 18

Ravshanov N., Usmonov L.S.

Three-dimensional mathematical model and numerical solution algorithm for
monitoring and predicting in-situ leaching processes in porous medium 26

Kalandarov A.A.

Numerical simulation of the coupled dynamic problem of thermoelasticity in
stresses 48

Ravshanov N., Rakhmanov Kh.E. Fattaeva D.A.

Modeling the spatio-temporal dynamics of a reservoir area (using the Kattakur-
gan Reservoir as an example) based on NDWI, NDVI, EVI indices and ensemble
learning methods 61

Khajiev I.O., Shobdarov E.B.

Regularization of the initial-boundary value problem for a inhomogeneous
parabolic equation with changing time direction 74

Ravshanov N., Boborakhimov B.I., Berdiev M.I.

Model and algorithms for classifying anomalous phenomena based on the con-
vergence of acoustic-visual signals 88

Rustamov N., Mukhamejanov N.B.

Design and operating principle of a cogenerative fractal solar collector 103

Kholiyarov E.Ch., Turaev D.Sh.

Numerical solution of plane-radial boundary value inverse problem for the equa-
tion of non-stationary relaxation filtration of fluid in a porous medium 112

Akhmedov D.M., Mamatova N.H.

An optimal method for the approximate solution of the hypersingular integral
equations 124

Shadimetov Kh.M., Elmuratov G.Ch.

Optimization of approximate computation of integrals of rapidly oscillating func-
tions in the Sobolev space of complex-valued functions 132

Ziyakulova Sh.A.

On optimal iterative and direct methods for solving the Dirichlet problem for
the Poisson equation 143

HISOBLASH VA AMALIY МАТЕМАТИКА MUAMMOLARI



ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ
И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

PROBLEMS OF COMPUTATIONAL
AND APPLIED MATHEMATICS

